

**В.С. Владимиров  
В.П. Михайлов  
Т.В. Михайлова  
М.И. Шабунин**

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
по  
уравнениям  
математической  
физики**

*Издание четвертое,  
переработанное и дополненное*

*Рекомендовано  
Учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Российской Федерации  
по образованию в области прикладных математики и физики  
в качестве учебного пособия для студентов вузов,  
обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика»,  
а также по другим математическим и естественно-научным  
направлениям и специальностям и смежным направлениям  
и специальностям в области техники и технологий*



**МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2016**

УДК 517  
ББК 22.16  
С 23

Авторский коллектив:  
Владимиров В.С., Михайлов В.П., Михайлова Т.В.,  
Шабунин М.И.

**Сборник задач по уравнениям математической физики.** —  
4-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 520 с. —  
ISBN 978-5-9221-1692-3.

Сборник задач, составленный коллективом Московского физико-технического института, базируется на обновленных курсах уравнений математической физики, читаемых в МФТИ в течение многих последних лет.

В отличие от имеющихся задачников по уравнениям математической физики, в данном сборнике представлены задачи, где широко используются теория обобщенных функций и методы функционального анализа.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов.

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика», а также по другим математическим и естественно-научным направлениям и специальностям и смежным направлениям и специальностям в области техники и технологий.*

Учебное издание

*ВЛАДИМИРОВ Василий Сергеевич  
МИХАЙЛОВ Валентин Петрович  
МИХАЙЛОВА Татьяна Валентиновна  
ШАБУНИН Михаил Иванович*

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Редактор *Е.И. Ворошилова*

Корректор *В.Р. Игнатова*

Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*

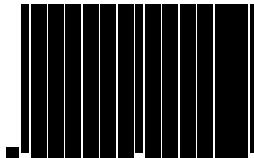
Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 12.05.2016. Формат 60 ■ 90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,5. Уч.-изд. л. 37,4. Тираж 1500 экз.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17 Б  
E-mail: [porsova@fml.ru](mailto:porsova@fml.ru), [sale@fml.ru](mailto:sale@fml.ru)  
Сайт: <http://www.fml.ru>  
Интернет-магазин: <http://www.fmllib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в АО «ИПК «Чувашия»,  
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковleva, 13

ISBN 978-5-9221-1692-3



# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие к пятому, переработанному изданию . . . . .</b>	5
<b>Основные обозначения и определения . . . . .</b>	6
<b>Г л а в а 1. Постановка краевых задач математической физики . . . . .</b>	9
§ 1. Вывод уравнений и постановка краевых задач . . . . .	9
§ 2. Классификация уравнений второго порядка . . . . .	37
<b>Г л а в а 2. Функциональные пространства и интегральные уравнения . . . . .</b>	47
§ 3. Измеримые функции. Интеграл Лебега . . . . .	47
1. Измеримые функции . . . . .	47
2. Интеграл Лебега . . . . .	49
§ 4. Функциональные пространства . . . . .	55
1. Линейные нормированные пространства . . . . .	55
2. Гильбертовы пространства . . . . .	59
3. Гильбертово пространство дифференцируемых функций	65
§ 5. Интегральные уравнения . . . . .	78
<b>Г л а в а 3. Обобщенные функции . . . . .</b>	138
§ 6. Основные и обобщенные функции . . . . .	138
§ 7. Дифференцирование обобщенных функций . . . . .	146
§ 8. Прямое произведение и свертка обобщенных функций . .	156
§ 9. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста . . . . .	168
§ 10. Преобразование Лапласа обобщенных функций . . . . .	176
§ 11. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов . . . . .	181
<b>Г л а в а 4. Задача Коши . . . . .</b>	191
§ 12. Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа . . . . .	191
1. Задача Коши на плоскости . . . . .	191
2. Задача Коши для волнового уравнения . . . . .	208
3. Обобщенная задача Коши для волнового уравнения .	218

§ 13. Задача Коши для уравнения теплопроводности . . . . .	244
§ 14. Задача Коши для других уравнений и задача Гурса . . . . .	266
1. Задача Коши для уравнения Шредингера . . . . .	266
2. Задача Коши для уравнения $u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x, t)$ , $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ . . . . .	270
3. Задача Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ . . . . .	271
4. Задача Коши для уравнения первого порядка . . . . .	273
5. Задача Гурса для гиперболического уравнения на плос- кости . . . . .	274
6. Задача Коши для некоторых квазилинейных уравнений	281
<b>Г л а в а 5. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа . . . . .</b>	288
§ 15. Задача Штурма–Лиувилля . . . . .	289
§ 16. Метод разделения переменных для уравнений Лапласа и Пуассона . . . . .	309
§ 17. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа	344
§ 18. Метод потенциалов . . . . .	351
§ 19. Обобщенные решения краевых задач . . . . .	373
<b>Г л а в а 6. Смешанная задача . . . . .</b>	399
§ 20. Метод Фурье решения смешанных задач . . . . .	399
§ 21. Другие методы . . . . .	489
<b>Список литературы . . . . .</b>	516

## **Предисловие к пятому, переработанному изданию**

Сборник задач составлен коллективом преподавателей Московского физико-технического института (МФТИ). Он базируется на читаемых много лет в МФТИ обновленных курсах уравнений математической физики.

Наряду с классическими решениями основных граничных задач, рассматриваются их обобщенные решения, в связи с чем используются методы функционального анализа и в частности методы обобщенных функций.

Основной массив задач сборника составляют задачи, предлагавшиеся студентам в письменных итоговых контрольных работах. На этапе подготовки этих задач участвовали многие преподаватели кафедры высшей математики МФТИ. В работах над первым изданием принимали участие А. А. Вашарин, Х. Х. Каримова и Ю. В. Сидоров. Настоящее издание является переработанным и расширенным по сравнению с предыдущими.

Лишь в первые три главы задачника внесены незначительные изменения. Остальные главы отличаются не только существенным увеличением числа задач, но и методикой изложения: выделены основные сведения теоретического характера, приведены достаточно подробные решения типовых задач.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу преподавателей кафедры высшей математики МФТИ за конструктивную критику, за предложения и замечания, которые способствовали улучшению сборника и позволили устраниТЬ неточности и ошибки в задачах.

В первую очередь авторы признательны заведующему кафедрой проф. Е. С. Половинкину, а также А. Д. Кутасову, В. Б. Лидскому, В. И. Чехлову. Неоценимую помощь авторам оказал А. В. Полозов при подготовке рукописи к печати.

Сборник рассчитан на студентов вузов — математиков, физиков и инженеров с повышенной математической подготовкой.

*Авторы*

## Основные обозначения и определения

1)  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — точки  $n$ -мерного вещественного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ .

2)  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ,

$$\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

3)  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс ( $\alpha_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots$ , — целые),

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad z^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

4)  $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ ,

$$r = |x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

5)  $U(x_0, R) = \{x: |x - x_0| < R\}$  — открытый шар с центром в точке  $x_0$  радиуса  $R$ ;  $S(x_0; R) = \{x: |x - x_0| = R\}$  — сфера;  $U_R = U(0; R)$ ,  $S_R = S(0, R)$ .

6) Множество  $A$  будем называть *строго лежащим* в области  $G \subset \mathbb{R}^n$  и писать  $A \Subset G$ , если  $A$  ограничено и  $\overline{A} \subset G$ .

7) Функция  $f(x)$  называется *локально интегрируемой* в области  $G$ , если она абсолютно интегрируема по каждой подобласти  $G' \Subset G$ . Функции, локально интегрируемые в  $\mathbb{R}^n$ , будем называть *локально интегрируемыми* функциями.

8)  $D^{|\alpha|} f(x) = \frac{\partial^{(n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

9)  $C^p(G)$  — класс функций  $f$ , непрерывных вместе с производными  $D^\alpha f$ ,  $|\alpha| \leq p$  ( $p \geq 0$ ) в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Функции  $f \in C^p(G)$ , у которых все производные  $D^\alpha f$ ,  $|\alpha| \leq p$ , допускают непрерывное продолжение на замыкание  $\overline{G}$ , образуют класс  $C^p(\overline{G})$ ,  $C(G) = C^0(G)$ ,  $C(\overline{G}) = C^0(\overline{G})$ ; функции  $f \in C^p(G)$  при всех  $p$  образуют класс  $C^\infty(G)$ .

- 10) Равномерная сходимость последовательности функций  $\{f_k\}$  к функции  $f$  на множестве  $A$  обозначается

$$f_k(x) \xrightarrow{x \in A} f(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

- 11)  $A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$ ;  $A \cap B$  — пересечение  $A$  и  $B$ ,  $A \times B$  — прямое произведение  $A$  и  $B$  (множество пар  $(a, b)$  ( $a \in A, b \in B$ ));  $A \setminus B$  — дополнение  $B$  до  $A$ .

- 12) *Носителем* непрерывной функции  $f(x)$  называется замыкание множества тех точек  $x$ , в которых  $f(x) \neq 0$ . Носитель функции  $f$  обозначается  $\text{supp } f$ . Если измеримая на области  $G$  функция  $f(x)$  обращается в нуль почти всюду в  $G \setminus G'$ , где  $G' \Subset G$ , то  $f$  называется *финитной в  $G$*  функцией; функция, финитная в  $\mathbb{R}^n$ , называется *финитной*.

- 13)  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  — оператор Лапласа;  $\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$  — волновой оператор,  $\square_1 = \square$ ;  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$  — оператор теплопроводности.

- 14)  $\Gamma^+ = \{x, t: at > |x|\}$  — конус будущего.

$$15) \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-x^2/2} dx.$$

- 16)  $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - |x|^2)}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$  где  $C_\varepsilon = \varepsilon e^{-n}$ ,  
 $\frac{1}{\varkappa} = \int_{|x|<1} e^{-1/(1-|x|^2)} dx$ ,  $\omega_\varepsilon$  — ядро усреднения, «шапочка».

- 17)  $\mathbb{C}$  — плоскость комплексного переменного.

- 18)  $\theta(x)$  — функция Хевисайда:  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

- 19)  $\sigma_n = \int_{S_1} dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  — площадь поверхности единичной сферы  $S_1$  в  $\mathbb{R}^n$ .

- 20) В  $C^p(\overline{G})$  введена норма

$$\|f\|_{C^n(\overline{G})} = \sum_{|\alpha| \leq p} \max_{x \in \overline{G}} |D^\alpha f(x)|.$$

- 21) Совокупность (измеримых) функций  $f(x)$ , для которых  $|f|^p$  при  $p \geq 1$  интегрируема на  $G$ , обозначается через  $L_p(G)$ .

Норма в  $L_p(G)$  вводится так:

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left[ \int_G |f|^p dx \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(G)} = \text{vrai}_{x \in G} \sup |f(x)|;$$

$L_p(G)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — банахово пространство; функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L_p(G)$  считаются совпадающими, если  $f(x) = g(x)$  почти всюду в  $G$ ;

в  $L_2(G)$  вводится скалярное произведение

$$(f, g) = \int_G f \bar{g} dx, \quad f, g \in L_2(G);$$

$L_2(G)$  — гильбертово пространство,  $\|f\|_{L_2(G)} = \sqrt{(f, f)}$ .

- 22) Пусть  $\rho(x)$  — непрерывная положительная функция в области  $G$ . Совокупность (измеримых) функций  $f(x)$ , для которых функция  $\rho(x)|f(x)|^2$  интегрируема на  $G$ , обозначим через  $L_{2,\rho}(G)$ ;  $L_{2,\rho}(G)$  — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_{2,\rho}}(G) = \int_G \rho f \bar{g} dx.$$

- 23) Цилиндрические функции:

а) функция Бесселя

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad -\infty < x < \infty;$$

б) функция Неймана

при нецелом  $\nu$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} [J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)],$$

при целом  $\nu = n$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right];$$

в) функция Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x);$$

г) функции мнимого аргумента

$$I_\nu(x) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{i\pi\nu/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

# Г л а в а 1

## ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### § 1. Вывод уравнений и постановка краевых задач

Условимся о следующих обозначениях:

$\rho(x) = \rho$  — плотность (линейная, поверхностная, объемная);

$T_0$  — натяжение струны, мембранны;

$E$  — модуль Юнга;

$k$  — коэффициент упругости упругого закрепления концов струны, стержня или края мембранны;

$S$  — площадь поперечного сечения стержня, вала и т. д.;

$\gamma = c_p/c_v$  — показатель адиабаты;

$p, p_0$  — давление газа, жидкости;

$m, m_0$  — масса;

$g$  — ускорение силы тяжести;

$\omega$  — угловая скорость;

$k, k(x), k(x, u)$  — коэффициент внутренней теплопроводности;

$\alpha$  — коэффициент внешней теплопроводности (коэффициент теплообмена);

$D$  — коэффициент диффузии.

Проведем несколько примеров на составление уравнений.

#### Пример 1. Задача о поперечных колебаниях струны.

Струна длиной  $l$  натянута с силой  $T_0$  и находится в прямолинейном положении равновесия, рис. 1. В момент времени  $t = 0$  точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости. Поставить задачу для определения малых поперечных колебаний точки струны при  $k > 0$ , если концы струны:

- а) закреплены жестко;
- б) свободны, т. е. могут свободно перемещаться по прямым, параллельным направлению отклонения  $u$ ;

- в) закреплены упруго, т. е. каждый конец испытывает со стороны заделки сопротивление, пропорциональное отклонению и направленное противоположно ему;
- г) двигаются в поперечном направлении по заданным законам.

Сопротивлением среды и действием силы тяжести пренебречь.

**Решение.** Пусть ось  $x$  совпадает с направлением струны в положении равновесия. Под струной понимается тонкая нить, которая не сопротивляется изгибу, не связанному с изменением ее длины. Это значит, что если мысленно разрезать струну в точке  $x$ , то действие одного участка струны на другой (сила натяжения  $T$ ) будет направлено по касательной к струне в точке  $x$ . Для вывода уравнения колебаний выделим участок струны от  $x$  до  $x + \Delta x$  и спроектируем все действующие на этот участок силы (включая и силы инерции) на оси координат. Согласно принципу Даламбера сумма проекций всех сил должна равняться нулю. Мы изучаем только поперечные колебания. Поэтому можно считать внешние силы и силу инерции направленными вдоль оси  $u$ . Примем во внимание также, что рассматриваются малые колебания струны. Это значит, что в процессе вывода уравнения мы будем пренебречь квадратами величины  $u_x(x, t)$ . Длина  $S$  дуги  $AB$  выражается интегралом

$$S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2} dx \simeq \Delta x.$$

Это значит, что удлинения участков струны в процессе колебания не происходит и, следовательно, по закону Гука величина натяжения  $T_0 = [T]$  не зависит ни от времени  $t$ , ни от  $x$ . Найдем проекции всех сил в момент времени  $t$  на оси  $u$ . Проекции силы натяжения с точностью до бесконечно малых (б.м.) первого порядка равна (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} T_0[\sin \alpha(x + \Delta x) - \sin \alpha(x)] &= \\ &= T_0 \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x + \Delta x)}} - \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} \right] = \\ &= T_0 \left[ \frac{u_x(x + \Delta x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x + \Delta x, t)}} - \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \right] \simeq \\ &\simeq T_0[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \simeq T_0 u_{xx}(x, t) \Delta x. \end{aligned}$$

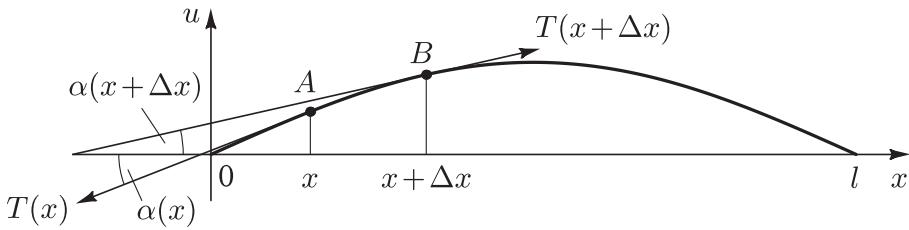


Рис. 1

Пусть  $p(x, t)$  — непрерывная линейная плотность внешних сил. Тогда на участок  $AB$  вдоль оси  $u$  действует сила  $p(x, t)\Delta x$ . Для нахождения силы инерции участка  $AB$  воспользуемся выражением  $-mu_{tt}$ , где  $m$  — масса участка. Если  $\rho(x)$  — непрерывная линейная плотность струны, то  $m = \rho\Delta x$ . Таким образом, проекция на ось  $u$  силы инерции задается выражением  $-\rho u_{tt}\Delta x$ , а проекция всех сил на ось  $u$  имеет вид

$$[T_0 u_{xx} + p(x, t) - \rho(x)u_{tt}]\Delta x = 0. \quad (1)$$

Следовательно,

$$T_0 u_{xx} - \rho(x)u_{tt} + p(x, t) = 0.$$

Это и есть *уравнение вынужденных колебаний струны*. Если  $\rho = \text{const}$ , то уравнение принимает вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x, t),$$

где  $a^2 = T_0/\rho$ ,  $g(x, t) = p(x, t)/\rho$ . Кроме того, функция  $u(x, t)$  удовлетворяет начальным условиям  $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ , где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — заданные функции.

### Вывод краевых условий

- а) Если концы струны жестко закреплены, то  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ .
- б) В случае свободных концов для получения условия при  $x = 0$  спроектируем на ось  $u$  силы, действующие на участок  $KM$  (см. рис. 2). Так как натяжение в точке  $x = 0$  действует лишь параллельно оси  $x$ , то проекция сил натяжения на участок  $KM$  равна  $T_0 u_x(\Delta x, t)$ . Проекция внешней силы равна  $p(0, t)\Delta x$ , а проекция силы инерции равна  $-\rho u_{tt}(0, t)\Delta x$ . Приравнивая нулю их сумму, получаем

$$T_0 u_x(\Delta x, t) + p(0, t)\Delta x - \rho u_{tt}(0, t)\Delta x = 0. \quad (2)$$

Устремим  $\Delta x$  к нулю. Тогда вследствие непрерывности и ограниченности входящих функций получим условие  $u_x|_{x=0} = 0$ . Аналогично получается условие на правом конце  $u_x|_{x=l} = 0$ .

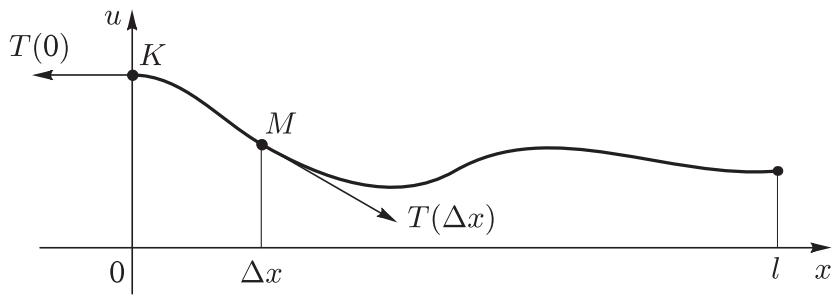


Рис. 2

- в) Действие упругих сил заделки на левом конце дается выражением  $-ku(0, t)$ . Приравниваем в этом случае проекции на ось  $u$  всех сил, действующих на участок  $KM$ , к нулю. К левой части уравнения (2) добавится член  $-ku(0, t)$ . Тогда имеем

$$T_0 u_x(\Delta x, t) - ku(0, t) + p(0, t)\Delta x - \rho u_{tt}(0, t)\Delta x = 0,$$

а при  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad h = k/T_0.$$

На правом конце (см. рис. 3) проекция всех сил имеет вид

$$-T_0 u_x(l - \Delta x, t) - ku(l, t) + p(l, t)\Delta x - \rho u_{tt}(l, t)\Delta x = 0,$$

поскольку

$$\sin \alpha(l - \Delta x) \simeq u_x|_{u=l-\Delta x}.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  получим  $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$ .

- г) Если функции  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  определяют закон движения концов ( $\mu_1(0) = \varphi(0)$ ,  $\mu_2(0) = \varphi(l)$ ), то  $u|_{x=0} = \mu_1(t)$ ,  $u|_{x=l} = \mu_2(t)$ .

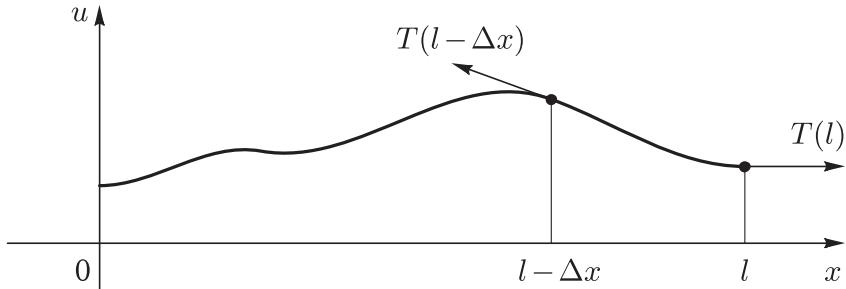


Рис. 3

**Пример 2. Задачи о колебании стержня.** Упругий прямолинейный стержень длиной  $l$  выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент  $t = 0$  сообщены малые

продольные смещения и скорости. Предполагая, что во время движения поперечные сечения остаются параллельными плоскости, перпендикулярной к оси стержня, поставить задачу для определения малых продольных колебаний стержня при  $t > 0$ . Рассмотреть случаи, когда концы стержня:

- а) закреплены жестко;
- б) двигаются в произвольном направлении по заданным законам;
- в) свободны;
- г) закреплены упруго, т. е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению.

**Решение.** Пусть ось  $x$  совпадает с направлением оси стержня (см. рис. 4) и пусть  $x$  — координата сечения  $pq$ , когда оно находится в покое. Мы изучаем малые продольные колебания стержня. Это значит, что внешние силы и силы инерции

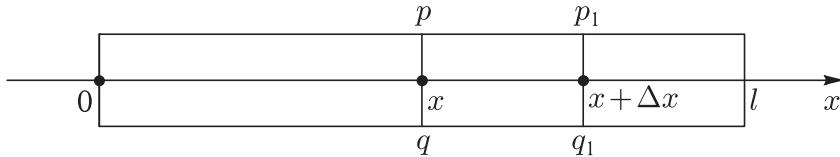


Рис. 4

можно считать направленными вдоль оси стержня. Обозначим через  $u(x, t)$  смещение этого сечения в момент  $t$ ; тогда в рамках нашего предложения смещение сечения в точке  $x + \Delta x$  будет

$$u(x + \Delta x, t) \simeq u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x.$$

Поэтому относительное удлинение стержня в сечении  $x$  будет равно  $u_x(x, t)$ . По закону Гука натяжение в этом сечении равно  $T = ESu_x(x, t)$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения,  $E$  — модуль упругости материала стержня. Уравнение колебаний стержня получим, если приравняем нулю сумму всех сил, включая силы инерции, действующие на участок  $pq-p_1q_1$ . Равнодействующая сил натяжения равна

$$T(x + \Delta x) - T(x) = ES[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \simeq ESu_{xx}(x, t)\Delta x.$$

Пусть  $p(x, t)$  — объемная плотность внешних сил. Тогда на участок  $pq-p_1q_1$  действует внешняя сила  $Sp(x, t)\Delta x$  и сила инерции  $-\rho(x)Su_{tt}(x, t)\Delta x$ . Сумма всех сил по принципу Даламбера равна нулю, т. е.

$$[ESu_{xx}(x, t) + p(x, t)S - \rho(x)SU_{tt}(x, t)]\Delta x = 0, \quad (1)$$

откуда

$$\rho(x)u_{tt}(x, t) = Eu_{xx}(x, t) + p(x, t). \quad (2)$$

Кроме того,  $u(x, t)$  удовлетворяет начальным условиям  $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ , где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — заданные функции. Если  $\rho(x) = \rho = \text{const}$  (однородный стержень), то уравнение примет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x, t),$$

где

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad g(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}. \quad (3)$$

### Вывод краевых условий

- а) В случае жесткого закрепления отклонения стержня не происходит и, соответственно,  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ .
- б)  $u|_{x=0} = \mu_1(t)$ ,  $u|_{x=l} = \mu_2(t)$ , где  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  — функции, определяющие закон движения концов ( $\mu_1(0) = \varphi(0)$ ,  $\mu_2(l) = \varphi(l)$ ).
- в) В случае свободных концов составляем баланс действующих сил для обоих концов. На левом конце равнодействующая упругих сил натяжения равна  $T(\Delta x) = ESu_x(\Delta x, t)$ , внешняя сила равна  $Sp(0, t)\Delta x$  и сила инерции есть  $-\rho Su_{tt}(0, t)\Delta x$ . Сумма всех сил, действующих на выделенный элемент, равна нулю. Отсюда

$$ESu_x(\Delta x, t) + p(0, t)S\Delta x - \rho Su_{tt}(0, t)\Delta x = 0, \quad (4)$$

и при  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем  $u_x|_{x=0} = 0$ . Аналогично рассуждая, на правом конце получим условие  $u_x|_{x=l} = 0$ .

- г) В левой части уравнения (4) добавится сила  $-ku(o, t)$ . И после перехода к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  получим  $ESu_x(0, t) - ku(0, t) = 0$  или  $(u_x - hu)|_{x=0} = 0$ , где  $h = \frac{k}{ES}$ . На правом конце

$$-T(l - \Delta x) = -ESu_x(l - \Delta x, t),$$

$Sp(l, t)\Delta x$  — внешняя сила,  $-\rho(x)Su_{tt}(l, t)\Delta x$  — сила инерции. Тогда имеем

$$-ESu_x(l - \Delta x, t) - ku(l, t) + Sp(l, t)\Delta x - u_{tt}(l, t)S\rho(x)\Delta x = 0$$

и при  $\Delta x \rightarrow 0$  получаем второе граничное условие  $(u_x + hu)|_{x=0} = 0$ .

**Пример 3. Задача о колебаниях мембранны.** Мембраной называется натянутая пленка, которая сопротивляется растяжению

и не сопротивляется изгибу. Работа внешней силы, вызывающей изменение площади некоторого участка, пропорциональна этому изменению. Положительный коэффициент пропорциональности  $T$  не зависит ни от формы этого участка, ни от его положения. Он называется *натяжением мембраны*.

Выведем уравнение равновесия мембраны, предполагая, что в начальный момент времени в положении равновесия мембрана совпадала с областью  $G$  плоскости  $(x_1, x_2)$ , ограниченной некоторой, достаточно гладкой кривой  $L$ . Работа внутренних сил упругости равна по абсолютной величине работе внешних сил и противоположна ей по знаку. Пусть  $f(x)$  — плотность силы в точке  $x$ , действующей перпендикулярно к плоскости  $(x_1, x_2)$ . Под действием внешней силы мембрана перейдет в новое положение, которое описывается уравнением  $u = u(x)$ . Будем считать, что мембрана не сильно изогнута, так что в рассуждениях будем пренебрегать членами  $u_{x_1}^2, u_{x_2}^2$ . Кроме того, будем считать, что точки мембраны под действием внешней силы перемещаются только по перпендикулярам к плоскости  $(x_1, x_2)$ , а следовательно, координаты произвольной точки  $x$  мембранны при этом не меняются.

Работа внешней силы, вызывающей перемещение мембраны из первоначального положения ( $u \equiv 0, x \in G$ ) в положение, задаваемое уравнением  $u = u(x), x \in G$ , равна

$$\int_G f(x)u(x) dx.$$

Изменение площади мембраны при этом перемещении равно

$$\int_G \left( \sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - 1 \right) dx,$$

а работа внутренних сил упругости равна

$$-T \int_G \left[ \sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - 1 \right] dx \simeq -\frac{T}{2} \int_G (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx.$$

Следовательно, сумма всех работ равна

$$A(u) = \int_G \left[ -\frac{T}{2}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + fu \right] dx. \quad (1)$$

Вариация функционала (1) выражается формулой

$$\delta A(u) = \int_G [-T(u_{x_1} \delta u_{x_1} + u_{x_2} \delta u_{x_2}) + f \delta u] dx.$$

Согласно принципу возможных перемещений в положении равновесия  $\delta A(u) = 0$  при всех допустимых  $\delta u(z)$ . Так как

$$\int_G (u_{x_1} \delta u_{x_1} + u_{x_2} \delta u_{x_2}) dx = \int_L \frac{\partial u}{\partial n} \delta u dl - \int_G \Delta u \delta u dx,$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к контуру  $L$ , то

$$\delta A(u) = -T \int_L \frac{\partial u}{\partial n} \delta u dl + \int_G (T \Delta u + f) \delta u dx = 0. \quad (2)$$

Так как любая непрерывно дифференцируемая в  $\overline{G}$  функция, равная нулю на границе, является допустимой функцией, то, предполагая функции  $u(x)$  и  $f(x)$  достаточно гладкими, из (2) имеем

$$T \Delta u = -f(x), \quad x \in G. \quad (3)$$

### Краевые условия

- а) Закрепленная мембрана. Если край мембранны жестко закреплен, то отклонения точек мембранны на границе  $L$  не происходит и, следовательно,  $u|_L = 0$ .
- б) Края мембранны свободны, т. е. они могут свободно перемещаться по вертикальной боковой поверхности цилиндра с основанием  $L$ . В этом случае  $\delta u$  будет произвольной как в  $G$ , так и на  $L$ , и из условия (2) получаем  $\frac{\partial u}{\partial n}|_L = 0$ .
- в) Если к краю мембранны приложена сила с линейной плотностью  $f_1$ , то криволинейный интеграл в формуле (2) в этом случае заменится на

$$\int_L \left( -T \frac{\partial u}{\partial n} + f_1 \right) \delta u dl$$

и вследствие произвольности  $\delta u$  на  $L$  получим

$$\left( -T \frac{\partial u}{\partial n} + f_1 \right)|_L = 0.$$

- г) В случае упругого закрепления края мембранны сила, действующая на краю, имеет плотность  $-ku$ , где  $k$  характеризует жесткость закрепления мембранны. Для получения гранично-

го условия нужно в граничном условии  $\left(-T \frac{\partial u}{\partial n} + f_1\right)|_L = 0$  заменить  $f_1$  на  $-ku$ . Тогда получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)|_L = 0, \quad \text{где } h = \frac{k}{T}.$$

Выведем уравнение движения мембраны. Пусть  $u = u(x, t)$  — уравнение, описывающее положение мембраны в момент времени  $t$ . Согласно принципу Даламбера функция  $u(x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $T\Delta u = -(f - \rho u_{tt})$  ( $f = f(x, t)$  — плотность внешней среды,  $-\rho(x)u_{tt}$  — плотность силы инерции). Таким образом, уравнение колебаний принимает вид

$$a^2 \Delta u - u_{tt} = F(x, t), \quad \text{где } a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad F = -\frac{f(x, t)}{\rho}. \quad (4)$$

Из физических соображений ясно, что для однозначного описания процесса колебаний кроме уравнения (4) и условия на границе  $L$  (одного из условий а–г) нужно задать начальное положение (форму мембраны при  $t = 0$ ) и начальные скорости точек мембраны.

Таким образом, имеем для уравнения (4) задачу:

найти дважды непрерывно дифференцируемое решение  $u(x, t)$ ,  $x \in G$ ,  $t \geq 0$ , такое что

$$a^2 \Delta u - u_{tt} = F(x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — заданные функции. Кроме того, в зависимости от условий на краю мембраны функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять одному из условий в–г.

#### **Пример 4. Уравнение неразрывности. Задача обтекания.**

**Уравнение акустики.** Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т. е. жидкости, в которой отсутствуют силы вязкости<sup>1)</sup>. Пусть  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  — вектор скорости движения жидкости,  $\rho(x, t)$  — ее плотность,  $f(x, t)$  — интенсивность источников. Выделим в жидкости некоторый объем  $\Omega$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Тогда изменение массы жидкости внутри  $\Omega$  в единицу времени равно

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dx = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.$$

---

<sup>1)</sup> Движение жидкости рассматривается в эйлеровых координатах.

С другой стороны, это изменение должно равняться приращению количества  $Q_1$  жидкости, выделенной источниками, минус количество  $Q_2$  жидкости, вытекающее через поверхность  $S$ . Очевидно,

$$Q_1 = \int_{\Omega} f(x, t) dt, \quad Q_2 = \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dx,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль. Таким образом, имеем

$$\int_{\Omega} [\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - f] dx = 0.$$

Вследствие произвольности  $\Omega$  и непрерывности подынтегрального выражения необходимо

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = f(x, t). \quad (1)$$

Это и есть *уравнение неразрывности* движения идеальной жидкости.

Рассмотрим задачу об *обтекании* твердого тела  $\Omega$  с границей  $S$  потенциальным потоком несжимаемой однородной жидкости, имеющей заданную скорость  $v_0$  на бесконечности при отсутствии источников. Так как  $\rho \equiv \text{const}$  и  $f \equiv 0$ , эта задача приводится к решению уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

при условии

$$v_n|_S = 0, \quad (3)$$

где  $v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n})$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль. Пусть  $u$  — потенциал скоростей, т. е.  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$ . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = 0,$$

а граничным условием становится  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$ , так как

$$v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{n}) = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Из физических соображений ясно, что  $\mathbf{v}(x)$  должна стремиться к  $\mathbf{v}_0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , где  $\mathbf{v}_0$  — скорость потока на бесконечности.

Таким образом, указанная задача свелась к решению задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad x \notin \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S &= 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \operatorname{grad} u = \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

**Уравнения акустики.** Предположим, что находящийся в некотором объеме идеальный газ под действием внешних сил с плотностью  $F(x, t)$  совершает малые колебания около положения равновесия и что движение газа адиабатическое, т. е. давление  $p(x, t)$  и плотность  $\rho(x, t)$  связаны соотношением (уравнением состояния)

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (4)$$

где  $p_0, \rho_0$  — начальные давления и плотность, а постоянная  $\gamma > 0$ .

Обозначим через  $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$  вектор смещения газа относительно положения равновесия, а через  $\mathbf{v}(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$  — вектор скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}. \quad (5)$$

В наших предположениях ( $\rho - \rho_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  и их производные малы) уравнение (4) можно переписать в виде

$$p = p_0 \left( 1 + \gamma \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right), \quad (6)$$

а уравнение неразрывности (1) — в виде

$$\rho_t + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

(считаем, что интенсивность источников равна нулю).

В соответствии с законом Ньютона полный баланс сил, действующих на малый объем газа  $\Delta V$ , равен нулю, т. е.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Delta V + \operatorname{grad} p \Delta V = F \Delta V,$$

откуда после замены  $\rho$  на  $\rho_0$  (в рамках нашего приближения) получаем

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = F - \operatorname{grad} p. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по  $t$  и пользуясь соотношениями (6) и (7), находим уравнение для вектора скорости  $\mathbf{v}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = a^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $a^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0}$ .

Если предположить, что в начальный момент времени имеет место равенство  $\operatorname{div} \mathbf{u} = -1$ , то из (7) и (5) получим, что для всех последующих моментов времени имеет место равенство  $\rho +$

$+\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Отсюда и из (5), (6) и (8) вытекает уравнение для вектора смещения

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = a^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} F. \quad (10)$$

Наконец, дифференцируя уравнение (7) по  $t$  и используя (6) и (8), получим уравнения для плотности  $\rho$  и давления  $p$

$$\rho_{tt} = a^2 \Delta \rho - \operatorname{div} F, \quad p_{tt} = a^2 \Delta p - a^2 \operatorname{div} F. \quad (11)$$

Уравнения (9)–(11) называются *уравнениями акустики*.

**Пример 5. Задача о распространении тепла.** Вывод уравнения теплопроводности базируется на законе Фурье, согласно которому количество тепла, проходящее за время  $\Delta t$  через малую площадку  $\Delta S$ , лежащую внутри рассматриваемого тела, определяется формулой

$$\Delta Q = -k(x, u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} \Delta S \Delta t, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к площадке, направленная в сторону передачи тепла,  $k(x, u)$  — коэффициент внутренней теплопроводности,  $u(x, t)$  — температура тела в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ . Предположим, что тело изотропно в отношении теплопроводности. Тогда  $k(x, u)$  не зависит от направления площадки. Для вывода уравнения, которому удовлетворяет температура  $u(x, t)$ , выделим внутри тела объем  $\Omega$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Согласно закону Фурье количество тепла, втекающее в  $\Omega$  через поверхность  $S$  за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dx.$$

Если  $F(x, t)$  — плотность тепловых источников, то количество тепла, образованное за их счет в  $\Omega$  за указанный промежуток времени, равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F(x, t) dx.$$

Общее количество притекшего в  $\Omega$  за время от  $t_1$  до  $t_2$  тепла можно подсчитать также и через приращение температуры:

$$\int_{\Omega} c \rho [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx,$$

где  $c(x)$  и  $\rho(x)$  — теплоемкость и плотность вещества. Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - F(x, t) \right) dx = 0 \quad (2)$$

(при этом предполагаем, что подынтегральная функция непрерывна). В силу произвольности  $\Omega$  и промежутка времени  $[t_1, t_2]$  из (2) вытекает равенство

$$c\rho u_t - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = F(x, t), \quad (3)$$

называемое *уравнением теплопроводности*.

Если коэффициент теплопроводности  $k$  не зависит от температуры  $u$ , т. е.  $k(x, u) = k(x)$ , то уравнение (3) становится линейным. Если тело однородно, то  $c(x) = \operatorname{const}$ ,  $\rho = \operatorname{const}$ ,  $k = \operatorname{const}$  и уравнение принимает вид

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad (4)$$

$$\text{где } a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}.$$

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса распространения тепла необходимо (кроме уравнения (3) или (4)) задать начальную температуру, т. е.  $u|_{t=0} = \varphi(x)$ , и температурный режим на границе. Для случая когда на границе  $\Gamma$  тела  $D$  поддерживается заданная температура, граничное условие выглядит так:

$$u|_{\Gamma} = \psi.$$

Для случая, когда на границе задан тепловой поток  $q$ , граничное условие выглядит так:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = h,$$

$$\text{где } h = \frac{q}{k}, \quad \mathbf{n} \text{ — внешняя нормаль.}$$

В частности, если тело  $G$  теплоизолировано на границе, то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0.$$

В случае когда окружающее тело  $G$  пространство имеет заданную температуру, считаем, что на границе происходит теплообмен по закону Ньютона, т. е.  $q|_{\Gamma} = \alpha(u_1 - u)|_{\Gamma}$ , где  $q$  —

тепловой поток,  $\alpha$  — коэффициент внешней теплопроводности (теплообмена),  $u_1$  — температура окружающего  $G$  пространства. С другой стороны, в единицу времени с единицы площади границы  $\Gamma$  внутрь тела  $G$  по закону Фурье идет тепловой поток  $q_2 = k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ . Эти потоки должны быть равны, т. е.

$$k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \alpha(u_1 - u)|_{\Gamma} \quad \text{или} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu \right) \Big|_{\Gamma} = \varphi_1.$$

**Пример 6. Задачи о диффузии.** Требуется вывести уравнение диффузии вещества в неподвижной среде, занимающей ограниченную область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , если задана плотность источников  $F(x, t)$  и диффузия происходит с поглощением (например, частицы диффундирующего вещества вступают в химическую реакцию с веществом среды), причем скорость поглощения в каждой точке пространства  $x \in \Omega$  пропорциональна плотности  $u(x, t)$  диффундирующего вещества.

Требуется получить краевые условия для следующих случаев:

- а) на границе области поддерживается заданная плотность;
- б) граница непроницаема;
- в) граница полупроницаема, причем диффузия через границу происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

Вывод уравнения основывается на законе Нернста, согласно которому количество вещества, проходящее за малый промежуток времени  $\Delta t$  через малую площадку  $\Delta S$ , равно

$$\Delta Q = -D(x) \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t,$$

где  $D(x)$  — коэффициент диффузии,  $\mathbf{n}$  — нормаль к элементу  $\Delta S$ , направленная в сторону перемещения вещества. Пусть  $\rho(x)$  — коэффициент плотности среды. Как и при выводе уравнения теплопроводности, выделим некоторый объем  $\Omega$  с границей  $S$  и составим баланс количества вещества, пришедшего в  $\Omega$  за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ .

Количество вещества, пришедшего в  $\Omega$  через границу  $S$ , согласно закону Нэрнста равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S D(x) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) dx.$$

Количество вещества, образовавшегося в  $\Omega$  за счет источников, равно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F(x, t) dx.$$

Количество вещества в  $\Omega$  уменьшилось на величину

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} q(x) u(x, t) dx$$

за счет поглощения среды ( $q(x)$  — коэффициент поглощения). Поскольку приращение количества вещества в  $\Omega$  за промежуток  $[t_1, t_2]$  равно также

$$\int_{\Omega} \rho(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx,$$

то

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} (\rho u_t - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - F + qu) dx = 0 \quad (5)$$

(подынтегральная функция считается непрерывной).

В силу произвольности  $\Omega$  и промежутка времени  $[t_1, t_2]$  из (5) вытекает равенство

$$\rho u_t + qu = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + F. \quad (6)$$

Это и есть искомое *уравнение диффузии*. Из физических соображений ясно, что для однозначного описания процесса диффузии необходимо знать начальное распределение плотности  $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $x \in \Omega$ , и режим диффузии на границе области.

Как и в случае примера 5, краевые условия имеют вид:

- а)  $u|_{\Gamma} = u_0$ ;
- б)  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ ;
- в)  $D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} = \alpha(u_1 - u)|_{\Gamma}$ , где  $u_0, u_1$  — заданные функции,  $\alpha$  — коэффициент проницаемости границы  $\Gamma$ .

**1.1.** Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки (на единицу длины).

**1.2.** Вывести уравнение малых поперечных колебаний струны с насаженной на нее в некоторой внутренней точке  $x_0$  бусинкой массы  $m$ .

**1.3.** Вывести уравнение колебания струны, колеблющейся в упругой среде.

**1.4.** Крутильными колебаниями стержня называют такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Вывести уравнение малых крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня. Рассмотреть случаи:

- а) концы стержня свободны;
- б) концы стержня жестко закреплены;
- в) концы стержня упруго закреплены.

**1.5.** Точкам упругого однородного прямоугольного стержня, жестко закрепленного на левом конце и свободного на правом, в начальный момент времени  $t = 0$  сообщены малые поперечные отклонения и скорости, параллельные продольной вертикальной плоскости симметрии стержня.

Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений точек стержня при  $t > 0$ , предполагая, что стержень совершает малые поперечные колебания.

**1.6.** Труба, заполненная идеальным газом и открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ . В момент времени  $t = 0$  труба мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу об определении смещения газа внутри трубы на расстоянии  $x$  от закрытого конца.

**1.7.** Заключенный в цилиндрической трубе идеальный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются, и все частицы газа движутся параллельно оси цилиндра. Поставить краевую задачу для определения смещения  $u(x, t)$  частиц газа в случаях, когда концы трубы:

- а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками;
- б) открыты;
- в) закрыты поршеньками пренебрежимо малой массы, насаженными на пружинки с коэффициентами жесткости  $\nu$  и скользящими без трения внутри трубы.

**1.8.** Начиная с момента времени  $t = 0$  один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила  $\Phi(t)$ , направленная по оси стержня. В момент времени  $t = 0$  поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений точек стержня при  $t > 0$ .

**1.9.** Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

**1.10.** Составить уравнение продольных колебаний стержня, у которого площадь поперечного сечения есть заданная функция от  $x$ , считая материал стержня однородным.

**1.11.** Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса, если концы стержня закреплены неподвижно и стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в момент времени  $t = 0$  сообщены начальные скорости и продольные отклонения. Длина стержня равна  $l$ , радиусы оснований  $R, r$  ( $R > r$ ), материал стержня однороден. Деформацией поперечных сечений пренебречь.

**1.12.** Находящаяся в горизонтальной плоскости невесомая струна с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вращается вокруг вертикальной оси, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени  $t = 0$  точкам этой струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.

**1.13.** Пусть в точке  $x = 0$  бесконечной однородной струны находится шарик массы  $m_0$ . Начальные скорости и начальные отклонения точек струны равны нулю. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от их положения равновесия в следующих случаях:

- начиная с момента  $t = 0$  на шарик действует сила  $F = F_0 \sin \Omega t$ ;
- в начальный момент времени  $t = 0$  шарик получает импульс  $p_0$  в поперечном направлении;
- шарик в случае б) закреплен упруго с эффективной жесткостью  $k^2$ .

**1.14.** Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

**1.15.** Во внутренних точках  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , на струне сосредоточены массы  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поставить краевую задачу для определения малых поперечных колебаний струны при произвольных начальных данных. Концы струны закреплены.

**1.16.** Два полуограниченных однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены жестко торцами и составляют один неограниченный стержень. Пусть  $\rho_1$ ,  $E_1$  — плотность и модуль упругости одного из них, а  $\rho_2$ ,  $E_2$  — другого. Поставить краевую задачу для определения отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положения равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям сообщены некоторые продольные смещения и скорости.

**1.17.** Тяжелая однородная нить длиной  $l$ , закрепленная верхним концом ( $x = l$ ) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u.$$

**1.18.** Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой однородной струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец жестко закреплен, а нижний свободен.

**1.19.** Поставить задачу об определении магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника, по поверхности которого течет ток силой  $I$ .

**1.20.** Кабель, имеющий потенциал  $v_0$ , при  $t = 0$  заземляется на одном конце через сосредоточенную емкость (или индуктивность); другой конец изолирован. Поставить задачу об определении электрического тока в кабеле.

**1.21.** Конец  $x = 0$  круглого однородного вала закреплен, а к концу  $x = l$  жестко прикреплен диск с моментом инерции  $J_0$ . В начальный момент времени диск закручивается на угол  $\alpha$  и отпускается без начальной скорости. Поставить краевую

задачу для определения углов поворота поперечных сечений вала при  $t > 0$ .

**1.22.** Тяжелый стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени  $t = 0$  стержень освобождается. Поставить краевую задачу о вынужденных колебаниях стержня.

**1.23.** Пусть все условия предыдущей задачи остаются без изменения, за исключением условия на нижнем конце: к нему прикреплен груз  $Q$ , причем за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент времени из-под груза убирается подставка и груз начинает растягивать стержень).

**1.24.** Поставить задачу о движении полуограниченной струны ( $0 \leq x < \infty$ ) при  $t > 0$ , если при  $t < 0$  по ней бежит волна  $u(x, t) = f(x + at)$ , а конец струны  $x = 0$  закреплен жестко.

**1.25.** Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в цилиндрической трубке радиуса  $R$ , настолько длинной, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Начальные отклонения и начальные скорости есть заданные функции от  $r$ .

**1.26.** Поставить задачу об обтекании шара стационарным потоком идеальной жидкости (потенциальное течение). Привести электростатическую аналогию.

**1.27.** Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в сферическом сосуде радиуса  $R$ , если начальные скорости и начальные отклонения заданы как функции от  $r$ .

**1.28.** Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях мембранны, к которой приложено нормальное давление  $P$  на единицу площади, если в невозмущенном состоянии мембрана является плоской, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям мембранны. Рассмотреть случаи:

- а) мембрана жестко закреплена на границе  $L$ ;
- б) мембрана свободна на  $L$ ;
- в) на части  $L_1$  границы  $L$  мембрана закреплена жестко, а на остальной части  $L_2$  границы  $L$  она свободна.

**1.29.** Поставить краевую задачу о колебании круглой однородной мембранны, закрепленной по краю, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. В момент

времени  $t = 0$  к поверхности мембраны приложена внешняя сила плотности  $f(r, \varphi, t)$ , действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и отклонения точек мембраны отсутствуют.

**1.30.** Закрепленная по краям однородная прямоугольная мембрана в начальный момент времени  $t = 0$  получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{U_\varepsilon} v_0(x) dx = A, \quad x = (x_1, x_2),$$

где  $A$  — некоторая постоянная,  $v_0(x)$  — начальная скорость. Поставить краевую задачу о свободных колебаниях.

**1.31.** Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления  $R$ , самоиндукции  $L$  и емкости  $C$ . В момент времени  $t = 0$  в цепь включается э.д.с.  $E_0$ . Показать, что сила тока  $i(t)$  в цепи удовлетворяет уравнению

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E_0, \quad t > 0.$$

**1.32.** Рассмотрим электромагнитное поле в некоторой среде. Исходя из уравнений Максвелла вывести уравнения, которым удовлетворяют компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей для случаев:

- а) плотность зарядов  $\rho = 0$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{E}$  (закон Ома);
- б) среда — вакуум, и токи отсутствуют.

**1.33.** Поставить задачу о проникновении магнитного поля в правое полупространство, заполненное средой с проводимостью  $\sigma$ , если начиная с момента времени  $t = 0$  на поверхности  $x = 0$  поддерживается напряженность магнитного поля  $H = H_0 \sin \Omega t$ , направленная параллельно поверхности.

**1.34.** Поставить краевую задачу об определении температуры стержня  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью. Рассмотреть случаи:

- а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре;
- б) на концах стержня поддерживается заданный тепловой поток;
- в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

**1.35.** Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной плотности в каждый момент времени  $t$  являются плоскости, перпендикулярные к оси  $x$ . Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое  $0 \leq x \leq l$ . Рассмотреть случаи:

- а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной нулю;
- б) граничные плоскости непроницаемы;
- в) граничные плоскости полупроницаемы, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

**1.36.** Вывести уравнение диффузии распадающегося газа (количество распавшихся молекул в единицу времени в данной точке пропорционально плотности с коэффициентом пропорциональности  $\alpha > 0$ ).

**1.37.** Дан тонкий однородный стержень длиной  $l$ , начальная температура которого  $f(x)$ . Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на конце  $x = 0$  поддерживается постоянная температура  $u_0$ , а на боковой поверхности и на конце  $x = l$  происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

**1.38.** Поставить задачу об определении температуры в бесконечном тонком теплоизолированном стержне, по которому с момента  $t = 0$  в положительном направлении со скоростью  $v_0$  начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий  $q$  единиц тепла в единицу времени.

**1.39.** Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса  $R$ , на поверхности которого происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

**1.40.** Вывести уравнение диффузии взвешенных частиц с учетом оседания, предполагая, что скорость частиц, вызываемая силой тяжести, постоянна, а плотность частиц зависит только от высоты  $z$  и от времени  $t$ . Написать граничное условие, соответствующее непроницаемой перегородке.

**1.41.** Поставить краевую задачу об остывании равномерно нагревого стержня формы усеченного конуса (искривлением изотермических поверхностей пренебрегаем), если концы стержня

теплоизолированы, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

**1.42.** Растворенное вещество с начальной плотностью  $c_0 = \text{const}$  диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями  $x = 0$  и  $x = h$ , в растворитель, ограниченный плоскостями  $x = h$ ,  $x = l$ . Поставить краевую задачу для процесса выравнивания плотности, предполагая, что границы  $x = 0$ ,  $x = l$  непроницаемы для вещества.

**1.43.** Внутри однородного шара начиная с момента времени  $t = 0$  действуют источники тепла с равномерно распределенной постоянной плотностью  $Q$ . Поставить краевую задачу о распределении температуры при  $t > 0$  внутри шара, если начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Рассмотреть случаи:

- а) на поверхности шара поддерживается нулевая температура;
- б) на поверхности шара происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой нулевой температуры.

**1.44.** Дан однородный шар радиуса  $R$  с начальной температурой, равной нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при  $t > 0$  внутри шара, если:

- а) шар нагревается равномерно по всей поверхности постоянным тепловым потоком  $q$ ;
- б) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой зависит только от времени.

**1.45.** Начальная температура неограниченной пластины толщины  $2h$  равна нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при  $t > 0$  по толщине пластины, если:

- а) пластина нагревается с обеих сторон равными постоянными тепловыми потоками  $q$ ;
- б) в пластине начиная с момента времени  $t = 0$  действует источник тепла с постоянной плотностью  $Q$ , а ее основания поддерживаются при температуре, равной нулю.

**1.46.** Неограниченный цилиндр радиуса  $R$  имеет начальную температуру  $f(r)$ . Поставить краевую задачу о радиальном распространении тепла, если:

- а) боковая поверхность поддерживается при постоянной температуре;
- б) с боковой поверхности происходит лучеиспускание в окружающую среду нулевой температуры.

**1.47.** Данна тонкая прямоугольная пластина со сторонами  $l, m$ , для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распространении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), & u|_{y=m} &= \varphi_2(x), \\ u|_{x=0} &= \psi_1(y), & u|_{x=l} &= \psi_2(y). \end{aligned}$$

**1.48.** Начальное распределение температуры в однородном шаре задано функцией  $f(r, \theta, \varphi)$ . Поставить краевую задачу о распространении тепла в шаре, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре  $u_0$ .

**1.49.** Два полуограниченных стержня, сделанных из разных материалов, в начальный момент времени приведены в соприкосновение своими концами. Поставить краевую задачу о распространении тепла в бесконечном стержне, если известны начальные температуры каждого из двух полуограниченных стержней.

**1.50.** Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластине  $OACB$  со сторонами  $OA = a, OB = b$ , если:

- а) на боковых сторонах пластины поддерживаются заданные температуры;
- б) на сторонах  $OA$  и  $OB$  заданы тепловые потоки, а стороны  $BC$  и  $AC$  теплоизолированы.

**1.51.** На плоскую мембрану, ограниченную кривой  $L$ , действует стационарная поперечная нагрузка с плотностью  $f(x, y)$ . Поставить краевую задачу об отклонении точек мембранны от плоскости, если:

- а) мембрана закреплена на краю;
- б) край мембранны свободен;
- в) край мембранны закреплен упруго.

**1.52.** Дан цилиндр с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ . Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндра, если температура верхнего и нижнего оснований есть заданная функция от  $r$ , а боковая поверхность:

- а) теплоизолирована;
- б) имеет температуру, зависящую только от  $x$ ;
- в) свободно охлаждается в среде нужной температуры.

**1.53.** Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутренних точек полусферы, если сферическая поверхность поддерживается при заданной температуре  $f(\varphi, \theta)$ , а основание полусферы — при нулевой температуре.

**1.54.** Шар радиуса  $R$  нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности  $q$ , падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Поставить краевую задачу о распределении температуры внутренних точек шара.

**1.55.** Пусть  $u(x, s, t)$  — плотность частиц в точке  $x$ , летящих с постоянной скоростью  $v$  в направлении  $s = (s_1, s_2, s_3)$  в момент времени  $t$ ; обозначим через  $\alpha(x)$  коэффициент поглощения и  $h(x)$  — коэффициент умножения в точке  $x$ . Предполагая рассеяние в каждой точке  $x$  изотропным, показать, что  $u(x, s, t)$  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + (s, \operatorname{grad} u) + \alpha(x)u = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int_{|s'|=1} u(x, s', t) ds' + F,$$

где  $F(x, s, t)$  — плотность источников,  $\beta(x) = \alpha(x)h(x)$ .

**1.56.** Поставить краевую задачу для уравнения задачи 1.55, считая, что задано начальное распределение плотности и задан падающий поток частиц на границу  $S$  области  $G$ .

**1.57.** Показать, что для решения  $u(x, s)$  стационарной краевой задачи

$$(s, \operatorname{grad} u) + \alpha(x)u = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int_{|s'|=1} u(x, s') ds' + F(x),$$

$$u|_S = 0, \quad \text{если } (s, \mathbf{n}) = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$ , средняя плотность

$$u_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|s|=1} u(x, s) ds$$

удовлетворяет интегральному уравнению Пайерлса

$$u_0(x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-|x-x'|}}{(x-x')^2} \left( \int_0^1 \alpha[tx + (1-t)x'] dt \right) [\beta(x')u_0(x') + F(x')] dx'.$$

**1.58.** Разлагая решение  $u(x, s)$  стационарной краевой задачи 1.57 в ряд по сферическим функциям от  $s$ , удерживая только члены с нулевой и первыми гармониками, показать, что функция

$$u_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|s|=1} u(x, s) ds$$

есть решение краевой задачи (диффузное приближение):

$$-\frac{1}{3} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{grad} u_0 \right) + (1 - h)u_0 = \frac{f}{\alpha}, \quad \left( u_0 + \frac{2}{3\alpha} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_S = 0.$$

## Ответы к § 1

**1.1.**  $Tu_{xx} + f(x) = 0, 0 < x < l, u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ , где  $f(x)$  — плотность нагрузки.

**1.2.**  $\rho u_{tt} = T_0 u_{xx}, 0 < x < l, x \neq x_0, t > 0, u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t) = \frac{m}{T_0} u_{tt}(x_0, t)$ .

**1.3.**  $\rho u_{tt} = Tu_{xx} - \alpha u, 0 < x < l, t > 0$ , где  $\alpha$  — коэффициент упругости среды.

**1.4.**  $\theta_{tt} = a^2 \theta_{xx} - \alpha u, 0 < x < l, 0 < t < \infty, \theta(x, 0) = f(x), \theta_t(x, 0) = F(x), 0 \leq x \leq l$ , где  $\theta(x, t)$  — угол поворота сечения стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a^2 = \frac{GJ}{\Phi}$ , где  $G$  — модуль сдвига,  $J$  — полярный момент инерции поперечного сечения относительно точки, в которой ось пересекает это поперечное сечение,  $\Phi$  — осевой элемент инерции единицы длины стержня. Границные условия:

а)  $\theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0$ ;

б)  $\theta(0, t) = \theta(l, t) = 0$ ;

в)  $(\theta_x - h\theta)|_{x=0} = 0, (\theta_x + h\theta)|_{x=l} = 0$ , где  $h = \frac{k}{GJ}$ ,  $k$  — коэффициент жесткости упругого закрепления.

**1.5.**  $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, 0 < x < l, t > 0, u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = F(x), 0 \leq x \leq l, u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxxx}(l, t) = 0$ , где  $a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$ ,  $J$  — геометрический момент инерции поперечного сечения относительно средней линии, перпендикулярной к плоскости колебаний.

**1.6.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$  — скорость звука,  $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = v, 0 \leq x \leq l, u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, t > 0$ .

**1.7.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}, a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, 0 < x < l, t > 0, u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = F(x), 0 \leq x \leq l$ . Краевые условия:

а)  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ;

б)  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,

в)  $(u_x - hu)|_{x=0} = 0, (u_x + hu)|_{x=l} = 0$ , где  $h = \frac{\nu}{S \gamma \rho_0}$ ;  $S$  — площадь поперечного сечения трубки.

**1.8.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, u(0, t) = \varphi(t), u_x(l, t) = \frac{\Phi(x)}{ES}, t > 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, a^2 = \frac{E}{\rho}$ .

**1.9.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu^2 u_t$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ , где  $2\nu^2 = \frac{k}{\rho}$ ,  $k$  — коэффициент трения.

$$\mathbf{1.10.} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ S(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{\rho S}{E}.$$

**1.12.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $a^2 = \frac{\omega^2}{2}$ ,  $|u(0, t)| < \infty$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = F(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ .

**1.13.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $x \neq 0$ ,  $t > 0$ ,  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $x \neq 0$ ; условие в точке  $x = 0$  имеет вид:

- a)  $-m_0 u_{tt}(0, t) + T_0 [u_x(+0, t) - u_x(-0, t)] + F_0 \sin \Omega t = 0$ ,  $t > 0$ ;
- б)  $u(-0, t) = u(+0, t)$ ,  $-m_0 u_{tt}(0, t) + T_0 [u_x(+0, t) - u_x(-0, t)] = 0$ ,  $t > 0$ ,  $u(-0, 0) = u(+0, 0) = 0$ ,  $m_0 u_t(-0, 0) = m_0 u_t(+0, 0) = p_0$ ;
- в)  $u(-0, t) = u(+0, t)$ ,  $t > 0$ ,  $m_0 u_{tt}(0, t) + T_0 [u_x(+0, t) - u_x(-0, t)] - k^2 u(0, t) = 0$ ,  $m_0 u_t(-0, 0) = m_0 u_t(+0, 0) = p_0$ ,  $u(-0, 0) = u(+0, 0) = 0$ .

**1.14.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $(ESu_x - ku_t)|_{x=l} = 0$ ,  $t > 0$ , где  $k$  — коэффициент трения для конца стержня  $x = l$ .

**1.15.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $x \neq x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  $u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t)$ ,  $u_x(x_i + 0, t) - u_x(x_i - 0, t) = \frac{m_i}{T} u_{tt}(x_i, t)$ ,  $t > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $u|_{t=0} = f(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = F(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ .

**1.16.**  $\begin{cases} u_{tt}^1 = a_1^2 u_{xx}^1, & -\infty < x < 0, \\ u_{tt}^2 = a_2^2 u_{xx}^2, & 0 < x < +\infty, \end{cases} \quad t > 0$ ,  $u^1(0, t) = u^2(0, t)$ ,  $E_1 u_x^1(0, t) = E_2 u_x^2(0, t)$ ,  $t > 0$ ,  $u^1(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t^1(x, 0) = F(x)$ ,  $-\infty < x < 0$ ,  $u^2(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t^2(x, 0) = F(x)$ ,  $x > 0$ , где  $u^1$ ,  $u^2$  — смещение точек левого и правого стержней,  $a_i^2 = \frac{E_i}{\rho_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

**1.18.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $|u(0, t)| < \infty$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = f(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = F(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ .

**1.19.**  $\Delta \Phi^{(l)} = 0$ ,  $r > R$ ,  $\Delta \Phi^{(i)} = 0$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $\text{grad } \Phi = H$ ,  $\Phi_r^{(l)}|_{r=R} = \Phi_r^{(i)}|_{r=R}$ ,  $\Phi_\varphi^{(l)}|_{r=R} = \left( \Phi_\varphi^i + \frac{4\pi}{c} j_{\text{пов}} \right)|_{r=R}$ ,  $|\Phi^{(i)}(0, l)| < \infty$ ,  $j_{\text{пов}} = \frac{J}{2\pi R}$  — поверхностная плотность тока, а  $\Phi^{(i)}$ ,  $\Phi^{(l)}$  — потенциал магнитного поля внутри и вне проводника соответственно.

**1.20.**  $J_x = -cv_t$ ,  $v_x = -LJ_t$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $v|_{t=0} = v_0$ ,  $v(0, t) = \frac{1}{c} \int_0^t J dt$  на заземленном конце,  $v_x(l, t) = 0$  — на изолированном.

**1.21.**  $\theta_{tt} = a^2 \theta_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $\theta|_{t=0} = \frac{\alpha x}{l}$ ,  $\theta_t|_{t=0} = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $\theta|_{x=0} = 0$ ,  $\theta_x|_{x=l} = -\frac{\Phi}{JG} \theta_{tt}$ , где постоянные  $a^2$ ,  $\Phi$ ,  $J$ ,  $G$  имеют тот же смысл, что и в задаче 1.4.

**1.22.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u_x(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ ,  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ .

**1.23.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $\frac{Q}{g} u_{tt}|_{x=l} = -ES u_x|_{x=l} + Q$ .

**1.25.**  $u_{tt} = a^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$ ,  $0 < r < R$ ,  $t > 0$ ,  $u(r, 0) = f(r)$ ,  $u_t(r, 0) = F(r)$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $|u(0, t)| < \infty$ ,  $u_r|_{r=R} = 0$ .

**1.26.**  $\Delta \varphi = 0$ ,  $r > R$ ,  $t > 0$ ,  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ ,  $t > 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} v = \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \varphi = v_0$ , где  $v_0$  — скорость потока на бесконечности.

**1.27.**  $u_{tt} = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $t > 0$ ,  $u(r, 0) = f(r)$ ,  $u_t|_{t=0} = F(r)$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $|u(0, t)| < \infty$ ,  $u_r|_{r=R} = 0$ , где  $a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ .

**1.29.**  $u_{tt} + k u_t = a^2 \Delta u + \frac{f(r, \varphi, t)}{\rho}$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ,  $|u(0, \varphi, t)| < \infty$ ,  $u(R, \varphi, t) = 0$ , где  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ,  $k = \frac{\alpha}{\rho}$ ,  $\alpha$  — коэффициент упругого сопротивления среды.

**1.32.** а)  $u_{tt} - a^2 \Delta u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} u_t = 0$ ,  $a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$ ;  
б)  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2 \mu} \rho$ ,  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) \varphi = 0$ ,  $\frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div} \varphi = 0$ ,

где  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$  — напряженность магнитного поля,  $\rho(x)$  — плотность зарядов,  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная среды,  $\mu$  — коэффициент магнитной проницаемости среды,  $\mathbf{I}(x, t) = (I_1, I_2, I_3)$  — ток проводимости.

В случае а) для компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получается одно и то же телеграфное уравнение.

Для случая б) вводится четырехкомпонентный электромагнитный потенциал  $(\varphi_0, \varphi)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , с помощью которого решение уравнений Максвелла ищется в виде  $\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \varphi$ .

**1.33.**  $H_{xx} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon^2} H_t + \frac{1}{c^2} H_{tt}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ,  $H|_{t=0} = 0$ ,  $H_t|_{t=0} = 0$ ,  $x > 0$ ,  $H|_{x=0} = H_0 \sin \Omega t$ ,  $t > 0$ , где  $c$  — скорость света.

**1.34.**  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , краевые условия:

- а)  $u|_{x=0} = \varphi_1(t)$ ,  $u|_{x=l} = \varphi_2(t)$ ,  $t > 0$ ;  
 б)  $-kSu_x|_{x=0} = q_1(t)$ ,  $kSu_x|_{x=l} = \varphi_2(t)$ ,  $t > 0$ ;  
 в)  $u_x|_{x=0} = h[u(0, t) - \varphi_1(t)]$ ,  $u_x|_{x=l} = -h(u(l, t) - \varphi_2(t))$ ,  
 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$  — теплоемкость,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  (в случае а) — температура концов стержня, (в случае б) температура окружающего пространства на концах стержня,  $q_i$  — тепловые потоки на концах стержня.

**1.35.**  $u_t = Du_{xx}$ ,  $0 \leq x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , граничные условия:

- а)  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ ;  
 б)  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ ;  
 в)  $u_x|_{x=0} = h[u(0, t) - \varphi_1(t)]$ ,  $t > 0$ ,  $u_x|_{x=l} = -h(u(l, t) - \varphi_2(t))$ , где  $h = \alpha/D$ ,  $\alpha$  — коэффициент проницаемости на концах.

**1.36.**  $u_t = D\Delta u - \alpha u$ ,  $t > 0$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

**1.37.**  $u_t = a^2 u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho S} u$ ,  $0 \leq x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $u|_{x=0} = u_0$ ,  $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$ ,  $t > 0$ ,  $p$  — периметр поперечного сечения стержня,  $h = \frac{\alpha}{k}$ ,  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ .

**1.38.**  $u_t = a^2 u_{xx} + \frac{q}{c} \delta(u - u_0)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ .

**1.39.**  $u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_0)$ ,  $0 \leq x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x < l$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=l}$ ,  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ,  $b = \frac{\alpha P}{c\rho S}$ , где  $P$  — периметр поперечного сечения кольца,  $x = R\theta$ ,  $\theta$  — угловая координата.

**1.40.**  $u_t = Du_{zz} - vu_z$ ,  $z > z_0$ ,  $t > 0$ ,  $(Du_z - vu)|_{z=z_0} = 0$ ,  $t > 0$ , где  $v$  — скорость оседания частиц.

**1.41.**  $\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{2\alpha(1-x/H)}{c\rho r_0 \cos \gamma} u$ ,  $0 \leq x < l$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ ,  $t > 0$ , где  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ,  $H$  — полная высота конуса,  $\gamma$  — половина угла раствора конуса,  $r_0$  — радиус большого основания,  $l$  — высота усеченного конуса.

**1.42.**  $c_t = Dc_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  $c(x, 0) = \begin{cases} c_0, & 0 < x < h, \\ 0, & h < x < l. \end{cases}$

**1.43.**  $u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) + \frac{Q}{c\rho}$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = f(r)$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $|u(0, t)| < \infty$ ; граничные условия:

- а)  $u(R, t) = 0$ ;  
 б)  $(u_r + Hu)|_{r=R} = 0$ ,  $H = \frac{\alpha}{k}$ ,  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ .

**1.44.**  $u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ,  $0 \leq r \leq R$ ;  
граничные условия:

a)  $|u(0, t)| < \infty$ ,  $u_r(R, t) = \frac{g}{k}$ ,  $t > 0$ ;

б)  $|u(0, t)| < \infty$ ,  $(u_r + Hu)|_{r=R} = \varphi(t)$ ,  $t > 0$ ,  $H = \frac{\alpha}{k}$ ,  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ .

**1.45.** а)  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $-h < x < h$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ,  
 $(ku_x + q)|_{x=-h} = 0$ ,  $(-ku_x + q)|_{x=h} = 0$ ;

б)  $u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{c\rho}$ ,  $-h < x < h$ ,  $t > 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{x=\pm h} = 0$ ,  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ .

**1.49.**  $u_t = a(x)u_{xx}$ ,  $x \neq 0$ ,  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u(-0, t) = u(+0, t)$ ,  
 $k_1 u_x(-0, t) = k_2 u_x(+0, t)$ ,  $a(x) = \begin{cases} a_1^2, & x < 0, \\ a_2^2, & x > 0, \end{cases}$ ,  $a_i^2 = \frac{k_i}{c_i \rho_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

## § 2. Классификация уравнений второго порядка

В области  $G \subset \mathbb{R}^n$  рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0, \quad x \in G, \quad (\text{I})$$

в котором вещественная симметрическая матрица  $A(x) = [a_{ij}(x)] \neq 0$ ,  $x \in G$ . В произвольной точке  $x^0 \in G$  квадратичную форму матрицы  $A(x^0)$

$$(A(x^0)y, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0)y_i y_j$$

можно привести с помощью невырожденного преобразования  $y = B\eta$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $B = B(x^0)$ , к каноническому виду который представляет собой алгебраическую сумму квадратов координат вектора  $\eta$ . При этом пусть  $n_+ = n_+(x^0)$  из них будут с коэффициентом 1,  $n_- = n_-(x^0)$  — с коэффициентом -1, а остальные  $n_0 = n_0(x^0)$  — с коэффициентом 0, т. е. будут отсутствовать,  $n_+ + n_- + n_0 = n$ . Уравнение (I) принадлежит в точке  $x^0 \in G$ :

- эллиптическому типу, если  $n_0 = 0$  и или  $n_+ = n$ , или  $n_- = n$ ,
- гиперболическому типу, если  $n_0 = 0$  и или  $n_+ = n - 1$ , или  $n_- = n - 1$ ,

- *ультрагиперболическому типу*, если  $n_0 = 0$  и  $n_+ > 1$ ,  
и  $n_- > 1$ ,
- *параболическому типу*, если  $n_0 = 0$ .

Уравнение (I) принадлежит эллиптическому (гиперболическому, ...) типу на множестве  $G_1 \subset G$ , если оно принадлежит эллиптическому (гиперболическому, ...) типу в каждой точке  $x^0 \in G_1$ .

Преобразование  $\xi = B^*x$  приводит уравнение (I) в точке  $x^0 \in G$  к каноническому виду.

В двумерном случае ( $n = 2$ ) уравнение

$$u(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y), \quad (\text{II})$$

где  $|a| + |b| + |c| \neq 0$ , принадлежит (в точке или области):

- *гиперболическому типу*, если  $b^2 - ac > 0$ ;
- *параболическому типу*, если  $b^2 - ac = 0$ ;
- *эллиптическому типу*, если  $b^2 - ac < 0$ .

В случае  $n = 2$  уравнение можно привести к каноническому виду не только в каждой точке, но и в окрестности точки, в которой уравнение сохраняет тип.

Для уравнения (II) характеристическое уравнение

$$u(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$a dy - \left( b + \sqrt{b^2 - ac} \right) dx = 0, \quad (\text{III})$$

$$a dy - \left( b - \sqrt{b^2 - ac} \right) dx = 0. \quad (\text{IV})$$

**Уравнения гиперболического типа:**  $b^2 - ac > 0$ . Общие интегралы  $\varphi(x, y) = c_1$ ,  $\psi(x, y) = c_2$  уравнений (III) и (IV) действительны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик для уравнения (I). Заменой переменных  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$  уравнение (II) приводится к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

**Уравнения параболического типа:**  $b^2 - ac = 0$ . Уравнения (III) и (IV) совпадают. Общий интеграл  $\varphi(x, y) = c$  уравнения (III) определяет семейство действительных характеристик для уравнения (I). Заменой переменных  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , где  $\psi(x, y)$  — любая гладкая функция такая, что эта замена переменных взаимно однозначна в рассматриваемой области, уравнение (II) приводится к виду

$$u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

**Уравнения эллиптического типа:**  $b^2 - ac < 0$ . Пусть  $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c$  — общий интеграл уравнения (III), где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — действительные функции<sup>1)</sup>. Тогда заменой переменных  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$  уравнение (II) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

**Пример 1.** Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$\begin{aligned} u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z &= 0, \\ u &= u(x, y, z). \end{aligned} \tag{1}$$

Решение. Для уравнения (1) матрица  $A(x, y, z)$  имеет вид

$$A(x, y, z) = A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы  $A$ :

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda = -\lambda \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и, следовательно, уравнение (1) параболического типа ( $\lambda_1 = 0$ ).

Найдем собственные векторы матрицы  $A$ :

а) собственному числу  $\lambda_1 = 0$  отвечает собственный вектор

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

б) собственному числу  $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  отвечает собственный вектор

$$\mathbf{h}_2 = \left( 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top,$$

---

<sup>1)</sup> Если  $a, b, c$  — аналитические функции, то существование общего интеграла уравнения (III) вытекает из теоремы Ковалевской.

в) собственному числу  $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  отвечает собственный вектор

$$\mathbf{h}_3 = \left( 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top.$$

Рассмотрим базис, состоящий из собственных векторов  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ .

Пусть  $(\xi, \eta, \zeta)$  — координаты точки в новом базисе. Тогда

$$\begin{cases} \xi = y + z, \\ \eta = x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z, \\ \zeta = x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z, \end{cases} \quad (2)$$

матрица  $A$  имеет в этом базисе диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

квадратичная форма в переменных  $(\xi, \eta, \zeta)$  имеет вид

$$0 \cdot \xi^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta^2.$$

Пересчитаем уравнение (1) в переменных  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Из (2) имеем

$$\begin{array}{c|l} 1 & u_x = u_\eta + u_\zeta, \\ 1 & u_y = u_\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}u_\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}u_\zeta, \\ -1 & u_z = u_\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}u_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}u_\zeta, \\ 1 & u_{xy} = u_{\xi\eta} + u_{\xi\zeta} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\eta\eta} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\zeta\zeta}, \\ 1 & u_{xz} = u_{\xi\eta} + u_{\xi\zeta} - \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\eta\eta} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\zeta\zeta}. \end{array} \quad (3)$$

В (3) слева от вертикальной черты написаны коэффициенты, с которыми соответствующие производные входят в уравнение (1).

Приводя подобные члены, из (3) получаем

$$\sqrt{2}u_{\eta\eta} - \sqrt{2}u_{\zeta\zeta} + (1 + \sqrt{2})u_\eta + (1 - \sqrt{2})u_\zeta = 0$$

или

$$0 \cdot u_{\xi\xi} + 1 \cdot u_{\eta\eta} - 1 \cdot u_{\zeta\zeta} + \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} u_{\eta} + \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} u_{\zeta} = 0.$$

**2.1.** Определить тип и привести к каноническому виду уравнения:

- 1)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0;$
- 2)  $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0;$
- 3)  $u_{xy} - u_{zz} + u_x + u_y - u_z = 0;$
- 4)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0;$
- 5)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0;$
- 6)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0;$
- 7)  $u_{xy} - u_{xt} + u_{xx} - 2u_{xt} + 2u_{tt} = 0;$
- 8)  $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0;$
- 9)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0;$
- 10)  $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0;$
- 11)  $u_{x_1x_1} + 2 \sum_{k=0}^n u_{x_kx_k} - 2 \sum_{k=1}^n u_{x_kx_{k+1}} = 0;$
- 12)  $u_{x_1x_1} - 2 \sum_{k=2}^n (-1)^k u_{x_{k-1}x_k} = 0;$
- 13)  $\sum_{k=1}^n k u_{x_kx_k} + 2 \sum_{l < k} l u_{x_lx_k} = 0;$
- 14)  $\sum_{k=1}^n u_{x_kx_k} + \sum_{l < k} l u_{x_lx_k} = 0;$
- 15)  $\sum_{l < k}^l u_{x_lx_k} = 0.$

**2.2.** В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения:

- 1)  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0;$
- 2)  $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0;$
- 3)  $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0;$
- 4)  $u_{xx} - xu_{yy} = 0;$
- 5)  $u_{xx} - yu_{yy} = 0;$
- 6)  $xu_{xx} - yu_{yy} = 0;$
- 7)  $yu_{xx} - xu_{yy} = 0;$
- 8)  $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0;$
- 9)  $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0;$

- 10)  $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0;$
- 11)  $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0;$
- 12)  $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0;$
- 13)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0;$
- 14)  $y^2 u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0;$
- 15)  $x^2 u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0.$

Пусть коэффициенты уравнения (I) непрерывны в некоторой области  $D$ . Функция  $u(x, y)$  называется *решением уравнения* (I), если она принадлежит классу  $C^2(D)$  и удовлетворяет уравнению (I) в области  $D$ . Множество всех решений уравнения (I) называется *общим решением уравнения* (I).

**2.3.** Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами:

- 1)  $u_{xy} = 0;$
- 2)  $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0;$
- 3)  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0;$
- 4)  $u_{xy} + au_x = 0;$
- 5)  $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2;$
- 6)  $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0;$
- 7)  $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y};$
- 8)  $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2 u_{yy} + u_x + au_y = 0.$

**2.4.** Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

заменой  $u(x, y) = v(x, y)e^{-bx-ay}$  приводится к виду  $v_{xy} + (c - ab)v = 0$ .

**2.5.** Доказать, что общее решение уравнения  $u_{xy} = u$  имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^x f(t) J_0 \left( 2i\sqrt{y(x-t)} \right) dt + \\ & + \int_0^y g(t) J_0 \left( 2i\sqrt{x(y-t)} \right) dt + [f(0) + g(0)] J_0(2i\sqrt{xy}), \end{aligned}$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя, а  $f$  и  $g$  — произвольные функции класса  $C^1$ .

**2.6.** Доказать, что общее решение уравнения  $u_{xy} = F(x, y)$ , где  $F \in C(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b)$ , имеет вид

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y F(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции класса  $C^2$ .

**2.7.** Доказать, что общее решение уравнения  $u_{xx} + A(x, y)u_x = 0$ , где  $A(x, y) \in C^1(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b)$ , имеет вид

$$u(x, y) = f(y) + \int_{x_0}^x g(\xi) \exp \left\{ - \int_{y_0}^y A(\xi, \eta) d\eta \right\} d\xi,$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции классов  $C^2$  и  $C^1$  соответственно.

**2.8.** Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{1}{x-y} u_x + \frac{1}{x-y} u_y = 0$$

имеет вид  $u(x, y) = \frac{f(x) + g(y)}{x-y}$ , где  $f$  и  $g$  — произвольные функции из класса  $C^2$ .

**2.9.** Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{n}{x-y} u_x + \frac{m}{x-y} u_y = 0,$$

где  $n$  и  $m$  — натуральные числа, имеет вид

$$u(x, y) = \frac{\partial^{n+m-2}}{(\partial x)^{m-1} (\partial y)^{n-1}} \left[ \frac{f(x) + g(y)}{x-y} \right],$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции из классов  $C^{m+1}$  и  $C^{n+1}$  соответственно.

**2.10.** Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} + \frac{n}{x-y} u_x - \frac{m}{x-y} u_y = 0,$$

где  $n$  и  $m$  — неотрицательные целые числа, имеет вид

$$u(x, y) = (x-y)^{n+m+1} \frac{\partial^{n+m}}{(\partial x)^n (\partial y)^m} \left[ \frac{f(x) + g(y)}{x-y} \right],$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции из классов  $C^{n+2}$  и  $C^{m+2}$  соответственно.

**2.11.** В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнений:

- 1)  $yu_{xx} + (x - y)u_{yy} - xu_{yy} = 0;$
- 2)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0;$
- 3)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0;$
- 4)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0;$
- 5)  $u_{xy} - xu_x = 0;$
- 6)  $u_{xy} + 2xyu_y - 2xu = 0;$
- 7)  $u_{xy} - xu_x + yu_y + (y - 1)u = 0;$
- 8)  $u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0.$

## Ответы к § 2

- 2.1.** 1)  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0; \xi = x, \eta = y - x, \zeta = x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;$
- 2)  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0; \xi = \frac{1}{2}x, \eta = \frac{1}{2}x + y, \zeta = -\frac{1}{2}x - y + z;$
- 3)  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\zeta = 0; \xi = x + y, \eta = y - x, \zeta = y + z;$
- 4)  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0; \xi = x, \eta = y - x, \zeta = 2x - y + z;$
- 5)  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0; \xi = x, \eta = y - x, \zeta = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;$
- 6)  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0; \xi = x, \eta = y - x, \zeta = x - y + z, \tau = 2x - 2y + z + t;$
- 7)  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0; \xi = x + y, \eta = y - x, \zeta = z, \tau = y + z + t;$
- 8)  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} = 0; \xi = x + y, \eta = x - y, \zeta = -2y + z + t, \tau = z - t;$
- 9)  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0; \xi = x, \eta = y - x, \zeta = 2x - y + z, \tau = x + z + t;$
- 10)  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0; \xi = x, \eta = y, \zeta = -x - y + z, \tau = x - y + t;$
- 11)  $\sum_{k=1}^n u_{\xi_k\xi_k} = 0; \xi_k = \sum_{l=1}^k x_l, k = 1, 2, \dots, n;$
- 12)  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} u_{\xi_k\xi_k} = 0; \xi_k = \sum_{l=1}^k x_l, k = 1, 2, \dots, n;$
- 13)  $\sum_{k=1}^n u_{\xi_k\xi_k} = 0; \xi_1 = x_1, \xi_k = x_k - x_{k-1}, k = 2, 3, \dots, n;$
- 14)  $\sum_{k=1}^n u_{\xi_k\xi_k} = 0; \xi_k = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \left( x_k - \frac{1}{k} \sum_{l < k} x_l \right), k = 1, 2, \dots, n;$

15)  $u_{\xi_1 \xi_1} - \sum_{k=2}^n u_{\xi_k \xi_k} = 0; \quad \xi_1 = \frac{3-n}{\sqrt{2(n-1)}} x_1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sum_{k=2}^n x_k, \quad \xi_k = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \sqrt{2} x_k, \quad k = 2, 3, \dots, n.$

**2.2.** 1)  $u_{\xi \eta} - \frac{1}{16}(u_\xi - u_\eta) = 0; \quad \xi = x - y, \quad \eta = 3x + y;$

2)  $u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} + u_\xi = 0; \quad \xi = x, \quad \eta = 3x + y;$

3)  $u_{\eta \eta} + u_\xi = 0; \quad \xi = x - 2y, \quad \eta = x;$

4)  $u_{\xi \eta} + \frac{1}{6(\xi + \eta)}(u_\xi + u_\eta) = 0; \quad \xi = \frac{2}{3}x^{3/2} + y, \quad \eta = \frac{2}{3}x^{3/2} - y, \quad x > 0;$   
 $u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi = 0; \quad \xi = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = y, \quad x < 0;$

5)  $u_{\xi \eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0; \quad \xi = x + 2\sqrt{y}, \quad \eta = x - 2\sqrt{y}, \quad y > 0; \quad u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0; \quad \xi = x, \quad \eta = 2\sqrt{-y}, \quad y < 0;$

6)  $u_{\xi \xi} - u_{\eta \eta} - \frac{1}{\xi}u_\xi + \frac{1}{\eta}u_\eta = 0; \quad \xi = \sqrt{|x|}, \quad \eta = \sqrt{|y|}, \quad (x > 0, y > 0 \text{ или } x < 0, y < 0); \quad u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} - \frac{1}{\xi}u_\xi - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0; \quad \xi = \sqrt{|x|}, \quad \eta = \sqrt{|y|}, \quad (x > 0, y < 0 \text{ или } x < 0, y > 0);$

7)  $u_{\xi \xi} - u_{\eta \eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi - \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0; \quad \xi = |x|^{3/2}, \quad \eta = |y|^{3/2}, \quad (x > 0, y > 0 \text{ или } x < 0, y < 0); \quad u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0; \quad \xi = |x|^{3/2}, \quad \eta = |y|^{3/2}, \quad (x > 0, y < 0 \text{ или } x < 0, y > 0);$

8)  $u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} - u_\xi - u_\eta = 0; \quad \xi = \ln|x|, \quad \eta = \ln|y| \text{ (в каждом квадранте);}$

9)  $u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0; \quad \xi = y^2, \quad \eta = x^2 \text{ (в каждом квадранте);}$

10)  $u_{\xi \eta} + \frac{1}{2(\eta^2 - \xi^2)}(\eta u_\xi - \xi u_\eta) = 0; \quad \xi = y^2 - x^2, \quad \eta = y^2 + x^2 \text{ (в каждом квадранте);}$

11)  $u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} - \operatorname{th} \xi u_\xi = 0; \quad \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2});$

12)  $u_{\xi \eta} - \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) + \frac{1}{4(\xi + \eta)}(u_\xi + u_\eta) = 0; \quad \xi = y^2 + e^x, \quad \eta = y^2 - e^x \quad (y > 0 \text{ или } y < 0);$

13)  $u_{\xi \xi} + u_{\eta \eta} + \cos \xi u_\eta = 0; \quad \xi = x, \quad \eta = y - \cos x;$

14)  $u_{\eta \eta} - 2u_\xi = 0; \quad \xi = 2x - y^2, \quad \eta = y;$

15)  $u_{\eta \eta} - \xi u_\xi = 0; \quad \xi = xe^y, \quad \eta = y.$

- 2.3.** 1)  $f(x) + g(y);$   
 2)  $f(y + ax) + g(y - ax);$   
 3)  $f(x - y) + g(3x + y);$   
 4)  $f(y) + g(x)e^{-ay};$   
 5)  $x - y + f(x - 3y) + g(2x + y)e^{(3y-x)/T};$   
 6)  $[f(x) + g(y)]e^{-5x-ay};$   
 7)  $e^{x+y} + [f(x) + g(y)]e^{3x+2y};$   
 8)  $f(y - ax) + g(y - ax)e^{-x}.$

- 2.11.** 1)  $f(x + y) + (x - y)g(x^2 - y^2)$  ( $x > -y$  или  $x < -y$ );  
 2)  $f(xy) + \sqrt{|xy|} g\left(\frac{x}{y}\right)$  (в каждом квадранте);  
 3)  $f(xy) + |xy|^{3/4} g\left(\frac{x^3}{y}\right)$  (в каждом квадранте);  
 4)  $xf\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$  (в каждом квадранте);  
 5)  $xf(y) - f'(y) + \int_0^x (x - \xi)g(\xi)e^{\xi y} d\xi.$   
 (Указание. Обозначая  $u_x = v$ , получить соотношения  $u = xv - v_y$ ,  $v_{xy} - xv_x = 0$ .)  
 6)  $2yg(x) + \frac{1}{x}g'(x) + \int_0^y (y - \xi)f(\xi)e^{-x^2\xi} d\xi.$   
 (Указание. Обозначая  $u_y = v$ , получить соотношения  $u = \frac{1}{2x}v_x + yv$ ,  $v_{xy} + 2xyv_y = 0$ .)  
 7)  $e^{-x} \left[ yf(x) + f'(x) + \int_0^y (y - \eta)g(\eta)e^{-x\eta} d\eta \right].$   
 (Указание. Обозначая  $u_y + u = v$ , получить соотношения  $u = v_x + yv$ ,  $v_{xy} + v_x + yv_y + yv = 0$ .)  
 8)  $e^{-xy} \left[ yf(x) + f'(x) + \int_0^y (y - \eta)g(\eta)e^{-x\eta} d\eta \right].$   
 (Указание. Обозначая  $u_y + xu = v$ , получить соотношения  $u = v_x + 3yv$ ,  $(v_y + xv)_x + 2y(v_y + xv) = 0$ .)

## Г л а в а 2

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### § 3. Измеримые функции. Интеграл Лебега

**1. Измеримые функции.** Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется *множеством ( $n$ -мерной) меры нуль*, если по любому  $\varepsilon > 0$  можно найти покрывающие его счетное множество открытых ( $n$ -мерных) кубов, сумма объемов которых меньше  $\varepsilon$ .

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^n$  — область. Если некоторое свойство выполнено всюду в  $Q$ , за исключением, быть может, множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *почти всюду в  $Q$*  (п. в. в  $Q$ ). Заданная в области  $Q$  функция  $f(x)$  называется *измеримой* в  $Q$ , если она является пределом п. в. в  $Q$  сходящейся последовательности функций из  $C(Q)$ . Если  $f(x) = g(x)$  п. в. в  $Q$ , то говорят, что функции *эквивалентны* в  $Q$ .

**3.1.** Установить, что следующие множества являются множествами меры нуль:

- 1) конечное множество точек;
- 2) счетное множество точек;
- 3) пересечение счетного множества множеств меры нуль;
- 4) объединение счетного множества множеств меры нуль;
- 5) гладкая  $(n - 1)$ -мерная поверхность;
- 6) гладкая  $k$ -мерная поверхность ( $k \leq n - 1$ ).

В задачах 3.2–3.9 доказать утверждения.

**3.2.** Функция Дирихле  $\chi(x)$  (равная 1, если все координаты точки  $x$  рациональны, и 0 в противоположном случае) равна нулю п. в.

**3.3.** Функция  $f(x) = \frac{1}{1 - |x|}$  почти всюду непрерывна в  $\mathbb{R}^n$ .

**3.4.** Последовательность функций  $f_n(x) = |x|^n$  в шаре  $|x| \leq 1$  сходится к нулю п. в.

**3.5. Теорема.** Для того чтобы множество  $E$  было множеством меры нуль, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое его покрытие счетной системой открытых кубов с конечной суммой объемов, при котором каждая точка  $E$  оказывается покрытой бесконечным множеством кубов.

**3.6.** Функция  $f \in C(Q)$  измерима.

**3.7.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны и  $g(x)$  измерима в  $Q$ , то  $f(x)$  тоже измерима в  $Q$ .

**3.8.** Предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций является измеримой функцией.

**3.9.** Функция, непрерывная в  $\overline{Q}$  за исключением подмножества, составленного из конечного (или счетного) числа гладких  $k$ -мерных поверхностей ( $k \leq n - 1$ ), измерима в  $Q$ .

**3.10.** Установить измеримость следующих функций, заданных на отрезке  $[-1, 1]$ :

а)  $y = \operatorname{sign} x$ ;

б)  $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

в)  $y = \begin{cases} \operatorname{sign} \left( \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

г)  $y = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n} \text{ при взаимно простых } m, n, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

**3.11.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы в  $Q$ . Установить измеримость следующих функций:

а)  $f(x)g(x)$ ;

б)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (при условии  $g(x) \neq 0$ ,  $x \in Q$ );

в)  $|f(x)|$ ;

г)  $(f(x))^{g(x)}$ , если  $f(x) > 0$ .

**3.12.** Пусть  $f(x) \in C(Q)$  и в каждой точке  $x \in Q$  существует производная  $f'_{x_1}$ . Доказать, что  $f'_{x_1}$  измерима в  $Q$ .

**3.13.** а) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы в  $Q$ . Доказать измеримость в  $Q$  функций  $\max\{f(x), g(x)\}$ ,  $\min\{f(x), g(x)\}$ .

б) Доказать, что всякая измеримая функция  $f(x)$  есть разность двух неотрицательных измеримых функций

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \min\{0, -f(x)\}.$$

**3.14.** Доказать, что неубывающая (невозрастающая) на отрезке  $[a, b]$  функция измерима.

**3.15.** Доказать, что если  $f(x)$  измерима в  $Q$ , то существует последовательность многочленов, сходящихся к  $f(x)$  п. в. в  $Q$ .

**2. Интеграл Лебега.** Заданную в области  $Q$  функцию  $f(x)$  будем считать принадлежащей классу  $L^+(Q)$ , если существует неубывающая последовательность непрерывных в  $Q$  финитных функций  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходящихся к  $f(x)$  п. в. в  $Q$ , и такая, что последовательность интегралов (Римана)  $\int_Q f_n(x) dx$  ограничена сверху. При этом интеграл Лебега от функции  $f(x) \in L^+(Q)$  определяется равенством

$$(L) \int_Q f dx = \sup_n \int_Q f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f_n dx.$$

Функция  $f(x)$  называется *интегрируемой по Лебегу* по области  $Q$ , если ее можно представить в виде разности  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  из  $L^+(Q)$ . При этом *интеграл Лебега* от функции  $f(x)$  определяется равенством

$$(L) \int_Q f dx = (L) \int_Q f_1 dx - (L) \int_Q f_2 dx.$$

Комплекснозначную функцию  $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$  будем называть *интегрируемой по Лебегу по области*  $Q$ , если функции  $\operatorname{Re} f(x)$ ,  $\operatorname{Im} f(x)$  интегрируемы по Лебегу. При этом по определению полагаем

$$(L) \int_Q f dx = (L) \int_Q \operatorname{Re} f dx + i(L) \int_Q \operatorname{Im} f dx.$$

Множество интегрируемых по Лебегу по области  $Q$  комплекснозначных функций, отождествляемых в случае их эквивалентности, обозначается  $L_1(Q)$ .

Функции из  $L_1(Q)$  конечны п. в. в  $Q$ . Если функция абсолютно интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают. Поэтому в дальнейшем будем опускать  $(L)$  перед знаком интеграла;

всегда под интегралом подразумевается интеграл Лебега, а под интегрируемой функцией — функция, интегрируемая по Лебегу. Более того, если функция абсолютно несобственно интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают.

Следующие теоремы играют важную роль в теории лебеговского интегрирования.

- a) Если функция  $f(x)$  измерима в  $Q$  и  $|f(x)| \leq g(x)$ , где  $g(x) \in L_1(Q)$ , то  $f \in L_1(Q)$ . В частности, измеримая ограниченная функция в ограниченной области  $Q$  принадлежит  $L_1(Q)$ .
- б) **Теорема Лебега.** Если последовательность измеримых в  $Q$  функций  $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$  сходится к функции  $f(x)$  п. в. в  $Q$  и  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , где  $g \in L_1(Q)$ , то  $f \in L_1(Q)$  и  $\int_Q f_n(x) dx \rightarrow \int_Q f(x) dx$  при  $n \rightarrow \infty$ .
- в) **Теорема Фубини.** Если  $f(x, y) \in L_1(Q \times P)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m) \in P$ , где  $Q$  и  $P$  — некоторые области из  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  соответственно, то

$$\int_Q f(x, y) dx \in L_1(P), \quad \int_P f(x, y) dy \in L_1(P)$$

и

$$\int_{Q \times P} f(x, y) dx dy = \int_Q dx \int_P f(x, y) dy = \int_P dy \int_Q f(x, y) dx.$$

Если  $f(x, y)$  измерима в  $Q \times P$ , а для п. в.  $x \in Q$  функция  $|f(x, y)| \in L_1(P)$  и  $\int_P |f(x, y)| dy \in L_1(Q)$ , то  $f(x, y) \in L_1(Q \times P)$ .

В задачах 3.16–3.20 доказать утверждения.

**3.16.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\int_Q f(x) dx = 0$ , то  $f(x) = 0$  п. в. в  $Q$ .

**3.17.** Если  $f(x) = 0$  п. в. в  $Q$ , то  $\int_Q f(x) dx = 0$ .

**3.18.** Если  $f, g \in L_1(Q)$ , то  $\alpha f + \beta g \in L_1(Q)$  при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

**3.19.** Если  $f \in L_1(Q)$ , то  $|f| \in L_1(Q)$  и

$$\left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx.$$

**3.20.** Если  $f \in L_1(Q)$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такая финитная функция  $g_\varepsilon \in C(Q)$ , что  $\int_Q |f - g_\varepsilon| dx < \varepsilon$ .

**3.21.** Проверить, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$ , но не интегрируема по Риману. Чему равен ее интеграл Лебега?

**3.22.** Найти интегралы по отрезку  $[0, 1]$  от следующих функций (предварительно доказав их интегрируемость):

- а)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \end{cases}$
- б)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/3, \\ x^3, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/3, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases}$
- в)  $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/2, \\ x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/2, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases}$
- г)  $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n, \text{ где } m, n \text{ взаимно просты,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \end{cases}$
- д)  $f(x) = \begin{cases} x^{-1/3}, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ x^3, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases}$
- е)  $f(x) = \operatorname{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right).$

**3.23.** При каких значениях  $\alpha$  интегрируемы по шару  $|x| < 1$  следующие функции:

а)  $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ ;    б)  $f(x) = \frac{1}{(1 - |x|)^\alpha}$ ;    в)  $f(x) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{|x|^\alpha}$ ?

**3.24.** Пусть  $g(x)$  — измеримая и ограниченная функция в ограниченной области  $Q$ . Показать, что функция  $f(x) = \int_Q \frac{g(\xi)}{|x - \xi|^\alpha} d\xi$  принадлежит  $C^k(\mathbb{R}^n)$  при  $k < n - \alpha$ .

**3.25.** Пусть  $f \in L_1(Q)$ . Показать, что функция

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| < N \text{ в точке } x, \\ N, & \text{если } |f(x)| \geq N \text{ в точке } x, \end{cases}$$

интегрируема на  $Q$  и справедливо соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_Q f_N(x) dx = \int_Q f(x) dx.$$

**3.26.** Пусть  $Q = (0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1)$ , а функция  $f(x)$  задана в  $Q$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{|x|^4} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0; \end{cases} \\ \text{в)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x_2^2} & \text{при } 0 < x_1 < x_2 < 1, \\ -\frac{1}{x_1^2} & \text{при } 0 < x_2 < x_1 < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \end{aligned}$$

- 1) Принадлежат ли эти функции пространству  $L_1(Q)$ ?
- 2) Принадлежат ли  $L_1(0, 1)$  функции

$$\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1, \quad \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2?$$

- 3) Выполняется ли равенство

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 dx_2 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1?$$

**3.27.** На отрезке  $[0, 1]$  задана последовательность ступенчатых функций  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{i}{2^k} \leq x \leq \frac{i+1}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in [0, 1], \end{cases}$$

где целые числа  $n, k, i$  связаны соотношениями

$$n = 2^k + i, \quad 0 \leq i \leq 2^k - 1.$$

Показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 0$  и что  $f_n(x) \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $x \in [0, 1]$ .

Множество измеримых в  $Q$  функций, квадрат модуля которых принадлежит  $L_1(Q)$ , называется *пространством*  $L_2(Q)$  (при этом, как и в случае  $L_1(Q)$ , эквивалентные функции считаются отождествленными).

В задачах 3.28–3.33 доказать утверждения:

**3.28.** Если  $f_1, f_2 \in L_2(Q)$ , то  $\alpha f_1 + \beta f_2 \in L_2(Q)$  при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

**3.29.** Если  $f \in L_2(Q)$  и  $Q$  — ограниченная область (или область с ограниченным объемом), то  $f \in L_1(Q)$ .

**3.30.** Ни одно из включений  $L_1(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ ,  $L_2(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$  места не имеет.

**3.31.** Если  $f, g \in L_2(Q)$ , то  $f \cdot g \in L_1(Q)$ .

**3.32.** Если  $f, g \in L_2(Q)$ , то имеет место неравенство Буняковского

$$\left| \int_Q f \cdot g \, dx \right| \leq \left( \int_Q |f|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_Q |g|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

**3.33.** Если  $f, g \in L_2(Q)$ , то имеет место неравенство Минковского

$$\left( \int_Q |f + g|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_Q |f|^2 \, dx \right)^{1/2} + \left( \int_Q |g|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

**3.34.** Установить принадлежность в  $L_2(Q)$  следующих функций:

а)  $y = x^{-1/3}$ ,  $Q = [0, 1]$ ;

б)  $y = \frac{\sin x}{x^{3/4}}$ ,  $Q = (0, 1)$ ;

в)  $y = \begin{cases} x^{-1/3} \cos x, & x \text{ иррационально}, \\ x^{-1/3}, & x \text{ рационально, } x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} Q = [-1, 1];$

г)  $y = \begin{cases} \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & |x| \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} Q = (|x| < 1);$

д)  $y = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3} \operatorname{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right)}, & |x| \neq 0, x \neq 1/k, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = 0, x = 1/k, k \in \mathbb{N}, \end{cases} Q = [0, 1].$

**3.35.** При каких  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $f(x) = \frac{1}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}$  принадлежит  $L_2(Q)$ , если  $Q = \{|x_1| + |x_2| > 1\}$ ?

**3.36.** При каких  $\alpha$  функция  $r^{-\alpha}$ ,  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ , принадлежит  $L_2(Q)$ , если:

$$\text{а) } Q = (r < 1); \quad \text{б) } Q = (r > 1)?$$

**3.37.** При каких  $\alpha$  функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin|x|^2}{|x|^\alpha} & \text{при } |x| \neq 0, \\ 0 & \text{при } |x| = 0, \end{cases} \quad |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

принадлежит  $L_2(Q)$ , если  $Q = (|x| < 1)$ ?

**3.38.** При каких  $\alpha$  функция  $|x|^{-\alpha}$ , где  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$  принадлежит  $L_2(Q)$ , если:

$$\text{а) } Q = (|x| < 1); \quad \text{б) } Q = (|x| > 1); \quad \text{в) } Q = \mathbb{R}^n?$$

**3.39.** Пусть функция  $g \in L_2(Q)$ , где  $Q$  — ограниченная область. Показать, что функция  $f(x) = \int_Q \frac{g(y)}{|x - y|^\alpha} dy$  для  $\alpha < \frac{n}{2}$  принадлежит пространству  $C^k(\overline{Q})$  при  $k < \frac{n}{2} - \alpha$ .

**3.40.** Показать, что для функции  $f \in L_2(Q)$  ( $Q$  — ограниченная область) по любому  $\varepsilon > 0$  найдется такая функция  $f_\varepsilon \in C(\overline{Q})$ , что

$$\int_Q |f - f_\varepsilon|^2 dx < \varepsilon.$$

### Ответы к § 3

**3.21.** 0.

**3.22.** а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{35}{108}$ ; в)  $\frac{1}{\pi} + \frac{7}{24}$ ; г) 0; д)  $\frac{3}{2}$ ; е)  $1 - 2 \ln 2$ .

**3.23.** а)  $\alpha < n$ ; б)  $\alpha < 1$ ; в)  $\alpha < 2n$ .

**3.26.** а) 1) нет, 2) нет, 3) нет; б) 1) нет, 2) да, 3) нет; в) 1) нет, 2) да, 3) нет.

**3.35.**  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} < 1$ .

**3.36.** а)  $\alpha < 1$ ; б)  $\alpha > 1$ .

**3.37.**  $\alpha > \frac{7}{4}$ .

**3.38.** а)  $\alpha < \frac{n}{2}$ ; б)  $\alpha > \frac{n}{2}$ ; в) ни при каких  $\alpha$ .

## § 4. Функциональные пространства

**1. Линейные нормированные пространства.** Комплексным (вещественным) линейным пространством называется множество  $M$ , для элементов которого определены операции сложения и умножения на комплексные (вещественные) числа, не выводящие из  $M$  и обладающими свойствами:

- а)  $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$ ;
- б)  $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$ ;
- в) в  $M$  существует такой элемент  $0$ , что  $0 \cdot f = 0$  для любого  $f \in M$ ;
- г)  $(c_1 + c_2)f = c_1f + c_2f$ ;
- д)  $c(f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$ ;
- е)  $(c_1c_2)f = c_1(c_2f)$ ;
- ж)  $1 \cdot f = f$ ,

для любых  $f, f_1, f_2, f_3$  из  $M$  и любых комплексных (вещественных) чисел  $c, c_1, c_2$ .

Система элементов  $f_1, \dots, f_k$  из  $M$  называется *линейно независимой*, если равенство  $c_1f_1 + \dots + c_kf_k = 0$  имеет место только при  $c_1 = \dots = c_k = 0$ . В противном случае система  $f_1, \dots, f_k$  линейно зависима. Бесконечная система  $f_1, f_2, \dots$  называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому его элементу  $f$  поставлено в соответствие вещественное число  $\|f\|$ , называемое *нормой*  $f$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- а)  $\|f\| \geq 0$ , причем  $\|f\| = 0$  лишь при  $f = 0$ ;
- б)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ , (неравенство треугольника);
- в)  $\|cf\| = |c|\|f\|$  при произвольной постоянной  $c$ .

Для линейного нормированного пространства можно определить понятие расстояния между элементами  $\rho(f, g) = \|f - g\|$  и понятие *сходимости по норме*: последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к некоторому элементу  $f$  ( $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$ ), если  $\rho(f, f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Последовательность элементов  $f_1, f_2, \dots$  линейного нормированного пространства называется *фундаментальной*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$  при  $m, n > N$ .

Линейное нормированное пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность элементов име-

ет в этом пространстве предел. Полное линейное нормированное пространство  $B$  называется *пространством Банаха*.

Множество  $R \in B$  называется *плотным* в  $B$ , если для любого элемента  $f \in B$  существует последовательность  $f_1, f_2, \dots$  из  $\mathbb{R}$ , сходящаяся к  $f$  ( $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

**4.1.** Установить, что следующие множества являются линейными пространствами:

- а) множество  $C^k(Q)$ ,  $0 \leq k < \infty$ ;
- б) множество точек  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^n$ ; множество точек комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ;
- в) множество финитных в  $Q$  функций;
- г) множество ограниченных в  $Q$  функций;
- д) множество аналитических функций в области  $Q$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ;
- е) множество функций из  $C(\overline{Q})$ , обращающихся в нуль на некотором множестве  $E \in \overline{Q}$ ;
- ж) множество  $C(Q \setminus \{x^0\})$ , где  $x^0 \in Q$ ;
- з) множество функций  $f$  из  $C(Q)$ , для которых  $\int_Q f \varphi dx = 0$ , где  $\varphi$  — некоторая функция из  $C(\overline{Q})$ , а  $Q$  — ограниченная область;
- и) множество функций из  $C(\overline{Q})$ , для которых  $\int_S f \varphi ds = 0$ , где  $\varphi$  — некоторая функция из  $C(\overline{Q})$ , а  $S$  — ограниченный кусок гладкой поверхности, лежащей в  $Q$ ;
- к) множество функций, интегрируемых по Риману (по области  $Q$ );
- л) множество принадлежащих  $C^k(\overline{Q})$  решений линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{|\alpha| \leq k} A_n(x) D^\alpha f = 0, \quad \text{где } A_\alpha \in C(\overline{Q}), \quad |\alpha| \leq k;$$

- м) множество измеримых в  $Q$  функций;
- н) пространство  $L_1(Q)$ ;
- о) пространство  $L_2(Q)$ .

**4.2.** Убедиться, что следующие множества функций не составляют линейного пространства:

- а) множество функций из  $C(Q)$ , равных 1 в некоторой точке  $x^0 \in Q$ ;
- б) множество функций  $f \in C(Q)$ , для которых  $\int_Q f dx = 1$  ( $Q$  — ограниченная область);

в) множество решений дифференциального уравнения  $\Delta u = 1$ .

**4.3.** Доказать, что следующие системы функций линейно независимы:

а)  $1, x, x^2, \dots$ , на отрезке  $[a, b]$  ( $a < b$ );

б)  $x^\alpha$ ,  $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots$ , в области  $Q$ ;

в)  $e^{ikx}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , на отрезке  $[a, b]$ ;

г)  $|f(x)|^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , в области  $Q$ , где  $f(x)$  — некоторая функция из  $C(Q)$ ,  $f \neq \text{const}$ .

**4.4.** Доказать, что множество  $C(\bar{Q})$  является линейным нормированным пространством с нормой:

$$1) \|f\|_{C(\bar{Q})} = \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|; \quad 2) \|f\|'_{C(\bar{Q})} = 13 \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|.$$

**4.5.** Доказать, что множество  $C^k(\bar{Q})$  есть линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{C^k(\bar{Q})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{Q}} |D^\alpha f(x)|. \quad (\text{I})$$

**4.6.** Пусть  $E$  — некоторое множество из  $\bar{Q}$ . Показать, что множество непрерывных в  $\bar{Q}$  функций  $f(x)$ , обращающихся в нуль в точках  $E$ , есть линейное нормированное пространство с нормой (I) при  $k = 0$ .

**4.7.** Установить, что следующие множества определенных в ограниченной области  $Q$  функций являются линейным нормированным пространством с нормой (I) при  $k = 0$ :

а) множество функций из  $C(\bar{Q})$ , финитных в  $Q$ ;

б) множество  $C^\infty(\bar{Q})$ ;

в) множество аналитических в  $Q$  и непрерывных в  $\bar{Q}$  функций.

**4.8.** Убедиться, что в  $\mathbb{R}^n$  можно ввести норму следующим образом:

$$a) \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|; \quad b) \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}; \quad v) \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

**4.9.** Убедиться, что при любом  $p \geq 1$  в  $\mathbb{R}^n$  можно ввести норму формулой

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Найти  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$ .

**4.10.** Показать, что при любом  $p \geq 1$  в качестве нормы в  $C(\bar{Q})$  можно взять выражение

$$\|f\|_p = \left( \int_G |f|^p dx \right)^{1/p} \quad (\text{II})$$

(область  $Q$  ограничена). Найти  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ .

**4.11.** Убедиться, что линейные пространства примеров 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9 являются банаховыми (т. е. полными в соответствующих нормах), а линейные нормированные пространства примеров 4.7, 4.10 при конечном  $p$  — неполными.

**4.12.** Показать, что в пространствах  $L_1(Q)$  и  $L_2(Q)$  можно ввести нормы

$$\|f\|_{L_1(Q)} = \int_Q |f| dx, \quad (\text{III})$$

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left( \int_Q |f|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (\text{IV})$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Пространства  $L_1(Q)$  с нормой (III) и  $L_2(Q)$  с нормой (IV) банаховы.

Подмножество  $B'$  банахова пространства  $B$  называется (банаховым) подпространством пространства  $B$ , если оно является банаховым пространством с нормой пространства  $B$ .

**4.13.** Пусть область  $Q$  ограничена. Показать, что:

- а) множество  $\dot{C}(\bar{Q})$  функций из  $C(\bar{Q})$ , обращающихся в нуль на границе области  $Q$ , есть банахово подпространство  $C(\bar{Q})$  (с нормой (I) при  $k = 0$ );
- б) подмножество функций  $f$  из:
  - 1)  $C(\bar{Q})$ ; 2)  $L_1(Q)$ ; 3)  $L_2(Q)$ , для которых  $\int_Q f(x)\varphi_i(x) dx = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , где  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  — некоторые функции из  $C(\bar{Q})$ , есть банахово подпространство пространства  $C(\bar{Q})$  (с нормой (I) при  $k = 0$ ),  $L_1(Q)$  (с нормой (III)) и  $L_2(Q)$  (с нормой (IV)) соответственно.

**4.14.** Показать, что счетное множество, составленное из линейных комбинаций с рациональными коэффициентами одночле-

нов  $x^\alpha$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots$ , всюду плотно в:

- а)  $C(\overline{Q})$  (норма (I) при  $k = 0$ );
- б)  $L_1(Q)$  (норма (III));
- в)  $L_2(Q)$  (норма (IV)), где  $Q$  — ограниченная область.

**2. Гильбертовы пространства.** Пусть любым двум элементам  $f$  и  $g$  некоторого комплексного (вещественного) линейного пространства  $H$  поставлено в соответствие комплексное (вещественное) число  $(f, g)$ , называемое *скалярным произведением* этих элементов, обладающее следующими свойствами:

- а)  $(f, g) = (\overline{g}, f)$ ;
- б)  $(f + g, f_1) = (f, f_1) + (g, f_1)$  при любой  $f_1 \in H$ ;
- в)  $(cf, g) = c(f, g)$  при любой постоянной  $c$ ;
- г) для любого  $f \in H$  число  $(f, f)$  вещественно и  $(f, f) \geq 0$ , причем  $(f, f) = 0$  только при  $f = 0$ .

Пространство  $H$  можно *нормировать*, положив, например,  $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ . Эта норма называется *нормой, порожденной скалярным произведением*.

Пространство  $H$  называется *гильбертовым*, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

Последовательность элементов  $f_1, f_2, \dots$  из  $H$  называется *слабо сходящейся* к элементу  $f \in H$ , если для любого  $h \in H$

$$(f_k, h) \longrightarrow (f, h) \quad \text{при } k \longrightarrow \infty.$$

Элементы  $f$  и  $g$  называются *ортогональными*, если  $(f, g) = 0$ . Элемент  $f$  называется *нормированным*, если  $\|f\| = 1$ . Система  $e_1, e_2, \dots$  называется *ортонормированной*, если  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

Пусть  $f \in H$ , а  $e_1, e_2, \dots$  — ортонормированная система в  $H$ . Числа  $f_k = (f, e_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называются *коэффициентами Фурье* элемента  $f$ , а сходящийся в норме  $H$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)e_k$  — *рядом Фурье* элемента  $f$  по ортонормированной системе  $e_1, e_2, \dots$ .

Система  $e_1, e_2, \dots$  называется *ортонормированным базисом* или *полной ортонормированной системой*, если она является ортонормированной и множество элементов  $c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ke_k$  при всевозможных постоянных  $c_1, \dots, c_k$  и  $k$  всюду плотно в  $H$ .

Ряд Фурье элемента  $f$  по ортонормированному базису сходится в норме  $H$  к  $f$ .

**4.15.** Показать, что  $L_2(Q)$  — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_Q f \bar{g} dx. \quad (\text{V})$$

**4.16.** Подмножество функций  $f \in L_2(Q)$ , ортогональных к некоторым функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  из  $L_2(Q)$ , образует подпространство пространства  $L_2(Q)$ .

Пусть в области  $Q$  задана непрерывная и положительная функция  $\rho(x)$  (весовая функция). Обозначим  $L_{2,\rho}(Q)$  множество измеримых в  $Q$  функций  $f(x)$ , для которых  $\rho|f|^2 \in L_1(Q)$ .

**4.17.** Показать, что  $L_{2,\rho}(Q)$  — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_Q \rho f \bar{g} dx. \quad (\text{VI})$$

**4.18.** Доказать, что:

- а)  $L_2(Q) \subset L_{2,\rho}(Q)$ , если  $\rho(x)$  ограничена в  $Q$ ;
- б)  $L_{2,\rho}(Q) \subset L_2(Q)$ , если  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$  в  $Q$  ( $\rho_0 = \text{const}$ ).

**4.19.** Установить ортогональность в  $L_2(Q)(0, 2\pi)$  тригонометрической системы  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$ .

**4.20.** Доказать, что системы функций  $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x, n = 1, 2, \dots$ , и  $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, n = 1, 2, \dots$ , ортогональны в  $L_2(0, \pi)$ .

**4.21.** Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, \dots,$$

образуют ортонормированную систему в  $L_2(-1, 1)$ .

**4.22.** Доказать, что система функций

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n(\arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

есть система многочленов (многочлены Чебышева), ортонормированная в  $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$ .

**4.23.** Доказать, что система функций

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

есть система многочленов (многочлены Эрмита), ортогональная в  $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$ .

**4.24.** Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора  $-\frac{d^2}{dx^2}$ , заданного на функциях из  $C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]$  при граничных условиях  $(hu - u_x)|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ,  $h$  — постоянная, ортогональны в  $L_2(0, 1)$ .

**4.25.** Показать, что отвечающие различным значениям собственные функции оператора  $-\Delta$ , заданного на функциях  $f \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  при граничном условии  $u|_\Gamma = 0$  или  $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + g(x)u\right)|_\Gamma = 0$ , где  $g \in C(\Gamma)$ , ортогональны в  $L_2(Q)$ .

**4.26.** Пусть  $\rho \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора  $-\frac{1}{\rho(x)}\Delta$ , заданного на  $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в  $L_{2,\rho}(Q)$ .

**4.27.** Пусть  $p \in C^1[0, 1]$ ,  $q \in C[0, 1]$ ,  $\rho \in C[0, 1]$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора

$$-\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + \frac{q(x)}{\rho(x)},$$

заданного на  $C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]$  при граничных условиях  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $(u_x + Hu)|_{x=1} = 0$  ( $H$  — постоянная), ортогональны в  $L_{2,\rho}((0, 1))$ .

**4.28.** Пусть  $p \in C^1(Q)$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора  $-\frac{1}{\rho(x)} \operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q(x)$ , заданного на  $C^2(Q) \cap C^1(Q)$  при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в  $L_{2,\rho}(Q)$ .

**4.29.** Показать, что принадлежащие  $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  решения в  $Q$  уравнения  $\Delta u = 0$ , удовлетворяющие при различных  $\lambda$  граничному условию  $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u\right)|_\Gamma = 0$ , ортогональны в  $L_2(\Gamma)$ .

**4.30.** Показать, что последовательность  $\sin kx$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится слабо к нулю в  $L_2(0, 2\pi)$ , но не сходится в норме  $L_2(0, 2\pi)$ .

В задачах 4.31–4.39 доказать утверждения.

**4.31.** Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится к  $f(x)$  по норме  $L_2(Q)$ , то она сходится и слабо в  $f(x)$ .

**4.32.** Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится к  $f(x)$  по норме  $L_2(Q)$ , то  $\int_Q f_n dx \rightarrow \int_Q f dx$ ,  $n \rightarrow \infty$  ( $Q$  — ограниченная область).

**4.33.** Если  $u_k \in L_2(Q)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится к  $u(x)$  по норме  $L_2(Q)$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_Q u_k dx \rightarrow \int_Q u dx$  ( $Q$  — ограниченная область).

**4.34.** Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $C(\overline{Q})$  сходится к  $f(x)$  равномерно в  $Q$ , то она сходится и по норме  $L_2(Q)$  ( $Q$  — ограниченная область).

**4.35.** Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится слабо к  $f(x) \in L_2(Q)$ , то последовательность норм  $\|f_n(x)\|_{L_2(Q)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ограничена.

**4.36.** Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится слабо к  $f(x) \in L_2(Q)$  и  $\|f_n(x)\| \rightarrow \|f(x)\|$  при  $n \rightarrow \infty$ , то эта последовательность сходится к  $f(x)$  и по норме  $L_2(Q)$ .

**4.37.** Для любой функции  $f(x) \in L_2(Q)$  имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2,$$

где  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — коэффициенты Фурье функции  $f$  по ортонормированной системе  $e_1, e_2, \dots$ .

**4.38.** Любая ортонормированная система  $e_1, \dots, e_n, \dots$  в  $L_2(Q)$  сходится слабо к нулю, но не сходится по норме  $L_2(Q)$ .

**4.39.** Для любой  $f \in L_2(Q)$

$$\min_{e_1 \dots e_n} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|, \quad f_k(f, e_k),$$

т. е.  $n$ -я частная сумма ряда Фурье наилучшим образом приближает  $f(x)$  в  $L_2(Q)$ .

**4.40.** Найти многочлен второй степени, наилучшим образом приближающий в  $L_2[-1, 1]$  функцию:

- а)  $x^3$ ;    б)  $\sin \pi x$ ;    в)  $|x|$ .

**4.41.** Найти тригонометрический многочлен первого порядка, наилучшим образом приближающий в  $L_2(-\pi, \pi)$  функцию:

- а)  $|x|$ ;    б)  $\sin \frac{x}{2}$ .

**4.42.** Найти многочлен первой степени, наилучшим образом приближающий в  $L_2(Q)$  функцию  $x_1^2 - x_2^2$ , где  $Q$ :

- а) круг  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ;  
б) квадрат  $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ .

**4.43.** Установить полноту в  $L_2(Q)$  систем:

- а)  $\sin kx, k = 1, 2, \dots, Q = [0, \pi]$ ;  
б)  $\sin(2k+1)x, k = 0, 1, \dots, Q = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

В задачах 4.44–4.50 доказать утверждения.

**4.44.** Многочлены Лежандра (задача 4.21) и многочлены Чебышева (задача 4.22) образуют ортонормированные базисы пространства  $L_2(-1, 1)$  и  $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$  соответственно.

**4.45.** Чтобы ортонормированная в  $L_2(Q)$  система  $e_1, e_2, \dots$  была ортонормированным базисом  $L_2(Q)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f \in L_2(Q)$  выполнялось равенство Парсеваля–Стеклова

$$|f|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2.$$

**4.46.** Если  $f \in L_2(a, b)$  и  $\int_a^b x^k f(x) dx = 0$  для  $k = 0, 1, \dots$ , то  $f(x) = 0$  п. в. на  $(a, b)$ .

**4.47.** Если  $f \in L_2(Q)$  и  $\int_Q x^{\alpha} f(x) dx = 0$  для всех  $\alpha, |\alpha| = 0, 1, \dots$ , то  $f(x) = 0$  п. в. в  $Q$ .

**4.48.** Если  $f_k$  и  $g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — коэффициенты Фурье функций  $f$  и  $g$  из  $L_2(Q)$  по некоторому ортонормированному базису, то

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k.$$

**4.49.** Всякая ортонормированная система  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независима.

**4.50.** Для того чтобы система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  из  $L_2(Q)$  была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грамма  $\det(\varphi_i, \varphi_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , был отличен от нуля.

Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — некоторая линейно независимая система функций из  $L_2(Q)$  (или  $L_{2,\rho}(Q)$ ). Функцию  $e_1(x)$  определим следующим образом:  $e_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$ . Подберем постоянные  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы функция  $e_2 = c_1 e_1 + c_2 \varphi_2$  была нормированной и ортогональной в  $L_2(Q)$  (в  $L_{2,\rho}(Q)$ ) к функции  $e_1$  и т. д. При условии, что построены функции  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , функцию  $e_n$  будем разыскивать в виде  $e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_{n-1} e_{n-1} + \beta_n \varphi_n$  с такими постоянными  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , чтобы  $e_n$  была нормированной и ортогональной к функциям  $e_1, \dots, e_{n-1}$ . Этот способ ортонормирования системы  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  называется *методом Грамма–Шмидта*.

**4.51.** Найти явное выражение функций  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , через функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

**4.52.** Ортонормировать в  $L_{2,\rho}(Q)$  методом Грамма–Шмидта следующие последовательности функций, предварительно убедившись в их линейной независимости:

- а)  $1, x, x^2, x^3$  ( $\rho \equiv 1, Q = (-1, +1)$ );
- б)  $1 - x, 1 + x^2, 1 + x^3$  ( $\rho \equiv 1, Q = (-1, +1)$ );
- в)  $\sin^2 \pi x, 1, \cos \pi x$  ( $\rho \equiv 1, Q = (-1, +1)$ );
- г)  $1, x, x^2$  ( $\rho = e^{-x}, Q = (0, \infty)$ );
- д)  $1, x, x^2$  ( $\rho = e^{-x^2/2}, Q = (-\infty, +\infty)$ );
- е)  $1, x, x^2$  ( $\rho = \sqrt{1 - x^2}, Q = (-1, 1)$ );
- ж)  $1, x, x^2$  ( $\rho = 1/\sqrt{1 - x^2}, Q = (-1, 1)$ ).

**4.53.** Показать, что в результате ортонормирования системы  $1, x, x^2, \dots$  методом Грамма–Шмидта в скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{f \bar{g}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

получается ортонормированный базис пространства  $L_{2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1, 1)$ , состоящий из многочленов Чебышева  $T_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**4.54.** Ортонормировать систему многочленов  $1, x_1, x_2$  в круге  $|x| < 1$  со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u\bar{v} dx.$$

**4.55.** Ортонормировать систему многочленов  $1, x_1, x_2, x_3$  в шаре  $|x| < 1$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u\bar{v} dx.$$

**4.56.** Обозначим через  $L'_2(-\infty, \infty)$  множество таких функций  $f(x) \in L_{2,\text{loc}}(-\infty, \infty)$ , для которых существует конечный предел  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^k |f|^2 dx$ . Показать, что  $L'_2(-\infty, \infty)$  — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^k f\bar{g} dx.$$

**4.57.** Доказать, что система функций  $e^{i\alpha x}$ , где  $\alpha$  — любое вещественное число, является ортонормированной системой в  $L'_2(-\infty, \infty)$  (см. предыдущую задачу).

**3. Гильбертово пространство дифференцируемых функций.** Пусть  $Q$  — некоторая ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ . Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс (см. обозначения). Функция  $f^{(\alpha)} \in L_{1,\text{loc}}(Q)$  называется *обобщенной производной* (о.п.) порядка  $\alpha$  функции  $f$  из  $L_{1,\text{loc}}(Q)$ , если для любой финитной в  $Q$  функции  $g \in C^{|\alpha|}(\overline{Q})$  имеет место равенство<sup>1)</sup>

$$\int_Q f D^\alpha g dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^{(\alpha)} g dx. \quad (\text{I})$$

---

<sup>1)</sup> Более общее определение см.: Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — 5-е изд. — М.: Наука, 1985.

Если функция  $f \in C^{|\alpha|}(Q)$ , то о.п.  $f^{(\alpha)}(x)$  существует в  $f^{(\alpha)}(x) = D^\alpha f(x)$  п. в. Поэтому в дальнейшем о.п. порядка  $\alpha$  функции  $f(x)$  будет обозначаться через  $D^\alpha f$ .

Множество функций (для наших целей их удобнее считать вещественными)  $f \in L_2(Q)$ , имеющих все о.п. до порядка  $k$  включительно, принадлежащие  $L_2(Q)$ , называется *пространством Соболева*  $H^k(Q)$  (самим С. Л. Соболевым это пространство обозначено через  $W_2^k(Q)$ );  $H^k(Q)$  — гильбертово пространство. Скалярное произведение в нем можно задать формулой

$$(f, g) = \int_Q \left( \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha g \right) dx, \quad (\text{II})$$

а соответствующую согласованную с ним норму —

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \left[ \int_Q \left( \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f)^2 \right) dx \right]^{1/2}. \quad (\text{II}')$$

При  $k = 0$  пространство  $H^k(Q)$  совпадает с  $L_2(Q)$  ( $H^0(Q) = L_2(Q)$ ). Если граница  $\Gamma$  достаточно гладкая, то пространство  $H^k(Q)$  есть пополнение множества  $C^k(\overline{Q})$  по норме (II').

Пусть  $f \in H^1(Q)$ ,  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — последовательность функций из  $C^1(\overline{Q})$ , сходящаяся в норме  $H^1(Q)$  к  $f(x)$ . Для любой гладкой  $(n - 1)$ -мерной поверхности  $S$  (состоящей из конечного числа кусков, каждый из которых однозначно проектируется на какую-нибудь координатную плоскость), лежащей в  $\overline{Q}$ , существует такая постоянная  $c > 0$ , не зависящая от  $f(x)$  и  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , что

$$\int_S |f_k - f_m|^2 ds \leq c \|f_k - f_m\|_{H^1(Q)}^2.$$

Из этого неравенства и полноты пространства  $L_2(S)$  вытекает, что последовательность следов функций  $f_k(x)$  на  $S$  сходится в норме  $L_2(S)$  к некоторой функции  $g \in L_2(S)$ . Функция  $g(x)$  не зависит от выбора последовательности приближающей функции  $f(x)$  и называется *следом*  $f|_S$  функции  $f(x)$  на поверхности  $S \in \overline{Q}$ .

Множество функций на  $H^1(Q)$ , след которых на границе  $\Gamma$  равен нулю п. в. на  $\Gamma$ , обозначим через  $\dot{H}^1(Q)$ :

$\dot{H}^1(Q)$  — подпространство пространства  $H^1(Q)$ ;

$\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$  — пополнение по норме пространства  $H^1(Q)$  множества финитных в  $Q$  функций из  $C^1(Q)$ .

Для функции  $f \in L_1(Q)$  свертка  $f_k(x) = \int_Q \omega_h(|x - y|)f(y) dy$ , где  $\omega_h(|x - y|)$  — ядро усреднения (см. обозначения), называется *средней функцией для f*.

Пусть  $x_i = \varphi_i(y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  —  $k$  раз непрерывно дифференцируемое в  $\bar{Q}$  взаимно однозначное отображение области  $Q$  на область  $Q'$  с якобианом, отличным от нуля в  $Q$ . Тогда если  $f \in H^1(Q)$ , то

$$F(y) = f(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \in H^k(Q').$$

Два скалярных произведения  $(u, v)_I$  и  $(u, v)_{II}$  в гильбертовом пространстве и соответствующие им нормы  $\|u\|_I$  и  $\|u\|_{II}$  называются *эквивалентными*, если существуют постоянные  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$  такие, что для любого  $u \in H$  справедливы неравенства  $c_1\|u\|_I \leq \|u\|_{II} \leq c_2\|u\|_I$ .

**4.58.** Установить, что смешанная о.п. не зависит от порядка дифференцирования.

**4.59.** Показать, что из существования о.п.  $D^\alpha f$  не следует существования о.п.  $D^{\alpha'} f$  при  $\alpha'_i \leq \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $|\alpha'| < |\alpha|$ .

Указание. Рассмотреть функцию  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ , где  $f_i(x_i)$  не имеют о.п. первого порядка.

**4.60.** Показать, что если в области  $Q$  функция  $f(x)$  имеет о.п.  $D^\alpha f$ , то и в любой подобласти  $Q' \subset Q$  функция  $f(x)$  имеет о.п.  $D^\alpha f$ .

**4.61.** Пусть в области  $Q_1$  задана функция  $f_1(x)$ , имеющая о.п.  $D^\alpha f_1$ , а в области  $Q_2$  — функция  $f_2(x)$ , имеющая о.п.  $D^\alpha f_2$ . Доказать, что если  $Q_1 \cup Q_2$  — область и для  $x \in Q_1 \cap Q_2$   $f_1(x) = f_2(x)$ , то функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in Q_1, \\ f_2(x), & x \in Q_2, \end{cases}$$

имеет о.п.  $D^\alpha f$  в  $Q_1 \cup Q_2$ , равную  $D^\alpha f_1$  в  $Q_1$  и  $D^\alpha f_2$  в  $Q_2$ .

**4.62.** Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, x_2 > 0, \\ -1, & \text{если } |x| < 1, x_2 < 0. \end{cases}$$

Убедиться, что  $f(x_1, x_2)$  имеет обобщенные производные первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет о.п. по  $x_2$  в круге  $|x| < 1$ .

**4.63.** Доказать свойства средних функций:

- а)  $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;
- б)  $f_h$  сходится при  $h \rightarrow 0$  к  $f(x)$  в  $L_2(Q)$ , если  $f \in L_2(Q)$ ;
- в) в любой строго внутренней подобласти  $Q' \Subset Q$  при достаточно малом  $h$  имеет место равенство  $(D^\alpha f)_h = D^\alpha f_h$ , т. е. обобщенная производная от средней функции равна средней функции от обобщенной производной.

В задачах 4.64–4.72 доказать утверждения.

**4.64.** Если у функции  $f(x)$  в области  $Q$  существует о.п.  $D^\alpha f = \omega(x)$ , а для функции  $\omega(x)$  существует о.п.  $D^\beta \omega$ , то существует о.п.  $D^{\alpha+\beta} f$ .

**4.65.** а)  $y = \operatorname{sign} x \notin H^1(-1, 1)$ ; б)  $y = |x| \in H^1(-1, 1)$ ,  $y = |x| \notin H^2(-1, 1)$ .

**4.66.** Если  $f \in H^1(a, b)$  и о.п.  $f'(x) = 0$ , то  $f(x) = \text{const}$  п. в.

**4.67.** Если  $f \in H^1(a, b)$ , то  $f(x)$  эквивалентна на  $[a, b]$  непрерывной функции.

**4.68.** Если  $f \in H^1(-\infty, \infty)$ , то  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**4.69.** Обозначим через  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$  подпространство пространства  $H^1(0, 2\pi)$ , состоящее из всех функций  $f(x)$  из  $H^1(0, 2\pi)$ , для которых  $f(0) = f(2\pi)$ .

Доказать следующее утверждение: для того чтобы функция  $f(x)$  (из  $H^1(0, 2\pi)$ ) принадлежала  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд с общим членом  $n^2(a_n^2 + b_n^2)$ , где

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Равенство

$$\|f\|_{\tilde{H}^1(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)(k^2 + 1)$$

определяет одну из эквивалентных норм  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ .

**4.70.** Для того чтобы функция  $f \in L_2(0, \pi)$  принадлежала  $\mathring{H}^1(0, \pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

с общим членом  $k^2 b_k^2$ ,  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx$ . При этом

$$\|f\|_{\dot{H}^1(0,\pi)}^2 = \int_0^\pi (f^2 + f'^2) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1) b_k^2.$$

**4.71.** Для любой  $f \in \dot{H}^1(a, b)$  имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Стеклова)

$$\int_a^b f^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b f'^2 dx.$$

**4.72.** Найти функцию  $f_0(x) \neq 0$ , для которой неравенство задачи 4.71 превращается в равенство. Показать, что если  $f(x) \neq c f_0(x)$ , где  $c$  — постоянная, то для  $f(x)$  имеет место строгое неравенство.

**4.73.** Доказать, что для любой функции  $f \in H^1(0, 2\pi)$ , для которой  $f(0) = f(2\pi)$ , имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f')^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x) dx \right)^2.$$

**4.74.** Доказать, что для любой функции  $f \in H^1(0, 2\pi)$  имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Пуанкаре)

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx \leq 4 \int_0^{2\pi} (f')^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f dx \right)^2.$$

**Указание.** Воспользоваться тем, что система  $\cos(kx/2)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , является ортогональным базисом пространства  $H^1(0, 2\pi)$ .

**4.75.** Доказать, что существует двумерное подпространство пространства  $H^1(0, 2\pi)$ , для всех элементов которого неравенство задачи 4.74 превращается в равенство. Найти это подпространство и доказать, что для всех элементов из  $H^1(0, 2\pi)$ , не принадлежащих этому подпространству, неравенство задачи 4.74 строгое.

**4.76.** Пусть  $f \in \dot{H}^1(|x| < 1)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ ,  $f(x) = f(|x|, \varphi)$ . Доказать, что  $\lim_{|x| \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} f^2(|x|, \varphi) d\varphi = 0$ .

**4.77.** Пусть  $f \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ ,  $f|_{|x|=1} = h(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Доказать, что

$$\lim_{|x| \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |h(\varphi) - f(|x|, \varphi)|^2 d\varphi = 0.$$

**4.78.** Пусть  $f \in \dot{H}^1(0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1)$ . Доказать, что

$$\int_0^1 f^2(x_1, x_2) dx_1 = o(x_2) \quad \text{при } x_2 \rightarrow 0.$$

**4.79.** Пусть  $x = (x_1, x_2) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  и функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

принадлежит  $H^1(|x| < 1)$ . Выразить через  $a_k$ ,  $b_k$  интеграл

$$\int_{\rho < 1} (|\operatorname{grad} f|^2 + |f|^2) dx.$$

**4.80.** Пусть

$$\psi(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Доказать, что существует функция  $f(x_1, x_2) \in H^1(|x| < 1)$  такая, что  $f|_{\rho=1} = \psi(\varphi)$ ,  $x_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $x_2 = \rho \sin \varphi$ .

**4.81.** При каких значениях  $\alpha$  функция  $f = |x|^{-\alpha} \sin |x|$  принадлежит  $H^2(|x| < 1, x = (x_1, x_2))$ ?

**4.82.** Доказать, что  $|x_1|(|x|^2 - 1) \in \dot{H}^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

**4.83.** При каких значениях  $\alpha$  функция  $f = |x|^{-\alpha} e^{x_1-x_2}$  принадлежит  $H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ?

**4.84.** Пусть  $f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx_1 e^{-kx_2}$ ,  $0 \leq x_1 \leq \pi$ ,  $x_2 > 0$ . При каких  $a_k$  функция  $f$  принадлежит  $H^1(0 < x_1 < \pi, x_2 > 0)$ ?

**4.85.** Пусть  $f \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$ . Обязана ли функция  $f(x)$  быть эквивалентной непрерывной функции в шаре  $|x| < 1$  (ср. с результатом задачи 4.67)?

В задачах 4.86–4.90 доказать утверждения.

**4.86.** Если  $f \in H^1(Q)$  и  $f(x) = \text{const}$  п. в. в  $Q' \subset Q$ , то  $\text{grad } f = 0$  п. в. в  $Q'$ .

**4.87.** Если  $f \in H^1(Q)$  и  $\text{grad } f = 0$  п. в. в  $Q$ , то  $f(x) = \text{const}$  п. в. в  $Q$ .

**4.88.** Если  $f \in H^1(Q)$ ,  $g \in \dot{H}^1(Q)$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  справедлива формула  $\int_Q f g_{x_i} dx = - \int_Q g f_{x_i} dx$  (формула интегрирования по частям).

**4.89.** Если  $f \in H^1(Q)$  и  $g \in H^1(Q)$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_Q f g_{x_1} dx = - \int_Q g f_{x_1} dx + \int_{\Gamma} f g \cos(\mathbf{n} x_1) dx,$$

где под знаком интеграла на  $\Gamma$  стоят следы функций  $f$  и  $g$  на  $\Gamma$ .

**4.90.**  $\dot{H}^1(Q)$  есть подпространство пространства  $H^1(Q)$ .

Пусть функция  $f \in L_2(Q)$  продолжена, например нулем вне  $Q$ . Конечноразностным отношением  $f(x)$  по переменной  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , будем называть при  $h \neq 0$  функцию

$$\delta_i^h f = \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x)}{h},$$

также принадлежащую пространству  $L_2(Q)$ .

В задачах 4.91–4.96 доказать утверждения.

**4.91.** Для любой финитной на  $(a, b)$  функции  $f$  из  $L_2(a, b)$  и любой функции  $g \in L_2(a, b)$  при достаточно малых  $|h|$  имеет место формула интегрирования по частям

$$(\delta^h f, g) = -(f, \delta^{-h} g).$$

**4.92.** При достаточно малых  $|h| \neq 0$  для произвольной финитной в  $Q$  функции  $f \in L_2(Q)$  и произвольной функции  $g \in L_2(Q)$  имеет место формула интегрирования по частям

$$(\delta_i^h f, g) = -(f, \delta_i^{-h} g), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**4.93.** Если финитная на  $(a, b)$  функция  $f$  принадлежит  $H^1(a, b)$ , то  $\delta^h f(x) \rightarrow f'(x)$  при  $h \rightarrow 0$  в норме  $L_2(a, b)$ .

**4.94.** Если для финитной на  $(a, b)$  функции  $f \in L_2(a, b)$   $\delta^h f \rightarrow \tilde{f}(x)$  при  $h \rightarrow 0$  в норме  $L_2(a, b)$ , то  $f(x)$  принадлежит  $H^1(a, b)$  и  $f(x)$  является о.п. функции  $\tilde{f}(x)$ .

**4.95.** Если финитная в  $Q$  функция  $f \in L_2(a, b)$  имеет о.п.  $f_{x_i} \in L_2(a, b)$  при некотором  $i = 1, 2, \dots, n$ , то  $\delta_i^h f \rightarrow f_{x_i}$  при  $h \rightarrow 0$  в норме  $L_2(Q)$ .

**4.96.** Если финитная в  $Q$  функция  $f$  принадлежит  $L_2(a, b)$  и  $\delta_i^h f \rightarrow \tilde{f}_1(x)$  при  $h \rightarrow 0$  в норме  $L_2(Q)$  при некотором  $i = 1, 2, \dots, n$ , то  $f(x)$  имеет в  $Q$  о.п. по  $x_1$ , совпадающую с  $\tilde{f}_1(x)$ .

**4.97.** С помощью результата задачи 4.71 показать, что скалярные произведения

$$(f, g)_I = \int_0^\pi (fg + f'g') dx, \quad (f, g)_{II} = \int_0^\pi f'g' dx$$

в пространстве  $\dot{H}^1(0, \pi)$  эквивалентны.

**4.98.** Доказать с помощью задачи 4.74, что скалярные произведения

$$(f, g)_I = \int_0^{2\pi} (fg + f'g') dx,$$

$$(f, g)_{II} = \int_0^{2\pi} f'g' dx + \left( \int_0^{2\pi} f dx \right) \left( \int_0^{2\pi} g dx \right)$$

в пространстве  $H^1(0, 2\pi)$  эквивалентны.

**4.99.** Множество  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$  функций  $f \in H^1(0, 2\pi)$ , для которых  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ , есть подпространство пространства  $H^1(0, 2\pi)$ . Показать, что в  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$  скалярное произведение можно определить соотношением  $(fg)_{\tilde{H}^1(0, 2\pi)} = \int_0^{2\pi} f'g' dx$ .

**4.100.** Пусть  $\rho(x) \in C(\overline{Q})$  и  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что формулой  $(f, g)_I = \int_Q \rho f g dx$ , где  $f, g \in L_2(Q)$ , определяется скалярное произведение в  $L_2(Q)$ , эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q f g dx$ .

**4.101.** Пусть  $\rho \in C(\overline{Q})$ ,  $\rho(x) > 0$  в  $\overline{Q} \setminus x^0$  и  $\rho(x^0) = 0$ , где  $x^0$  — некоторая точка из  $\overline{Q}$ . Тогда формулой для  $(f, g)_I$  задачи 4.100 определяется скалярное произведение в  $L_2(Q)$ , не эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q f g dx$  ( $Q$  — ограниченная область).

**4.102.** Пусть  $\rho \in C(\overline{Q} \setminus x^0)$ , где  $x^0$  — некоторая точка из  $\overline{Q}$  и  $\rho(x) > 0$  для  $x \in \overline{Q} \setminus x^0$ ,  $\rho(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x^0$ ,  $x \in \overline{Q}$ . Показать, что в  $L_{2,\rho}(Q)$  можно ввести скалярное произведение  $\int_Q f g dx$ , не эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q \rho f g dx$ .

**4.103.** Пусть  $f \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$  и  $f(x)|_{|x|=1} = h(\varphi)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ . Доказать, что существует такая не зависящая от функции  $f(x)$  постоянная  $c > 0$ , что

$$\int_{|x|<1} f^2 dx \leq c \left[ \int_0^{2\pi} h^2(\varphi) d\varphi + \int_{|x|<1} |\operatorname{grad} f|^2 dx \right].$$

**4.104.** Доказать существование такой постоянной  $c > 0$ , что для любой  $f \in \dot{H}^1(Q)$  имеет место неравенство Стеклова

$$\int_Q f^2 dx \leq c \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx.$$

**4.105.** Показать, что выражение  $\int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx$  задает скалярное произведение в  $\dot{H}^1(Q)$ , эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q [(fg) + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$ .

**4.106.** Пусть  $p, q \in C(\overline{Q})$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ . Доказать, что скалярные произведения в  $\dot{H}^1(Q)$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx,$$

$$(f, g)_I = \int_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

эквивалентны.

**4.107.** Пусть вещественные функции  $p_{ij}$ ,  $p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , и  $q$  принадлежат  $C(\overline{Q})$ ,  $q \geq 0$ , и для всех

$x \in \overline{Q}$  и всех вещественных  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

где постоянная  $\gamma_0 > 0$ .

Доказать, что в  $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$  можно определить скалярное произведение

$$(f, g)_I = \int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + q f g \right) dx,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx.$$

**4.108.** Пусть  $p, q \in C(\overline{Q})$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq q_0 > 0$ . Тогда скалярные произведения в  $H^1(Q)$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx,$$

$$(f, g)_I = \int_Q [q f g + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

эквивалентны.

При решении задач 4.109, 4.113, 4.114, 4.118 полезна следующая теорема.

**Теорема.** Для того чтобы множество  $M \subset H^1(Q)$  было компактным в  $L_2(Q)$ , достаточно, чтобы  $M$  было ограниченным в норме  $H^1(Q)$ , т. е. чтобы существовала такая постоянная  $c > 0$ , что  $\|u\|_{H^1(Q)} \leq c$  для всех  $u \in M$ . (Компактность  $M$  в  $L_2$  означает, что из любой бесконечной последовательности элементов из  $M$  можно выбрать фундаментальную в  $L_2$  подпоследовательность.)

**4.109.** Пусть  $x^0$  — произвольная точка из  $\overline{Q}$ , а  $U = Q \cap \{|x - x_0| < r\}$  при некотором  $r > 0$ . Доказать, что существует такая постоянная  $c > 0$ , что для всех  $f \in H^1(Q)$  имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_U f^2 dx \right].$$

**4.110.** С помощью результата задачи 4.108 показать, что скалярные произведения в  $H^1(Q)$

$$(f, g)_I = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx,$$

$$(f, g)_{II} = \int_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

эквивалентны, если непрерывные в  $\overline{Q}$  функции  $p(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют условиям:  $p \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  и  $g(x) \neq 0$  в  $Q$ .

**4.111.** Если в условиях задачи 4.107  $q(x) \geq q_0 > 0$ , то выражение

$$\int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в  $H^1(Q)$ , причем оно будет эквивалентно скалярному произведению  $\int_Q [(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) + fg] dx$ .

**4.112.** Если в условиях задачи 4.107  $q(x) \geq 0$  в  $\overline{Q}$  и  $q(x) \neq 0$ , то выражение

$$\int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в  $H^1(Q)$ , причем оно будет эквивалентно скалярному произведению

$$\int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx.$$

**4.113.** Показать, что существует такая постоянная  $c > 0$ , что для любой  $f \in H^1(Q)$  имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_{\partial Q} f^2 ds \right].$$

**4.114.** Пусть  $x^0$  — произвольная точка границы  $\partial Q$ , а  $U = \partial Q \cap (|x - x_0| < r)$  при некотором  $r > 0$ . Доказать существова-

ние такой постоянной  $c > 0$ , что для всех  $f \in H^1(Q)$  справедливо неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_U f^2 ds \right].$$

**4.115.** Доказать, что если  $\sigma \in C(\partial Q)$  и  $\sigma(x) > 0$ , то выражение

$$(f, g)_I = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds$$

задает в  $H^1(Q)$  скалярное произведение, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx.$$

**4.116.** Доказать, что если  $\sigma \in C(\partial Q)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $\sigma(x) \neq 0$ , то в  $H^1(Q)$  можно задать скалярное произведение

$$(f, g)_I = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx.$$

**4.117.** Пусть  $p \in C(\overline{Q})$ ,  $q \in C(\overline{Q})$ ,  $\sigma \in C(\partial Q)$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  в  $\overline{Q}$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  на  $\partial Q$ , причем или  $q(x) \neq 0$ , или  $\sigma(x) \neq 0$ . Тогда скалярные произведения в  $H^1(Q)$

$$(f, g)_I = \int_Q [p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) + qfg] dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds,$$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

эквивалентны.

**4.118.** Показать, что существует постоянная  $c > 0$  такая, что для любой функции  $f \in H^1(Q)$  ( $\partial Q \in C^1$ ) имеет место неравен-

ство (неравенство Пуанкаре)

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \left( \int_Q f dx \right)^2 + \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx \right].$$

**4.119.** С помощью результата задачи 4.118 показать эквивалентность скалярных произведений

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx,$$

$$(f, g)_I = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx + \int_Q f dx \cdot \int_Q g dx$$

в пространстве  $H^1(Q)$ .

**4.120.** Показать, что множество  $\tilde{H}^1(Q)$  функций  $f \in H^1(Q)$ , для которых  $\int_Q f dx = 0$ , образует подпространство  $H^1(Q)$ .

**4.121.** Показать, что в подпространстве  $\tilde{H}^1(Q)$  можно определить скалярное произведение  $(f, g)_I = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx$ , эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx.$$

## Ответы к § 4

**4.9.**  $\max_i |x_i|$ .

**4.10.**  $\max f(x)$ .

**4.40.** а)  $\frac{3}{5}x$ ; б)  $\frac{3}{\pi}x$ ; в)  $\frac{15x^2}{16} + \frac{9}{16}$ .

**4.41.** а)  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x$ ; б)  $\frac{8}{3\pi} \sin x$ .

**4.42.** а) 0; б)  $x_1 - x_2$ .

**4.51.**  $e_n = \frac{\varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} e_k(\varphi_n, e_k)}{\left\| \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} e_k(\varphi_n, e_k) \right\|}$ .

**4.52.** а)  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , где  $P_n$  — многочлены Лежандра (см. 4.21);

- б)  $\sqrt{\frac{3}{8}}(1-x)$ ,  $\sqrt{\frac{15}{16}}\pi(1+x)$ ,  $\sqrt{\frac{21}{136}}(2-2x-5x^2+5x^3)$ ;
- в)  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\pi x$ ,  $\sqrt{\frac{8}{3}}\left(\sin^2\pi x-\frac{3}{4}\right)$ ,  $\cos\pi x$ ;
- г)  $1$ ,  $x-1$ ,  $1-2x+\frac{x^2}{2}$ ; д)  $\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}$ ,  $\frac{x}{\sqrt[4]{2\partial}}$ ,  $\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2\pi}}$ ;
- е)  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,  $\sqrt{\frac{8}{\pi}}x$ ,  $\frac{2}{\pi}(4x^2-1)$  — многочлен Чебышева второго рода;
- ж)  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_n(x)$  — многочлен Чебышева.

**4.54.**  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{2x_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{2x_2}{\sqrt{\pi}}$ .

**4.55.**  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{15}x_1}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{15}x_2}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{15}x_3}{2\sqrt{\pi}}$ .

**4.72.**  $\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}$ .

**4.75.** Подпространство с базисными элементами  $1$  и  $\cos\frac{x}{2}$ .

**4.79.**  $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2)\right)$ .

**4.81.**  $\alpha < -1$ .

**4.83.**  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

**4.84.**  $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty$ .

**4.85.** Нет.

## § 5. Интегральные уравнения

Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y) dy + f(x), \quad x \in G, \quad (\text{III})$$

относительно неизвестной функции  $\varphi(x)$  в области  $G \subset \mathbb{R}^n$  называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма*. Известные функции  $K(x, y)$  и  $f(x)$  называются *ядром* и *свободным членом* уравнения (III);  $\lambda$  — комплексный параметр.

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in G, \quad (\text{IV})$$

называется *однородным интегральным уравнением*, соответствующим уравнению (III).

Ядро  $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$  будет эрмитово сопряженным к ядру  $K(x, y)$ ; уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad x \in G, \quad (\text{I}^*)$$

— *союзное или сопряженное уравнение* к уравнению (III), а

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y) \psi(y) dy, \quad x \in G, \quad (\text{II}^*)$$

— соответствующее однородное уравнение.

Эти уравнения иногда удобно записывать в операторной форме

$$\begin{aligned} (E - \lambda K)\varphi &= f, & (E - \lambda K)\varphi &= 0, \\ (E - \bar{\lambda} K^*)\psi &= g, & (E - \bar{\lambda} K^*)\psi &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III})$$

где интегральные операторы  $E$ ,  $K$  и  $K^*$  определяются так:

$$E\varphi = \varphi, \quad K\varphi = \int_G K(x, y)\varphi(y) dy, \quad K^*\varphi = \int_G K^*(x, y)\varphi(y) dy.$$

Рассмотрим два случая.

1. Область  $G$  ограничена,  $f(x) \in C(\overline{G})$ ,  $g(x) \in C(\overline{G})$ ,  $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ ; при этом решение рассматриваемых уравнений разыскивается в  $C(\overline{G})$ .
2. Область  $G$  произвольная (в том числе и неограниченная),  $f(x) \in L_2(G)$ ,  $g(x) \in L_2(G)$ ,  $K(x, y) \in L_2(G \times G)$ ; в этом случае решение разыскивается в  $L_2(G)$ .

Если при некотором значении параметра  $\lambda$  ( $\bar{\lambda}$ ) однородное уравнение (IV) ((II\*)) имеет нетривиальные решения (не равные нулю тождественно в первом случае и не являющиеся нулевыми элементами  $L_2(G)$  — во втором), то это число  $\lambda$  ( $\bar{\lambda}$ ) называется *характеристическим числом* ядра  $K(x, y)$  ( $K^*(x, y)$  соответственно), а соответствующие решения уравнения (IV), (II\*) — *собственными функциями ядра*  $K(x, y)$  ( $K^*(x, y)$ ), *отвечающими этому собственному значению*. Множество всех собственных функций, отвечающих характеристическому числу  $\lambda$  ( $\bar{\lambda}$ ), после присоединения к нему функций, тождественно равной нулю, является линейным подпространством  $\text{Ker}(E - \lambda K)$  ( $\text{Ker}(E - \bar{\lambda} K^*)$ ) пространства  $C(\overline{G})$  в первом случае и пространства  $L_2(G)$  — во втором.

Размерность этого подпространства, то есть максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих характеристическому числу  $\lambda$  ( $\bar{\lambda}$ ), есть *кратность*<sup>1)</sup>  $k(\lambda)$  ( $k(\bar{\lambda})$ ) этого характеристического числа, т. е.

$$\begin{aligned} k(\lambda) &= \dim \text{Ker}(E - \lambda K), \\ k(\bar{\lambda}) &= \dim \text{Ker}(E - \bar{\lambda} K^*). \end{aligned}$$

Как в первом, так и во втором случаях имеют место следующие *теоремы Фредгольма*.

**Теорема 1.** Следующие три утверждения эквивалентны:

- а) уравнение (III) имеет решение при любой рассматриваемой функции  $f(x)$ ;
- б) число  $\lambda$  не является характеристическим числом ядра  $K(x, y)$ ;
- в) если при какой-либо функции  $f(x)$  уравнение (III) имеет решение, то это решение единствено.

**Теорема 2.** Число  $\lambda$  является характеристическим числом ядра  $K(x, y)$  тогда и только тогда, когда  $\bar{\lambda}$  является характеристическим числом ядра  $K^*(x, y)$ . При этом кратности этих чисел одинаковы и конечны, т. е.

$$k(\lambda) = k(\bar{\lambda}) < \infty.$$

**Теорема 3.** Уравнение (III) имеет решение тогда и только тогда, когда функция  $f(x)$  ортогональна (в скалярном произведении  $(f, g) = \int_G f(x)g(x) dx$ ) всем собственным функциям сопряженного ядра, т. е.

$$f \perp \text{Ker}(E - \bar{\lambda} K^*).$$

При этом решение определяется с точностью до слагаемого, являющегося произвольной собственной функцией ядра  $K(x, y)$ , т. е. с точностью до элемента подпространства  $\text{Ker}(E - \lambda K)$ .

**Теорема 4.** При любом  $R > 0$  в круге  $|\lambda| \leq R$  комплексной  $\lambda$ -плоскости не может быть более конечного числа характеристических чисел ядра  $R(x, t)$ .

---

<sup>1)</sup> Полезно обратить внимание на задачу 4 (см. «Решение некоторых задач» ниже).

В задачах 5.5–5.7 используются следующие обозначения:

$$M = \max_{x \in \overline{G}, y \in \overline{G}} |\mathcal{K}(x, y)|, \quad v = \int_G dy.$$

**5.1.** Показать, что интегральный оператор  $K$  с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  ограничен из  $L_2(G)$  в  $L_2(G)$ , если

$$\int_{G \times G} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy = c^2 < \infty.$$

**5.2.** Показать, что интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  является нулевым в  $L_2(G)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{K}(x, y) = 0$ ,  $x \in G$ ,  $y \in G$ .

**5.3.** Пусть ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения (III) принадлежит  $L_2(G \times G)$ . Доказать сходимость метода последовательных приближений для любой функции  $f \in L_2(G)$ , если  $|\lambda| < \frac{1}{|c|}$  (постоянная  $c$  взята из задачи 5.1).

**5.4.** Пусть  $K$  — интегральный оператор с непрерывным ядром. Доказать, что операторы  $K^p = K(K^{p-1})$ ,  $p = 2, 3, \dots$ , являются интегральными операторами с непрерывными ядрами  $\mathcal{K}_p(x, y)$  и эти ядра удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \int_G \mathcal{K}(x, \xi) \mathcal{K}_{p-1}(\xi, y) d\xi.$$

**5.5.** Показать, что ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$ , введенные в задаче 5.4 (они называются *повторными* (итерированными) ядрами ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ ), удовлетворяют неравенствам

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq M^p v^{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots.$$

**5.6.** Показать, что ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{K}_{m+1}(x, y)$ ,  $x \in \overline{G}$ ,  $y \in \overline{G}$ , сходится в круге  $|\lambda| < \frac{1}{M_v}$ , а его сумма  $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$  (*резольвента* ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ ) непрерывна в  $\overline{G} \times \overline{G} \times U_{1/(M_v)}$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < \frac{1}{M_v}$ .

Показать также, что при  $|\lambda| < \frac{1}{M_v}$  решение интегрального уравнения (III) единственno в классе  $C(\overline{G})$  и для любой  $f \in C(\overline{G})$  представляется через резольвенту  $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$  формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y, \lambda) f(y) dy.$$

**5.7.** Показать, что резольвента  $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$  (см. задачу 5.6) непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  удовлетворяет при  $|\lambda| < \frac{1}{Mv}$  каждому из уравнений:

$$\text{а)} \quad \mathcal{R}(x, y, \lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, \xi) \mathcal{R}(\xi, y, \lambda) d\xi + \mathcal{K}(x, y);$$

$$\text{б)} \quad \mathcal{R}(x, y, \lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(\xi, y) \mathcal{R}(x, \xi, \lambda) d\xi + \mathcal{K}(x, y);$$

$$\text{в)} \quad \frac{\partial \mathcal{R}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_G \mathcal{P}(x, \xi, \lambda) \mathcal{R}(\xi, y, \lambda) d\xi.$$

В задачах 5.8–5.13 рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\int_0^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (\text{IV})$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad (\text{V})$$

которые называются *интегральными уравнениями Вольтерра* первого и второго родов соответственно.

**5.8.** Пусть выполнены следующие условия:

- а) функции  $\mathcal{K}^*(x, y)$  и  $\mathcal{K}_x(x, y)$  непрерывны на множестве  $0 \leq x \leq y \leq a$ ;
- б)  $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$  для всех  $x$ ;
- в)  $f \in C^1(0, a)$  и  $f(0) = 0$ .

Доказать, что при этих условиях уравнение (IV) равносильно уравнению

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{\mathcal{K}(x, x)} - \int_0^x \frac{\mathcal{K}_x(x, y)}{\mathcal{K}(x, y)} \varphi(y) dy.$$

**5.9.** Показать, что дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = F(x)$$

с непрерывными коэффициентами  $a_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при начальных условиях  $y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$  равносильно интегральному уравнению (V), где

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{m=1}^n a_m(x) \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$f(x) = F(x) - C_{n-1}a_1(x) - (C_{n-1}x + C_{n-2})a_2(x) - \\ - \left( C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1x + C_0 \right) a_n(x).$$

**5.10.** Пусть  $\mathcal{K} \in C$  ( $x \geq 0$ ),  $\mathcal{K}(x) = 0$  при  $x < 0$ . Доказать, что обобщенная функция

$$\mathcal{E}(x) = \delta(x) + \mathcal{P}(x), \quad \text{где } \mathcal{P} = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{K}^* * \mathcal{K} * \dots * \mathcal{K}}_{m \text{ раз}},$$

есть фундаментальное решение оператора Вольтерра второго рода с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  (см. (V)), т. е.

$$\mathcal{E} - \mathcal{K} * \mathcal{E} = \delta.$$

Показать, что при этом ряд для  $\mathcal{R}(x)$  сходится равномерно в каждом конечном промежутке и удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$\mathcal{R}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-y) \mathcal{R}(y) dy + \mathcal{K}(x), \quad x \geq 0$$

(функция  $\mathcal{R}(x-y)$  является резольвентой ядра  $\mathcal{K}(x-y)$  при  $\lambda = 1$ ).

**Пример 1.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + (x^2 + 3x)y^2) \varphi(y) dy + f(x), \quad (1)$$

$$x \in [-1, 1], \quad f(x) \in C[-1, 1].$$

Найти характеристические числа и собственные функции ядра.

△ Если уравнение (1) имеет решение, то оно представляется в виде

$$\varphi(x) = \lambda x C_1 + \lambda(x^2 + 3x) C_2 + f(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2)$$

где

$$C_1 = \int_{-1}^1 y \varphi(y) dy, \quad (3)$$

$$C_2 = \int_{-1}^1 y^2 \varphi(y) dy. \quad (4)$$

Из (2)–(4) следует, что

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_{-1}^1 y(\lambda yC_1 + \lambda(y^2 + 3y)C_2 + f(y)) dy = \\
 &= \int_{-1}^1 (\lambda C_1 y^2 + \lambda C_2 y^3 + 3\lambda C_2 y^2 + yf(y)) dy = \\
 &= \int_{-1}^1 ((\lambda C_1 + 3\lambda C_2)y^2 + yf(y)) dy = \frac{2}{3}(\lambda C_1 + 3\lambda C_2) + \int_{-1}^1 yf(y) dy. \\
 C_2 &= \int_{-1}^1 y^2(\lambda yC_1 + \lambda(y^2 + 3y)C_2 + f(y)) dy = \\
 &= \int_{-1}^1 (\lambda C_1 y^3 + \lambda C_2 y^4 + 3\lambda C_2 y^3 + y^2 f(y)) dy = \\
 &= \int_{-1}^1 ((\lambda C_2 y^4 + y^2 f(y)) dy = \frac{2}{5}\lambda C_2 + \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$  с параметром  $\lambda$ :

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) - 2\lambda C_2 = \int_{-1}^1 yf(y) dy, \\ C_2 \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy. \end{cases} \quad (5)$$

Если определитель системы (5) отличен от нуля, то система имеет единственное решение при любой правой части, т. е. если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{5}{2}$ , то для любой функции  $f(x) \in C[-1, 1]$  получаем, что

$$C_2 = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}\lambda} \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy, \quad (6)$$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\lambda} \left[ \int_{-1}^1 yf(y) dy + \frac{2\lambda}{1 - \frac{2}{5}\lambda} \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy \right] \quad (7)$$

и уравнение (1) имеет единственное решение, задаваемое формулой (2), где  $C_1$  и  $C_2$  определяются формулами (6) и (7).

Пусть  $\lambda = \frac{3}{2}$ . Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 - 3C_2 = \int_{-1}^1 y f(y) dy, \\ \frac{2}{5}C_2 = \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy. \end{cases} \quad (8)$$

Следовательно, если функция  $f(x)$  такова, что справедливо равенство

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{5}{2}y^2 + \frac{1}{3}y \right) f(y) dy = 0, \quad (9)$$

называемое условием разрешимости, то система (8) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 \text{ — любое число, } C_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy.$$

Уравнение (1) в этом случае также имеет бесконечно много решений:

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}C_1x + \frac{15}{4}(x^2 + 3x) \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy + f(x),$$

$$x \in [-1, 1], \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Если условие (9) не выполнено, то система (8) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеют.

Пусть  $\lambda = \frac{5}{2}$ . Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}C_1 - 5C_2 &= \int_{-1}^1 y f(y) dy, \\ C_2 \cdot 0 &= \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, если функция  $f(x)$  такова, что справедливо равенство

$$\int_{-1}^1 y^2 f(y) dy = 0, \quad (11)$$

то система (10) имеет бесконечно много решений вида

$$C_1 = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 y f(y) dy - \frac{15}{2} C_2, \quad C_2 \text{ — любое число.}$$

Уравнение (1) в этом случае также имеет бесконечно много решений:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -\frac{5}{2}x \left( \frac{3}{2} \int_{-1}^1 y f(y) dy + \frac{15}{2} C_2 \right) + \\ & + \frac{5}{2}(x^2 + 3x)C_2 + f(x), \quad x \in [-1, 1], \quad C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Если условие (11) не выполнено, то уравнение (1) решений не имеет.

Из сказанного согласно первой теореме Фредгольма имеем, что числа  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{5}{2}$  (и только они) являются характеристическими числами ядра уравнения (1).

Теперь найдем собственные функции.

Если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то система (8) при  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ , приобретает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 - 3C_2 = 0, \\ \frac{2}{5}C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $C_2 = 0$ ,  $C_1$  — любое число.

Следовательно, согласно (2) характеристическому числу  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  отвечает собственная функция  $\varphi_1(x) = x$ .

Пусть  $\lambda = \frac{5}{2}$ . Тогда система (10) при  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ , приобретет вид

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}C_1 - 5C_2 = 0, \\ C_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

откуда находим  $C_1 = -\frac{15}{2}C_2$ ,  $C_2$  — любое число. Следовательно, согласно (2) характеристическому числу  $\lambda_2 = \frac{5}{2}$  отвечает собственная функция

$$\varphi_2(x) = \frac{5}{2}x \left(-\frac{15}{2}C_2\right) + \frac{5}{2}(x^2 + 3x)C_2 = \frac{5}{2}C_2 \left(x^2 - \frac{9}{2}x\right),$$

где  $C_2$  — любое число, не равное нулю, или

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{9x}{2}.$$

Отметим, что из второй теоремы Фредгольма следует, что сопряженное ядро

$$K^*(x, y) = xy + (y^2 + 3y)x^2$$

имеет характеристические числа, совпадающие в силу их вещественности с характеристическими числами ядра  $K(x, y)$ , причем (согласно третьей теореме Фредгольма) характеристическому числу  $\frac{3}{2}$  отвечает собственная функция  $\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$  (см. условие разрешимости (9)), а характеристическому числу  $\frac{5}{2}$  отвечает собственная функция  $x^3$  (см. условие разрешимости (11)). ▲

**Пример 2.** Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y) u(y) dy + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (1)$$

$f(x) \in C[-\pi, \pi]$ . Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

△ Из уравнения (1) следует, что

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \sin y dy - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \cos^2 y dy + f(x) = \\ &= \lambda x C_1 - \lambda C_2 + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \sin y dy, \quad (2)$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \cos^2 y dy. \quad (3)$$

Поэтому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x) = \lambda x C_1 - \lambda C_2 + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определены равенствами (2) и (3).

Используя формулу (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin y (\lambda y C_1 - \lambda C_2 + f(y)) dy = 2\pi \lambda C_1 + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin y dy, \\ C_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y (\lambda y C_1 - \lambda C_2 + f(y)) dy = -\pi \lambda C_2 + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos^2 y dy. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$  с параметром  $\lambda$ :

$$\begin{cases} C_1(1 - 2\lambda\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot f(y) dy, \\ C_2(1 + \pi\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy. \end{cases} \quad (5)$$

Если определитель системы (5) не равен нулю, т. е. если  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ ,  $\lambda \neq -\frac{1}{\pi}$ , то система (5) имеет единственное решение при любой правой части,

$$C_1 = \frac{1}{1 - 2\pi\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot f(y) dy, \quad C_2 = \frac{1}{1 + \pi\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy, \quad (6)$$

и, следовательно, уравнение (1) при любой функции  $f(x)$ ,  $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ , имеет единственное решение вида

$$u(x) = \lambda x C_1 - \lambda C_2 + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определены равенствами (6).

Пусть  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ . Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot f(y) dy, \\ C_2 \cdot \frac{3}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy. \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда следует, что если функция  $f(x)$ ,  $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ , такова, что справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot f(y) dy = 0, \quad (9)$$

то система (8) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 — \text{любое число}, \quad C_2 = \frac{2}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy.$$

Поэтому уравнение (1) имеет бесконечно много решений:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} x C_1 - \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy + f(x), \\ x \in [-\pi, \pi], \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Если же функция  $f(x)$  такова, что равенство (9) не выполняется, то уравнение (1) решений не имеет.

Пусть  $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ . Тогда система (8) приобретает вид

$$\begin{cases} 3C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot f(y) dy, \\ 0 \cdot C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy. \end{cases} \quad (10)$$

Следовательно, если функция  $f(x)$  такова, что справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y \cdot f(y) dy = 0, \quad (11)$$

то система (10) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 = \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy, \quad C_2 — любое число.$$

Таким образом, уравнение (1) также имеет бесконечно много решений:

$$u(x) = -\frac{x}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy + \frac{1}{\pi} C_2 + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

По первой теореме Фредгольма числа  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$  (и только они) являются характеристическими числами ядра уравнения (1).

Найдем теперь соответствующие собственные функции.

Если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то система (8) при  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , приобретает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ \frac{8}{2} C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда находим  $C_2 = 0$ ,  $C_1$  — любое число.

Следовательно, характеристическому числу  $\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$  отвечает согласно (4) собственная функция  $u_1(x) = x$ .

Если  $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ , то система (10) при  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , приобретет вид

$$\begin{cases} 3C_1 = 0, \\ C_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  — любое число. Поэтому характеристическому числу  $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$  отвечает согласно (4) собственная функция  $u_2(x) = 1$ .

Решим теперь уравнение (1) в случае конкретной функции  $f(x)$ . Пусть, например,  $f(x) = 3 \sin x + \cos x$ .

Тогда если  $\lambda \neq \lambda_1$  и  $\lambda \neq \lambda_2$ , то из (7) находим

$$u(x) = \lambda x C_1 - \lambda C_2 + 3 \sin x + \cos x, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определены равенствами (6), т. е.

$$u(x) = \lambda \cdot \frac{3\pi}{2(1 - 2\pi\lambda)} x + 3 \sin x + \cos x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то система (8) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = \frac{3\pi}{2}, \\ C_2 \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

и, следовательно, решений не имеет. Таким образом, уравнение (1) при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ ,  $f(x) = 3 \sin x + \cos x$  не имеет решений.

Если  $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ , то система (10) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 3 = \frac{3\pi}{2}, \\ C_2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

и, следовательно, имеет бесконечно много решений:

$$C_1 = \frac{\pi}{2}, \quad C_2 — любое число.$$

Таким образом, уравнение (1) при  $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ ,  $f(x) = 3 \sin x + \cos x$  имеет бесконечно много решений:

$$u(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi} C_2 + 3 \sin x + \cos x, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangle$$

**Пример 3.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x) \varphi(y) dy + a \sin x + bx, \quad (1)$$

при всех допустимых значениях  $a, b, \lambda$ .

△ Обозначим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot \varphi(y) dy, \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y \varphi(y) dy; \quad (2)$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\varphi(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2 \cos x + a \sin x + bx. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y (\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + b y) dy,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y (\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + b y) dy,$$

откуда находим

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \cdot 2\pi + a\pi + 2\pi b, \\ C_2 = \lambda C_1 \frac{2\pi^3}{3} + a \cdot 2\pi + b \frac{2\pi^3}{3}. \end{cases} \quad (4)$$

Систему (4) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} C_1(1 - 2\pi\lambda) = a\pi + 2\pi b, \\ -\lambda \frac{2\pi^3}{3} C_1 + C_2 = 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}. \end{cases} \quad (5)$$

Определитель  $\Delta(\lambda)$  системы (5) равен  $\Delta(\lambda) = 1 - 2\pi\lambda$ . Если  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , т. е.  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то система (5) имеет единственное решение при любых  $a$  и  $b$ :

$$C_1 = \frac{a\pi - 2\pi b}{1 - 2\pi\lambda}, \quad C_2 = \frac{2\pi^3\lambda(a\pi + 2\pi b)}{3(1 - 2\pi\lambda)} + 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}. \quad (6)$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  из (6) в (3), найдем при  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$  единственное решение интегрального уравнения (1).

Пусть  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = (a + 2b)\pi, \\ -\frac{\pi^2}{3} C_1 + C_2 = 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a + 2b = 0. \quad (8)$$

Условие (8) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ . Здесь  $\frac{1}{2\pi}$  — характеристическое число интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x) \varphi(y) dy.$$

Общее решение однородной линейной системы

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ -\frac{\pi^2}{3} C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

соответствующей системе (7), имеет вид

$$\bar{C}_1 = C, \quad \bar{C}_2 = \frac{\pi^3}{3}C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

В качестве частного решения системы (7) можно взять

$$C_1^0 = 0, \quad C_2^0 = 2a\pi - \frac{a\pi^3}{3}.$$

Поэтому общее решение системы (7) имеет вид

$$C_1 = C, \quad C_2 = \frac{\pi^3}{3}C + a\pi \left(2 - \frac{\pi^3}{3}\right). \quad (9)$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  из (9) в (3), найдем все решения уравнения (1) при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$  при условии (8). Эти решения можно записать формулой

$$\varphi(x) = \left(A - \frac{a}{2}\right)x + \left[\frac{A\pi^2}{2} + a\left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right)\right] \cos x + a \sin x,$$

где  $A$  — произвольная постоянная. ▲

**Пример 4.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (6x^2 - 5x^2y + 3xy^2)\varphi(y) dy + a + bx^3, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

при всех допустимых значениях  $a, b, \lambda$ . Найти характеристические числа и собственные функции ядра.

△ Если уравнение (1) имеет решение, то оно представляется в виде

$$\varphi(x) = \lambda C_1 x^2 + 3\lambda C_2 x + a + bx^3, \quad x \in [-1, 1], \quad (2)$$

где

$$C_1 = \int_{-1}^1 (6 - 5y)\varphi(y) dy, \quad (3)$$

$$C_2 = \int_{-1}^1 y^2 \varphi(y) dy. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-1}^1 (6 - 5y)(\lambda C_1 y^2 + 3\lambda C_2 y + a + b y^3) dy = \\ &= 4\lambda C_1 - 10\lambda C_2 + 12a - 2b, \\ C_2 &= \int_{-1}^1 y^2(\lambda C_1 y^2 + 3\lambda C_2 y + a + b y^3) dy = \frac{2}{5}\lambda C_1 + \frac{2}{3}a. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$  с параметром  $\lambda$ :

$$\begin{cases} (1 - 4\lambda)C_1 + 10\lambda C_2 = 12a - 2b, \\ -\frac{2}{5}\lambda C_1 + C_2 = \frac{2a}{3}. \end{cases} \quad (5)$$

Определитель  $\Delta(\lambda)$  системы (5) равен

$$\Delta(\lambda) = (2\lambda - 1)^2. \quad (6)$$

Если определитель  $\Delta(\lambda)$  системы (5) отличен от нуля, то система имеет решение при любой правой части, то есть если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , то для любых чисел  $a$  и  $b$  получаем

$$C_1 = \frac{2(18a - 3b - 10a\lambda)}{3(2\lambda - 1)^2}, \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{10a + 32a\lambda - 12b\lambda}{15(2\lambda - 1)^2}, \quad (8)$$

и уравнение (1) имеет единственное решение, задаваемое формулой (2), где  $C_1$  и  $C_2$  определяются формулами (7) и (8).

Пусть  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то есть  $\Delta(\lambda) = 0$ . Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} -C_1 + 5C_2 = 12a - 2b, \\ -\frac{1}{5}C_1 + C_2 = \frac{2a}{3}. \end{cases} \quad (9)$$

Следовательно, если числа  $a$  и  $b$  таковы, что справедливо равенство

$$\frac{10a}{3} = 12a - 2b, \quad (10)$$

называемое условием разрешимости, то система (9) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 = 5C_2 - \frac{10a}{3}, \quad C_2 \text{ — любое число.}$$

Уравнение (1) в этом случае также имеет бесконечно много решений:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 \left( 5C_2 - \frac{10a}{3} \right) + 3 \cdot \frac{1}{2}xC_2 + a + \frac{13a}{3}x^3.$$

Отсюда получаем

$$\varphi(x) = C(5x^2 + 3x) - \frac{5a}{3}x^2 + \frac{13a}{3}x^3 + a,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Если условие (10) не выполнено, то система (9) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеют.

Из сказанного (согласно первой теореме Фредгольма) следует, что число  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и только оно является характеристическим числом ядра уравнения (1).

Теперь найдем собственные функции ядра. Если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то система (5) при  $a = 0$  и  $b = 0$  приобретает вид

$$\begin{cases} -C_1 + 5C_2 = 0, \\ -\frac{1}{5}C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $C_1 = 5C_2$ ,  $C_2$  — любое число.

Следовательно, характеристическому числу  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  отвечает собственная функция

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot 5C_2 + 3 \cdot \frac{1}{2}xC_2 = \frac{C_2}{2}(5x^2 + 3x),$$

где  $C_2$  — любое число, не равное нулю, или

$$\varphi_1(x) = 5x^2 + 3x.$$

Заметим, что кратность  $k(\lambda_1)$  характеристического числа  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  равна  $k(\lambda_1) = 1$ , так как характеристическому числу  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  отвечает одна собственная функция  $\varphi_1(x) = 5x^2 + 3x$ ; в то же время кратность  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  как корня характеристического многочлена  $\Delta(\lambda) = (2\lambda - 1)^2$  (см. (6)) равна нулю. ▲

**Пример 5.** Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{|y|<1} (x, y) u(y) dy + f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1)$$

$f(x) \in C(|x| \leq 1)$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Найти собственные функции и характеристические числа соответствующего интегрального оператора.

△ Из уравнения (1) следует, что

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda x_1 \int_{|y|<1} y_1 \cdot u(y) dy + \lambda x_2 \int_{|y|<1} y_2 \cdot u(y) dy + \lambda x_3 \int_{|y|<1} y_3 \cdot u(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda x_1 C_1 + \lambda x_2 C_2 + \lambda x_3 C_3 + f(x), \quad |x| \leq 1, \end{aligned}$$

где

$$C_j = \int_{|y|<1} y_j \cdot u(y) dy, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Поэтому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x) = \lambda x_1 C_1 + \lambda x_2 C_2 + \lambda x_3 C_3 + f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (3)$$

где  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , определены равенствами (2). Используя формулу (3), запишем равенства (2) в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{|y|<1} y_1 (\lambda y_1 C_1 + \lambda y_2 C_2 + \lambda y_3 C_3 + f(y)) dy = \\ &= \lambda C_1 \cdot \frac{4\pi}{15} + \int_{|y|<1} y_1 \cdot f(y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_{|y|<1} y_2 (\lambda y_1 C_1 + \lambda y_2 C_2 + \lambda y_3 C_3 + f(y)) dy = \\ &= \lambda C_2 \cdot \frac{4\pi}{15} + \int_{|y|<1} y_2 \cdot f(y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \int_{|y|<1} y_3 (\lambda y_1 C_1 + \lambda y_2 C_2 + \lambda y_3 C_3 + f(y)) dy = \\ &= \lambda C_3 \cdot \frac{4\pi}{15} + \int_{|y|<1} y_3 \cdot f(y) dy. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  с параметром  $\lambda$ :

$$\begin{cases} C_1 \left( 1 - \frac{4\pi}{15}\lambda \right) = \int_{|y|<1} y_1 \cdot f(y) dy, \\ C_2 \left( 1 - \frac{4\pi}{15}\lambda \right) = \int_{|y|<1} y_2 \cdot f(y) dy, \\ C_3 \left( 1 - \frac{4\pi}{15}\lambda \right) = \int_{|y|<1} y_3 \cdot f(y) dy. \end{cases} \quad (4)$$

Если определитель системы (4) не равен нулю, т. е. если  $\lambda \neq \frac{15}{4\pi}$ , то система (4) имеет единственное решение при любой правой части:

$$C_j = \frac{1}{1 - \frac{4\pi}{15}\lambda} \cdot \int_{|y|<1} y_j \cdot f(y) dy, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

и, следовательно, уравнение (1) при любой функции  $f(x)$ ,  $f(x) \in C(|x| \leq 1)$ , имеет единственное решение

$$u(x) = \lambda x_1 C_1 + \lambda x_2 C_2 + \lambda x_3 C_3 + f(x), \quad |x| \leq 1,$$

где  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , определены равенствами (5).

Пусть  $\lambda = \frac{15}{4\pi}$ . Тогда система (4) приобретает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = \int_{|y|<1} y_1 \cdot f(y) dy, \\ C_2 \cdot 0 = \int_{|y|<1} y_2 \cdot f(y) dy, \\ C_3 \cdot 0 = \int_{|y|<1} y_3 \cdot f(y) dy. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда следует, что если функция  $f(x)$ ,  $f(x) \in C(|x| \leq 1)$ , такова, что справедливы равенства

$$\int_{|y|<1} y_j \cdot f(y) dy = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

то система (6) и, следовательно, уравнение (1) имеет бесконечно много решений:

$$u(x) = \frac{15}{4\pi}(x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3) + f(x), \quad |x| \leq 1,$$

$C_1, C_2, C_3$  — любые числа.

Если же функция  $f(x)$  такова, что хотя бы одно из равенств (7) не выполняется, то уравнение (1) решений не имеет.

По первой теореме Фредгольма  $\lambda = \frac{15}{4\pi}$  — единственное характеристическое число интегрального оператора, кратность его равна 3.

В силу самосопряженности ядра  $K(x, y) = (x, y) = K^*(x, y)$  из второй и третьей теорем Фредгольма вытекает, что собственные функции, отвечающие характеристическому числу  $\lambda = \frac{15}{4\pi}$ , суть функции  $x_1, x_2$  и  $x_3$ .  $\blacktriangle$

**Пример 6.** Найти характеристические числа и собственные функции ядра  $K(x, y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ x, & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$

△ Требуется найти значения  $\lambda$ , при которых уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) u(y) dy, \quad x \in [0, 1],$$

имеет нетривиальные решения и найти эти решения.

Пусть  $u(x)$  — одно из таких решений,  $u(x) \in C[0, 1]$ . Тогда из равенства

$$u(x) = \lambda \int_0^x y u(y) dy + \lambda x \int_0^1 u(y) dy, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

следует, что  $u(x) \in C^1[0, 1]$  и

$$u'(x) = \lambda x u(x) + \lambda \int_x^1 u(y) dy - \lambda x u(x) = \lambda \int_x^1 u(y) dy, \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Из (2), в свою очередь, следует, что  $u(x) \in C^2[0, 1]$  и

$$u''(x) = -\lambda u(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

т. е. искомая функция  $u(x)$  есть решение дифференциального уравнения (3) и удовлетворяет в силу (1) и (2) граничным

условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (4)$$

Таким образом, интересующая нас задача свелась к задаче нахождения спектра дифференциального оператора  $-\frac{d^2}{dx^2}$  на множестве функций из  $C^2[0, 1]$ , удовлетворяющих граничным условиям (4).

А решение этой задачи хорошо известно:  $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , — совокупность собственных значений этого оператора, являющихся характеристическими числами нашего ядра, а соответствующая система собственных функций —

$$u_k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad \blacktriangle$$

**Пример 7.** Найти резольвенту интегрального уравнения (1) примера 1.

Δ Из решения примера 1 следует, что если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{5}{2}$ , то уравнение (1) примера 1 имеет единственное решение, задаваемое формулой (2) примера 1, где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются соответственно формулами (3) и (4) примера 1. (Здесь напомним, что нумерация формул в каждом примере своя, т. е. в каждом примере формулы нумеруются от (1), ..., (n),  $n \in \mathbb{N}$ .) Из (6) примера 1 получаем

$$C_2 = \frac{5}{5 - 2\lambda} \int_0^1 y^2 f(y) dy. \quad (*)$$

Из (7) примера 1 получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3}{3 - 2\lambda} \left[ \int_{-1}^1 y f(y) dy + \frac{10\lambda}{5 - 2\lambda} \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy \right] = \\ &= \frac{3}{3 - 2\lambda} \int_{-1}^1 \left( y + \frac{10\lambda}{5 - 2\lambda} y^2 \right) f(y) dy. \quad (**) \end{aligned}$$

Подставляя (\*) и (\*\*) в (2) примера 1, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{3\lambda x}{3 - 2\lambda} \int_{-1}^1 \left( y + \frac{10\lambda}{5 - 2\lambda} y^2 \right) f(y) dy + \\ &+ \frac{5\lambda(x^2 + 3x)}{5 - 2\lambda} \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy + f(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (***) \end{aligned}$$

Упрощая (\*\*), получаем

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 R(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где  $R(x, y, \lambda) = xy \left[ \frac{3}{3-2\lambda} \left( 1 + \frac{10\lambda y}{5-2\lambda} \right) + \frac{5y(x+3)}{5-2\lambda} \right]$  есть иско-  
мая резольвента.  $\blacktriangle$

**5.11.** Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтер-  
па (V) с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$ :

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = 1$ ; 2)  $\mathcal{K}(x, y) = x - y$ .

**5.12.** Решить следующие интегральные уравнения:

- 1)  $\varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\varphi(y) dy$ ;
- 2)  $\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y) dy$ ;
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y) dy + x^2$ .

**5.13.** Показать, что если  $g \in C^1(x \geq 0)$ ,  $g(0) = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  
то функция

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy$$

удовлетворяет интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dx = g(x).$$

В задачах 5.14–5.35 ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения  
является вырожденным, т. е.

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{m=1}^N f_m(x)g_m(y),$$

где функции  $f_m(x)$  и  $g_m(y)$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) непрерывны в квад-  
рате  $a \leq x, y \leq b$  и линейно независимы между собой. В этом  
случае интегральное уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^N c_m f_m(x),$$

где неизвестные  $c_m$  определяются из системы алгебраических уравнений.

**5.14.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = x - 1$ ,  $f(x) = x$ ;
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = 2e^{x+y}$ ,  $f(x) = e^x$ ;
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = x + y - 2xy$ ,  $f(x) = x + x^2$ .

**5.15.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = xy + x^2y^2$ ,  $f(x) = x^2 + x^4$ ;
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = x^{1/3} + y^{1/3}$ ,  $f(x) = 1 - 6x^2$ ;
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = x^4 + 5x^3y$ ,  $f(x) = x^2 - x^4$ ;
- 4)  $\mathcal{K}(x, y) = 2xy^3 + 5x^2y^2$ ,  $f(x) = 7x^4 + 3$ ;
- 5)  $\mathcal{K}(x, y) = x^2 - xy$ ,  $f(x) = x^2 + x$ ;
- 6)  $\mathcal{K}(x, y) = 5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2$ ,  $f(x) = x$ .

**5.16.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin(2x + y)$ ,  $f(x) = \pi - 2x$ ;
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin(x - 2y)$ ,  $f(x) = \cos 2x$ ;
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos(2x + y)$ ,  $f(x) = \sin x$ ;
- 4)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin(3x + y)$ ,  $f(x) = \cos x$ ;
- 5)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin y + y \cos x$ ,  $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ ;
- 6)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos^2(x - y)$ ,  $f(x) = 1 + \cos 4x$ .

**5.17.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y, f(x) = \cos 3x;$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos x \cos y + 2 \sin 2x \sin 2y, f(x) = \cos x;$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin x \sin y + 3 \cos 2x \cos 2y, f(x) = \sin x.$

**5.18.** Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x+y) + \frac{1}{2} \right] \varphi(y) dy;$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[ \cos^2(x+y) + \frac{1}{2} \right] \varphi(y) dy;$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[ x^2 y^2 - \frac{2}{45} \right] \varphi(y) dy;$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[ \left( \frac{x}{y} \right)^{2/5} + \left( \frac{y}{x} \right)^{2/5} \right] \varphi(y) dy;$
- 5)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y) \varphi(y) dy.$

**5.19.** Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора. Решить при всех допустимых  $\lambda$  уравнения:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + x^3) \varphi(y) dy + 2 \cos x, x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\operatorname{sh} x + x^2 y^2) \varphi(y) dy - 3, x \in [-1, 1];$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-2}^2 (y^2 + x) \varphi(y) dy + 1, x \in [-2, 2];$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+y^2} \right) \varphi(y) dy + 3x^2 + 3, x \in [-1, 1];$
- 5)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y + 2x - xy) \varphi(y) dy + 3x + 1, x \in [-1, 1];$
- 6)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (9xy - 3x - y + 3) \varphi(y) dy + 3x + 1, x \in [-1, 1];$
- 7)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (5xy + x - 2y) \varphi(y) dy + 1 - 3x, x \in [0, 1];$

- 8)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2xy^2 + 6x - 3)\varphi(y) dy - 5x + 3, x \in [0, 1];$
- 9)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5x^2y^3 + 7x^3y^2)\varphi(y) dy + 5x + 7x^4, x \in [-1, 1];$
- 10)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y)\varphi(y) dy + 3 \sin x + \cos x,$   
 $x \in [-\pi, \pi];$
- 11)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy^2 + 5x^2y)\varphi(y) dy + 5x^3 - 7x^4, x \in [-1, 1];$
- 12)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{2}x \cos y + y \cos x \right) \varphi(y) dy + x^2 + 2\pi \sin x, x \in [-\pi, \pi];$
- 13)  $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2 \sin 3x \sin 6y)\varphi(y) dy -$   
 $- 3 \cos 9x + 2 \sin 9x, x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right];$
- 14)  $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} \sin(3x - 6y)\varphi(y) dy + 15 \cos 9x, x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right];$
- 15)  $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/4} (4 \cos x \cos 3y + \sin x \sin 3y)\varphi(y) dy - \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right),$   
 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$
- 16)  $\varphi(x) = 2\lambda \int_{-1}^{\pi/8} (4 \sin 6x \cos 2y - 3 \cos 6x \sin 2y)\varphi(y) dy +$   
 $+ (\pi - 6) \cos 2x + 2(\pi + 1) \sin 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right];$
- 17)  $\varphi(x) = \lambda \int_1^2 \left( \frac{4}{x^2 y^2} - 1 \right) \varphi(y) dy + 3x^2 - 4, x \in [1, 2];$
- 18)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2\sqrt{xy} - 1)\varphi(y) dy + 10x - 9, x \in [0, 1];$
- 19)  $\varphi(x) = \lambda \int_{1/2}^1 \left( \frac{3x^2}{y^2} - 8 \right) \varphi(y) dy - 6x^2 + 7, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right];$
- 20)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\ln 2} \left( \frac{2}{3}e^{3x-y} - 3e^y \right) \varphi(y) dy + 4e^{3x} - 18, x \in [0, \ln 2];$
- 21)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (24x^3y^2 - 14x + 3)\varphi(y) dy - 12x^3 + 1, x \in [0, 1];$

$$22) \varphi(x) = \int_{-1}^1 (15x^3 - 3x^2y + 4)\varphi(y) dy + 9x + 1, x \in [-1, 1];$$

$$23) \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (3x^2 - 6xy + 1)\varphi(y) dy + 4x - 1, x \in [0, 1];$$

$$24) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^3 + 3xy + 10y)\varphi(y) dy + 3x + 5, x \in [-1, 1].$$

**5.20.** При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 12 \int_0^1 \left( xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy + ax^2 + bx - 2?$$

Найти решения при этих значениях  $a$  и  $b$ .

**5.21.** При каких значениях параметра  $a$  разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sqrt{15} \int_0^1 [y(4x^2 - 3x) + x(4y^2 - 3y)] \varphi(y) dy + ax + \frac{1}{x}?$$

Найти решения при этих значениях  $a$ .

**5.22.** Выяснить, при каких значениях  $\lambda$  интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y)\varphi(y) dy + f(x)$$

разрешимо для любой  $f(x) \in C[0, 2\pi]$  и найти решение.

**5.23.** Найти решения следующих интегральных уравнений при всех значениях параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , входящих в свободный член этих уравнений:

$$1) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \sin x + \cos y)\varphi(y) dy + ax^2 + b;$$

$$2) \varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x + y)\varphi(y) dy + a \sin x + b;$$

$$3) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1 + xy)\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c;$$

- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2y + xy^2)\varphi(y) dy + ax + bx^3;$
- 5)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(xy + x^2y^2)\varphi(y) dy + ax + b;$
- 6)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 [5(xy)^{1/3} + 7(xy)^{2/3}] \varphi(y) dy + ax + bx^{1/3};$
- 7)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{1+y^2}\varphi(y) dy + a + x + bx^2;$
- 8)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c;$
- 9)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2)\varphi(y) dy + ax + b.$

**5.24.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy + f(x)$$

при всех  $\lambda, a, b$ , если:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2, f(x) = ax;$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = 3xy + 5x^2y^2, f(x) = ax^2 + bx.$

**5.25.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy + f(x)$$

при всех  $\lambda, a, b$ , если:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = x \cos y + \sin x \sin y, f(x) = a + b \cos x;$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = x \sin y + \cos x, f(x) = ax + b.$

**5.26.** Решить интегральные уравнения при всех  $\lambda$  и при всех значениях параметров  $a, b$ , входящих в свободный член этих уравнений. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядер интегральных операторов:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy + y^2 - y)\varphi(y) dy + ax + b, x \in [-1, 1];$

- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\operatorname{ch} x + (y+1)x)\varphi(y) dy + ax^3 + b, x \in [-1, 1];$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy + x^2 - x)\varphi(y) dy + ax + b, x \in [-1, 1];$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\operatorname{sh} x + xy)\varphi(y) dy + a \operatorname{ch} x + bx, x \in [-1, 1];$
- 5)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^{2/3} - xy)\varphi(y) dy + a|x| + bx^3, x \in [-1, 1];$
- 6)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy - |xy|)\varphi(y) dy + ax^3 + bx^2, x \in [-1, 1];$
- 7)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1 - x + x^{1/3}y)\varphi(y) dy + a|x|^3 + bx^3, x \in [-1, 1];$
- 8)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-2}^2 (xy + |x| - 2)\varphi(y) dy + a|x| + bx^{1/3}, x \in [-2, 2];$
- 9)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x - 6xy - 3y)\varphi(y) dy + a + 5bx^3, x \in [-1, 1];$
- 10)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (6x^2 - 5x^2y + 3xy^2)\varphi(y) dy + a + bx^3,$   
 $x \in [-1, 1];$
- 11)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (xy^2 + 2x^2 - 3x^2y)\varphi(y) dy + a + bx, x \in [0, 1];$
- 12)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (3x - 4xy + x^2y^2)\varphi(y) dy + a + bx^2, x \in [0, 1];$
- 13)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (|x| + x^2y)\varphi(y) dy + a \cos x + bx, x \in [-1, 1];$
- 14)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + |x|y)\varphi(y) dy + a \cos x + bx^3, x \in [-1, 1];$
- 15)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin|x| + \cos x \sin y)\varphi(y) dy + a + bx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$
- 16)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin|y| + |x| \sin y)\varphi(y) dy + a + b \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

$$17) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{|x| \cos y}{\pi - 2} + y^3 \right) \varphi(y) dy + a + 80bx, \quad x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$18) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( x^2 \sin y + \frac{6}{\pi} x \right) \varphi(y) dy + ax + bx^2, \quad x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$19) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + y \cos x) \varphi(y) dy + a \sin x + b, \quad x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$20) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y + 15y^2 x) \varphi(y) dy + a + bx, \quad x \in [-1, 1];$$

$$21) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (y + xy^2) \varphi(y) dy + a + bx, \quad x \in [-1, 1];$$

$$22) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5x^2 y + 3xy^2) \varphi(y) dy + a + bx^3, \quad x \in [-1, 1];$$

$$23) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (y(1 + 3x) - y^2) \varphi(y) dy + ax^3 + bx^2, \quad x \in [-1, 1];$$

$$24) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \sin |y| + (x - 1) \sin y) \varphi(y) dy + a \sin x + b, \\ x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$25) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + (x^2 + 3x)y^2) \varphi(y) dy + ax^2 + bx, \quad x \in [-1, 1];$$

$$26) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 - x^2 y^2) \varphi(y) dy + ax^2 + x^3, \quad x \in [-1, 1];$$

$$27) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x) \varphi(y) dy + ax + \cos x, \\ x \in [-\pi, \pi];$$

$$28) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y^2 - xy) \varphi(y) dy + x^3 + a, \quad x \in [-1, 1];$$

$$29) \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos y + y \sin x) \varphi(y) dy + \cos x + a \sin x, \\ x \in [-\pi, \pi].$$

**5.27.** Найти решение и резольвенту  $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$  следующих интегральных уравнений:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+y)\varphi(y) dy + f(x);$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1-y+2xy)\varphi(y) dy + f(x);$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x)\varphi(y) dy + ax + b;$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y)\varphi(y) dy + f(x).$

**5.28.** Найти все значения параметров  $a, b, c$ , при которых следующие интегральные уравнения имеют решения при любых  $\lambda$ :

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2)\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c;$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xy)\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c,$   
где  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ;
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{\sqrt{1-y^2}}\varphi(y) dy + x^2 + ax + b;$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(xy - \frac{1}{3}\right)\varphi(y) dy + ax^2 - bx + 1;$
- 5)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+y)\varphi(y) dy + ax + b + 1;$
- 6)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x+4y)\varphi(y) dy + e^{ax+b};$
- 7)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin x \sin 2y + \sin 2x \sin 4y)\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c;$
- 8)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+x^2+y^3)\varphi(y) dy + ax + bx^3.$

**5.29.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (ax - y)\varphi(y) dy + f(x)$$

разрешимо для всех действительных  $\lambda$  и всех  $f \in C(0, 1)$ .

**5.30.** 1) Найти условия на  $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ , при которых уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (|x| + y \sin x) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

разрешимо при всех  $\lambda$ .

2) Найти условия на  $f(x) \in C \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , при которых уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin |x| + y \cdot |x|) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

разрешимо при всех  $\lambda$ .

3) Найти условия на  $f(x) \in C \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , при которых уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \sin |y| + (x-1) \sin y) \varphi(y) dy + f(x), \\ x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \end{aligned}$$

разрешимо при всех  $\lambda$ .

4) Найти условия на  $f(x) \in C \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , при которых уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(|x| + y) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

разрешимо при всех  $\lambda$ .

**5.31.** Найти решение уравнения

$$1) \quad \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( x e^{-x^2} \cdot \cos^3 y + \frac{1 - \cos x}{x} e^{y^2} \right) \varphi(y) dy + f(x), \\ x \in [-1, 1].$$

$$2) \quad \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( \sin^3 x \cdot \frac{\operatorname{sh} y}{y} + x \operatorname{ch} x (y^2 + 2) e^{y^2} \right) \varphi(y) dy + f(x), \\ x \in [-1, 1].$$

$$3) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( xe^{x^2} \cdot \operatorname{sh}^4 y + \sin x (y^2 - y^4) \cos y \right) \varphi(y) dy + f(x), \\ x \in [-1, 1].$$

$$4) \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( x \operatorname{sh}^2 x \cdot \frac{\sin^3 y}{y} + \sin^3 x \cdot y^2 \operatorname{ch} y \right) \varphi(y) dy + f(x), \\ x \in [-1, 1].$$

При каких  $f(x) \in C([-1, 1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

**5.32.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

$$1) \varphi(x_1, x_2) = \lambda \iint_{-1}^1 \left[ x_1 + x_2 + \frac{3}{32}(y_1 + y_2) \right] \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2;$$

$$2) \varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} [|x|^2 + |y|^2] \varphi(y) dy, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2);$$

$$3) \varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} \frac{1+|y|}{1+|x|} \varphi(y) dy, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3).$$

**5.33.** Выяснить, имеет ли интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} [|x|^2 - |y|^2] \varphi(y) dy, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$$

вещественные характеристические числа, и если имеет, то найти соответствующие собственные функции.

**5.34.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2$  и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \iint_{-1}^1 (x_1 x_2 + y_1 y_2) \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + f(x_1, x_2).$$

**5.35.** Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра  $\alpha$ , при котором интегральное уравнение разрешимо для любых  $\lambda$ . Найти решение при этом значении  $\alpha$  (в задачах  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ):

$$1) \varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha, |x| < 1;$$

$$2) \varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (10|x|^2 - 6|x| \cdot |y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|, |x| < 1;$$

- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (-4|x|^2 + 12|y|^2) \varphi(y) dy + 2(|x|^2 + \alpha), |x| < 1;$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (-12|x|^2 + 20|x| \cdot |y|) \varphi(y) dy + \alpha|x|^2 + |x|, |x| < 1.$

В задачах 5.36–5.40 ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения (III) является эрмитовым, т. е. совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}.$$

В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т. е.  $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$ .

Эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$  обладает следующими свойствами:

- 1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;
- 2) система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  может быть выбрана ортонормальной:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}.$$

**5.36.** Доказать, что если  $\mathcal{K}(x, y)$  — эрмитово ядро, то характеристические числа второго итерированного ядра  $\mathcal{K}_2(x, y)$  (см. задачи 5.4–5.5) положительны.

**5.37.** Доказать, что если ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  является кососимметричным, т. е.  $\mathcal{K}(x, y) = -\mathcal{K}^*(x, y)$ , то его характеристические числа чисто мнимые.

В задачах 5.38–5.40 предполагается, что характеристические числа  $\lambda_k$  эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  занумерованы в порядке возрастания их модулей, т. е.

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots,$$

и каждое из этих чисел повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда можно считать, что каждому характеристическому числу  $\lambda_k$  соответствует одна собственная функция  $\varphi_k$ . Систему собственных функций  $\{\varphi_k\}$  будем считать ортонормальной.

**5.38.** Пусть  $\mathcal{K}(x, y)$  — эрмитово непрерывное ядро,  $\mathcal{K}_p(x, y)$  — повторное ядро ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Доказать формулы:

- 1)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\varphi_m(x)|^2}{\lambda_m^2} = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy;$
- 2)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} = \iint_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy;$

- 3)  $(Kf, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}$ ,  $f \in L_2(G)$ ,  $K$  — интегральный оператор с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$ ;
- 4)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^{2p}} = \iint_a^b |\mathcal{K}_p(x, y)|^2 dx dy$ ,  $p = 1, 2, \dots$ .

Пусть  $\mathcal{K}_n(x, y)$  —  $n$ -е повторное ядро для эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Назовем величину

$$\alpha_n = \int_a^b \mathcal{K}_n(x, x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$n$ -м следом ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

**5.39.** Доказать, что:

- 1) отношение  $\frac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}$  не убывает и ограничено;
- 2) существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{2n+2}}$  и этот предел равен наименьшему характеристическому числу ядра  $\mathcal{K}_2(x, y)$ ;
- 3)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^n} = \alpha_n$  ( $n \geq 2$ ), где  $\lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — характеристические числа ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ ,  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ ;
- 4)  $\frac{1}{|\lambda_1|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\alpha_{2n}}$ .

**5.40.** Пусть  $\lambda$  не является характеристическим числом эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Доказать, что (единственное) решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

можно представить в виде ряда

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_m)}{\lambda_m - \lambda} \varphi_m(x) + f(x),$$

равномерно сходящегося на  $\overline{G}$ , а для резольвенты  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  имеет место формула

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \bar{\varphi}_m(y)}{\lambda_m - \lambda},$$

где билинейный ряд сходится в  $L_2(G \times G)$ .

**5.41.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ y, & \text{если } 0 \leq y \leq y \leq 1; \end{cases}$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y(1-x), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}x, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ \frac{2-y}{2}y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 4)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (x+1)(y-2), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (y+1)(x-2), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 5)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (x+1)y, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ x(y+1), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 6)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (e^x - e^{-x})(e^y + e^{2-y}), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (e^x + e^{2-x})(e^y - e^{-y}), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 7)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin(1-y), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ \sin(1-x) \sin y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$

**5.42.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (1+x)(1-y), & \text{если } -1 \leq x \leq y \leq 1, \\ (1-x)(1+y), & \text{если } -1 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \cos x \sin y, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ \cos y \sin x, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq \pi; \end{cases}$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ \sin y \cos x, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq \pi. \end{cases}$

**5.43.** Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \omega(x+y) \varphi(y) dy$$

в следующих случаях:

- 1)  $\omega(t)$  — четная  $2\pi$ -периодическая функция, причем  $\omega(t) = t$ , если  $t \in [0, \pi]$ ;
- 2)  $\omega(t)$  — четная  $2\pi$ -периодическая функция, причем  $\omega(t) = \pi - t$ , если  $t \in [0, \pi]$ .

**5.44.** Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром  $\mathcal{K}(x, y) = \omega(x - y)$ , где  $\omega(t)$  — непрерывная кусочно-гладкая четная  $2\pi$ -периодическая функция,  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$ .

**5.45.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x),$$

если  $f(x) \in C^2([0, 1])$  и  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$

Пусть  $\mathcal{K}(x, y)$  — непрерывное ядро интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \quad (\text{VI})$$

Выражение

$$\mathcal{K} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{K}(x_1, y_1) & \mathcal{K}(x_1, y_2) & \dots & \mathcal{K}(x_1, y_n) \\ \mathcal{K}(x_2, y_1) & \mathcal{K}(x_2, y_2) & \dots & \mathcal{K}(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}(x_n, y_1) & \mathcal{K}(x_n, y_2) & \dots & \mathcal{K}(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

называется *символом Фредгольма*, а функция

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n}{n!} \lambda^n, \quad (\text{VII})$$

где

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad (\text{VIII})$$

называется *определителем Фредгольма* ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  или интегрального уравнения (VI).

**5.46.** Доказать, что коэффициенты  $A_n$  определителя Фредгольма удовлетворяют неравенствам  $|A_n| \leq n^{n/2} M^n (b-a)^n$ . Вывести отсюда, что  $D(\lambda)$  — целая функция от  $\lambda$ .

Указание. Использовать неравенство Адамара (см. [2]).

*Минором Фредгольма* называется функция

$$D(x, y; \lambda) = \lambda \mathcal{K}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n(x, y)}{n!} \lambda^{n+1}, \quad (\text{IX})$$

где

$$B_n(x, y) = \int_a^b \dots \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} x & t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ y & t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n. \quad (\text{X})$$

**5.47.** Показать, что если  $\mathcal{K}(x, y)$  — непрерывная в квадрате  $L$ : ( $a \leq x, y \leq b$ ) функция, то  $D(x, y; \lambda)$  — непрерывная функция переменных  $x, y, \lambda$  в  $L \times \mathbb{C}$  и  $D(x, y; \lambda)$  (при фиксированных  $x$  и  $y$ ) является целой функцией от  $\lambda$ .

**5.48.** Доказать, что коэффициенты  $A_n$  функции  $B_n(x, y)$  и ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  (см. (VII)–(X)) связаны равенствами:

- 1)  $B_n(x, y) = A_n \mathcal{K}(x, y) - n \int_a^b B_{n-1}(x, \xi) \mathcal{K}(\xi, y) d\xi;$
- 2)  $B_n(x, y) = A_n \mathcal{K}(x, y) - n \int_a^b \mathcal{K}(x, \xi) B_{n-1}(\xi, y) d\xi.$

Указание. Разложить определитель, входящий в подынтегральное выражение для  $B_n(x, y)$ , по элементам первого столбца.

**5.49.** Доказать первое и второе фундаментальные соотношения Фредгольма

$$\begin{aligned} D(x, y; \lambda) - \lambda \mathcal{K}(x, y) D(\lambda) &= \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, \xi) D(\xi, y; \lambda) d\xi, \\ D(x, y; \lambda) - \lambda \mathcal{K}(x, y) D(\lambda) &= \lambda \int_a^b \mathcal{K}(\xi, y) D(x, \xi; \lambda) d\xi. \end{aligned}$$

Указание. Воспользоваться разложением (IX), сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  в левой и правой частях доказываемых равенств и применить результат предыдущей задачи.

**5.50.** Доказать формулы

$$A_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x) dx, \quad \int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda).$$

**5.51.** Доказать формулу  $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^{n-1}$  (коэффициенты  $\alpha_n$  определены для задачи 5.39).

**5.52.** Пусть определитель Фредгольма  $D(\lambda)$  интегрального уравнения (VI) не равен нулю. Доказать, что в этом случае интегральное уравнение для любой  $f(x) \in C([a, b])$  имеет решение (и при том только одно) и что это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)} f(y) dy.$$

**5.53.** Используя представление решения интегрального уравнения при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  через резольвенту  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  (см. задачу 5.6) и результат предыдущей задачи, доказать формулу

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{\lambda D(\lambda)}$$

(эта формула определяет аналитическое продолжение резольвенты, заданной при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  в виде ряда (см. задачу 5.6)).

**5.54.** Доказать, что характеристические числа интегрального уравнения с непрерывным ядром совпадают с нулями определителя Фредгольма  $D(\lambda)$  этого уравнения.

**5.55.** Доказать, что ранг  $m$  характеристического числа  $\lambda_0$  интегрального уравнения с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  конечен и имеет место неравенство

$$m \leq |\lambda_0|^2 \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy.$$

**5.56.** Доказать, что определители Фредгольма непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и союзного с ним ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$  совпадают и, следовательно, данное и союзное уравнения имеют одни и те же характеристические числа (см. задачу 5.54).

**5.57.** Показать, что ранг характеристического числа для данного непрерывного ядра и союзного с ним ядра один и тот же.

**5.58.** Доказать, что при  $|\lambda| < 1$  интегральное уравнение Милна

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \left( \int_{|x-y|}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \varphi(y) dy$$

имеет единственное решение  $\varphi = 0$  в классе ограниченных функций на  $[0, \infty)$ .

**5.59.** Для интегрального уравнения Пайерлса

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_G \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^2} \varphi(y) dy, \quad \alpha > 0,$$

доказать оценку

$$\lambda_1(1 - e^{-\alpha D}) \geq \alpha,$$

где  $D$  — диаметр области  $G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\lambda_1$  — наименьшее по модулю характеристическое число ядра.

**5.60.** Доказать, что при  $\lambda < \frac{1}{2}$  решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

единственno в классе ограниченных в  $\mathbb{R}^1$  функций и выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y) dy.$$

## Ответы к § 5

**5.11.** 1)  $e^{\lambda(x-y)}$ ; 2)  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}(x-y)$ .

**5.12.** 1)  $\sin x$ ; 2)  $\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x)$ ; 3)  $\frac{2}{\lambda}(\operatorname{ch} \sqrt{\lambda}x - 1)$ .

**5.14.** 1) Если  $\lambda = -2$ , то решений нет; если  $\lambda \neq -2$ , то  $\varphi(x) = \frac{2x(\lambda+1) - \lambda}{\lambda+2}$ ,

- 2) если  $\lambda \neq \lambda_1$ , где  $\lambda_1 = \frac{1}{e^2 - 1}$ , то  $\varphi(x) = \frac{e^x}{1 - \lambda(e^2 - 1)}$ ; при  $\lambda = \lambda_1$ , уравнение не имеет решений;
- 3) если  $\lambda \neq 2$  и  $\lambda \neq -6$ , то  $\varphi(x) = \frac{12\lambda^2 x - 24\lambda x - \lambda^2 + 42\lambda}{6(\lambda + 6)(2 - \lambda)}$ ; при  $\lambda = 2$  и  $\lambda = -6$  уравнение не имеет решений.

**5.15.** 1) Если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  и  $\lambda \neq \frac{5}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{5(7 + 2\lambda)}{7(5 - 2\lambda)}x^2 + x^4$ ; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = Cx + \frac{25}{7}x^2 + x^4$ , где  $C$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = \frac{5}{2}$  уравнение не имеет решений;

$$2) \varphi(x) = \frac{2\lambda}{12\lambda^2 - 5}(5\sqrt[3]{x} + 6\lambda) + 1 - 6x^2, \text{ если } \lambda \neq \pm\sqrt{\frac{5}{12}}; \text{ при } \lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{12}} \text{ уравнение не имеет решений};$$

$$3) \varphi(x) = \frac{5(2\lambda - 3)}{3(5 - 2\lambda)}x^4 + x^2, \text{ если } \lambda \neq \frac{5}{2} \text{ и } \lambda \neq \frac{1}{2}; \varphi(x) = Cx^3 + x^2 - \frac{5}{6}x^4 \text{ при } \lambda = \frac{1}{2}, C \text{ — произвольная постоянная; при } \lambda = \frac{5}{2} \text{ уравнение не имеет решений};$$

$$4) \varphi(x) = \frac{20\lambda}{1 - 2\lambda}x^2 + 7x^4 + 3, \text{ если } \lambda \neq \frac{5}{2} \text{ и } \lambda \neq \frac{1}{2}; \varphi(x) = 7x^4 + 3 - \frac{50}{3}x^2 + Cx \text{ при } \lambda = \frac{5}{4}, C \text{ — произвольная постоянная; при } \lambda = \frac{1}{2} \text{ уравнение не имеет решений};$$

$$5) \varphi(x) = \frac{3(5 - 2\lambda)x}{5(3 + 2\lambda)} + x^2, \text{ если } \lambda \neq \pm\frac{3}{2}; \varphi(x) = \frac{1}{5}x + x^3 + Cx^2 \text{ при } \lambda = \frac{3}{2}, C \text{ — произвольная постоянная; при } \lambda = -\frac{3}{2} \text{ решений нет};$$

$$6) \text{ если } \lambda = \lambda_1 = \frac{1}{8}, \text{ то } \varphi(x) = C_1 + \frac{3}{2}x; \text{ если } \lambda = \lambda_2 = \frac{5}{8}, \text{ то } \varphi(x) = C_2(3x^2 - 1) - \frac{3}{2}x \text{ (}C_1 \text{ и } C_2 \text{ — произвольные постоянные); при } \lambda = \lambda_3 = \frac{3}{8} \text{ уравнение не имеет решений; если } \lambda \neq \lambda_i \text{ (}i = 1, 2, 3\text{), то } \varphi(x) = \frac{3x}{3 - 8\lambda}.$$

**5.16.** 1)  $\varphi(x) = \frac{12\lambda}{3 - 4\lambda} \sin 2x + \pi - 2x$ , если  $\lambda \neq \frac{4}{3}$  и  $\lambda \neq -\frac{3}{2}$ ;  $\varphi(x) = \pi - 2x - 2 \sin 2x + C \cos 2x$ , где  $C$  — произвольная постоянная, если  $\lambda = -\frac{3}{2}$ ; при  $\lambda = \frac{3}{4}$  уравнение не имеет решений;

- 2)  $\varphi(x) = \frac{3\pi\lambda}{2(2\lambda+3)} \sin 2x + \cos 2x$ , если  $\lambda \neq -\frac{3}{2}$  и  $\lambda \neq -\frac{3}{4}$ ;  $\varphi(x) = \cos 2x - \frac{3\pi}{4} \sin x + C \cos x$ , где  $C$  — произвольная постоянная, если  $\lambda = -\frac{3}{4}$ ; при  $\lambda = -\frac{3}{2}$  уравнение не имеет решений;
- 3)  $\varphi(x) = \sin x + \frac{3\pi\lambda}{8\lambda^2 - 9} \left(2\lambda \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x\right)$ , если  $\lambda \neq \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$ ; при  $\lambda = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$  уравнение не имеет решений;
- 4)  $\varphi(x) = \frac{\lambda\pi}{2} \sin 3x + \cos x$  при всех значениях  $\lambda$ ;
- 5)  $\varphi(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{\lambda\pi^2}{6(1+2\lambda)} \cos x$ , если  $\lambda \neq \pm \frac{1}{2}$ ;  $\varphi(x) = \frac{4}{3} - \frac{2x}{\pi} + (8 + \pi^2 \cos x)C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, если  $\lambda = \frac{1}{2}$ ; при  $\lambda = -\frac{1}{2}$  уравнение не имеет решений;
- 6)  $\varphi(x) = \frac{\lambda\pi}{2 - \lambda\pi} + 1 + \cos 4x$ , если  $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$  и  $\lambda \neq \frac{4}{\pi}$ ;  $\varphi(x) = \cos 4x - 1 + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, если  $\lambda = \frac{4}{\pi}$ ; при  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  уравнение не имеет решений.

- 5.17.** 1)  $\varphi(x) = \cos 3x$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ ;  $\varphi(x) = \cos 3x + C_1 \cos x + C_2 \sin 2x$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, если  $\lambda = \frac{1}{\pi}$ ;
- 2)  $\varphi(x) = \frac{\cos x}{1 - \lambda\pi}$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$  и  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ ;  $\varphi(x) = 2 \cos x + C \sin 2x$ , где  $C$  — произвольная постоянная, если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ ; при  $\lambda = \frac{1}{\pi}$  уравнение не имеет решений;
- 3)  $\varphi(x) = \frac{\sin x}{1 - \pi\lambda}$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$  и  $\lambda \neq \frac{1}{3\pi}$ ;  $\varphi(x) = \frac{3}{2} \sin x + C \cos 2x$ , где  $C$  — произвольная постоянная, если  $\lambda = \frac{1}{3\pi}$ ; при  $\lambda = \frac{1}{\pi}$  уравнение не имеет решений.

- 5.18.** 1)  $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ ,  $\sin x + \cos x$ , 1;  $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$ ,  $\cos x - \sin x$ ;
- 2)  $\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$ , 1;  $\lambda_2 = \frac{2}{\pi}$ ,  $\cos 2x$ ;  $\lambda_3 = -\frac{2}{\pi}$ ,  $\sin 2x$ ;
- 3)  $\lambda_1 = -45$ ,  $3x^2 - 2$ ;  $\lambda_2 = \frac{45}{8}$ ,  $15x^2 - 1$ ;
- 4)  $\lambda_1 = \frac{3}{8}$ ,  $3x^{2/5} + x^{-2/5}$ ;  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $3x^{2/5} - x^{-2/5}$ ;

5)  $\lambda_1 = -\frac{2}{\pi}$ ,  $\sin x - \sin 4x$ ,  $\sin 2x - \sin 3x$ ;  $\lambda_2 = \frac{2}{\pi}$ ,  $\sin 2x + \sin 3x$ ,  $\sin x + \sin 4x$ .

**5.19.** 1) Если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{\pi\lambda}{1-2\lambda} + \frac{\lambda(4-8\lambda+\lambda\pi^2)}{1-2\lambda}x^3 + 2\cos x$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = 1 + \frac{\pi}{2}x^3$  — собственная функция;

2) если  $\lambda \neq \frac{5}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{(16\lambda-90)\lambda}{3(5-2\lambda)} \operatorname{sh} x - \frac{10\lambda}{5-2\lambda}x^2 - 3$ ; если  $\lambda = \frac{5}{2}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda_1 = \frac{5}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = x^2 + \frac{5}{3}\operatorname{sh} x$  — собственная функция;

3) если  $\lambda \neq \frac{3}{16}$ , то  $\varphi(x) = \frac{16\lambda}{3-16\lambda} + \frac{12\lambda}{3-16\lambda}x + 1$ ; если  $\lambda = \frac{3}{16}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda_1 = \frac{3}{16}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = 1 + \frac{3x}{4}$  — собственная функция;

4) если  $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = \frac{8(2-\pi\lambda+3\lambda)\lambda}{2-\pi\lambda} \operatorname{arctg} x + \frac{12\lambda}{2-\pi\lambda} + 3x^2 + 3$ ; если  $\lambda = \frac{2}{\pi}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x + 1$  — собственная функция;

5) если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ,  $\lambda \neq -\frac{3}{4}$ , то  $\varphi(x) = \frac{6\lambda x}{3-2\lambda}(x+1) + 3x + 1$ ; если  $\lambda = -\frac{3}{4}$ , то  $\varphi(x) = C(x^2 - 2x) + 1$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{4}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^2 + x$  и  $\varphi_2(x) = x^2 - 2x$  — соответствующие собственные функции;

6) если  $\lambda \neq \frac{1}{8}$ ,  $\lambda \neq \frac{1}{4}$ , то  $\varphi(x) = \frac{3x+1}{1-4\lambda}$ ; если  $\lambda = \frac{1}{4}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{1}{8}$ , то  $\varphi(x) = C(3x-1) + 4$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{8}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{4}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 3x-1$  и  $\varphi_2(x) = 3x+1$  — соответствующие собственные функции;

7) если  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq 6$ , то  $\varphi(x) = \frac{3x-1}{\lambda-1}$ ; если  $\lambda = 1$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = 6$ , то  $\varphi(x) = C(7x-4) - \frac{3}{2}x + 1$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = 1$  и  $\lambda = \lambda_2 = 6$  — характеристи-

ческие числа, а  $\varphi_1(x) = 3x - 1$  и  $\varphi_2(x) = 7x - 4$  — соответствующие собственные функции;

8) если  $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ , то  $\varphi(x) = 2 \cdot \frac{3-5x}{\lambda+2}$ ; если  $\lambda = 1$ , то  $\varphi(x) = C(8x-3) - 2x + \frac{3}{2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -2$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = 1$  и  $\lambda = \lambda_2 = -2$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 8x - 3$  и  $\varphi_2(x) = 5x - 3$  — соответствующие собственные функции;

9) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}, \lambda \neq -\frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = 5\lambda C_1 x^2 + 7\lambda C_2 x^3 + 5x + 7x^4 = \frac{2\lambda}{1-2\lambda}(5x^2 + 7x^3) + 5x + 7x^4$ , где  $C_1 = C_2 = \frac{2\lambda}{1-2\lambda}$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = (5x^2 - 7x^3) \cdot C - 7x^3 + 5x + 7x^4$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = +\frac{1}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 5x^2 - 7x^3$  и  $\varphi_2(x) = 5x^2 + 7x^3$  — соответствующие собственные функции;

10) если  $\lambda \neq -\frac{1}{\pi}, \lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = \lambda C_1 x - \lambda C_2 + 3 \sin x + \cos x = \frac{3\pi\lambda}{1-2\pi\lambda}x + 3 \sin x + \cos x$ , где  $C_1 = \frac{3\pi}{1-2\pi\lambda}, C_2 = 0$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = -x + 3 \sin x + \cos x + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{\pi}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 1$  и  $\varphi_2(x) = x$  — соответствующие собственные функции;

11) если  $\lambda \neq -\frac{1}{2}, \lambda \neq \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = 3\lambda C_1 x + 5\lambda C_2 x^2 + 5x^3 - 7x^4 = \frac{2\lambda}{1+2\lambda}(5x^2 - 3x) + 5x^3 - 7x^4$ , где  $C_2 = -C_1 = \frac{2}{1+2\lambda}$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = (3x + 5x^2) \times C + 5x^2 + 5x^3 - 7x^4$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 3x - 5x^2$  и  $\varphi_2(x) = 3x + 5x^2$  — соответствующие собственные функции;

12) если  $\lambda \neq -\frac{1}{\pi^2}, \lambda \neq \frac{1}{\pi^2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{3}{2}\lambda C_1 x + \lambda C_2 \cos x + x^2 + 2\pi \sin x = -\frac{6\pi\lambda}{1+\lambda\pi^2}x + \frac{4\pi^2\lambda}{1+\pi^2\lambda} \cos x + x^2 + 2\pi \sin x$ , где  $C_2 = -\pi C_1 = \frac{4\pi^2}{1+\lambda\pi^2}$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{\pi^2}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ , то  $\varphi(x) = (3x + 2\pi \cos x) \cdot C + 4 \cos x + x^2 + 2\pi \sin x$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{\pi^2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{\pi^2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 3x - 2\pi \cos x$  и  $\varphi_2(x) = 3x + 2\pi \cos x$  — соответствующие собственные функции;

13) если  $\lambda \neq \pm \frac{9}{8}$ , то  $\varphi(x) = 2\lambda \cdot \frac{4}{9-8\lambda} \cos 3x - \frac{16}{5}\lambda \cdot \frac{9}{9-8\lambda} \times \sin 3x - 3 \cos 9x + 2 \sin 9x$ ; если  $\lambda = -\frac{9}{8}$ , то  $\varphi(x) = -\frac{9}{4}C \cos 3x + \frac{9}{2} \left( \frac{4}{5} - C \right) \sin 3x - 3 \cos 9x + 2 \sin 9x$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{9}{8}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{9}{8}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{9}{8}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \cos 3x + 2 \sin 3x$  и  $\varphi_2(x) = \cos 3x - 2 \sin 3x$  — соответствующие собственные функции;

14) если  $\lambda \neq -\frac{9}{4}$ ,  $\lambda \neq -\frac{9}{8}$ , то  $\varphi(x) = \frac{8\lambda}{1 + \frac{8}{9}\lambda} \cos 3x + 15 \cos 9x$ , если  $\lambda = -\frac{9}{4}$ , то  $\varphi(x) = -\frac{9}{2}C \sin 3x + 18 \cos 3x + 15 \cos 9x$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{9}{8}$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{9}{4}$ ,  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{9}{8}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \sin 3x$  и  $\varphi_2(x) = \cos 3x$  — соответствующие собственные функции;

15) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq 2$ , то  $\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda-2} \sin x - \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = 4C \cos x + \left( \frac{8}{3}C - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \sin x - \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = 2$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = 2$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \cos x + \frac{2}{3} \sin x$  и  $\varphi_2(x) = \sin x$  — соответствующие собственные функции;

16) если  $\lambda \neq \frac{4}{5}$ , то  $\varphi(x) = -\frac{\lambda(\pi^2 - 8)}{4 - 5\lambda} \sin 6x + (\pi - 6) \cos 2x + 2(\pi + 1) \sin 2x$ ; если  $\lambda = \frac{4}{5}$ , то  $\varphi(x) = 8C \sin 6x + (\pi - 6) \cos 2x + 2(\pi + 1) \sin 2x$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{4}{5}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = \sin 6x$  — собственная функция;

17) если  $\lambda \neq -3$ ,  $\lambda \neq 2$ , то  $\varphi(x) = \frac{12\lambda}{\lambda+3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{9\lambda}{\lambda+3} + 3x^2 - 4$ ; если  $\lambda = -3$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = 2$ , то  $\varphi(x) = C \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \right) + 3x^2 - 6$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -3$  и  $\lambda = \lambda_2 = 2$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \frac{4}{x^2} - 3$  и  $\varphi_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}$  — соответствующие собственные функции;

18) если  $\lambda \neq \pm 3$ , то  $\varphi(x) = -\frac{12\lambda}{\lambda+3}x + \frac{12\lambda}{\lambda+3} + 10x - 9$ ; если  $\lambda = -3$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = 3$ , то  $\varphi(x) = C(2x - 1) + 10x - 6$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -3$  и  $\lambda = \lambda_2 =$

$= 3$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x - 1$  и  $\varphi_2(x) = 2x - 1$  — соответствующие собственные функции;

19) если  $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq -2$ , то  $\varphi(x) = \frac{12\lambda}{2\lambda+1} \cdot x^2 - \frac{14\lambda}{2\lambda+1} - 6x^2 + 7$ ;  
 если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = -2$ , то  $\varphi(x) = C(3x^2 - 2) - 12x^2 + 7$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -2$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 3x^2 - \frac{7}{2}$  и  $\varphi_2(x) = 3x^2 - 2$  — соответствующие собственные функции;

20) если  $\lambda \neq -2$ ,  $\lambda \neq -\frac{2}{3}$ , то  $\varphi(x) = -\frac{4\lambda}{\lambda+2} \cdot e^{3x} + \frac{18\lambda}{\lambda+2} + 4e^{3x} - 18$ ;  
 если  $\lambda = -2$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = -\frac{2}{3}$ , то  $\varphi(x) = C(2e^{3x} - 15) + 4e^{3x} - 12$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -2$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{2}{3}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 2e^{3x} - 9$  и  $\varphi_2(x) = 2e^{3x} - 15$  — соответствующие собственные функции;

21) если  $\lambda \neq \pm 1$ , то  $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{\lambda-1}(20x^3 - 14x + 3) - 12x^3 + 1$ ;  
 если  $\lambda = -1$ , то  $\varphi(x) = C(12x^3 - 14x + 3) + 1 - 4x^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = 1$ , то уравнение решений не имеет;  $\lambda = \lambda_1 = -1$  и  $\lambda = \lambda_2 = 1$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 12x^3 - 14x + 3$  и  $\varphi_2(x) = 20x^3 - 14x + 3$  — соответствующие собственные функции;

22) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{1}{6}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{1-2\lambda}(15x^3 - 9x^2 + 4) + 9x + 1$ ;  
 если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{1}{6}$ , то  $\varphi(x) = 9x + 1 - 3x^2 + C(15x^3 - 3x^2 + 4)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{6}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 15x^3 - 9x^2 + 4$  и  $\varphi_2(x) = 15x^3 - 3x^2 + 4$  — соответствующие собственные функции;

23) если  $\lambda \neq \pm 2$ , то  $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{\lambda+2}(3x^2 - 5x + 1) + 4x - 1$ ; если  $\lambda = -2$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = 2$ , то  $\varphi(x) = 2x - 1 + C(3x^2 - 3x + 1)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -2$  и  $\lambda = \lambda_2 = 2$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 3x^2 - 5x + 1$  и  $\varphi_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$  — соответствующие собственные функции;

24) если  $\lambda \neq \frac{1}{4}$ ,  $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{1-4\lambda}(5x^3 + 3x + 10) + 3x + 5$ ;  
 если  $\lambda = \frac{1}{4}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{3x}{2} + C(10x^3 - 3x - 10)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 5x^3 +$

$+ 3x + 10$  и  $\varphi_2(x) = 10x^3 - 3x + 10$  — соответствующие собственные функции.

**5.20.**  $a = -12$ ,  $b = 12$ ,  $\varphi(x) = -12x^2 + C_1x + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

**5.21.**  $a = \sqrt{15} - 3$ ,  $\varphi(x) = [4\sqrt{15}x^2 + 3(1 - \sqrt{15})x] + \frac{1}{x} - 3x$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

**5.22.** Уравнение разрешимо при любом  $\lambda$ ,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y)f(y)dy + f(x).$$

**5.23.** 1)  $\varphi(x) = \frac{\lambda a \pi^3}{12(1 - 2\lambda)} \sin x + \frac{2\lambda b}{1 - 2\lambda} + ax + b$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  ( $a$ ,  $b$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{2}$  уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда  $a = b = 0$ ,  $\varphi(x) = C_1 \sin x + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные;

2)  $\varphi(x) = \frac{2(a - 2\lambda b)}{2 + \lambda \pi} \sin x + b$ , если  $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$  ( $a$ ,  $b$  любые); при  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  уравнение разрешимо при любых  $a$  и  $b$  и  $\varphi(x) = \frac{a\pi - 4b}{2\pi} \sin x + b + C_1 \cos x$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ , то уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда  $a\pi + 4b = 0$  и  $\varphi(x) = b + C_2 \sin x$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная;

3)  $\varphi(x) = \frac{2\lambda a + 3c}{3(1 - 2\lambda)} + \frac{3b}{3 - 2\lambda}x + ax^2$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  и  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{2}$  уравнение разрешимо, если  $a + 3c = 0$ ,  $\varphi(x) = \frac{3}{2}bx + ax^2 + C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = \frac{3}{2}$  уравнение разрешимо, если  $b = 0$  и  $\varphi(x) = ax^2 - \frac{1}{2}(a + c) + C_2x$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная;

4)  $\varphi(x) = \frac{2\lambda(5a + 3b)}{15 - 4\lambda^2}x^2 + \frac{4\lambda^2(5a + 3b)}{5(15 - 4\lambda^2)}x + ax + bx^2$ , если  $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$  ( $a$ ,  $b$  любые); при  $\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$  уравнение разрешимо, если  $5a + 3b = 0$ , и

$$\varphi(x) = a \left( x - \frac{5}{3}x^3 \right) + C_1 \left( \sqrt{\frac{5}{3}}x^2 + x \right),$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = -\frac{\sqrt{15}}{2}$  уравнение разрешимо, если  $5a + 3b = 0$  и

$$\varphi(x) = a \left( x - \frac{5}{3}x^3 \right) + C_2 \left( x - \sqrt{\frac{5}{3}}x^2 \right),$$

где  $C_2$  — произвольная постоянная;

5)  $\varphi(x) = \frac{3a}{3-\lambda}x + \frac{5\lambda b}{3(5-\lambda)}x^2 + b$ , если  $\lambda \neq 3$  и  $\lambda \neq 5$  ( $a, b$  любые);

при  $\lambda = 3$  уравнение разрешимо, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = b\left(\frac{5}{2}x^2 + 1\right) + C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = 5$  уравнение разрешимо, если  $b = 0$  и  $\varphi(x) = C_2x^2 - \frac{3}{2}ax$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная;

6)  $\varphi(x) = \frac{80\lambda a + 7b}{7(1-6\lambda)}x^{1/3} + ax$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{6}$  ( $a, b$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{6}$  уравнение разрешимо, если  $5a + 7b = 0$ , и  $\varphi(x) = -\frac{7}{5}bx + C_1x^{1/3} + C_2x^{2/3}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные;

7)  $\varphi(x) = \frac{2a + \lambda b(4 - \pi)}{2 - \lambda\pi} + \frac{2}{2 - \lambda(4 - \pi)}x + bx^2$ , если  $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$  и  $\lambda \neq \frac{2}{4 - \pi}$  ( $a, b$  любые); при  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  уравнение разрешимо, если  $a\pi + b(4 - \pi) = 0$ , и  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2(\pi - 2)}x + bx^2 + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = \frac{2}{4 - \pi}$  уравнение не имеет решений;

8)  $\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 36\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)}x^{1/3} + \frac{28\lambda^2 a + 30\lambda b + 35}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx$ ,  
 если  $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$  ( $a, b, c$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$  уравнение разрешимо, если  $15\sqrt{3}b + 7\sqrt{5}(a + 3c) = 0$ , и  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c + C_1\left(x^{1/3} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$  уравнение разрешимо, если  $15\sqrt{3}b - 7\sqrt{5}(a + 3c) = 0$ , и  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c + C_2\left(x^{1/3} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная;

9)  $\varphi(x) = \frac{30(b-1)\lambda}{15+8\lambda}x^2 + \frac{3a\lambda^2}{3-2\lambda}x + \frac{36\lambda^2(b-1)}{(15+8\lambda)(3-2\lambda)}$ , если  $\lambda \neq -\frac{15}{8}$  и  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  ( $a, b$  любые); при  $\lambda = -\frac{15}{8}$  уравнение разрешимо, если  $b = 1$ , и  $\varphi(x) = \frac{17}{2}ax + 1 - 20a + C(x^2 + 1)$ , где  $C$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = \frac{3}{2}$  уравнение разрешимо, если  $a = b = 0$ , и  $\varphi(x) = C_1x + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

**5.24.** 1)  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\varphi_1 = x$ ;  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $\varphi_2 = 3x - 4x^2$ ;  $\varphi(x) = \frac{3ax}{3-2\lambda}$ , если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  и  $\lambda \neq -\frac{1}{2}$  ( $a$  любое); при  $\lambda = \frac{3}{2}$  уравнение разрешимо, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = C_1x$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = -\frac{1}{2}$

уравнение разрешимо при любом  $a$  и  $\varphi(x) = \frac{3}{4}ax + C_2(3x - 4x^2)$ ,

где  $C_2$  — произвольная постоянная;

2)  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi_1^{(1)} = x$ ;  $\varphi_1^{(2)} = x^2$ ;  $\varphi(x) = \frac{ax^2 + bx}{1 - 2\lambda}$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , при  $\lambda = \frac{1}{2}$  уравнение разрешимо, если  $a = b = 0$ , и  $\varphi(x) = C_1x^2 + C_2x$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

**5.25.** 1)  $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ ,  $\varphi_1 = \sin x$ ;  $\varphi = a + b \cos x + \lambda b \pi x + \frac{2\pi^2 \lambda^2 b}{1 - \lambda \pi} \sin x$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$  ( $a, b$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{\pi}$  уравнение разрешимо, если  $b = 0$ , и  $\varphi(x) = a + C \sin x$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

2)  $\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$ ,  $\varphi_1 = x$ ;  $\varphi(x) = \frac{ax}{1 - 2\pi\lambda} + b + 2\pi b \lambda \cos x$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$  ( $a, b$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$  уравнение разрешимо, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = b(1 + \cos x) + Cx$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

**5.26.** 1) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2a\lambda}{1 - 2\lambda}x + \frac{3\lambda}{3 - 2\lambda} \left[ \frac{2b}{3} - \frac{2a}{3} \times \frac{1 - \lambda}{1 - 2\lambda} \right] + ax + b$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(4x - 1) + \frac{3b}{2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 4b$ , и  $\varphi(x) = -2bx + b + \frac{3C}{2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 4x - 1$  и  $\varphi_2(x) = 1$  — соответствующие собственные функции;

2) если  $\lambda \neq \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1}$ ,  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2\lambda b}{1 - 2\lambda \operatorname{sh} 1} \cdot \operatorname{ch} x + \frac{3\lambda x}{3 - 2\lambda} \times \left[ \frac{2a}{5} + \frac{2b}{1 - 2\lambda \operatorname{sh} 1} \right] + ax^3 + b$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b = 0$ , и  $\varphi(x) = C \left( \operatorname{ch} x + \frac{3 \operatorname{sh} 1}{3 \operatorname{sh} 1 - 1} x \right) + \frac{3ax}{5(3 \operatorname{sh} 1 - 1)}$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $\frac{a}{5} + \frac{b}{1 - 3 \operatorname{sh} 1} = 0$ , и  $\varphi(x) = \frac{3b \operatorname{ch} x}{1 - 3 \operatorname{sh} 1} - \frac{5bx^3}{1 - 3 \operatorname{sh} 1} + b + Cx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \operatorname{ch} x + \frac{3 \operatorname{sh} 1}{3 \operatorname{sh} 1 - 1}$  и  $\varphi_2(x) = x$  — соответствующие собственные функции;

3) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{3\lambda x}{1 - 2\lambda} + \left[ \frac{2a}{3} - \frac{4\lambda b}{3 - 2\lambda} \right] + \frac{6b\lambda}{3 - 2\lambda} (x^2 - x) + ax + b$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение

только, если  $2a = 3b$ , и  $\varphi(x) = Cx + a\left(x^2 + \frac{2}{3}\right)$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b = 0$ , и  $\varphi(x) = C(2x^2 + x) - \frac{ax}{2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x$  и  $\varphi_2(x) = 2x^2 + x$  — соответствующие собственные функции;

4) если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ , то

$$\varphi(x) = 2a\lambda \operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} x + \frac{3\lambda x}{3-2\lambda} \left[ 4a\lambda \operatorname{sh} 1 (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1) + \frac{2}{3}b \right] + a \operatorname{ch} x + bx;$$

если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $9a \operatorname{sh} 1 (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1) + b = 0$ , и  $\varphi(x) = 3a \operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} x + a \operatorname{ch} x - 9a \operatorname{sh} 1 (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1)x + Cx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = x$  — соответствующая собственная функция;

5) если  $\lambda \neq \frac{5}{6}$ ,  $\lambda \neq -\frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \lambda C_1 x^{2/3} - \lambda C_2 x + a|x| + bx^3$ ,

где  $C_1 = \frac{5a}{5-6\lambda}$ ,  $C_2 = \frac{6b}{5(3+2\lambda)}$ ; если  $\lambda = \frac{5}{6}$ , то решение существует при  $a = 0$  и любых  $b$ :  $\varphi(x) = Cx^{2/3} - \frac{3b}{14}x + bx^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{3}{2}$ , то решение существует при  $b = 0$  и любых  $a$  и имеет вид  $\varphi(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5a}{14}x^{2/3} + Cx + a|x|$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{5}{6}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^{2/3}$  и  $\varphi_2(x) = x$  — соответствующие собственные функции;

6) если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ,  $\lambda \neq -\frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \lambda C_1 x - \lambda C_2 |x| + ax^3 + bx^2$ ,

где  $C_1 = \frac{6a}{5(3-2\lambda)}$ ,  $C_2 = \frac{3b}{2(3+2\lambda)}$ ; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то решение существует при  $a = 0$  и любых  $b$  и имеет вид  $\varphi(x) = Cx - \frac{3b}{8}|x| + bx^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{3}{2}$ , то решение существует при  $b = 0$  и любых  $a$  и имеет вид  $\varphi(x) = -\frac{3a}{10}x + C|x| + ax^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x$  и  $\varphi_2(x) = |x|$  — соответствующие собственные функции;

7) если  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq \frac{7}{6}$ , то  $\varphi(x) = \lambda C_1 (1 - |x|) + \lambda C_2 x^{1/3} + a|x|^3 + bx^3$ ,

где  $C_1 = \frac{a}{2(1-\lambda)}$ ,  $C_2 = \frac{14b}{5(7-6\lambda)}$ ; если  $\lambda = 1$ , то решение существует

при  $a = 0$  и любых  $b$  и имеет вид  $\varphi(x) = C(1 - |x|) + \frac{14b}{5}x^{1/3} + bx^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{7}{6}$ , то решение существует при  $b = 0$  и любых  $a$  и имеет вид  $\varphi(x) = -\frac{7}{2}a(1 - |x|) + Cx^{1/3} + a|x|^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = 1$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{7}{6}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 1 - |x|$  и  $\varphi_2(x) = x^{1/3}$  — соответствующие собственные функции;

8) если  $\lambda \neq \frac{3}{16}$ ,  $\lambda \neq -\frac{1}{4}$ , то  $\varphi(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2(|x| - 2) + a|x| + bx^{\frac{1}{3}}$ , где  $C_1 = \frac{9}{7} \cdot \frac{b \cdot 2^{10/3}}{3 - 16\lambda}$ ,  $C_2 = \frac{4a}{1 + 4\lambda}$ ; если  $\lambda = \frac{3}{16}$ , то решение существует при  $b = 0$  и любых  $a$  и имеет вид  $\varphi(x) = Cx + \frac{3}{7}a(|x| - 2) + a|x|$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{1}{4}$ , то решение существует при  $a = 0$  и любых  $b$  и имеет вид  $\varphi(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{9b \cdot 2^{10/3}}{49}x + C(|x| - 2) + bx^{1/3}$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{16}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{4}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x$  и  $\varphi_2(x) = |x| - 2$  — соответствующие собственные функции;

9) если  $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2(a + 4a\lambda - 6b\lambda)}{(2\lambda + 1)^2} \lambda x - \frac{2(3b + 2a\lambda)}{(2\lambda + 1)^2} \lambda(2x + 1) + a + 5bx^3$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 3b$ , и  $\varphi(x) = -3bx + 3b + 5bx^3 + C(x + 1)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = x + 1$  — соответствующая собственная функция;

10) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , то

$$\varphi(x) = \frac{2(18a - 3b - 10a\lambda)}{3(2\lambda - 1)^2} \lambda x^2 + \frac{10a + 32a\lambda - 12b\lambda}{15(2\lambda - 1)^2} \cdot 3\lambda x + a + bx^3;$$

если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $3b = 13a$ , и  $\varphi(x) = C(5x^2 + 3x) - \frac{5a}{3}x^2 + \frac{13a}{3}x^3 + a$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = 5x^2 + 3x$  — соответствующая собственная функция;

11) если  $\lambda \neq 4$ ,  $\lambda \neq -10$ , то  $\varphi(x) = \frac{4\lambda x}{4 - \lambda} \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a\lambda}{10 + \lambda} \right) + \frac{5a\lambda x^2}{10 + \lambda} + a + bx$ ; если  $\lambda = 4$ , то уравнение имеет решение только, если  $-52a = 21b$ , и  $\varphi(x) = \frac{10a}{7}x^2 + a - \frac{52a}{21}x + Cx$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -10$ , то уравнение имеет решение

только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = \frac{2b}{7}x + C(7x^2 - 4x)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = 4$  и  $\lambda = \lambda_2 = -10$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x$  и  $\varphi_2(x) = 7x^2 - 4x$  — соответствующие собственные функции;

12) если  $\lambda \neq 5, \lambda \neq 6$ , то  $\varphi(x) = \frac{6a\lambda x}{6-\lambda} + \frac{5\lambda x^2}{5-\lambda} \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{5} + \frac{3a\lambda}{2(6-\lambda)} \right) + a + bx$ ; если  $\lambda = 5$ , то уравнение имеет решение только, если  $-235a = 6b$ , и  $\varphi(x) = 30ax + a - \frac{235a}{6}x^2 + Cx^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = 6$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(2x - 15x^2) - 5bx^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = 5$  и  $\lambda = \lambda_2 = 6$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^2$  и  $\varphi_2(x) = 2x - 15x^2$  — соответствующие собственные функции;

13) если  $\lambda \neq 1$ , то  $\varphi(x) = \frac{\lambda|x|}{1-\lambda} \left( 2a \sin 1 + \frac{4}{9}\lambda b \right) + \frac{2}{3}b\lambda x^2 + a \cos x + bx$ ; если  $\lambda = 1$ , то уравнение имеет решение только, если  $9a \sin 1 + 2b = 0$ , и  $\varphi(x) = C|x| + \frac{2}{3}bx^2 - \frac{2b}{9 \sin 1} \cos x + bx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = 1$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = |x|$  — соответствующая собственная функция;

14) если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{3\lambda x^2}{3-2\lambda} \left( 2a \sin 1 + \frac{2b\lambda}{5} \right) + \frac{2\lambda b}{5}|x| + a \cos x + bx^3$ ; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $10a \sin 1 = -3b$ , и  $\varphi(x) = Cx^2 + \frac{3b}{5}|x| - \frac{3b}{10 \sin 1} \cos x + bx^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = x^2$  — соответствующая собственная функция;

15) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{\lambda \sin |x|}{1-2\lambda} (\pi a + 4\lambda b) + 2b\lambda \cos x + a + bx$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $\pi a = -2b$ , и  $\varphi(x) = C \sin |x| + b \cos x - \frac{2b}{\pi} + bx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = \sin |x|$  — соответствующая собственная функция;

16) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{\lambda}{1-2\lambda} (2a + \pi b \lambda) + \frac{\pi b \lambda}{2}|x| + a + b \sin x$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $-4a = \pi b$ , и  $\varphi(x) = C + \frac{\pi b}{4}(|x| - 1) + b \sin x$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = 1$  — соответствующая собственная функция;

17) если  $\lambda \neq 1$ , то  $\varphi(x) = \frac{\lambda|x|}{(\pi-2)(1-\lambda)} (2a + 2\lambda b \pi^5) + \lambda b \pi^5 + a + 80bx$ ; если  $\lambda = 1$ , то уравнение имеет решение лишь при  $6\pi^5 + a = 0$ ,

и  $\varphi(x) = C|x| + 80bx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = 1$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = |x|$  — соответствующая собственная функция;

18) если  $\lambda \neq \pm \frac{1}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = \frac{12a + b\pi^3\lambda}{6(1 - \pi^2\lambda^2)} \cdot \lambda x^2 + \frac{b\pi^3 + 12\pi^2a\lambda}{12(1 - \pi^2\lambda^2)} \times \lambda x + ax + bx^2$ ; если  $\lambda = \frac{1}{\pi}$ , то уравнение имеет решение только, если  $12a + b\pi^2 = 0$ , и  $\varphi(x) = C(2x^2 + \pi x) - \frac{b\pi^2}{12}x + bx^2 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ , то уравнение имеет решение только, если  $12a - b\pi^2 = 0$ , и  $\varphi(x) = C(2x^2 - \pi x) + \frac{b\pi^2}{12}x + bx^2 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 2x^2 + \pi x$  и  $\varphi_2(x) = 2x^2 - \pi x$  — соответствующие собственные функции;

19) если  $\lambda \neq \pm \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{b\pi + 4a\lambda}{1 - 4\lambda^2} \cdot \lambda \sin x + \frac{2a + 2b\pi\lambda}{1 - 4\lambda^2} \cdot \lambda \cos x + a \sin x + b$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b\pi + 2a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(\sin x + \cos x) + b$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b\pi - 2a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(\sin x - \cos x) + b$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \sin x + \cos x$  и  $\varphi_2(x) = \sin x - \cos x$  — соответствующие собственные функции;

20) если  $\lambda \neq \pm \frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2(b + 10a\lambda)}{3(1 - 4\lambda^2)} \cdot \lambda x^2 + \frac{2(5a + 2b\lambda)}{1 - 4\lambda^2} \cdot \lambda x + a + bx$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b + 5a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(x^2 + 3x) + a - 5ax - \frac{5a}{3}x^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b - 5a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(x^2 - 3x) + a + 5ax - \frac{5a}{3}x^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^2 + 3x$  и  $\varphi_2(x) = x^2 - 3x$  — соответствующие собственные функции;

21) если  $\lambda \neq \pm \frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2(3b + 2a\lambda)}{9 - 4\lambda^2} \cdot \lambda + \frac{2(3a + 2b\lambda)}{9 - 4\lambda^2} \cdot \lambda x + a + bx$ ; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b + a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(x + 1) - ax$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda =$

$= -\frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $b - a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(x - 1) + ax$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x + 1$  и  $\varphi_2(x) = x - 1$  — соответствующие собственные функции;

22) если  $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{1-4\lambda^2} \left[ \left( b + \frac{10}{3}a\lambda \right)x^2 + \left( a + \frac{6}{5}b\lambda \right)x \right] + a + bx^2$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $3b + 5a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(5x^2 + 3x) + b \left( x^2 - \frac{3}{5} \right) + bx^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $3b - 5a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(5x^2 - 3x) - b \left( x^2 - \frac{3}{5} \right) + bx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 5x^2 - 3x$  и  $\varphi_2(x) = 5x^2 + 3x$  — соответствующие собственные функции;

23) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq -\frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{6\lambda}{5(3+2\lambda)} \left( \frac{a}{1-2\lambda} - b \right) + \frac{6a\lambda}{5(1-2\lambda)}x + bx^2 + ax^3$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(1 + 4x) + bx^2 - \frac{3b}{20}$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = -\frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 4b$ , и  $\varphi(x) = C - \frac{9}{5}bx + bx^2 + 4bx^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = 1 + 4x$  и  $\varphi_2(x) = 1$  — соответствующие собственные функции;

24) если  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{1}{4}$ , то  $\varphi(x) = \frac{1}{1-4\lambda} \left( b - \frac{\pi a \lambda}{2(1-2\lambda)} \right) + \frac{\pi a \lambda}{2(1-2\lambda)}x + b \sin x$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(x + 1) - b$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{1}{4}$ , то уравнение имеет решение только, если  $\pi a = 4b$ , и  $\varphi(x) = C + a \left( \sin x + \frac{\pi x}{4} \right)$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{4}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x + 1$  и  $\varphi_2(x) = 1$  — соответствующие собственные функции;

25) если  $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{5}{2}$ , то  $\varphi(x) = \frac{5a}{5-2\lambda}x^2 + \frac{3}{3-2\lambda} \left( b + \frac{6a\lambda}{5-2\lambda} \right)x$ ; если  $\lambda = \frac{3}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $2b + 9a = 0$ ,

и  $\varphi(x) = Cx + \frac{5}{2}ax^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная; если  $\lambda = \frac{5}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = C(2x^2 - 9x) - \frac{3}{2}bx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{5}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x$  и  $\varphi_2(x) = 2x^2 - 9x$  — соответствующие собственные функции;

$$26) \text{ если } \lambda \neq \pm \frac{5}{2}, \text{ то } \varphi(x) = \frac{2\lambda}{7\left(1 - \frac{2\lambda}{5}\right)}x - \frac{2\lambda a}{5\left(1 + \frac{2\lambda}{5}\right)}x^2 + ax + x^3;$$

если  $\lambda = \frac{5}{2}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = -\frac{5}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{7}x - Cx^2\right) + x^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{5}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{5}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^2$  и  $\varphi_2(x) = x$  — соответствующие собственные функции;

27) если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ ,  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = \lambda\left(\frac{2\pi a}{1 - 2\pi\lambda}x + \frac{\pi}{1 - \pi\lambda}\cos x\right) + ax + \cos x$ ; если  $\lambda = \frac{1}{\pi}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = Cx + \cos x$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = \cos x$  и  $\varphi_2(x) = x$  — соответствующие собственные функции;

28) если  $\lambda \neq \frac{5}{2}$ ,  $\lambda \neq -\frac{3}{2}$ , то  $\varphi(x) = \lambda\left(\frac{10b}{15 - 6\lambda}x^2 - \frac{6}{15 + 10\lambda}x\right) + x^3 + b$ ; если  $\lambda = -\frac{3}{2}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{5}{2}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = Cx^2 - \frac{3}{8}x + x^3$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = \frac{5}{2}$  и  $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^2$  и  $\varphi_2(x) = x$  — соответствующие собственные функции;

29) если  $\lambda \neq -\frac{1}{4\pi}$ ,  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = \lambda\left(\frac{\pi}{1 + 4\pi\lambda}x^2 + \frac{2\pi b}{1 - 2\pi\lambda}\sin x\right) + \cos x + b\sin x$ ; если  $\lambda = -\frac{1}{4\pi}$ , то уравнение решений не имеет; если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то уравнение имеет решение только, если  $a = 0$ , и  $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}x^2 + C\sin x\right) + \cos x$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{4\pi}$  и  $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$  — характеристические числа, а  $\varphi_1(x) = x^2$  и  $\varphi_2(x) = \sin x$  — соответствующие собственные функции.

**5.27.** 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \frac{\sin(x+y) + \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x-y)}{\Delta(\lambda)} f(y) dy + f(x)$ , если  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , где  $\Delta(\lambda) = 1 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4}$ ; при  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  уравнение разрешимо, если  $f_1 + f_2 = 0$ , где  $f_1 = \int_0^\pi f(y) \cos y dy$ ,  $f_2 = \int_0^\pi f(y) \sin y dy$ ,  $\varphi(x) = C_1(\sin x + \cos x) + \frac{2}{\pi} f_1 \sin x + f(x)$  ( $C_1$  — произвольная постоянная); при  $\lambda = -\frac{2}{\pi}$  уравнение разрешимо, если  $f_1 - f_2 = 0$ , и  $\varphi(x) = C_2(\sin x - \cos x) - \frac{2}{\pi} f_1 \sin x + f(x)$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная;

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{\sin(x+y) + \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x-y)}{\Delta(\lambda)};$$

2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1 - \frac{4}{3}\lambda + y(2x - 4\lambda x - 1)}{\Delta(\lambda)} f(y) dy + f(x)$ , где  $\Delta(\lambda) = (1 - 2\lambda) \left(1 - \frac{4}{3}\lambda\right)$ ; при  $\lambda = \frac{1}{2}$  уравнение разрешимо, если  $f_1 = 3f_2$ , где  $f_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx$ ,  $f_2 = \int_{-1}^1 x f(x) dx$ ,  $\varphi(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) f_1 + f(x) + C_1$  ( $C_1$  — произвольная постоянная); при  $\lambda = \frac{3}{4}$  уравнение разрешимо, если  $f_2 = 0$ , и  $\varphi(x) = -\frac{3}{2}f_1 + f(x) + C_2(x+1)$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная;

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{1 - \frac{4}{3}\lambda + y(2x - 4\lambda x - 1)}{\Delta(\lambda)};$$

3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{x \sin y}{1 - 2\pi\lambda} + \cos x \right) (ay + b) dy + ax + b = \frac{ax}{1 - 2\pi\lambda} + 2\pi\lambda b \cos x + b$ , где  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$  ( $a$ ,  $b$  любые); при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$  уравнение разрешимо, если  $a = 0$ ,  $\varphi(x) = b(\cos x + 1) + Cx$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{x \sin y}{1 - 2\pi\lambda} + \cos x;$$

4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y}{1 - \lambda\pi} f(y) dy + f(x)$ , если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ ; при  $\lambda = \frac{1}{\pi}$  уравнение разрешимо, если  $\int_0^{2\pi} f(y) \sin y dy = \int_0^{2\pi} f(y) \sin 2y dy = 0$ ,  $\varphi(x) = f(x) + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные;

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y}{1 - \lambda\pi}.$$

**5.28.** 1)  $b = 0, 3a + 5c = 0;$

2)  $a = \frac{3}{\sqrt{10}}, b = 0, c = -\frac{1}{\sqrt{10}}; a = -\frac{3}{\sqrt{10}}, b = 0, c = \frac{1}{\sqrt{10}};$

3)  $a = 0, b = -\frac{1}{2}; 4) a = 6; 5) a = 0, b = -1;$

6)  $a, b$  любые; 7)  $a, b, c$  любые; 8)  $7a + 5b = 0.$

**5.29.**  $\frac{1}{3} < a < 3.$

**5.30.** 1) Собственными функциями сопряженного ядра  $K^*(x, y)$  являются функции  $\varphi_1(x) = 1$  и  $\varphi_2(x) = x$  (отвечающие характеристическим числам  $\lambda_1 = \frac{1}{\pi^2}$  и  $\lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$  соответственно). Следовательно, функция  $f(x)$  должна быть такова, чтобы выполнялись равенства  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot x dx = 0.$

2) Собственной функцией сопряженного ядра  $K^*(x, y)$  является функция  $\varphi_1(x) = |x| + \frac{\pi^3}{24}x$  (отвечающая характеристическому числу  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ). Следовательно, функция  $f(x)$  должна быть такова, чтобы выполнялось равенство  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \left( |x| + \frac{\pi^3}{24}x \right) dx = 0.$

3) Собственными функциями сопряженного ядра  $K^*(x, y)$  являются функции  $\varphi_1(x) = \sin|x| - \sin x$  и  $\varphi_2(x) = \sin x$  (отвечающие характеристическим числам  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  и  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  соответственно). Следовательно, функция  $f(x)$  должна быть такова, чтобы выполнялись равенства  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)(\sin|x| - \sin x) dx = 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin x dx = 0.$

4) Собственной функцией сопряженного ядра  $K^*(x, y)$  является функция  $\varphi_1(x) = \cos x + \frac{\pi}{2} \sin x$  (отвечающая характеристическому числу  $\lambda_1 = 1$ ). Следовательно, функция  $f(x)$  должна быть такова, чтобы выполнялось равенство  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \left( \cos x + \frac{\pi}{2} \sin x \right) dx = 0.$

**5.31.** 1)  $\varphi(x) = \lambda C_1 x e^{-x^2} + \lambda C_2 \frac{1 - \cos x}{2} + f(x),$  где  $C_1 = \int_{-1}^1 f(y) \cos^3 y dy, C_2 = \int_{-1}^1 f(y) e^{y^2} dy.$  Решение существует при любых  $\lambda$  для всех  $f(x) \in C[-1, 1].$  Следовательно, ядро  $K(x, y)$  не имеет характеристических чисел. Отсюда следует, что ядро  $K^*(x, y)$  также не имеет характеристических чисел.

2)  $\varphi(x) = \lambda C_1 x \sin^3 x + \lambda C_2 x \operatorname{ch} x + f(x),$  где  $C_1 = \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh} y}{y} f(y) dy,$   $C_2 = \int_{-1}^1 (y^2 + 2) e^{y^2} f(y) dy.$  Решение существует при любых  $\lambda$  для всех  $f(x) \in C[-1, 1].$  Следовательно, ядро  $K(x, y)$  не имеет характеристических чисел. Отсюда следует, что ядро  $K^*(x, y)$  также не имеет характеристических чисел.

3)  $\varphi(x) = \lambda C_1 x e^{x^2} + \lambda C_2 \sin x + f(x)$ , где  $C_1 = \int_{-1}^1 \operatorname{sh}^4 y f(y) dy$ ,  $C_2 = \int_{-1}^1 (y^2 - y^4) \cos y f(y) dy$ . Решение существует при любых  $\lambda$  для всех  $f(x) \in C[-1, 1]$ . Следовательно, ядро  $K(x, y)$  не имеет характеристических чисел. Отсюда следует, что ядро  $K^*(x, y)$  также не имеет характеристических чисел.

4)  $\varphi(x) = \lambda C_1 x \operatorname{sh}^2 x + \lambda C_2 \sin^3 x + f(x)$ , где  $C_1 = \int_{-1}^1 \frac{\sin^3 y}{y} f(y) dy$ ,  $C_2 = \int_{-1}^1 y^2 \operatorname{ch} y f(y) dy$ . Решение существует при любых  $\lambda$  для всех  $f(x) \in C[-1, 1]$ . Следовательно, ядро  $K(x, y)$  не имеет характеристических чисел. Отсюда следует, что ядро  $K^*(x, y)$  также не имеет характеристических чисел.

**5.32.** 1)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 4(x_1 + x_2) + 1$ ;  $\lambda_2 = -1$ ,  $\varphi_2 = 4(x_1 + x_2) - 1$ ;

$$2) \lambda_1 = \frac{4\sqrt{3} - 6}{\pi}, \quad \varphi_1 = 1 + \sqrt{3}(x_1^2 + x_2^2); \quad \lambda_2 = -\frac{4\sqrt{3} + 6}{\pi}, \quad \varphi_2 = \sqrt{3}(x_1^2 + x_2^2) - 1;$$

$$3) \lambda_1 = \frac{3}{4\pi}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{1+r}, \text{ где } r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}.$$

**5.33.** Уравнение не имеет вещественных характеристических чисел.

**5.34.** Характеристические числа  $\lambda_1 = \frac{3}{4}$  и  $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$ , соответствующие собственные функции  $\varphi_1 = 1 + 3x_1 x_2$  и  $\varphi_2 = 3x_1 x_2 - 1$ . Если  $\lambda = \pm \frac{3}{4}$ , то  $\varphi(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \left( (f_1 + 4\lambda f_2)x_1 x_2 + \frac{4}{9}\lambda f_1 + f_2 \right) + f(x_1, x_2)$ , где  $f_1 = \iint_{-1}^1 f(x_1, x_2) dy_1 dy_2$ ,  $f_2 = \iint_{-1}^1 y_1 y_2 f(x_1, x_2) dy_1 dy_2$ ,  $\Delta(\lambda) = 1 - \frac{16}{9}\lambda^2$ ; при  $\lambda = \frac{3}{4}$  уравнение разрешимо, если  $f_1 + 3f_2 = 0$ , и  $\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{4}x_1 x_2 f_1 + f(x_1, x_2) + C(3x_1 x_2 + 1)$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная; при  $\lambda = -\frac{3}{4}$  уравнение разрешимо, если  $f_1 - 3f_2 = 0$ , и  $\varphi(x_1, x_2) = -\frac{3}{4}x_1 x_2 f_1 + f(x_1, x_2) + C(3x_1 x_2 - 1)$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная.

**5.35.** 1)  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = 3|x|^2 - 1$  — собственная функция; уравнение разрешимо при любых  $\lambda$ , если  $\alpha \neq -\frac{1}{3}$ . Пусть  $\alpha = -\frac{1}{3}$ . Тогда, если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = \frac{3|x|^2 - 1}{3(1 - \lambda\pi)}$ ; если  $\lambda = \frac{1}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = C(3|x|^2 - 1) + |x|^2 - \frac{1}{2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

2)  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = 5|x|^2 - 3|x|$  — собственная функция; уравнение разрешимо при любых  $\lambda$ , если  $\alpha \neq -\frac{3}{5}$ . Пусть  $\alpha = -\frac{3}{5}$ . Тогда, если  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = \frac{1}{5(1 - \lambda\pi)}(5|x|^2 -$

$-3|x|)$ ; если  $\lambda = \frac{1}{\pi}$ , то  $\varphi(x) = C(5|x|^2 - 3|x|) + |x|^2 - \frac{3}{4}|x|$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

3)  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = |x|^2 - 1$  — собственная функция; уравнение разрешимо при любых  $\lambda$ , если  $\alpha \neq -1$ . Пусть  $\alpha = -1$ . Тогда если  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = \frac{2}{1-2\lambda\pi}(|x|^2 - 1)$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = C(|x|^2 - 1) + |x|^2$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

4)  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$  — характеристическое число, а  $\varphi_1(x) = |x|^2 - |x|$  — собственная функция; уравнение разрешимо при любых  $\lambda$ , если  $\alpha \neq -1$ . Пусть  $\alpha = -1$ . Тогда если  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = \frac{|x| - |x|^2}{1-2\lambda\pi}$ ; если  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , то  $\varphi(x) = C(|x|^2 - |x|) + |x|^2 - \frac{5}{2}|x|$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

$$\mathbf{5.41. 1)} \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, \quad \varphi_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$2) \quad \lambda_n = n^2\pi^2, \quad \varphi_n = \sin \pi n x, \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$3) \quad \lambda_n \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda} \quad \varphi_n = \sin \sqrt{\lambda_n} x;$$

$$4) \quad \lambda_n = -\frac{1}{3}\mu_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \text{где } \mu_n^2 \text{ — положительные корни уравнения } \mu - \frac{1}{\mu} = 2 \operatorname{ctg} \mu, \quad \varphi_n = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x;$$

$$5) \quad \lambda_0 = 1, \quad \varphi_0 = e^x, \quad \lambda_n = -n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \varphi_n = \sin \pi n x + \pi n \cos \pi n x;$$

$$6) \quad \lambda_n = \frac{\pi^2(2n+1)^2 + 4}{8(1+e^2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \varphi_n = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x;$$

$$7) \quad \lambda_n = \frac{(n\pi)^2 - 1}{\sin 1}, \quad \varphi_n = \sin \pi n x, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\mathbf{5.42. 1)} \quad \lambda_n^{(1)} = \frac{(\pi n)^2}{2}, \quad \varphi_n^{(1)} = \sin \pi n x, \quad (n = 1, 2, \dots); \quad \lambda_n^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, \quad \varphi_n^{(2)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$2) \quad \lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \varphi_n = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$3) \quad \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1, \quad \varphi_n = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

- 5.43.** 1)  $\lambda_n^{(1)} = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ ,  $\varphi_n^{(1)} = \sin(2n+1)x$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );  
 $\lambda_n^{(2)} = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ ,  $\varphi_n^{(2)} = \cos(2n+1)x$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi^2}$ ,  
 $\varphi_0 = 1$ ;
- 2)  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi^2}$ ,  $\varphi_0 = 1$ ;  $\lambda_n^{(1)} = \frac{(2n+1)^2}{4}$ ,  $\varphi_n^{(1)} = \cos(2n+1)x$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );  
 $\lambda_n^{(2)} = -\frac{(2n+1)^2}{4}$ ,  $\varphi_n^{(2)} = \sin(2n+1)x$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

- 5.44.** 1)  $\lambda_n = \frac{1}{a_n}$ ,  $\varphi_n^{(1)} = \sin nx$ ,  $\varphi_n^{(2)} = \cos nx$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), если  
 $a_n = \int_0^{2\pi} \omega(t) \cos nt dt \neq 0$ ;  $\lambda_0 = \frac{1}{a_0}$ ,  $\varphi_0 = 1$ , если  $a_0 = \int_0^{2\pi} \omega(t) dt$ .

- 5.45.**  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 G(x, y) f(y) dy + f(x)$ , где

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} (y-1)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}, & x \leqslant y, \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} y \cos \sqrt{\lambda} (x-1)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}, & x \geqslant y. \end{cases}$$

## Г л а в а 3

# ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

### § 6. Основные и обобщенные функции

Обозначим через  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций в  $\mathbb{R}^n$ . Последовательность  $\{\varphi_k\}$  функций из  $\mathcal{D}$  называется *сходящейся к функции  $\varphi$*  (из  $\mathcal{D}$ ), если:

- а) существует такое число  $R > 0$ , что  $\text{supp } \varphi_k \subset U_R$ ;
- б) при каждом  $\alpha$

$$D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty \text{ )}$$

При этом пишем  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}$ . Совокупность  $\mathcal{D}$  функций с введенной сходимостью называется *пространством основных функций  $\mathcal{D}$* .

Обозначим через  $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций в  $\mathbb{R}^n$ , убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ .

Последовательность  $\{\varphi_k\}$  функций из  $\mathcal{S}$  называется *сходящейся к функции  $\varphi$*  (из  $\mathcal{S}$ ), если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}^n} x^\beta D^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

При этом пишем  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{S}$ . Совокупность  $\mathcal{S}$  функций с введенной сходимостью называется *пространством основных функций  $\mathcal{S}$* .

**6.1.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Выяснить, есть ли среди последовательностей

- 1)  $\frac{1}{k} \varphi(x)$ ;
- 2)  $\frac{1}{k} \varphi(kx)$ ;
- 3)  $\frac{1}{k} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ , где  $k = 1, 2, \dots$ ,

сходящиеся в  $\mathcal{D}$ .

---

<sup>1)</sup> По поводу обозначений см. с. 6–8.

**6.2.** Пусть  $n = 1$  и

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon, \\ 0 & \text{при } |x| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Показать, что функция

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y) \omega_{\varepsilon}(x-y) dy,$$

где  $\omega_{\varepsilon}$  — «шапочка», является основной из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , причем  $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  при  $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ ,  $\eta(x) \equiv 0$  при  $|x| > 3\varepsilon$ .

**6.3.** Пусть  $G_{2\varepsilon} = \bigcup_{x \in G} U(x; 2\varepsilon)$  —  $2\varepsilon$ -окрестность ограниченной области  $G$  и  $\chi(x)$  — характеристическая функция области  $G_{2\varepsilon}$ , т. е.  $\chi(x) = 1$ ,  $x \in G_{2\varepsilon}$  и  $\chi(x) = 0$ ,  $x \notin G_{2\varepsilon}$ . Доказать, что функция

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_{\varepsilon}(x-y) dy$$

основная из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , причем  $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  при  $x \in G_{\varepsilon}$ ,  $\eta(x) \equiv 0$  при  $x \notin G_{3\varepsilon}$ .

**6.4.** Пусть функция  $\eta(x)$  удовлетворяет условиям задачи 6.2,

$$H(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \eta(x - \varepsilon\nu), \quad e(x) = \frac{\eta(x)}{H(x)}.$$

Доказать, что  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ,  $H(x) \geq 1$ ;  $e \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $0 \leq e(x) \leq 1$ ;  $e(x) \equiv 1$  при  $|x| \leq \varepsilon$  и  $e(x) = 0$  при  $|x| \geq 3\varepsilon$ ;  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e(x - \varepsilon\nu) \equiv 1$ .

**6.5.** Доказать, что существуют такие функции  $\varphi_{\delta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $\delta > 1$ , что  $\varphi_{\delta}(x) = 1$  при  $|x| \leq \delta - 1$ ,  $\varphi_{\delta}(x) = 0$  при  $|x| \geq \delta$  и  $|\varphi_{\delta}^{(\alpha)}(x)| \leq C_{\alpha}$ , где постоянная  $C_{\alpha}$  не зависит от  $\delta$ .

**6.6.** Пусть непрерывная функция  $f(x)$  финитна:  $f(x) = 0$ ,  $|x| > R$ . Показать, что функция

$$f_{\varepsilon}(x) = \int f(y) \omega_{\varepsilon}(x-y) dy \quad (\varepsilon < R)$$

основная из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , причем  $f_\varepsilon(x) = 0$  при  $|x| > R + \varepsilon$ . Показать, что

$$f_\varepsilon(x) \stackrel{x \in \mathbb{R}^n}{\Rightarrow} f(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

**6.7.** 1) Доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[ \varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right], \quad m = 1, 2,$$

основная из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , где  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  и  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $\eta \equiv 1$  в окрестности  $x = 0$ ;

2) доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \eta(x) \cdot \varphi(0)}{\alpha(x)}$$

основная из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , где  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $\eta(x)$  — функция из задачи 6.7, 1) и  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ , имеет единственный нуль порядка 1 в точке  $x = 0$ .

**6.8.** 1) Показать, что функция  $\varphi_1$  из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  может быть представлена как производная от некоторой другой функции  $\varphi_2$  из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 0;$$

2) показать, что всякая функция  $\varphi(x)$  из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') dx' + \varphi'_1(x),$$

где  $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , а  $\varphi_0(x)$  — любая основная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , удовлетворяющая условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1$ .

Указание. Воспользоваться задачей 6.8, 1).

**6.9.** Показать, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  и из сходимости в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$ .

**6.10.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$1) \frac{1}{k}\varphi(x); \quad 2) \frac{1}{k}\varphi(kx); \quad 3) \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right), \text{ где } k = 1, 2, \dots,$$

сходящиеся в  $\mathcal{S}$ .

**6.11.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$  и  $P$  — полином. Доказать, что  $\varphi P \in \mathcal{S}$ .

**6.12.** Пусть функция  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ,  $\psi(x) = 0$  при  $x < a$  и ограничена вместе со всеми производными. Доказать, что функция  $\psi(x)e^{-\sigma x}$  основная из  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ , если  $\sigma > 0$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций  $\mathcal{D}$ . Всякий функционал  $f \in \mathcal{D}'$  назовем *обобщенной функцией* (из пространства  $\mathcal{D}'$ ).

Обозначим через  $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций  $\mathcal{S}$ . Всякий функционал  $f \in \mathcal{S}'$  назовем *обобщенной функцией медленного роста* (из пространства  $\mathcal{S}'$ ).

Значение функционала  $f$  на основной функции  $\varphi$  обозначим через  $(f, \varphi)$ . Чтобы указать аргумент основных функций, иногда вместо  $f$  и  $(f, \varphi)$  будем писать  $f(x)$  и  $(f(x), \varphi(x))$ .

Последовательность  $\{f_k\}$  обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$  называется *сходящейся к обобщенной функции*  $f$  (из  $\mathcal{D}'$ ), если  $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , для любой  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$ . В частности, ряд из обобщенных функций  $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$  называется *сходящимся в  $\mathcal{D}'$  к обобщенной функции*  $f$ , если для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k, \varphi)$  сходится к  $(f, \varphi)$ . Сходимость последовательности и ряда в  $\mathcal{S}$  определяется аналогично.

Говорят, что обобщенная функция  $f$  равна нулю в области  $G$ , если  $(f, \varphi) = 0$  для всех  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$  с носителем в  $G$ . Обобщенные функции  $f_1$  и  $f_2$  называются *равными в области*  $G$ , если их разность  $f_1 - f_2$  равна нулю в  $G$ ;  $f_1$  и  $f_2$  называются *равными*, если  $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

*Носителем* обобщенной функции  $f$  называется множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых  $f$  не обращается в нуль. Носитель  $f$  обозначается через  $\text{supp } f$ . Если  $\text{supp } f$  — ограниченное множество, то  $f$  называется *финитной* обобщенной функцией.

*Регулярной* обобщенной функцией из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  называется всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

где  $f$  — локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция.

Если  $f(x)$  — функция медленного роста в  $\mathbb{R}^n$ , т. е.

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}dx < \infty$$

при некотором  $m \geq 0$ , то она определяет *регулярную* обобщенную функцию из  $\mathcal{S}'$  (медленного роста).

Всякая обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется *сингулярной*.

Примером сингулярной обобщенной функции является  $\delta$ -функция Дирака, определяемая правилом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Обобщением  $\delta$ -функции является поверхностная  $\delta$ -функция. Пусть  $S$  — кусочно-гладкая поверхность и  $\mu(x)$  — непрерывная функция на ней. Обобщенную функцию  $\mu\delta_S$ , действующую по формуле

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x) dS_x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

назовем *простым слоем*. В частности, если  $S$  есть плоскость  $t=0$  в  $\mathbb{R}^{n+1}(x, t)$ , то  $\mu\delta_{(t=0)}(x, t)$  обозначим  $\mu(x)\delta(t)$ , так что

$$(\mu(x)\delta(t), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x)\varphi(x, 0) dx.$$

При  $n=1$  простой слой  $\delta_{S_R}(x)$  на сфере  $S_R$  обозначим через  $\delta(R-|x|)$ , так что  $(\delta(R-|x|), \varphi) = \varphi(R) + \varphi(-R)$ .

*Произведением*  $f$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и функции  $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  называется обобщенная функция  $\alpha f$ , действующая по формуле  $(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $A$  — неособое линейное преобразование и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Обобщенную функцию  $f(Ay+b)$  определим формулой

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left( f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

При  $A = I$  имеем сдвиг обобщенной функции  $f$  на  $-b$ :

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)).$$

Например,

$$(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$$

есть сдвиг  $\delta(x)$  на  $x_0$ . При  $A = -I$ ,  $b = 0$  имеем отражение

$$(f(-x), \varphi) = (f, \varphi(-x)).$$

**6.13.** Доказать, что  $\delta(x)$  — сингулярная обобщенная функция. Дать ее физическую интерпретацию.

**6.14.** Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям:

- 1)  $2\delta(x - x_0);$
- 2)  $\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k);$
- 3)  $\mu(x)\delta_S(s);$
- 4)  $|x|\delta_{S_R}(x - x_0);$
- 5)  $2\delta(R_1 - |x - 1|) + 3\delta(R_1 - |x - 2|).$

Найти их носители.

**6.15.** Доказать, что:

- 1)  $\delta(x - \nu) \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ;
- 2)  $\delta_{S_R}(x) \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'$ .

**6.16.** Доказать, что  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  и из сходимости в  $\mathcal{S}'$  следует сходимость в  $\mathcal{D}'$ .

**6.17.** Доказать, что:

- 1)  $e^x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ ;
- 2)  $e^{1/x} \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ;
- 3)  $e^x \sin e^x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ .

**6.18.** Доказать, что функционал  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ , действующий по формуле

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-t} + \int_t^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

— сингулярная обобщенная функция.

**6.19.** Вычислить пределы в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ :

- 1)  $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon; \end{cases}$  2)  $\frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$ ;
- 3)  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/(4\varepsilon)}$ ;
- 4)  $\frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$ ;
- 5)  $\frac{1}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}$ .

**6.20.** Доказать формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

**6.21.** Вычислить пределы в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  при  $t \rightarrow +\infty$ :

- 1)  $\frac{e^{ixt}}{x - i0};$
- 2)  $\frac{e^{-ixt}}{x - i0};$
- 3)  $\frac{e^{ixt}}{x + i0};$
- 4)  $\frac{e^{-ixt}}{x + i0};$
- 5)  $t^m e^{ixt}$ ,  $m \geq 0$ .

**6.22.** Найти предел  $\mathcal{P} \frac{\cos kx}{x}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , где

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{P} \frac{\cos kx}{x}, \varphi \right) &= (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

**6.23.** Доказать, что ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x - k)$ :

- 1) сходится в  $\mathcal{D}'$  при любых  $a_k$ ;
- 2) сходится в  $\mathcal{S}'$ , если  $|a_k| \leq C(1 + |k|)^m$ .

**6.24.** Пусть  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \geq 0$ ,  $\int \psi(x) dx = 1$ . Доказать, что  $\varepsilon^{-n} \psi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \rightarrow \delta(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ; в частности,  $\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**6.25.** Показать, что функционал  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ , действующий по формуле

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

— сингулярная обобщенная функция.

**6.26.** Показать, что:

- 1)  $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$ ,  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ; в частности,  $x\delta(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ ;
- 2)  $x\mathcal{P} \frac{1}{x} = 1$ ; 3)  $x^m \mathcal{P} \frac{1}{x} = x^{m-1}$ ,  $m \geq 1$ .

**6.27.** 1) Пусть обобщенная функция  $f$  равна нулю вне отрезка  $[-a, a]$ ; доказать, что  $f = \eta f$ , где  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  и  $\eta(x) \equiv 1$  в  $[-a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  любое;

2) пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  в окрестности  $\text{supp } f$ ; показать, что  $f = \eta f$  и  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**6.28.** Доказать, что  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|^n} \delta(x)$ ,  $a \neq 0$ .

**6.29.** Доказать, что  $(\alpha f)(x + h) = \alpha(x + h)f(x + h)$ , где  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ .

**6.30.** Доказать, что обобщенная функция

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{Pf} \frac{1}{x^2 + y^2}, \varphi(x, y) \right) &= \\ &= \int_{x^2+y^2<1} \frac{\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)}{x^2 + y^2} dx dy + \int_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + y^2} dx dy \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению  $(x^2 + y^2) \operatorname{Pf} \frac{1}{x^2 + y^2} = 1$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .

**6.31.** Пусть  $f \in \mathcal{S}'$  и  $P$  — полином. Показать, что  $fP \in \mathcal{S}'$ .

**6.32.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  финитна и  $\eta(x)$  — произвольная функция из  $D(\mathbb{R}^1)$ , равная 1 в окрестности  $\operatorname{supp} f$ . Положим

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \left( f(x'), \frac{\eta(x')}{x' - z} \right), \quad z = x + iy.$$

Доказать, что:

- 1)  $\widehat{f}(z)$  не зависит от выбора вспомогательной функции  $\eta$ ;
- 2)  $\widehat{f}(z)$  — аналитическая функция при  $z \notin \operatorname{supp} f$ ;
- 3)  $\widehat{f}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ ,  $z \rightarrow \infty$ ;
- 4)  $\widehat{f}(x + i\varepsilon) - \widehat{f}(x - i\varepsilon) \rightarrow f(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ .

**6.33.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$  и  $\eta \in D(\mathbb{R}^1)$ ,  $\eta(\xi) \equiv 1$  в окрестности  $\operatorname{supp} f$ . Доказать, что функция

$$\widetilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi)e^{iz\xi}), \quad z = x + iy,$$

не зависит от  $\eta$ , целая и удовлетворяет при некотором  $m \geq 0$  и любом  $\varepsilon > 0$  оценке

$$|\widetilde{f}(x + iy)| \leq C_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|y|} (1 + |x|)^m.$$

**6.34.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $\operatorname{supp} f = \{0\}$ . Доказать, что  $f$  однозначно представляется в виде

$$f(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta(x).$$

**6.35.** Пусть ряд  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta^{(\nu)}(x)$  сходится в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ . Доказать, что  $a_\nu = 0$  при  $\nu > \nu_0$ .

## Ответы к § 6

**6.1.** 1) Сходится к нулю; 2) и 3) не сходятся, если  $\varphi(x) \neq 0$ .

**6.6.** Ясно, что  $f_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}$ . Далее, так как  $f(x)$  непрерывна и финитна, то для любого  $\sigma > 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  имеем  $|f(x) - f(y)| < \sigma$  при  $|x - y| \leq \varepsilon$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^1$ , так что

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(y)| &\leq \\ &\leq \int |f(x) - f(y)| \omega_\varepsilon(x - y) dy < \sigma \int_{|x-y|<\varepsilon} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \sigma, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

**6.7.** 1) Решение. Очевидно, функция  $\psi(x)$  финитна и бесконечно дифференцируема при  $x \neq 0$ . Осталось доказать, что  $\psi(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $x = 0$ . Пусть  $\eta(x) \equiv 1$  при  $|x| \leq \varepsilon$ . Обозначив

$$f(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

получим

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}, \\ \psi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{x^m f^{(m)}(0)}{m!}}{x^{m+1}} = \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом,  $\psi(x) \in C^\infty$ , и, значит,  $\psi \in \mathcal{D}$ .

**6.8.** 1) Указание. Для доказательства достаточности проверить, что

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^x \psi_1(x) dx \in \mathcal{D}.$$

**6.10.** 1) и 3) сходятся к нулю в  $\mathcal{S}$ ; 2) не сходится в  $\mathcal{S}$ , если  $\varphi(x) \neq 0$ .

**6.19.** 1)  $\delta(x)$ ; 2)  $\delta(x)$ ; 3)  $\delta(x)$ ; 4)  $\pi\delta(x)$ ; 5)  $\delta(x)$ .

**6.21.** 1)  $2\pi i\delta(x)$ ; 2) 0; 3) 0; 4)  $-2\pi i\delta(x)$ ; 5) 0.

**6.22.** 0.

## § 7. Дифференцирование обобщенных функций

Производной обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  называется функционал  $f'$ , определяемый формулой  $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ .

Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка и  $f^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ , есть функционал, действующий по формуле

$$(f^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}). \quad (*)$$

В случае  $n > 1$  формула  $(*)$ , определяющая производную  $D^\alpha f$ , принимает вид

$$(D^a f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть  $S$  — кусочно гладкая двусторонняя поверхность,  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $S$  и  $\nu(x)$  — непрерывная функция на  $S$ . Обобщенную функцию  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S)$ , действующую по формуле

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S), \varphi \right) = \int_S \nu(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

назовем *двойным слоем* на поверхности  $S$ . В частности, если  $S$  есть плоскость  $t = 0$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  переменных  $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , то  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_{(t=0)}(x, t))$  обозначим через  $-\nu(x)\delta'(t)$ , так что

$$(-\nu(x)\delta'(t), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(x) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} dx.$$

Пусть локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция  $f(x)$  такова, что ее классическая производная порядка  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — кусочно-непрерывная функция в  $\mathbb{R}^n$ . Регулярную обобщенную функцию, определяемую этой производной, обозначим через  $\{D^\alpha f(x)\}$  (в отличие от обобщенной производной  $D^\alpha f(x)$ ).

**7.1.** Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям:

$$\begin{aligned} \text{в } \mathbb{R}^1 & \quad -\delta'(x), \quad -\delta'(x - x^0); \\ \text{в } \mathbb{R}^3 & \quad -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S), \quad -2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(x - x^0), \end{aligned}$$

**7.2.** Показать, что  $(\delta^{(m)}(x - x_0), \varphi(x)) = (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0)$ ,  $m \geq 1$ .

**7.3.** Показать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ :

- 1)  $\rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x)$ , где  $\rho(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ ;
- 2)  $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;
- 3)  $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m m! \delta(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;
- 4)  $x^k\delta^{(m)}(x) = 0$ ,  $m = 0, 1, \dots, k - 1$ ;

5)  $\alpha(x)\delta^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{(j+m)} C_m^j \alpha^{(m-j)}(0) \delta^{(j)}(x)$ ,

где  $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ;

6)  $x^k \delta^{(m)}(x) = (-1)^k k! C_m^k \delta^{(m-k)}(x)$ ,  $m = k, k+1, \dots$ .

**7.4.** Показать, что  $\theta' = \delta$ , где  $\theta$  — функция Хевисайда.

**7.5.** 1) Показать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

$$(\theta(x)\rho(x))' = \delta(x)\rho(0) + \theta(x)\rho'(x),$$

где  $\rho(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ ;

2) показать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta(t)\rho(x,t)) = \delta(t)\rho(x,0) + \theta(t)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t},$$

где  $\rho \in C^1(t \geq 0)$ .

Указание. Воспользоваться определением *простого слова* (§ 1).

**7.6.** Вычислить:

- 1)  $\theta'(-x)$ ; 2)  $\theta^{(m)}(x - x_0)$ ,  $m \geq 1$  целое;
- 3)  $\theta^{(m)}(x_0 - x)$ ,  $m \geq 1$ ; 4)  $(\text{sign } x)^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ ;
- 5)  $(x \text{sign } x)'$ ; 6)  $(|x|)^{(m)}$ ,  $m \geq 2$ ;
- 7)  $(\theta(x) \sin x)'$ ; 8)  $(\theta(x) \cos x)'$ ;
- 9)  $(\theta(x)x^{m+k})^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;
- 10)  $(\theta(x)x^{m-k})^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ ;
- 11)  $(\theta(x)e^{ax})^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ .

**7.7.** Вычислить производные порядка 1, 2, 3 функций:

- 1)  $y = |x| \sin x$ ; 2)  $y = |x| \cos x$ .

**7.8.** Показать, что

$$(D^\alpha f)(x+h) = D^\alpha f(x+h), \quad f \in \mathcal{D}', \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

**7.9.** Доказать, что обобщенные функции  $\delta, \delta', \dots, \delta^{(m)}$  линейно независимы.

**7.10.** Доказать:

1)  $\frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{P} \frac{1}{x}$ , где  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$  определена в задаче 6.18;

2)  $\frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ , где  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$  определена в задаче 6.25;

3)  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x \pm i0} = \mp \pi \delta'(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ ;

4)  $\frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P} \frac{1}{x^3}$ , где

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x^3}, \varphi \right) = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^3} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

**7.11.** Показать, что ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x - k)$  сходится в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  при любых  $a_k$ .

**7.12.** Показать, что если  $|a_k| \leq A|k|^m + B$ , то ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$  сходится в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ .

**7.13.** Пусть  $f(x)$  — такая кусочно-непрерывная функция, что

$$f \in C^1(x \leq x_0) \cap C^1(x \geq x_0).$$

Доказать, что

$$f' = \{f(x)\} + |f|_{x_0} \delta(x - x_0) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1), \quad (**)$$

где  $|f|_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  — скачок функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Доказать, что если классическая производная функции  $f(x)$  имеет изолированные разрывы 1-го рода в точках  $\{x_k\}$ , то формула  $(**)$  принимает вид

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k |f|_{x_k} \delta(x - x_k).$$

**7.14.** Вычислить  $f^{(m)}$  для функций:

- 1)  $\theta(a - |x|)$ ,  $a > 0$ ; 2)  $[x]$ ; 3)  $\operatorname{sign} \sin x$ ; 4)  $\operatorname{sign} \cos x$ .

Здесь  $[x]$  означает целую часть  $x$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**7.15.** Пусть  $f(x)$  —  $2\pi$ -периодическая функция, причем  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$ ,  $0 < x \leq 2\pi$ . Найти  $f'$ .

**7.16.** Пусть  $f(x) = x$ ,  $-1 < x \leq 1$ , — периодическая с периодом 2 функция. Найти  $f^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ .

**7.17.** Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

**7.18.** Доказать, что

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi).$$

**7.19.** Пусть  $f(x) \in C^\infty(x \leq x_0) \cap C^\infty(x \geq x_0)$ . Доказать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

$$f^{(m)}(x) = \{f^{(m)}(x)\} + |f|_{x_0} \delta^{(m-1)}(x - x_0) + \\ + [f']_{x_0} \delta^{(m-2)}(x - x_0) + \dots + [f^{(m-1)}]_{x_0} \delta(x - x_0),$$

где

$$[f^{(k)}]_{x_0} = f^{(k)}(x_0 + 0) - f^{(k)}(x_0 - 0), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

— скачок  $k$ -й производной в точке  $x_0$ .

**7.20.** Найти все производные функций:

$$\begin{array}{ll} 1) \ y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} & 2) \ y = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \\ 3) \ y = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases} & 4) \ y = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2+1, & x \geq 1; \end{cases} \\ 5) \ y = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2+1, & x \geq 0; \end{cases} & 6) \ y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \geq 2; \end{cases} \\ 7) \ y = \begin{cases} \sin x, & -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0, & |x| \geq \pi; \end{cases} & 8) \ y = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0, & |x| \geq \pi. \end{cases} \end{array}$$

**7.21.** Доказать:

$$1) |\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi);$$

$$2) |\cos x|'' + |\cos x| = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{2k+1}{2}\pi\right).$$

Указание. Воспользоваться задачей 7.14, 3) и 4). Пусть

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)} = f \tag{*}$$

— линейное дифференциальное уравнение порядка  $m$  с коэффициентами  $a_k(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  и  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ . Его обобщенным

*решением* называется всякая обобщенная функция  $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , удовлетворяющая уравнению (\*) в обобщенном смысле, т. е.

$$\left( \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}, \varphi \right) = \left( y, \sum_{k=0}^m (-1)^k (a_k \varphi)^{(k)} \right) = (f, \varphi)$$

для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ <sup>1)</sup>. Всякое решение уравнения (\*) можно представить в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

**7.22.** Найти общие решения в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  следующих уравнений:

- 1)  $xy = 0$ ;
- 2)  $\alpha(x)y = 0$ , где  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  и имеет единственный нуль в точке  $x = 0$  порядка 1;
- 3)  $\alpha(x)y = 0$ , где  $\alpha \in C$  и  $\alpha > 0$ ;
- 4)  $(x - 1)y = 0$ ; 5)  $x(x - 1)y = 0$ ; 6)  $(x^2 - 1)y = 0$ ;
- 7)  $xy = 1$ ; 8)  $xy = \mathcal{P}_x \frac{1}{x}$ ; 9)  $x^n y = 0$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ;
- 10)  $x^2 y = 2$ ; 11)  $(x + 1)^2 y = 0$ ; 12)  $(\cos x)y = 0$ .

**7.23.** Найти общие решения в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнений:

- 1)  $y' = 0$ ;
- 2)  $y^{(m)} = 0$ ,  $m = 2, 3, \dots$

**7.24.** Доказать, что общим решением в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнения  $x^n y^{(m)} = 0$ ,  $n > m$ , является обобщенная функция

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k,$$

где  $a_k, b_k, c_k$  — произвольные постоянные.

**7.25.** Найти общие решения в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнений:

- 1)  $xy' = 1$ ;
- 2)  $xy' = \mathcal{P}_x \frac{1}{x}$ ;
- 3)  $x^2 y' = 0$ ;
- 4)  $x^2 y' = 1$ ;
- 5)  $y'' = \delta(x)$ ;
- 6)  $(x + 1)y'' = 0$ ;
- 7)  $(x + 1)^2 y''' = 0$ ;
- 8)  $(x + 1)y''' = 0$ .

**7.26.** Доказать, что общим решением в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнения  $xy = \operatorname{sign} x$  является обобщенная функция  $C\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{|x|}$ , где

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|}, \varphi \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx.$$

---

<sup>1)</sup> Иногда для краткости выражение «удовлетворяет уравнению в обобщенном смысле» заменяется выражением «удовлетворяет уравнению в  $\mathcal{D}'$ ».

**7.27.** Доказать, что если  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  инвариантна относительно сдвига, т. е.  $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x + h))$ , где  $h$  — любое вещественное число, то  $f = \text{const}$ .

Указание. Доказать, что  $f' = 0$ , и воспользоваться задачей 7.23, 1).

**7.28.** Найти решение в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнения

$$af'' + bf' + cf = m\delta + n\delta',$$

где  $a, b, c, m, n$  — заданные числа.

Рассмотреть случаи:

- 1)  $a = c = n = 1, b = m = 2;$
- 2)  $b = n = 0, a = m = 1, c = 4;$
- 3)  $b = 0, a = n = 1, m = 2, c = -4.$

**7.29.** Доказать, что система  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ , где матрица  $A(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ , имеет в  $\mathcal{D}'$  только классическое решение.

**7.30.** Доказать, что уравнение  $u' = f$  разрешимо в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  при любой  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ .

Указание. Воспользоваться задачей 6.8, 2).

**7.31.** Доказать, что уравнение  $xu = f$  разрешимо в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  при любой  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ .

Указание. Воспользоваться задачей 6.7, 1).

**7.32.** Доказать, что уравнение  $x^3u' + 2u = 0$  не имеет решений в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  (кроме 0).

**7.33.** Пусть  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta(x_i)$ . Показать, что

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \delta(x) = \delta(x_1, \dots, x_n)$$

в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**7.34.** На плоскости  $(x, y)$  рассмотрим квадрат с вершинами  $A(1, 1), B(2, 0), C(3, 1), D(2, 2)$ .

Пусть функция  $f$  равна 1 в  $ABCD$  и 0 вне его. Вычислить

$$f''_{yy} - f''_{xx}.$$

**7.35.** Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^3$  ограничена кусочно гладкой поверхностью  $S$  и дана функция  $f \in C^1(\overline{G}) \cap C^1(\overline{G}_1)$ , где  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ . Доказать формулу

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(\mathbf{n}, x_i) \delta_S, \quad i = 1, 2, 3,$$

в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$  — внешняя нормаль к  $S$  в точке  $x \in S$ , а  $[f]_S$  — скачок функции  $f(x)$  при переходе извне через поверхность  $S$ :

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G_1}} f(x') - \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G}} f(x') = [f]_S(x), \quad x \in S.$$

**7.36.** Доказать, что если  $f \in C^2(\overline{G}) \cap C^2(\overline{G}_1)$ , где  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ , то справедлива формула Грина

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ([f]_S \delta_S).$$

**7.37.** Доказать, что если  $f(x, t) \in C^2(t \geq 0)$  и  $f = 0$  при  $t < 0$ , то в  $\mathbb{R}^{n+1}$  справедливы формулы:

- 1)  $\square_a f = \{\square_a f\} + \delta(t) f_t(x, 0) + \delta'(0) f(x, 0);$
- 2)  $\frac{\partial f}{\partial t} - a^2 \Delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 \Delta f \right\} + \delta(t) f(x, 0).$

## Ответы к § 7

### 7.6.

- 1)  $-\delta(x);$
- 2)  $\delta^{(m-1)}(x - x_0);$
- 3)  $-\delta^{(m-1)}(x - x_0);$
- 4)  $2\delta^{(m-1)}(x);$
- 5)  $\operatorname{sign} x;$
- 6)  $2\delta^{(m-2)}(x);$
- 7)  $\theta(x) \cos x;$
- 8)  $\delta(x) - \theta(x) \sin x;$
- 9)  $\frac{(m+k)!}{k!} \theta(x) x^k;$
- 10)  $(m-k)! \delta^{(k-1)}(x);$
- 11)  $\delta^{(m-1)}(x) + a\delta^{(m-1)}(x) + \dots + a^{m-1}\delta(x) + a^m \theta(x) e^{ax}.$

- 7.7.** 1)  $y' = \operatorname{sign} x \sin x + |x| \cos x$ ,  $y'' = 2 \operatorname{sign} x \cos x - |x| \sin x$ ,  
 $y''' = 4\delta(x) - 3 \operatorname{sign} x \sin x - |x| \cos x$ ;
- 2)  $y' = \operatorname{sign} x \cos x - |x| \sin x$ ,  $y'' = 2\delta(x) - 2 \operatorname{sign} x \sin x - |x| \cos x$ ,  
 $y''' = 2\delta'(x) - 3 \operatorname{sign} x \cos x + |x| \sin x$ .

**7.10.** 2) Решение.  $\left( \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} \right)', \varphi \right) = - \left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi' \right) =$

$$= - (\text{v.p.}) \int \frac{\varphi'(x)}{x} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi'(x)}{x} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0) \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{dx}{x^2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} \right) - \left( \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \left( - \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \varphi \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

**7.14.** 1)  $\delta^{(m-1)}(x+a) - \delta^{(m-1)}(x-a); \quad 2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(m-1)}(x-k);$

3)  $2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta^{(m-1)}(x-k\pi);$

4)  $2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta^{(m-1)}\left(x-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$

**7.15.**  $f' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k\pi).$

**7.16.**  $f' = 1 - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k-1), \quad f^{(m)} = -2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(m-1)}(x-2k-1), \quad m = 2, 3, \dots.$

**7.17.** Указание. Воспользоваться 7.15.

**7.18.** Указание. Воспользоваться 7.17.

**7.20.** Указание. Воспользоваться задачами 7.13 и 7.19.

1)  $y' = \theta(x) \cos x, \quad y^{(m)} = \sum_{k=1}^{[m/2]} (-1)^{k-1} \delta^{(m-2k)}(x) + \theta(x)(\sin x)^{(m)}, \quad m = 2, 3, \dots, \text{ где } [m/2] \text{ — целая часть } \frac{m}{2};$

2)  $y' = \delta(x) - \theta(x) \sin x, \quad y^{(m)} = \sum_{k=1}^{[(m+1)/2]} (-1)^{k-1} \delta^{(m-2k+1)}(x) + \theta(x)(\cos x)^{(m)}, \quad m = 2, 3, \dots;$

3)  $y' = 2\theta(1-|x|)x + \delta(x-1) - \delta(x+1), \quad y'' = 2\theta(1-|x|) - 2\delta(x+1) - 2\delta(x-1) + \delta'(x+1) - \delta'(x-1), \quad y^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \frac{2}{(3-k)!} [(-1)^{k-1} \delta^{(m-k)}(x+1) - \delta^{(m-k)}(x-1)] \quad m = 3, 4, \dots;$

4)  $y' = \theta(x) - \theta(x-1) + 2\theta(x-1)x, \quad y'' = \delta(x) + \delta(x-1) + 2\theta(x-1), \quad y^{(m)} = 2\delta^{(m-3)}(x-1) + \delta^{(m-2)}(x-1) + \delta^{(m-2)}(x), \quad m = 3, 4, \dots;$

5)  $y' = 2\theta(x+1)(x+1) - 2\theta(x), \quad y'' = -2\delta(x) + 2\theta(x+1), \quad y^{(m)} = -2\delta^{(m-2)}(x) + 2\delta^{(m-3)}(x+1), \quad m = 3, 4, \dots;$

6)  $y' = 2\theta(x)x - 4\theta(x-1) - 2\theta(x-2)(x-2), \quad y'' = 2\theta(x) - 2\theta(x-2) - 4\delta(x-1), \quad y^{(m)} = 2\delta^{(m-3)}(x) - 2\delta^{(m-3)}(x-2) - 4\delta^{(m-2)}(x-1), \quad m = 3, 4, \dots;$

7)  $y' = \theta(\pi-|x|) \cos x, \quad y^{(m)} = \theta(\pi-|x|)(\sin x)^{(m)} + \sum_{k=1}^{[m/2]} (-1)^k \{ \delta^{(m-2k)}(x+\pi) - \delta^{(m-2k)}(x-\pi) \}, \quad m = 2, 3, \dots;$

8)  $y' = \theta(\pi-|x|) \operatorname{sign} x \cos x, \quad y^{(m)} = \theta(\pi-|x|) \operatorname{sign} x \sin^{(m)} x - \sum_{k=1}^{[m/2]} (-1)^k \{ 2\delta^{(m-2k)}(x) + \delta^{(m-2k)}(x+\pi) + \delta^{(m-2k)}(x-\pi) \}, \quad m = 2, 3, \dots.$

**7.22.** 1) Решение. Пусть решение  $y = \mathcal{D}'$  существует. Тогда

$$(y, x\varphi) = 0 \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (*)$$

Найдем это  $y$ . Имеем  $(y, \varphi) = (y, \varphi(0)\eta(x) + \varphi(x) - \varphi(0)\eta(x))$ , где  $\eta \in \mathcal{D}$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  в  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  и  $\eta(x) \equiv 0$  вне  $[-3\varepsilon, 3\varepsilon]$ ,

$$(y, \varphi) = \varphi(0)(y, \eta(x)) + \left(y, x \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\eta(x)}{x}\right) = \varphi(0)C + (y, x\psi(x)), \quad (**)$$

где  $C = (y, \eta)$  и  $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\eta(x)}{x} \in \mathcal{D}$  (см. решение задачи 6.7). В силу  $(*)$   $(y, x\psi) = 0$ . Тогда из  $(**)$  имеем  $(y, \varphi) = (C\delta, \varphi)$  для всякой  $\varphi \in \mathcal{D}$ , т. е.  $y = C\delta(x)$ . Осталось заметить, что  $C\delta(x)$  удовлетворяет уравнению  $xy = 0$ .

- 2)  $C\delta(x)$  (указание: воспользоваться задачей 6.7, 2);
- 3) 0; 4)  $C\delta(x-1)$ ;
- 5)  $C_1\delta(x) + C_2\delta(x-1)$ ; 6)  $C_1\delta(x-1) + C_2\delta(x+1)$ ;
- 7)  $C\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$ ; 8)  $C\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ ;
- 9)  $\sum_{k=0}^{m-1} C_k \delta^{(k)}(x)$  (Указание. Свести к решению уравнения вида  $xz(x) = f(x)$ , обозначив последовательно  $x^{m-2} - y(z) = z(x)$ ,  $x^m - 2y(x) = z(x)$  и т. д., и воспользоваться результатом задачи 7.22, 1.);
- 10)  $C_0\delta(x) + C_1\delta'(x) + 2\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ , где  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$  — обобщенная функция из задачи 6.25;
- 11)  $C_0\delta(x) + C_1\delta'(x+1)$ ; 12)  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta \left(x - \frac{\pi}{2} - k\pi\right)$ .

**7.23.** 1) Решение. Пусть решение  $y \in \mathcal{D}'$  существует, т. е.

$$(y, \varphi') = 0 \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (*)$$

В силу результата задачи 6.8 (2) любая  $\varphi \in \mathcal{D}$  может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \varphi'_1(x),$$

где  $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ , а  $\varphi_0(x)$  — любая основная функция из  $\mathcal{D}$ , удовлетворяющая условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1$ . Следовательно,

$$(y, \varphi) = \left(y, \varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx + \varphi'_1\right) = (y, \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx + (y, \varphi'_1).$$

Так как в силу  $(*)$   $(y, \varphi'_1) = 0$ , а  $(y, \varphi_0) = C$ , то

$$(y, \varphi) = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = (C, \varphi) \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{D},$$

т. е.  $y = C$ .

- 2)  $C_0 + C_1x + \dots + C_{m-1}x^{m-1}$ . (Указание. Свести к решению уравнения вида  $z' = f(x)$ , обозначая последовательно  $y^{(m-1)} = z$ ,  $y^{(m-2)} = z$  и т. д., и воспользоваться результатом задачи 7.23, 1.)

**7.25.** 1)  $C_1 + C_2\theta(x) + \ln|x|$ ; 2)  $C_1 + C_2\theta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}$ ;

3)  $C_1 + C_2\theta(x) + C_3\delta(x)$ ; 4)  $C_1 + C_2\theta(x) + C_3\delta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}$ ;

5)  $C_0 + C_1x + \theta(x)x$ ; 6)  $C_0 + C_1x + C_2\theta(x+1)(x+1)$ ;

7)  $C_0 + C_1x + C_2\theta(x+1) + C_3\theta(x+1)(x+1)$ ;

8)  $C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3\theta(x+1)(x+1)^2$ .

**7.28.** 1)  $\theta(x)e^{-x}(1+x)$ ; 2)  $\frac{1}{2}\theta(x)\sin 2x$ ; 3)  $\theta(x)e^{2x}$ .

Указание. Искать решение в виде  $\theta(x)z(x)$ , где  $z \in C^2(\mathbb{R}^1)$  — искомая функция.

**7.34.**  $-2\delta(x-1, y-1) + 2\delta(x-2, y) + 2\delta(x-3, y-1) - 2\delta(x-2, y-2)$ .

## § 8. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

Прямым произведением обобщенных функций  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  называется обобщенная функция  $f(x) \cdot g(y)$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , определяемая формулой

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}). \quad (\text{I})$$

Прямое произведение коммутативно, т. е.  $f(x) \cdot g(y) = g(y) \times f(x)$  и ассоциативно, т. е.

$$[f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z) = f(x) \cdot [g(y), h(z)].$$

Если  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , то  $f(z) \cdot g(y)$  определяется по формуле (I), где  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n})$ , и принадлежит  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{m+n})$ .

Производная прямого произведения обладает свойством

$$\begin{aligned} D_x^\alpha(f(x) \cdot g(y)) &= D^\alpha f(x) \cdot g(y); \\ D_y^\alpha(f(x) \cdot g(y)) &= f(x) \cdot D^\alpha g(y). \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Если  $\mu(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $\nu(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , то обобщенные функции  $\mu(x) \cdot \delta'(t)$  и  $-\nu(x) \cdot \delta'(t)$  называются *простым* и *двойным*

слоями из поверхности  $t = 0$  с плотностями  $\mu(x)$  и  $\nu(x)$  соответственно. В случае непрерывных плотностей эти определения слоев совпадают с определениями, приведенными в 3.1 и 3.2, т. е.  $\mu(x) \cdot \delta(t) = \mu(x)\delta(t)$  и  $-\nu(x) \cdot \delta'(x) = -\nu(x)\delta'(t)$ .

Обобщенную функцию  $\delta(at - |x|)$ ,  $a > 0$ , из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  определим равенством

$$\delta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + x) + \theta(t)\delta(at - x), \quad (\text{III})$$

где обобщенные функции  $\theta(t)\delta(at + x)$  и  $\theta(t)\delta(at - x)$  есть результаты линейных замен переменных  $t' = t$ ,  $\xi = at \pm x$  в  $\theta(t') \times \delta(\xi)$ , т. е.

$$\begin{aligned} (\theta(t)\delta(at + x), \varphi) &= \int_0^\infty \varphi(-at', t') dt', \\ (\theta(t)\delta(at - x), \varphi) &= \int_0^\infty \varphi(at', t') dt'. \end{aligned} \quad (\text{III}_1)$$

**8.1.** Доказать:  $\text{supp}(f(x) \cdot g(x)) = \text{supp } f \times \text{supp } g$ .

**8.2.** Доказать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}(x, t))$ :

- 1)  $(u_1(x) \cdot \delta(t), \varphi) = (u_1(x), \varphi(x, 0));$
- 2)  $(u_0(x) \cdot \delta'(t), \varphi) = -\left(u_0(x), \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t}\right).$

Указание. Воспользоваться формулой (I).

**8.3.** Доказать:

- 1)  $\theta_t(x, t)$  — простой слой на оси  $t = 0$  плоскости  $(x, t)$  с плотностью  $\theta(x)$ ;
- 2)  $-\theta_{tt}(x, t)$  — двойной слой на оси  $t = 0$  с плотностью  $\theta(x)$ .

Указание. Воспользоваться задачей 8.2.

**8.4.** Показать:

- 1)  $\theta(x_1) \cdot \theta(x_2) \cdot \dots \cdot \theta(x_n) = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n);$
- 2)  $\delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n).$

**8.5.** Показать:

$$\frac{\partial^n \theta(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n).$$

**8.6.** Показать, что  $(f \cdot g)(x + x_0, y) = f(x + x_0) \cdot g(y)$ .

**8.7.** Показать, что  $a(x)(f(x) \cdot g(x)) = a(x)f(x) \cdot g(y)$ , где  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**8.8.** Доказать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ :

- 1)  $\frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|) = a\delta(at - |x|);$
- 2)  $\frac{\partial}{\partial x}\theta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + |x|) - \theta(t)\delta(at - |x|);$
- 3)  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at - |x|), \varphi \right) = -a \left( \delta(at - |x|), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right);$
- 4)  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at - |x|), \varphi \right) = - \left( \theta(t)\delta(at + x), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) +$   
 $+ \left( \theta(t)\delta(at - x), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$

Обобщенную функцию вида  $f(x) \cdot 1(y)$  назовем *не зависящей от  $y$* . Она действует по правилу

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy. \quad (\text{IV})$$

**8.9.** Показать:

- 1)  $\int (f(x), \varphi(x, y)) dy = (f(x), \int \varphi(x, y) dy);$
- 2)  $D_y^\alpha(f(x) \cdot 1(y)) = 0$ , где  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $|\alpha| \neq 0$ .

**8.10.** Пусть  $g(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  и  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Доказать, что:

- 1)  $\psi(x) = (g(y), \varphi(x + y)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$
- 2)  $D_x^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y));$
- 3) если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ , то  $\psi_k \rightarrow \psi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$
- 4) если  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , то  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ .

Сверткой локально интегрируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  таких, что функция

$$h(x) = \int |f(y)g(x - y)| dy$$

также локально интегрируема в  $\mathbb{R}^n$ , называется функция

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x - y) dy = \int g(y)f(x - y) dy = (g * f)(x).$$

Последовательность  $\{\eta_k(x)\}$  функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  называется сходящейся к 1 в  $\mathbb{R}^n$ , если она обладает свойствами:

- а) для любого шара  $U_R$  найдется такой номер  $N$ , что  $\eta_k(x) = 1$  при всех  $x \in U_R$  и  $k \geq N$ ;
- б) функции  $\{\eta_k\}$  равномерно ограничены в  $\mathbb{R}^n$  вместе со всеми производными, т. е.

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$\alpha$  — любое.

Пусть  $\{\eta_k(x; y)\}$  — любая последовательность функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Пусть обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  таковы, что для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  числовая последовательность

$$(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))$$

имеет предел при  $k \rightarrow \infty$  и этот предел не зависит от выбора последовательности  $\{\eta_k\}$ . Этот предел обозначим через

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)).$$

*Сверткой*  $f * g$  называется функционал

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (\text{V})$$

Свертка коммутативна, т. е.  $f * g = g * f$ .

**Дифференцирование свертки.** Если свертка  $f * g$  существует, то существуют и свертки  $D^\alpha f * g$  и  $f * D^\alpha g$ , причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g. \quad (\text{VI})$$

Свертка инвариантна относительно сдвига, т. е.

$$f(x + h) * g(x) = (f * g)(x + h), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

### Достаточные условия существования свертки

I. Если  $f$  — произвольная, а  $g$  — финитная обобщенные функции в  $\mathcal{D}'$ , то  $f * g$  существует в  $\mathcal{D}'$  и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (\text{VII})$$

где  $\eta$  — любая основная функция, равная 1 в окрестности  $\text{supp } g$ .

II. Обозначим через  $\mathcal{D}'_+$  множество обобщенных функций из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , обращающихся в нуль при  $x < 0$ . Если  $f, g \in \mathcal{D}'_+$ , то их свертка принадлежит  $\mathcal{D}'_+$  и выражается формулой

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x + y)), \quad (\text{VIII})$$

где

$$\eta_k(t) = \begin{cases} 1, & t \geq -\varepsilon_k, \\ 0, & t < -2\varepsilon_k, \end{cases} \quad \eta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, множество  $\mathcal{D}'_+$  образует сверточную алгебру.

**8.11.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  локально интегрируемы в  $\mathbb{R}^n$ . Показать, что свертка  $f * g$  является локально интегрируемой функцией, если

- 1)  $f$  и  $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ;
- 2)  $f$  или  $g$  финитна;
- 3)  $f = 0$  и  $g = 0$  при  $x < 0$ ;  $n = 1$ .

В случае 1) показать, что  $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$  и справедливо неравенство

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}.$$

**8.12.** Показать, что в условиях задачи 8.11, 3)

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y) dy. \quad (\text{IX})$$

**8.13.** Показать:

- 1)  $\delta * f = f * \delta = f$ ;
- 2)  $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$ ;
- 3)  $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$ ;
- 4)  $\delta^{(m)} * f = f^{(m)}$ ;
- 5)  $\delta(x)(x-a) * f(z) = f^{(m)}(x-a)$ .

**8.14.** Вычислить в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ :

- 1)  $\theta(x) * \theta(x)$ ;
- 2)  $\theta(x) * \theta(x)x^2$ ;
- 3)  $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ ;
- 4)  $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ ;
- 5)  $\theta(x)x^2 * \theta(x)\sin x$ ;
- 6)  $\theta(x)\cos x * \theta(x)x^2$ ;
- 7)  $\theta(x)\sin x * \theta(x)\operatorname{sh} x$ ;
- 8)  $\theta(a-|x|) * \theta(a-|x|)$ .

В задачах 8.15–8.29 доказать утверждения.

**8.15.** Если  $f_\alpha(x) = \theta(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha > 0$ , — целое, то  $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ .

**8.16.** Если  $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\alpha^2)}$ ,  $\alpha > 0$ , то  $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ .

**8.17.** Если  $f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$ ,  $\alpha > 0$ , то  $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ .

**8.18.**  $\operatorname{supp}(f * g) \subset [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]$ .

Указание. Воспользоваться задачей 8.1.

**8.19.** Если  $f, g \in \mathcal{D}'_+$ , то  $e^{ax}f * e^{ax}g = e^{ax}(f * g)$ .

**8.20.** Если  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ , то  $f * \varphi = (f(y), \varphi(x-y)) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ .

Указание. Воспользоваться формулой (VII) и задачей 8.9, 1).

**8.21.** Если  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $f * g = 0$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  и  $\text{supp } \varphi \in [x < 0]$ , то  $f = 0$  при  $x < 0$ .

**8.22.** Если свертка  $f * 1$  существует, то она постоянна.

**8.23.** Для независимости обобщенной функции от  $x_i$  необходима и достаточна ее инвариантность относительно всех сдвигов по  $x_i$ .

**8.24.** Для независимости  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  от  $x_i$  необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ .

**8.25.** Если  $f \in \mathcal{D}'$  не зависит от  $x_i$ , то и  $f * g$  не зависит от  $x_i$ .

**8.26.** Решением уравнения  $Lu = \delta$ , где

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_1(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_{m-1}(x) \frac{d}{dx} + a_m(x),$$

$a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ , в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  является  $u(x) = \theta(x)Z(x)$ ,  $Z(x) \in C^m(\mathbb{R}^1)$ , — решение задачи

$$LZ = 0, \quad Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1.$$

**8.27.** Решением уравнения  $Lu = f$ ,  $f \in \mathcal{D}'_+$ , в  $\mathcal{D}'_+$  является  $u = \theta Z * f$ , где  $Z(x)$  — функция из задачи 8.25.

**8.28.** Решением уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x - \xi)^\alpha} d\xi = g(x),$$

где  $g(0) = 0$ ,  $g \in C^1(x \geq 0)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , является функция

$$u(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g'(\xi) d\xi}{(x - \xi)^{1-\alpha}}.$$

Указание. Уравнение записать в виде свертки  $u * \theta(x - \alpha) = g(x)$  (считаем,  $u = 0$  и  $g = 0$  при  $x < 0$ ) и воспользоваться задачей 8.15 при  $\beta = 1 - \alpha$ .

**8.29.** Решением уравнения  $\theta(x) \cos x * f = g$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , где  $g \in C^1(x \geq 0)$ ,  $g = 0$  при  $x < 0$ , является

$$f(x) = g'(x) + \int_0^x g(\xi) d\xi.$$

**8.30.** Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$ . В момент времени  $t = 0$  в цепь включается ЭДС  $E(t)$ . Показать, что сила тока  $i(t)$  в цепи удовлетворяет уравнению  $Z + i = E(t)$ , где

$$Z = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{\theta(t)}{C} — импеданс цепи.$$

**8.31.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ . Доказать:

- 1)  $[\delta(x - x_0) \cdot \delta(t)] * f(x, t) = f(x - x_0, t);$
- 2)  $[\delta(x - x_0) \cdot \delta^{(m)}(t)] * f(x, t) = \frac{\partial^m f(x - x_0, t)}{\partial t^n}.$

**8.32.** Вычислить следующие свертки в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ :

- 1)  $f * \delta_{S_R}$ , где  $f(x) \in C$  и  $\delta_{S_R}(x)$  — простой слой на сфере  $|x| = R$  с плотностью 1 (см. § 6);
- 2)  $f * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \delta_{S_R}$ , где  $f \in C^1$ ; 3)  $\delta_{S_R} * |x|^2$ ,  $n = 3$ ;
- 4)  $\delta_{S_R} * e^{-|x|^2}$ ,  $n = 3$ ; 5)  $\delta_{S_R} * \sin |x|^2$ ,  $n = 3$ ;
- 6)  $\delta_{S_R} * \frac{1}{1 + |x|^3}$ ,  $n = 3$ ;
- 7)  $\frac{1}{|x|} * \mu \delta_S$ ,  $n = 3$ ;  $\ln \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S$ ,  $n = 2$ ;
- 8)  $-\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S)$ ,  $n = 3$ ;  $\ln |x| * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S)$ ,  $n = 2$ .

$S$  — ограниченная поверхность. Определение обобщенных функций  $\mu \delta_S$  и  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S)$  см. в § 6 и § 7.

**8.33.** Вычислить в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ :

- 1)  $\theta(t)x * \theta(x)t$ ;
- 2)  $\theta(t - |x|) * \theta(t - |x|)$ ;
- 3)  $\theta(t)\theta(x) * \theta(t - |x|)$ .

**8.34.** Пусть  $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $f(x, t) = 0$  при  $t < 0$  и  $g = 0$  вне  $\bar{\Gamma}^+$ . Доказать, что свертка  $g * f$  существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  и выражается формулой

$$(g * f, \varphi) = (g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau)),$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

где  $\eta(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ,  $\eta(t) = 0$  при  $t < -\delta$  и  $\eta(t) \equiv 1$  при  $t > -\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \delta$ ).

**8.35.** Пусть  $g(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $g = 0$  вне  $\bar{\Gamma}^+$  и  $u(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Доказать:

- 1)  $g * u(x) \cdot \delta(t) = g(x, t) * u(x)$ , причем обобщенная функция  $g(x, t) * u(x)$  действует по правилу

$$(g(x, t) * u(x), \varphi) = (g(\xi, t) \cdot u(y), \eta(a^2 t^2 - |\xi|^2) \varphi(\xi + y, t)),$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1});$$

$$2) g * u(x) \cdot \delta^{(k)}(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} (g(x, t) * u(x)) = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x).$$

**8.36.** Вычислить в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ :

- 1)  $\theta(at - |x|) * [\omega(t) \cdot \delta(x)]$ ,  $a > 0$ , где  $\omega(t) \in C(t \geq 0)$  и  $\omega(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
- 2)  $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \cdot \delta(x)]$ ; 3)  $\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial t} [\theta(t) \cdot \delta(x)]$ ;
- 4)  $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \cdot \delta'(x)]$ ; 5)  $\theta(at - |x|) * [\theta(x) \cdot \delta(t)]$ ;
- 6)  $\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial t} [\omega(x) \cdot \delta(t)]$ , где  $\omega(x) \in C(\mathbb{R}^1)$ .

Указание. Воспользоваться задачей 7.5, 2;

$$7) \theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial x} [\theta(x) \cdot \delta(t)].$$

**8.37.** Вычислить в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ :

- 1)  $e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$ ,  $a > 0$ ;
- 2)  $\theta(t) e^t x * \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$ ;
- 3)  $\theta(x) \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$ .

**8.38.** Пусть  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  и  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  финитна. Показать, что  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \text{supp } g)$ .

Указание. Воспользоваться формулой (VII).

**8.39.** Пусть  $f \in \mathcal{S}'$  и  $g \in \mathcal{D}'$  финитна. Доказать, что  $f * g \in \mathcal{S}'$ .

**8.40.** Доказать: если  $f \in \mathcal{D}'$ , то  $f * \omega_\varepsilon \rightarrow f'$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ .  
Указание. Воспользоваться задачей 6.24.

Введем обобщенную функцию  $f_\alpha(x)$ , зависящую от параметра  $\alpha$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ ,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\theta(x)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}(x), & \alpha \leq 0, \quad \alpha + n > 0, \quad N \text{ целое} \end{cases}$$

(ср. с задачей 8.15).

**8.41.** Доказать, что  $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ .

**8.42.** Доказать, что

$$f_0* = \delta*, \quad f_{-n}* = \frac{d^n}{dx^n}*, \quad f_n* = \underbrace{\theta * \theta * \dots * \theta *}_{n \text{ раз}}.$$

Сверточная операция  $f_{-\alpha}*$  при  $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  не равно целому числу, называется (*дробной*) производной порядка  $\alpha$  (этую производную обозначим через  $u^{(\alpha)}$ , т. е.  $u^{(\alpha)} \equiv f_{-\alpha} * u$ );  $f_\alpha*$  при  $\alpha > 0$  называется *первообразной* порядка  $\alpha$  (этую первообразную обозначим через  $u_{(\alpha)}$ , т. е.  $u_{(\alpha)} = f_\alpha * u$ ).

**8.43.** Вычислить производную порядка  $3/2$  от  $\theta(x)$ .

**8.44.** Вычислить первообразную порядка  $3/2$  от  $\theta(x)$ .

**8.45.** Вычислить производную порядка  $1/2$  от  $f(x)$ ,  $f = 0$  при  $x < 0$ .

**8.46.** Вычислить первообразную порядка  $1/2$  от  $f(x)$ ,  $f = 0$  при  $x < 0$ .

**8.47.** Обозначим через  $\mathcal{E}'$  пространство финитных обобщенных функций со сходимостью  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{E}'$ , если:

а)  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'$ ;

б) существует число  $R$  такое, что  $\text{supp } f_k \subset U_R$  при всех  $k$ .

Доказать **теорему**: если линейный непрерывный оператор  $L$  из  $\mathcal{E}'$  в  $\mathcal{D}'$  коммутирует с операцией сдвига, то  $L$  — оператор свертки,  $L = f_0*$ , где  $f_0 = L\delta$ .

## Ответы к § 8

**8.8.** 1) Решение. В силу формул (III) и (III<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta(at - |x|), \varphi \right) &= - \left( \theta(at - |x|), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x|/a}^{\infty} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dt dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left( x, \frac{|x|}{a} \right) dx = a \int_a^{\infty} \varphi(-at', t') dt' + a \int_a^{\infty} \varphi(at', t') dt' = \\ &= (a\theta(t)\delta(at + x) + a\theta(t)\delta(at - x), \varphi) = (a\delta(at - |x|), \varphi). \end{aligned}$$

**8.14.** 1) Решение. В силу формулы (IX)

$$\theta * \theta = \int_0^x \theta(y)\theta(x-y) dy = \theta(x) \int_0^x dy = \theta(x)x;$$

- 2)  $\theta(x) \frac{x^3}{3};$   
 3)  $e^{-|x|}(1 + |x|);$   
 4)  $\sqrt{\frac{\pi}{8a}} xe^{-ax^2/2};$   
 5)  $\theta(x) \left( x^2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} \right);$   
 6)  $\theta(x)(3x^2 + 6 \cos x - 6);$  7)  $\frac{\theta(x)}{2}(\operatorname{sh} x - \sin x);$   
 8)  $\theta(2a - |x|)(2a - |x|).$

**8.21.** Указание. Воспользоваться задачей 8.20, применив ее к  $\varphi(-x)$  и положив  $x = 0$ .

**8.30.** Указание. Воспользоваться задачей 1.31.

**8.31.** 2) Решение. В силу формул (II) и (VI) и результатов задач 8.4, 2) и 8.13, 2)

$$\begin{aligned} [\delta(x - x_0) \cdot \delta^{(m)}(t)] * f(x, t) &= \frac{\partial^m}{\partial t^m} [\delta(x - x_0) \cdot \delta(t)] * f(x, t) = \\ &= \frac{\partial^m}{\partial t^m} (\delta(x - x_0, t) * f(x, t)) = \frac{\partial^m f(x - x_0, t)}{\partial t^m}. \end{aligned}$$

- 8.32.** 1)  $\int_{|x-y|=R} f(y) dS_y;$   
 2) Решение. В силу формулы (VII) и определения двойного слоя (см. § 7)

$$\begin{aligned} \left( f * \frac{\partial}{\partial n} \delta_{S_R}, \varphi \right) &= \left( f(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \delta_{S_R}(\xi), \eta(\xi) \varphi(y + \xi) \right) = \\ &= \left( f(y), \left( \frac{\partial}{\partial n} \delta_{S_R}(\xi), \eta(\xi) \varphi(y + \xi) \right) \right) = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{|\xi|=\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi(y + \xi)}{\partial \mathbf{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon \right) dy = \\ &= - \int_{|\xi|=R} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \xi) \varphi(x) dx \right) dS_\xi = \left( - \int_{|\xi|=R} \frac{\partial f(x - \xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} dS_\xi, \varphi \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_{|x-y|=R} |y|^2 dS_y &= \int_{|y|=R} |x - y|^2 dS_y = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (|x|^2 + R^2 - 2R|x| \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2 (|x|^2 + R^2); \end{aligned}$$

- 4)  $\frac{\pi R}{|x|} (e^{-(R-|x|)^2} - e^{-(R+|x|)^2});$   
 5)  $\frac{2\pi R}{|x|} \sin(R^2 + |x|^2) \sin 2R|x|;$   
 6)  $\frac{\pi R}{|x|} \ln \frac{1 + (|x| + R^2)^2}{1 + (|x| - R)^2};$

- 7)  $\int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y; \quad \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y;$   
 8)  $\int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y; \quad \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y.$

- 8.33.** 1) Не существует; 2)  $\theta(t - |x|) \frac{t^2 - x^2}{2};$   
 3)  $\frac{1}{2} \theta(t) [\theta(x+t)(x+t)^2 + \theta(x-t)(x-t)^2 - 2\theta(x)x^2].$

**8.34.** Решение. В силу задачи 6.27  $f(y, \tau) = \eta(\tau)f(y, \tau)$  и  $g(\xi, t) = \eta(t)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)g(\xi, t)$ , так как  $\eta(\tau) = 1$  в окрестности  $\text{supp } f(y, \tau) \subset [\tau \geq 0]$  и  $\eta(t)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2) = 1$  в окрестности  $\text{supp } g(\xi, t) \subset \bar{\Gamma}^+$  ( $\bar{\Gamma}^+$  — область  $a^2t^2 - |\xi|^2 \geq 0, t \geq 0$ ). В силу формулы (V)

$$\begin{aligned} (g * f, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta_k(\xi, t; y, \tau)\varphi(\xi + y, t + \tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta(t)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)g(\xi, t) \cdot \eta(\tau)f(y, \tau), \eta_k(\xi, t; y, \tau)\varphi(\xi + y, t + \tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta(t)\eta(\tau) \cdot \eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\eta_k(\xi, t; y, \tau)\varphi(\xi + y, t + \tau)) = \\ &= (g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau)), \end{aligned}$$

так как  $\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$ .

**8.35.** 1) Решение. В силу формулы задачи 8.34, ассоциативности прямого произведения и формулы (I)

$$\begin{aligned} (g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) &= \\ &= ([g(\xi, t) \cdot u(y)] \cdot \delta(\tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau)) = \\ &= (g(\xi, t) \cdot u(y), \eta(t)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t)). \end{aligned}$$

Далее, в силу задачи 6.27  $g = \eta(t)g$ , так как  $\text{supp } g(\xi, t) \subset [t \geq 0]$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} (g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) &= \\ &= (g(\xi, t) \cdot u(y), \eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(x + \xi, t)) = (g(x, t) \cdot u(x), \varphi), \end{aligned}$$

так как  $\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(x + \xi, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+1})$ ;

- 2) В силу формул (II) и (VI) и формулы задачи 8.35, 1)

$$\begin{aligned} g * u(x) \cdot \delta^{(k)}(t) &= g * \frac{\partial^k}{\partial t^k} (u(x) \cdot \delta(t)) = \\ &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} (g(x, t) * u(x)) = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x). \end{aligned}$$

**8.36.** 1) Решение. В силу формулы задачи 8.35, 1)

$$\begin{aligned} (I, \varphi) &= (\theta(at - |x|) \cdot \omega(\tau), \eta(a^2 t^2 - |x|^2) \varphi(x, t + \tau)) = \\ &= \int \omega(\tau) \left( \iint \theta(at - |x|) \varphi(x, t + \tau) dx dt \right) d\tau = \\ &= \int \int \varphi(x, t) \left( \theta(at' - |x|) \int_0^{t' - |x|/a} \omega(\tau) d\tau \right) dx dt'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I = \theta(at - |x|) \int_0^{t - |x|/a} \omega(\tau) d\tau;$$

2)  $\theta(at - |x|) \left( t - \frac{|x|}{a} \right);$

3)  $\theta(at - |x|)$  (указаниe: воспользоваться задачей 8.35, 2);

4)  $-\theta(at - |x|) \frac{\operatorname{sign} x}{a};$

5)  $\theta(t)\theta(x + at)(x + at) - \theta(x - at)(x - at);$

6)  $a\theta(t)[\omega(x + at) + \omega(x - at)];$

7)  $\theta(at - |x|).$

**8.37.** 1)  $\theta(t)e^{x+a^2t};$  2)  $\theta(t)x(e^t - 1);$

3)  $\theta(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-z^2/2} dz = \theta(t)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$

**8.43.** Решение:

$$\begin{aligned} \theta^{(3/2)}(x) &= f_{-3/2} * \theta = f'_{-1/2} * \theta = f''_{1/2} * \theta = (f_{1/2} * \theta)'' = \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\theta(x)}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x - \xi}} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left( 2\theta(x)\sqrt{\frac{x}{\pi}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \theta(x)\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \right). \end{aligned}$$

**8.44.** Решение:

$$\theta_{(3/2)}(x) = f_{3/2} * \theta = \frac{\theta(x)}{\Gamma(3/2)} \int_0^x \sqrt{x - \xi} d\xi = \theta(x)\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

**8.45.** Решение:

$$f^{(1/2)}(x) = f_{-1/2} * f = f'_{1/2} * f = (f_{1/2} * f)' = \frac{d}{dx} \left( \frac{\theta(x)}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x - \xi}} d\xi \right).$$

**8.46.**  $\frac{\theta(x)}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x - \xi}} d\xi.$

## § 9. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Операция преобразования Фурье  $F(\varphi)$  на функциях  $\varphi$  из  $\mathcal{S}$  определяется формулой

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i(\xi,x)} \varphi(x) dx. \quad (\text{I})$$

Преобразование Фурье  $F[f]$  произвольной обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  определим формулой

$$(F[f], \varphi) = (f, F(\varphi)). \quad (\text{II})$$

Оператор

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathcal{S}' \quad (\text{III})$$

(обратное преобразование Фурье), является обратным для оператора  $F$ , т. е.  $F^{-1}[F[f]] = f$ ,  $F[F^{-1}[f]] = f$ ,  $f \in \mathcal{S}'$ .

Справедливы следующие формулы ( $f, g \in \mathcal{S}'$ ):

$$\begin{aligned} D^\alpha F[f] &= F[(ix)^\alpha f], \\ F[D^\alpha f] &= (-i\xi)^\alpha F[f], \\ F[f(x - x_0)] &= e^{i(x_0,\xi)} F[f], \\ F[f](\xi + \xi_0) &= F[f(x)e^{i(x,\xi_0)}](\xi), \\ F[f(cx)] &= \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad c \neq 0, \\ F[f(x) \cdot g(y)] &= F[f](\xi) \cdot F[g](\eta), \\ F[f * g] &= F[f]F[g] \quad (f \text{ или } g \text{ финитна}). \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Преобразование Фурье  $F_x$  по переменной  $x$  обобщенной функции  $f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , определим формулой

$$(F_x[f(x, y)](\xi, y), \varphi(\xi, y)) = (f(x, y), F_\xi[\varphi(\xi, y)](x, y)), \varphi \in \mathcal{S}^{R^{n+m}}. \quad (\text{V})$$

- 9.1.** 1) Пусть  $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^1)$ ,  $k \geq 0$ , и  $\int |f^{(\alpha)}(x)| dx < \infty$ ,  $\alpha \leq k$ ; доказать, что  $F[f] \in C(\mathbb{R}^1)$  и  $|\xi|^k |F[f](\xi)| \leq a$ ;  
 2) пусть  $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 0$  и  $|x|^{n+l} |D^\alpha f(x)| \leq b$ ,  $|\alpha| \leq k$ ,  $l \geq 1$ , целое; доказать, что

$$F[f] \in C^{l-1}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad |\xi|^k |D^\beta F[f](\xi)| \leq b, \quad |\beta| \leq l-1.$$

**9.2.** Доказать, что  $f = F^{-1}[F[f]]$ , где  $F^{-1}$  определяется формулой (III), для следующих  $f$ :

- 1)  $f(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $|x|^{n+\varepsilon}|f(x)| \leq a$ ,  $|\xi|^{n+\varepsilon}|F[f](\xi)| \leq a$ ,  $\varepsilon > 0$ .
- 2)  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\int |f^{(\alpha)}(x)| dx < \infty$ ,  $\alpha \leq 2$ ;
- 3)  $f(x) \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $|D^\alpha f(x)| |x|^{n+1} \leq a$ ,  $|\alpha| \leq n+1$ .

Проверить, что случай 3) вытекает из случая 1).

**9.3.** Доказать, что

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

**9.4.** 1) Доказать, что если  $\varphi \in \mathcal{S}$ , то и  $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ ;

- 2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ , т. е. что из  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$  следует  $F[\varphi_k] \rightarrow F[\varphi]$  в  $\mathcal{S}$ .

Указание. Воспользоваться задачей 9.3.

**9.5.** 1) Доказать, что если  $f \in \mathcal{S}'$ , то и  $F[f] \in \mathcal{S}'$ ;

- 2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$ , т. е. из  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}'$  следует  $F[f_k] \rightarrow F[f]$  в  $\mathcal{S}'$ ;

- 3) доказать, что если  $f$  — функция медленного роста, то

$$F[f](\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} f(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad \text{в } \mathcal{S}';$$

- 4) доказать, что если  $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ , то  $F[f] \in L_2(\mathbb{R}^n)$  и

$$F[f](\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} f(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad \text{в } L_2(\mathbb{R}^n)$$

(теорема Планшереля).

- 5) доказать, что если  $f$  и  $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ , то справедливо равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n (f, g) = (F[f], F[g]);$$

- 6) доказать, что если  $f \in L_1(\mathbb{R}_n)$ , то  $F[f] \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  и выражается формулой (теорема Римана–Лебега)

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \|F[f]\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

$$F[f(\xi)] \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

$$F[f * g] = F[f]F[g], \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}^n);$$

7) доказать, что если  $f \in \mathcal{S}'$  и  $\varphi \in \mathcal{S}$ , то

$$F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi];$$

8) пусть  $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$  — кусочно непрерывная функция такая, что  $\{f'(x)\}$  также кусочно непрерывна; доказать формулу обращения

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} F[f](\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

**9.6.** Доказать в  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

- 1)  $F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}$ ; 2)  $F[\delta] = 1$ ; 3)  $f[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$ ;
- 4)  $F\left[\frac{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)}{2}\right] = \cos x_0 \xi$ ,  $n = 1$ ;
- 5)  $F\left[\frac{\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0)}{2i}\right] = \sin x_0 \xi$ ,  $n = 1$ .

**9.7.** Доказать в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ :

- 1)  $F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha$ ; 2)  $F[x^\alpha] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi)$ .

**9.8.** Вычислить преобразования Фурье следующих функций ( $n = 1$ ):

- 1)  $\theta(R - |x|)$ ; 2)  $e^{-a^2 x^2}$ ; 3)  $e^{ix^2}$ ; 4)  $e^{-ix^2}$ ;
- 5)  $f(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $f(x) = k$ ,  $k < x < k + 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

**9.9.** Доказать ( $n = 1$ ):

- 1)  $F[\theta(x)e^{-ax}] = \frac{1}{a - i\xi}$ ,  $a > 0$ ;
- 2)  $F[\theta(-x)e^{ax}] = \frac{1}{a + i\xi}$ ,  $a > 0$ ;
- 3)  $F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$ ,  $a > 0$ ;
- 4)  $F\left[\frac{2a}{a^2 + x^2}\right] = 2\pi e^{-a|\xi|}$ ,  $a > 0$ ;
- 5)  $F\left[\theta(x)e^{-ax} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] = \frac{1}{(a + i\xi)^\alpha}$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

**9.10.** Воспользовавшись формулой Сохоцкого (см. задачу 6.20) и результатами задач 9.5 и 9.9, 1) и 2), доказать:

- 1)  $F[\theta(x)] = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P} \frac{1}{\xi}$ ; 2)  $F[\theta(-x)] = \pi\delta(\xi) - i\mathcal{P} \frac{1}{\xi}$ .

**9.11.** Вычислить преобразования Фурье следующих обобщенных функций ( $n = 1$ ):

- 1)  $\delta^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- 2)  $\theta(x - a)$ ;
- 3)  $\operatorname{sign} x$ ;
- 4)  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ ;
- 5)  $\frac{1}{x \pm i0}$ ;
- 6)  $|x|$ ;
- 7)  $\theta(x)x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- 8)  $|x|^k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ ;
- 9)  $x^k \mathcal{P} \frac{1}{x}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- 10)  $x^k \delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- 11)  $x^k \delta^{(m)}(x)$ ,  $m \geq k$ ;
- 12)  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ , где  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$  определена в задаче 6.25;
- 13)  $\mathcal{P} \frac{1}{x^3}$ , где  $\mathcal{P} \frac{1}{x^3}$  определена в задаче 7.10;
- 14)  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x - k)$ ,  $|a_k| \leq C(1 + |k|)^m$ ;
- 15)  $\theta^{(1/2)}(x)$  (определение дробных производных см. в § 8).

**9.12.** Доказать, что

$$F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|} \right] = -2c - 2 \ln |\xi|,$$

где

$$c = \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u} du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u} du \quad — \text{постоянная Эйлера},$$

а  $\mathcal{P} \frac{1}{|x|}$  ( $x \in \mathbb{R}^1$ ) определена в задаче 7.26.

**9.13.** Доказать, что

$$F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|^2} \right] = -2\pi \ln |\xi| - 2\pi c_0,$$

где обобщенная функция  $\mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , определяется формулой

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}, \varphi \right) &= \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx, \\ c_0 &= \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u} du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u} du \end{aligned}$$

и  $J_0$  — функция Бесселя.

**9.14.** Решить в  $\mathcal{S}'$  интегральное уравнение

$$\int_0^\infty u(\xi) \cos \xi x dx = \theta(1-x).$$

**9.15.** Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx.$$

Указание. Воспользоваться равенством Парсеваля и задачей 9.8, 1).

**9.16.** Доказать, что

$$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right] = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

**9.17.** Доказать:

$$1) F\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3;$$

$$2) F[|x|^{-k}] = 2^{n-k} \pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} |\xi|^{k-n}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < k < n.$$

Указание. Воспользоваться формулой (II) при  $f = |x|^{-k}$  в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$  и  $\varphi = e^{-|x|^2/2}$ .

**9.18.** Доказать, что  $F\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{2\pi i}{\zeta}$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ .

**9.19.** Вычислить преобразование Фурье обобщенной функции  $\frac{1}{4\pi R}\delta_{S_R}$ ,  $n = 3$ , определенной в § 8.

**9.20.** Методом преобразований Фурье доказать в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ , что:

- 1)  $y = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + \dots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$  — общее решение уравнения  $x^n y = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;
- 2)  $\sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k \delta^{(k-m)}(x)$  — общее решение уравнения  $x^n y^{(m)} = 0$ ,  $n > m$ .

Указание. Воспользоваться задачами 7.23, 2) и 7.24.

**9.21.** Доказать в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}(x, t))$ , где  $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ :

- 1)  $F_x[\delta(x, t)] = 1(\xi) \cdot \delta(t);$
- 2)  $F_x\left[\frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m}\right] = \frac{\partial^m}{\partial t^m} F_x[f(x, t)];$
- 3)  $F_x[\theta(at - |x|)] = 2\theta(t) \sin \frac{a\xi t}{\xi}, a > 0, n = 1;$
- 4)  $F_x[f(x)\delta(t)] = F[f](\xi)\delta(t), f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$

**9.22.** Доказать в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ :

- 1)  $D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f(x, y)] = F_x[(ix)^\alpha D_y^\beta f];$
- 2)  $F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha F_x[D_y^\beta f].$

**9.23.** Доказать, что в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

$$F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) e^{-a^2 \xi^2 t} \right] = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}.$$

Указание. Воспользоваться формулой (III) и задачей 9.8, 3).

**9.24.** Доказать, что в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$

$$F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] = \theta(t) \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n e^{-|x|^2/(4a^2 t)}.$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.23.

**9.25.** Доказать, что в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

$$F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin a\xi t}{a\xi} \right] = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.8, 1).

**9.26.** Доказать, что в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$

$$F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} \right] = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}.$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.16.

**9.27.** Доказать, что в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$

$$F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} \right] = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x)$$

(здесь  $S_{at} = \{x: |x| = at\}$ ).

Указание. Воспользоваться задачей 9.19.

**9.28.** Пусть  $f$  — финитная обобщенная функция и  $\eta$  — любая функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 в окрестности носителя  $f$ . Доказать, что функция  $\tilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi)e^{i(z,\xi)})$ ,  $z = x + iy$ :

- а) не зависит от  $\eta$ ;
- а) целая;
- в)  $\tilde{f}(z) = F(f)$ .

**9.29.** Доказать, что если  $f$  и  $g$  финитны и  $f * g = 0$ , то либо  $f = 0$ , либо  $g = 0$ .

Указание. Воспользоваться задаче 9.28.

**9.30.** 1) Доказать, что  $F[\delta(x) \cdot 1(y)] = (2\pi)^n 1(\xi)\delta(\eta)$ ;  
2) обозначим  $\delta$ -функцию на гиперплоскости  $(a, x) = 0$  пространства  $\mathbb{R}^n$  через  $\delta((a, x))$ , так что

$$(\delta((a, x)), \varphi) = \int_{(a,x)=0} \varphi dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Доказать, что  $F[\delta(a_1x_1 + a_2x_2)] = 2\pi\delta(a_2\xi_1 - a_1\xi_2)$ .

## Ответы к § 9

**9.8.** 1)  $2\frac{\sin R\xi}{\xi}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\xi^2/(4a^2)}$ ; 3)  $\sqrt{\pi}e^{-i(\xi^2-\pi)/4}$ ; 4)  $\sqrt{\pi}e^{i(\xi^2-\pi)/4}$ ;

5) Решение:

$$\begin{aligned} F[f] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{-k}^{k+1} e^{ix\xi} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{i\xi} e^{ik\xi} (e^{i\xi} - 1) = \\ &= \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{ik\xi} = -\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi} \frac{d^3}{d\xi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\xi}}{k^2} \end{aligned}$$

— ряд сходится в  $\mathcal{D}'$ , так как  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\xi}}{k^2}$  сходится равномерно в  $\mathbb{R}^1$ .

**9.11.** 1)  $(-i\xi)^k$ ; 2)  $\pi\delta(\xi) + ie^{ia\xi}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$ ; 3)  $2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$ ; 4)  $i\pi \operatorname{sign} \xi$ ;

5)  $\mp i\pi + i\pi \operatorname{sign} \xi$ ; 6)  $2\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right)' = -2\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}$ ;

7)  $(-i)^k \left[ \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi} \right]^{(k)}$ ;

8)  $(-i)^k 2\pi\delta^{(k)}(\xi)$ ,  $k$  четное,  $(-i)^{k-1} 2\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right)^{(k)}$ ,  $k$  нечетное;

9)  $2(-i)^{k-1}\pi\delta^{(k-1)}(\xi)$ ; 10) 0; 11)  $(-i)^{k+m}\frac{m!}{(m-k)!}\xi^{m-k}$ ; 12)  $-\pi|\xi|$ ;

13) Решение. В силу задачи 7.10, 4), второй из формул (IV) и задачи 9.11, 12)

$$F\left[\mathcal{P} \frac{1}{x^3}\right] = F\left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x^2}\right] = \frac{i\xi}{2} F\left[\mathcal{P} \frac{1}{x^2}\right] = -\frac{i\pi\xi|\xi|}{2}.$$

14) Решение. В силу результатов задач 6.25, 2), 7.12 и 9.6, 1)

$$\begin{aligned} \left(F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)\right], \varphi(\xi)\right) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k), F[\varphi(\xi)]\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k e^{ik\xi}, \varphi(\xi)) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\xi}, \varphi(\xi)\right), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1); \end{aligned}$$

15) Решение:

$$\begin{aligned} F[\theta^{(1/2)}] &= F[f_{-1/2} * \theta] = F[f'_{1/2} * \theta] = F[(f_{1/2} * \theta)'] = \\ &= F\left[\left(\frac{\theta x^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} * \theta\right)'\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F[(\theta \cdot \sqrt{x})'] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} F\left[\frac{\theta}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{d}{id\xi}\right) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} e^{ix\xi} dx. \end{aligned}$$

**9.14.**  $\frac{2}{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi}$ .

**9.15.**  $\frac{\pi}{2} \min(a, b)$ .

**9.19.**  $\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$ .

**9.20.** Решение. Из  $F[x^n y^{(m)}] = 0$  в силу первой из формул (IV)  $F^{(n)}[y^{(m)}] = 0$ . Отсюда в силу результатов задач 7.23, 2), 9.7, 2) и формулы (III) следует

$$\begin{aligned} F[y^{(m)}(x)] &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{n-1} \xi^{n-1}, \\ y^{(m)} &= \beta_0 \delta(x) + \beta_1 \delta'(x) + \dots + \beta_{n-1} \delta^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Отсюда в силу результатов задач 8.23, 2) и 7.6, 10)

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k \delta^{(k-m)}(x).$$

**9.21.** 1) Решение. В силу формулы (V) и определения прямого произведения (см. § 8)

$$(F_x[\delta(x, t)](\xi, t), \varphi(\xi, t)) = (\delta(x, t), F_\xi[\varphi(\xi, t)](x, t)) = \\ = \left( \delta(x, t), \int e^{i(\xi, x)} \varphi(\xi, t) d\xi \right) = \int \varphi(\xi, 0) d\xi = (1(\xi) \cdot \delta(t), \varphi(\xi, t));$$

2) Решение. В силу формулы (V) и определения производной обобщенной функции (см. § 7)

$$\left( F_x \left[ \frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m} \right] (\xi, t), \varphi \right) = (-1)^m \left( f(x, t), \frac{\partial^m}{\partial t^m} F_\xi[\varphi(\xi, t)] \right) = \\ = (-1)^m \left( f(x, t), F_\xi \left[ \frac{\partial^m \varphi(\xi, t)}{\partial t^m} \right] \right) = \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} F_x[f(x, t)], \varphi \right).$$

**9.27.**  $F \left[ \frac{\sin t |\xi|}{|\xi|} \right]$  при  $t > 0$  и  $n = 3$  вычисляется так:

$$F \left[ \frac{\sin t |\xi|}{|\xi|} \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^r \rho \sin t \rho \int_0^\pi e^{ir\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta d\rho = \\ = -\frac{2\pi}{r} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \cos t \rho \int_{-r}^r e^{i\rho u} du d\rho = -\frac{2\pi}{r} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-r}^r \int_0^R \cos t \rho e^{i\rho u} d\rho du = \\ = -\frac{\pi}{r} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-r}^r \int_0^R [\cos \rho(u-t) + \cos \rho(u+t)] d\rho du = \\ = -\frac{\pi}{r} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-r}^r \left[ \frac{\sin R(u-t)}{u-t} + \frac{\sin R(u+t)}{u+t} \right] du = \\ = -\frac{2\pi^2}{r} \frac{\partial}{\partial t} \theta(r-t) = \frac{2\pi^2}{r} \delta(r-t) = \frac{2\pi^2}{t} \delta_t(x), \quad r = |x|.$$

Указание. При переходе к пределу воспользоваться задачей 6.19, 4).

## § 10. Преобразование Лапласа обобщенных функций

Обозначим через  $\mathcal{D}'_+(a)$  совокупность обобщенных функций  $f(t)$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , обращающихся в нуль при  $t < 0$  и таких, что  $f(t)e^{-at} \in \mathcal{S}'$  при всех  $\sigma > a$ .

Преобразование Лапласа  $\mathcal{F}(p)$  обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{D}'_+(a)$  определяется равенством

$$\mathcal{F}(p) = F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \quad \sigma > a.$$

При этом  $f$  называют *оригиналом*,  $\mathcal{F}$  — *изображением*, и этот факт записывают так:

$$f(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}(p), \quad \sigma > a;$$

здесь  $p = \sigma + i\omega$ . Функция  $\mathcal{F}(p)$  аналитична в полуплоскости  $\sigma > a$  и удовлетворяет следующему условию роста: для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\sigma_0 > a$  существуют такие числа  $c_\varepsilon(\sigma_0) \geq 0$  и  $m = m(\sigma_0) \geq 0$ , что

$$|\mathcal{F}(p))| \leq c_\varepsilon(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma}(1 + |p|)^m, \quad \sigma > \sigma_0.$$

Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} (-t)^m f(t) &\longleftrightarrow \mathcal{F}^{(m)}(p), & \sigma > a, \quad m = 0, 1, \dots; \\ f^{(m)}(t) &\longleftrightarrow p^m \mathcal{F}(p), & \sigma > a, \quad m = 0, 1, \dots; \\ f(t)e^{\lambda t} &\longleftrightarrow \mathcal{F}(p - \lambda), & \sigma > a + \operatorname{Re}(\lambda); \\ f(kt) &\longleftrightarrow \frac{1}{k} \mathcal{F}\left(\frac{p}{k}\right), & \sigma > ka, \quad k > 0; \\ f(t - r) &\longleftrightarrow e^{-rp} \mathcal{F}(p), & \sigma > a; \\ f_{(m)}(t) &\longleftrightarrow \frac{\mathcal{F}(p)}{p^m}, & \sigma > a, \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $f_{(m)}$  —  $m$ -я первообразная  $f$  из  $\mathcal{D}'_+(a)$ ;

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p), \quad \sigma > a,$$

если

$$g(t) \longleftrightarrow \mathcal{G}(p), \quad \sigma > a;$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{d}{dt} - a \right)^{m+2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\mathcal{F}(p)e^{pt}}{(p-a)^{m+1}} dp$$

— *формула обращения* для преобразования Лапласа, интеграл не зависит от  $\sigma > \sigma_0 > a$ ,  $m = m(\sigma_0)$ .

В задачах 10.1–10.9 и 10.11–10.14 доказать утверждения.

**10.1.** Если  $f(t)$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^1$ ,  $f(t) = 0$ ,  $t < 0$  и  $f(t) = O(e^{at})$ ,  $t \rightarrow \infty$ , то  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$  и

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt, \quad \sigma > a.$$

**10.2.** Если  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}(p)$ ,  $\sigma > a$  и функция  $\mathcal{F}(\sigma + i\omega)$  абсолютно интегрируема по  $\omega$  на  $\mathbb{R}^1$  при некотором  $\sigma > a$ , то в этом случае формула обращения принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{F}(p)e^{pt} dp.$$

- 10.3.** 1)  $\mathcal{D}'_+(a_1) \subset \mathcal{D}'_+(a_2)$ , если  $a_1 \leq a_2$ ;  
 2) если  $f \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'_+$ , то  $f \in \mathcal{D}'_+(0)$ .

**10.4.** Если  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ , то:

- 1)  $pf \in \mathcal{D}'_+(a)$ , где  $p$  — полином;
- 2)  $f(kt) \in \mathcal{D}'_+(kt) \subset \mathcal{D}'_+(ka)$ ,  $k > 0$ ;
- 3)  $f(t)e^{\lambda t} \in \mathcal{D}'_+(a + \operatorname{Re} \lambda)$ .

**10.5.** Если  $f, g \in \mathcal{D}'_+(a)$ , то  $f * g \in \mathcal{D}'_+(a)$  и справедливо равенство

$$(f * g)e^{-\sigma t} = (fe^{-at}) * (ge^{-at}), \quad \sigma > a.$$

Указание. Воспользоваться 8.20.

**10.6.** Если  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ , то:

- 1)  $f(t - \tau) \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $\tau \geq 0$ ;
- 2)  $f^{(m)} \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;
- 3)  $f_{(m)} \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

**10.7.** 1)  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ ;

2)  $\delta^{(m)}(t - \tau) \longleftrightarrow p^m e^{-\tau p}$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $p$  любое,  $m = 0, 1, \dots$ ;

3)  $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p}$ ,  $\sigma > 0$ ; 4)  $\theta(t)e^{i\omega t} \longleftrightarrow \frac{1}{p - i\omega}$ ,  $\sigma > 0$ ;

5)  $\theta(t)e^{-i\omega t} \longleftrightarrow \frac{1}{p + i\omega}$ ,  $\sigma > 0$ ; 6)  $\theta(t) \cos t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ ,  $\sigma > 0$ ;

7)  $\theta(t) \sin t \longleftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ,  $\sigma > 0$ ;

8)  $\frac{\theta(t)t^{m-1}}{\Gamma(m)}e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p - \lambda)^m}$ ,  $\sigma > \operatorname{Re} \lambda$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ;

9)  $\theta(t)J_0(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ ,  $\sigma > 0$ .

**10.8.** Если  $f$  — функция из  $\mathcal{D}'_+(a)$ ,  $f \in C^n(t \geq 0)$  и  $f \longleftrightarrow \mathcal{F}$ , то

$$\{f^{(n)}(t)\} \longleftrightarrow p^n \mathcal{F}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0)p^{n-k-1}, \quad \sigma > a.$$

**10.9.** Если  $f$  и  $g$  — функция из  $\mathcal{D}'_+(a)$ ,  $g \in C^1(t \geq 0)$  и  $f \longleftrightarrow \mathcal{F}$ ,  $g \longleftrightarrow \mathcal{G}$ , то

$$\int_0^t f(\tau) [g'(t - \tau)] d\tau \longleftrightarrow p\mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p) - g(+0)\mathcal{F}(p), \quad \sigma > a.$$

**10.10.** Решить уравнение  $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t)$ , где  $e(t)$  — локально интегрируемая функция,  $e(t) = 0$ ,  $t < 0$ .

**10.11.** Фундаментальное решение  $\mathcal{E}(t)$  уравнения

$$\mathcal{E}^{(m)} + a_1\mathcal{E}^{(m-1)} + \dots + a_m\mathcal{E} = \delta$$

существует и единственно в классе  $\mathcal{D}'_+(a)$  и удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{E}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{Q(p)}, \quad c > a,$$

где  $\theta(p) = p^m + a_1p^{m-1} + \dots + a_m$ ,  $a = \max \operatorname{Re} \lambda_j$ ,  $\lambda_j$  — корни полинома  $Q$ .

**10.12.** Если  $f_\alpha(t)$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ , — обобщенная функция, введенная в § 10, то:

- 1)  $f_\alpha(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p^\alpha}$ ,  $\sigma > 0$ , где  $p^\alpha$  — та ее ветвь, для которой  $p^\alpha > 0$  при  $p > 0$ ;
- 2)  $f_\alpha(t)e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p - \alpha)^\alpha}$ ;  $\sigma > \operatorname{Re} \lambda$ .

**10.13.** Если  $|a_k| \leq c(1 + k)^m$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t - k) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kp}, \quad \sigma > 0.$$

**10.14.** Если  $f(t)$  —  $T$ -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде, то

$$\theta(t)f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt, \quad \sigma > 0.$$

**10.15.** Найти решения уравнений в классе  $\mathcal{D}'_+(a)$  (при надлежащем  $a$ ):

- 1)  $(\theta \cos t) * \mathcal{E} = \delta(t);$
- 2)  $(\theta t \cos t) * \mathcal{E} = \delta(t);$
- 3)  $\mathcal{E} + 2(\theta \cos t) * \mathcal{E} = \delta(t);$
- 4)  $\begin{cases} \theta * u_1 + \delta' * u_2 = \delta(t), \\ \delta * u_1 + \delta' * u_2 = 0. \end{cases}$

**10.16.** Пусть  $\mathcal{E}_1$  — решение уравнения  $g * \mathcal{E}_1 = \theta$  в  $\mathcal{D}'_+(a)$ , причем  $\mathcal{E}_1$  — локально интегрируемая функция,  $\mathcal{E}_1 \in C^1(t \geq 0)$ . Доказать, что решение в  $\mathcal{D}'_+(a)$  уравнения  $g * a = f$ , где  $f$  — локально интегрируемая функция из  $\mathcal{D}'_+(a)$ , выражается формулой

$$u(t) = \mathcal{E}_1(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau)\{\mathcal{E}'_1(t - \tau)\} d\tau.$$

**10.17.** Вычислить преобразование Лапласа функции

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2^k, & k < t < k+1, k = 0, 1, \dots. \end{cases}$$

**10.18.** Решить уравнение  $\chi * a = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta(t - k)$  в  $\mathcal{D}'_+(\ln 2)$ ; функция  $a(t)$  определена в задаче 10.17.

**10.19.** Доказать формулу  $\sin t = \int_0^t J_0(t - \tau)J_0(\tau) d\tau$ .

**10.20.** Решить следующие задачи Коши:

- 1)  $u' + 3u = e^{-2t}, \quad u(0) = 0;$
- 2)  $u'' + 5u' + 6u = 12, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0;$
- 3)  $\begin{cases} u' + 5u + 2v = e^{-t}, & u(0) = 1, \\ v' + 2v + 2u = 0, & v(0) = 0. \end{cases}$

## Ответы к § 10

**10.3.** 2) Решение. Пусть  $\eta$  — любая функция класса  $C^\infty(\mathbb{R}^1)$  такая, что  $\eta(t) = 0$ ,  $t < -\delta$ ,  $\eta(t) = 1$ ,  $t > -\frac{\delta}{2}$ ,  $\delta > 0$  любое. Тогда при всех  $\sigma > 0$ ,  $\eta(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}$ ,  $f = \eta f$ , и поэтому  $f(t)e^{-\sigma t} = f(t)\eta(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}'$ .

**10.6.** Указание. Воспользоваться задачей 10.5 и формулами соответственно:

- 1)  $f(t - \tau) = f * \delta(t - \tau);$
- 2)  $f^{(m)} = f * \delta^{(m)};$
- 3)  $f_{(m)} = \underbrace{\theta * \dots * \theta}_{m \text{ раз}} * f.$

**10.7. 9)** Указание. Воспользоваться уравнением Бесселя.

**10.10.**  $\frac{1}{\sqrt{d}} \int_0^t [p_+ e^{p_+(t-\tau)} - p_- e^{p_-(t-\tau)}] e(\tau) d\tau$ ,  $p_\pm = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{d}}{2L}$ ,  $d = R^2 - \frac{4L}{c}$ .

- 10.15.** 1)  $\delta'(t) + \theta(t)$ ,  $a = 0$ ; 2)  $\delta''(t) + 3\delta(t) + 4\theta(t) \sin t$ ,  $a = 1$ ;  
 2)  $\delta(t) - 2\theta(t)e^t(1-t)$ ,  $a = 1$ ;  
 3)  $u_1(t) = -\delta(t) - \theta(t)e^t$ ,  $u_2(t) = \theta(t)e^t$ ,  $a = 1$ .

**10.16.** Указание. Воспользоваться формулой задачи 10.8.

**10.17.**  $\frac{1 - e^{-p}}{p(1 - 2e^{-p})}$ ,  $\sigma > \ln 2$ .

**10.18.**  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta'(t-k)$ .

**10.19.** Указание. Воспользоваться формулой задачи 10.7, 9).

**10.20.** 1)  $e^{-2t} - e^{-3t}$ ; 2) 2; 3)  $\frac{9}{25}e^{-t} + \frac{1}{5}te^{-t} + \frac{16}{25}e^{-6t}$ ,  
 $-\frac{8}{25}e^{-t} - \frac{2}{5}te^{-t} + \frac{8}{25}e^{-6t}$ .

## § 11. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

*Обобщенным решением* в области  $G \subset \mathbb{R}^n$  линейного дифференциального уравнения

$$L(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x), \quad (*)$$

где  $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{D}'$ , называется всякая обобщенная функция  $u$ , удовлетворяющая этому уравнению в  $G$  в обобщенном смысле, т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$ , носитель которой содержится в  $G$ , имеет место равенство

$$(u, L^*(x, D)\varphi) = (f, \varphi),$$

где  $L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha \varphi)$ .

Обобщенная функция  $u$  принадлежит классу  $C^p(G)$ , если в области  $G$  она совпадает с функцией  $u_0(x)$  класса  $C^p(G)$ , т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\text{supp } \varphi \in G$ , имеет место равенство

$$(u, \varphi) = \int u_0(x)\varphi(x) dx.$$

Пусть  $f \in C(G) \cap \mathcal{D}'$ . Для того чтобы обобщенная функция  $u$  удовлетворяла уравнению (\*) в области  $G$  в классическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу  $C^m(G)$  и удовлетворяла этому уравнению в обобщенном смысле в области  $G$ .

*Фундаментальным решением* (функцией влияния) линейного дифференциального оператора

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами  $a_\alpha(x) = a_\alpha$  называется обобщенная функция  $\mathcal{E}$ , удовлетворяющая в  $\mathbb{R}^n$  уравнению

$$L(D)\mathcal{E} = \delta(x).$$

У всякого линейного дифференциального оператора  $L(D)$  существует фундаментальное решение медленного роста, и это решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$L(-i\xi)F|\mathcal{E}| = 1.$$

Пусть  $f \in \mathcal{D}'$  такова, что свертка  $\mathcal{E} * f$  существует в  $\mathcal{D}'$ . Тогда

$$u = \mathcal{E} * f$$

есть решение уравнения  $L(D)u = f$ . Это решение единственno в классе тех обобщенных функций  $u$ , для которых существует свертка с  $\mathcal{E}$ .

**11.1.** Доказать, что единственное в  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальное решение оператора

$$\frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_m$$

выражается формулой задачи 8.26 (определение  $\mathcal{D}'_+$  см. в § 10).

**11.2.** Доказать, что функция  $\mathcal{E}(x)$  является фундаментальным решением оператора:

- 1)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{\pm ax}, \quad \frac{d}{dx} \mp a;$
- 2)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\frac{\sin ax}{a}, \quad \frac{d^2}{dx^2} + a^2;$
- 3)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\frac{\operatorname{sh} ax}{a}, \quad \frac{d^2}{dx^2} - a^2;$
- 4)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{\pm ax} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \left(\frac{d}{dx} \mp a\right)^m, m = 2, 3, \dots.$

**11.3.** Найти единственное в  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальное решение следующих операторов:

- 1)  $\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx};$
- 2)  $\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1;$
- 3)  $\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2;$
- 4)  $\frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 5;$
- 5)  $\frac{d^2}{dx^2} - a^3;$
- 6)  $\frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx};$
- 7)  $\frac{d^4}{dx^4} - a^4;$
- 8)  $\frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1.$

**11.4.** Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x + iy)}$  — фундаментальное решение оператора Коши–Римана  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right);$
- 2)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{\bar{z}^{k-1} e^{\lambda \bar{z}}}{\pi \Gamma(k) z}, k = 1, 2, \dots,$  — фундаментальное решение оператора  $\left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda \right)^k;$
- 3)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{2\bar{z}^{k-1} z^{m-1}}{\pi \Gamma(k) \Gamma(m)}, k = 1, 2, \dots,$  — фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial^{k+m}}{\partial \bar{z}^k \partial z^m};$
- 4)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda}{y - \lambda x} e^{-\mu \alpha},$  — фундаментальное решение обобщенного оператора Коши–Римана  $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} + \mu,$   $\operatorname{Im} \lambda \neq 0.$

**11.5.** Доказать, что  $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$  — фундаментальное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^2.$  Выяснить физический смысл.

**11.6.** Доказать:

- 1)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$  — фундаментальное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^3;$  выяснить физический смысл;
- 2)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, n = 3, 4, \dots,$  — фундаментальное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n,$  где  $\sigma_n = \int_{S_1} dS = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  — площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^n;$

3)  $\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k \Gamma(n/2 - k)}{2^{2k} \pi^{n/2} \Gamma(k)} |x|^{2k-n}$  — фундаментальное решение итерированного оператора Лапласа  $\Delta^k$  при  $2k < n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{1}{\pi \cdot 2^{2k-1} \Gamma(k)} |x|^{2k-2} \ln |x|, \quad n = 2.$$

Указание. Воспользоваться задачей 9.17, 2).

**11.7.** Доказать, что  $\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$  и  $\bar{\mathcal{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$  — фундаментальное решение оператора Гельмгольца  $\Delta + k^2$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**11.8.** Доказать, что если функция  $u(x)$  удовлетворяет в  $\mathbb{R}^3$  уравнению  $\Delta u + k^2 u = 0$  и условиям излучения

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} = iku(x) = o(|x|^{-1})$$

при  $|x| \rightarrow \infty$ , то  $u \equiv 0$ .

**11.9.** Доказать, что фундаментальными решениями оператора Гельмгольца  $\Delta + k^2$  являются функции:

1)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|)$  и  $\bar{\mathcal{E}}(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|)$  в  $\mathbb{R}^2$ , где  $H_0^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — функция Ханкеля;

2)  $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{i2k} e^{ik|x|}$  и  $\bar{\mathcal{E}}(x) = -\frac{1}{i2k} e^{-ik|x|}$  в  $\mathbb{R}^1$ .

**11.10.** Доказать, что фундаментальными решениями оператора  $\Delta - k^2$  являются функции:

1)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$  в  $\mathbb{R}^3$ ;

2)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|x|)$  в  $\mathbb{R}^2$ , где  $K_0(\xi) = i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\xi)$  — функция Ханкеля мнимого аргумента;

3)  $\mathcal{E}(x) = \frac{e^{-k|x|}}{2k}$  в  $\mathbb{R}^1$ ;

4)  $\mathcal{E}(x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{k}{|x|}\right)^{n/2-1} K_{\frac{n}{2}-1}(k|x|)$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**11.11.** Доказать, что если  $\mathcal{E}_1(x, t)$  — фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial}{\partial t} + L(D_x)$ , то  $\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \mathcal{E}_1(x, t)$  — фундаментальное решение оператора  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + L(D_x)\right)^k$ .

**11.12.** Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/(4a^2t)}$  — фундаментальное решение оператора теплопроводности  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$ ; выяснить физический смысл;
- 2)  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n \Gamma(k)} e^{-|x|^2/(4a^2t)}$  — фундаментальное решение оператора  $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)^k$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Указание. Воспользоваться задачей 11.1.

**11.13.** Доказать, что  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{ct-(x+bt)^2/(4a^2t)}$  — фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x} - c$ .

**11.14.** Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}_1(x, t) = -\frac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}$  — фундаментальное решение оператора Шредингера  $i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Указание. Воспользоваться формулой  $\int_0^\infty e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$ ;
- 2)  $\mathcal{E}_n(x, t) = -\frac{i\theta(t)}{\hbar} \left(\frac{m_0}{2\pi\hbar t}\right)^{n/2} \exp\left\{i\left[\frac{|x|^2}{2\hbar t}(m + i0) - \frac{\pi n}{4}\right]\right\}$  — фундаментальное решение оператора  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta$ ;  $n$  любое;
- 3)  $\frac{\theta(t)t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n \Gamma(k)} \exp\left\{\pm\left(\frac{|x|^2}{4ia^2t} + \frac{\pi n}{4}i\right)\right\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — фундаментальное решение оператора  $\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm ia^2\Delta\right)^k$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Указание. Воспользоваться задачей 11.11.

**11.15.** Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$  — фундаментальное решение одномерного волнового оператора  $\square_a$ ; выяснить физический смысл;

2)  $\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$  — фундаментальное решение двумерного волнового оператора  $\square_a$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ; выяснить физический смысл.

Указание. Воспользоваться задачей 9.26.

**11.16.** Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2)$ , где  $S_{at} = \{|x| = at\}$ , является фундаментальным решением трехмерного волнового оператора  $\square_a$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ; выяснить физический смысл. Указание. Воспользоваться задачей 9.27;
- 2)  $\frac{1}{8\pi a^5} \theta(at - |x|)$  — фундаментальное решение оператора  $\square_a^2$  в  $\mathbb{R}^4$ ;
- 3)  $\frac{1}{\pi 2^{2k-1} a^{2k+1} \Gamma(k) \Gamma(k-1)} (a^2 t^2 - |x|^2)^{k-2} \theta(at - |x|)$  — фундаментальное решение оператора  $\square_a^k$  в  $\mathbb{R}^n$ ;
- 4) фундаментальное решение оператора  $\square_a$  в  $\mathbb{R}^4$  можно представить в виде

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{1}{8\pi a^3} \square_a \theta(at - |x|).$$

**11.17.** Доказать, что

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2a)^{n-2} \pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \square_a^{(n-3)/2} [\theta(t) \delta(a^2 t^2 - |x|^2)], & n \geq 3 \text{ нечетное}, \\ \frac{1}{(2a)^{n-1} \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \square_a^{(n-2)/2} \left[ \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \right], & n \text{ четное}, \end{cases}$$

является фундаментальным решением волнового оператора  $\square_a$ .

Указание. При нечетных  $n$  воспользоваться формулой  $\mathcal{E}_n(x, t) = \theta(t) F_\xi^{-1} \left[ \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} \right]$  и применить метод спуска по переменной  $x_{n+1}$ .

**11.18.** Доказать, что  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) e^{b(at-x)/(2a^2)}$  — фундаментальное решение оператора

$$\square_a - b \frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{где } a, b > 0.$$

Указание. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{z\tau}}{z} dz = \theta(\tau), \quad \alpha > 0.$$

**11.19.** Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}(x, t) = -\theta(t)\theta(-x)e^{at+bx}$  — фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial t} + ab, \quad \text{где } b > 0$$

(см. указание к задаче 11.18);

- 2)  $\mathcal{E}(x, t) = \theta(t)\theta(x)I_0(2m\sqrt{xy})$  — фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - m^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , где  $I_0(\xi) = J_0(i\xi)$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

**11.20.** Доказать, что фундаментальным решением оператора  $\square_a - m^2$  является функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a} I_0\left(\frac{m}{2}\sqrt{a^2t^2 - x^2}\right),$$

где  $I_0(\xi) = J_0(i\xi)$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

**11.21.** Доказать, что фундаментальными решениями оператора Клейна–Гордона–Фока  $\square_a + m^2$  в  $\mathbb{R}^n$  являются функции

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a} J_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2 - x^2}\right), \quad n = 1;$$

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}, \quad n = 2;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) = & \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2t^2 - |x|^2) - \\ & - \frac{m}{4\pi a^2} \theta(at - |x|) \frac{J_1\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}, \quad n = 3, \end{aligned}$$

где  $J_0, J_1$  — функции Бесселя.

**11.22.** Доказать, что фундаментальными решениями телеграфного оператора  $\square_a + 2m\frac{\partial}{\partial t}$  в  $\mathbb{R}^n$  являются функции

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) &= \frac{1}{2a} e^{-mt} \theta(at - |x|) I_0 \left( m \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right), \quad n = 1; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{e^{-mt} \theta(at - |x|) \operatorname{ch} \left( m \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{a^2}} \right)}{2\pi a^2 \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}}, \quad n = 2; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(at)}{2\pi a} e^{-mt} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) - \\ &\quad - \frac{me^{-mt} \theta(at - |x|) I_1 \left( m \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2} \right)}{4\pi a^3 \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}}, \quad n = 3,\end{aligned}$$

где  $I_0(\xi) = J_0(i\xi)$ ,  $I_1(\xi) = -iJ_1(i\xi)$  — функции Бесселя мнимого аргумента. Указание. Воспользоваться задачей 11.21.

**11.23.** 1) Доказать, что  $\mathcal{E}(x, t) = v\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x - vts)$ , где

$$(\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x - vts), \varphi(x, t)) = \int_0^\infty e^{-\alpha vt}\varphi(vts, t) dt$$

— фундаментальное решение оператора переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (s, \operatorname{grad} \mathcal{E}) + \alpha \mathcal{E} = \delta(x, t), \quad |s| = 1, \quad v > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad n = 3;$$

2) доказать, что

$$\mathcal{E}^0(x) = \left( \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2} \delta \left( s - \frac{x}{|x|} \right), \varphi \right) = \int_0^\varphi e^{-\alpha\rho} \varphi(\rho s) d\rho$$

— фундаментальное решение стационарного оператора переноса

$$(\mathbf{S}, \operatorname{grad} \mathcal{E}^0) + \alpha \mathcal{E}^0 = \delta(x), \quad n = 3.$$

**11.24.** Найти фундаментальное решение уравнения  $Z * \mathcal{E} = \delta$ , где  $Z$  из задачи 8.30.

**11.25.** Доказать, что если  $\mathcal{E}(x, t)$  — фундаментальное решение оператора переноса

$$L(D) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \alpha, \quad |a| \neq 0,$$

то

$$\frac{1}{\Gamma(k)|a|^{2(k-1)}}(\bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n)^{k-1} \mathcal{E}(x, t)$$

— фундаментальное решение оператора  $L^k(D)$ .

Указание. Воспользоваться индукцией по  $k$ .

Пусть  $f(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  и  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Введем обобщенную функцию  $(f(x, t), \varphi(x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , действующую на основные функции  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  по формуле

$$((f(x, t), \varphi(x)), \psi(t)) = (f, \varphi\psi).$$

Из определения вытекает, что

$$\left( \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right) = \frac{d^k}{dt^k} (f(x, t), \varphi(x)), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Говорят, что обобщенная функция  $f(x, t)$  принадлежит классу  $C^p$  по переменной  $t$  в интервале  $(a, b)$ , если для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  обобщенная функция  $(f(x, t), \varphi(x)) \in C^p(a, b)$ .

**11.26.** Для фундаментальных решений  $\mathcal{E}_n(x, t)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , волнового оператора, рассмотренных в задачах 11.15–11.16, доказать:

- 1)  $\mathcal{E}_n(x, t) \in C^\infty$  по  $t \in [0, \infty)$ ;
- 2)  $\mathcal{E}_n(x, t) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x)$ ,  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0$   
при  $t \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**11.27.** Для фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$  оператора теплопроводности (см. задачу 11.12) доказать, что

$$\mathcal{E}(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

**11.28.** Для фундаментального решения оператора Шредингера (см. задачу 11.14) доказать, что

$$\mathcal{E}_1(x, t) \rightarrow -i\delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

**11.29.** Для фундаментального решения из задачи 11.18 доказать:

- 1)  $\mathcal{E}(x, t) \in C^\infty$  по  $t \in [0, \infty)$ ;

$$2) \quad \mathcal{E}(x, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow -\frac{b}{a} \delta(x), \\ t \rightarrow +0 \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1).$$

**11.30.** Для фундаментального решения из задачи 11.13 доказать, что

$$\mathcal{E}(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1).$$

## Ответы к § 11

**11.1.** Единственность. Очевидно,  $\mathcal{E}(x) \in \mathcal{D}'_+$ . Для  $u = \mathcal{E} - \mathcal{E}^*$ , где  $\mathcal{E}^* \in \mathcal{D}'_+$  — другое фундаментальное решение, имеем  $L(D)u = 0$ . Свертка  $u * \mathcal{E}$  существует (см. формулу (VIII) § 8). Имеем  $u = u * \delta = u * L(D)\mathcal{E} = L(D)u * \mathcal{E} = 0$ . Следовательно,  $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ .

- 11.3.** 1)  $\theta(x) \frac{1 - e^{-4x}}{4}$ ; 2)  $\theta(x)xe^x$ ; 3)  $\theta(x)(e^{-x} - e^{-2x})$ ;  
 4)  $\theta(x)e^{2x} \sin x$ ; 5)  $\frac{\theta(x)}{3a^2} \left[ a^{ax} - e^{-ax/2} \left( \cos \frac{a\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} \sin \frac{a\sqrt{3}}{2}x \right) \right]$ ;  
 6)  $\frac{\theta(x)}{2}(1 - e^x)^2$ ; 7)  $\frac{\theta(x)}{2a^2}(\operatorname{sh} ax - \sin ax)$ ; 8)  $\frac{\theta(x)}{2}(x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$ .

**11.12.** Решение. Применив преобразование Фурье  $F_x$  к равенству  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x, t)$ , в силу результатов задачи 9.21, 1) и 2) и формул из § 9 получим

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 1(\xi) \cdot \delta(t), \quad \text{где } \tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = F_x[\mathcal{E}(x, t)].$$

Пользуясь формулой для  $\mathcal{E}(t)$  задачи 11.2, 1) с заменой  $a$  на  $a^2|\xi|^2$ , заключаем, что  $\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = \theta(t)e^{-a^2|\xi|^2 t}$ . Отсюда в силу задачи 9.24

$$\mathcal{E}(x, t) = F_\xi^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t)] = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}.$$

**11.15.** Указание. См. решение задачи 11.12. Для искомой  $Z(t) \in C^2$  получим задачу  $Z'' + a^2 \xi^2 Z = 0$ ,  $Z(0) = 0$ ,  $Z'(0) = 1$ . Отсюда  $Z(t) = \frac{\sin a\xi t}{a\xi}$  и, следовательно,

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a\xi t}{a\xi}.$$

Далее воспользоваться задачей 9.25.

**11.24.**  $\frac{\theta(t)}{L} e^{-Rt/(2L)} \left( \cos \omega t - \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right)$ , если  $4L - CR^2 > 0$ ,  
 где  $\omega = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$ .

## Г л а в а 4

### ЗАДАЧА КОШИ

#### § 12. Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа

**1. Задача Коши на плоскости.** Задача Коши для уравнения

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = F(x, y) \quad (I)$$

с условиями

$$u|_{\Gamma} = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial \ell}|_{\Gamma} = u_1(x, y) \quad (II)$$

состоит в следующем. Пусть в области  $Q$  задано уравнение (I) гиперболического типа ( $b^2 - ac > 0$ ) и на кривой  $\Gamma$ , которая принадлежит области  $Q$  или является частью границы области  $Q$ , заданы функции  $u_0(x, y)$ ,  $u_1(x, y)$  и направление  $\ell(x, y)$ . Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , которая в области  $Q$  является решением уравнения (I) и на кривой  $\Gamma$  удовлетворяет условиям (II).

Если в каждой точке кривой  $\Gamma$  направление  $\ell$  не является касательным к кривой  $\Gamma$  и касательное направление к кривой  $\Gamma$  не является характеристическим, то в области  $Q$ , ограниченной характеристиками, проходящими через концы кривой  $\Gamma$ , при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (I) и данных условий (II) существует единственное решение задачи Коши (I), (II).

Характеристическим уравнением для уравнения (I) является обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0, \quad (III)$$

множество решений которого состоит из множества решений уравнения

$$a dy - (b + \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0, \quad (x, y) \in Q, \quad (III')$$

и множества решений уравнения

$$a dy - (b - \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0, \quad (x, y) \in Q. \quad (\text{III}'')$$

Так как  $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$ ,  $(x, y) \in Q$ , то общие интегралы уравнений (III') и (III'')

$$\xi(x, y) = C_1, \quad (x, y) \in Q, \quad \text{и} \quad \eta(x, y) = C_2, \quad (x, y) \in Q,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, представляют собой уравнения характеристик для уравнения (I).

С помощью невырожденной замены переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in Q, \quad (\xi, \eta) \in D',$$

переводящей область  $Q$  в область  $D'$ , уравнение (I) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + \alpha_1(\xi, \eta)u_\xi + \alpha_2(\xi, \eta)u_\eta + \alpha_3(\xi, \eta)u = F(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in D'. \quad (\text{I}')$$

Иногда удается найти общее решение  $u(\xi, \eta)$ ,  $(\xi, \eta) \in D'$ , уравнения (I'). Тогда функция  $u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$  представляет собой общее решение в  $Q$  уравнения (I).

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$2u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} = 7 \cos(x + 2y). \quad (1)$$

△ Найдем характеристики уравнения. Из (III) имеем

$$2(dy)^2 - 5dx dy - 3(dx)^2 = 0 \quad \text{или} \quad 2(y')^2 - 5y' - 3 = 0,$$

откуда получаем, что  $y' = 3$  и  $y' = -\frac{1}{2}$ . Следовательно,  $y = 3x + C_1$  и  $2y = -x + C_2$  — два семейства характеристик уравнения (1).

Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x + 2y \end{cases} \quad (2)$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \cdot 3 + u_\eta \cdot 1, \\ u_y &= u_\xi \cdot (-1) + u_\eta \cdot 2, \\ 2 \Big| u_{xx} &= 9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ -3 \Big| u_{yy} &= u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, \\ 5 \Big| u_{xy} &= -3u_{\xi\xi} + 5u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}; \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$u_{\xi\xi}(18 - 3 - 15) + u_{\xi\eta}(12 + 12 + 25) + u_{\eta\eta}(2 - 12 + 10) = \cos \eta,$$

или

$$49u_{\xi\eta} = \cos \eta.$$

Следовательно,

$$u_\xi = \frac{1}{49} \sin \eta + C_1(\xi),$$

где  $C_1(\xi)$  — любая функция класса  $C^2$ . Проинтегрировав последнее равенство по  $\xi$ , получаем

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{49}\xi \sin \eta + f(\xi) + g(\eta),$$

где  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  — любые функции класса  $C^2$ , откуда в силу замены переменных (2) находим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \frac{1}{49}(3x - y) \sin(x + 2y) + f(3x - y) + g(x + 2y). \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.** Решить задачу Коши

$$u_{xx} - 2(x + 1)u_{xy} + 4xu_{yy} + \frac{2u_y - u_x}{x - 1} = 0, \quad x > 1, \quad y > 0; \quad (1)$$

$$u|_{y=1} = 1, \quad u_y|_{y=1} = \frac{1}{x} - 1, \quad x > 1. \quad (2)$$

△ Найдем характеристики уравнения (1). Из (III) находим

$$(dy)^2 + 2(x + 1)dx dy + 4x(dx)^2 = 0$$

или

$$(y')^2 + 2(x + 1)y' + 4x = 0.$$

Отсюда получаем, что  $y' = -2x$  и  $y' = -2$ . Следовательно,  $y = -x^2 + C_1$  и  $y = -2x + C_2$  — два семейства характеристик уравнения (1).

Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x^2 + y, \\ \eta = 2x + y \end{cases} \quad (3)$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{x-1} \\ \frac{2}{x-1} \\ \frac{1}{4x} \\ -2(x+1) \end{array} \left| \begin{array}{l} u_x = u_\xi \cdot 2x + u_\eta \cdot 2, \\ u_y = u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} = 4x^2 u_{\xi\xi} + 8xu_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} + 2u_\xi, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} = 2xu_{\xi\xi} + (2+2x)u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}. \end{array} \right.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & u_{\xi\xi}(4x^2 + 4x - 4x(x+1)) + \\ & + u_{\xi\eta}(8x + 8x - 4(x+1)^2) + u_{\eta\eta}(4 + 4x - 4(x+1)) = \\ & = u_\xi \left( \frac{-2x}{x-1} + \frac{2}{x-1} + 2 \right) + u_\eta \left( \frac{-2}{x-1} + \frac{2}{x-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$-4(x-1)^2 u_{\xi\eta} = 0$$

или (так как  $x > 1$ )

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что  $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ , где  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  есть любые функции класса  $C^2$ , является общим решением уравнением (4), а функция

$$u(x, y) = f(x^2 + y) + g(2x + y) \quad (5)$$

есть общее решение уравнения (1).

Подберем функции  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  так, чтобы выполнялись условия (2).

Из (5) и (2) получаем

$$u|_{y=1} = f(x^2 + 1) + g(2x + 1) = -1, \quad x > 1, \quad (6)$$

$$u_y|_{y=1} = f'(x^2 + 1) + g'(2x + 1) = \frac{1}{x} - 1, \quad x > 1 \quad (7)$$

(так как  $u_y(x, y) = f'(x^2 + y) \cdot 1 + g'(2x + y) \cdot 1$ ).

Продифференцировав равенство (6) по  $x$ , получаем

$$f'(x^2 + 1) \cdot 2x + g'(2x + 1) \cdot 2 = 0,$$

или

$$g'(2x + 1) = -x f'(x^2 + 1).$$

Используя последнее равенство из (7), находим

$$f'(x^2 + 1) - xf'(x^2 + 1) = \frac{1-x}{x}, \quad x > 1,$$

откуда следует, что

$$f'(x^2 + 1) = \frac{1}{x}, \quad x > 1. \quad (8)$$

Обозначим  $p = x^2 + 1$ . Тогда из (8) следует, что

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{1}{\sqrt{p-1}}, \\ f(p) &= 2\sqrt{p-1} + a, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a \in \mathbb{R}$  — любое число.

Из (9) и (6) находим

$$g(2x+1) = -1 - 2\sqrt{(x^2+1)-1} - a = -1 - 2x - a,$$

или  $g(2x+1) = -(1+2x) - a$ , откуда

$$g(q) = -q - a, \quad \text{где } q = 2x + 1. \quad (10)$$

Из (5), (9) и (10) получаем

$$u(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y - 1} + a - (2x + y) - a.$$

Следовательно, функция

$$u(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y - 1} - 2x - y$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

**Пример 3** (задача о максимальной области). Найти максимальную область  $Q$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ , в которой решение уравнения

$$u_{yy} - u_{xx} = 0 \quad (1)$$

однозначно определяется условиями

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y|_{y=0} = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

где  $u_0(x) \in C^2(0, 1)$ ,  $u_1(x) \in C^1(0, 1)$ .

△ Уравнение (1) имеет два семейства характеристик  $x + y = C_1$  и  $x - y = C_2$ , а в переменных  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$  это уравнение

принимает вид  $u_{\xi\eta} = 0$ . Поэтому любое решение уравнения (1) можно записать в виде

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

при некоторых дважды непрерывно дифференцируемых функциях  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$ . Следовательно, в квадрате

$$Q = \{(x, y) : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1\}$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), определено однозначно формулой Д'Аламбера. Покажем, что  $Q$  — искомая область.

Пусть в некоторой области  $\Omega$ ,  $\Omega \supset Q$ , существует решение  $u(x, y)$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Тогда функция  $u_1(x, y) = u(x, y) + F(x - y - 1)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ , где  $F(t) = 0$  для  $t \leq 0$  и  $F(t) = t^4$  (например) для  $t \geq 0$  также является решением уравнения (1) в области  $\Omega$ , удовлетворяющим условиям (2) и отличным от  $u(x, y)$  в каждой точке множества  $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : x - y > 1\}$ .

Функции

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= u(x, y) + F(y - x), \quad (x, y) \in Q, \\ u_3(x, y) &= u(x, y) + F(x + y - 1), \quad (x, y) \in Q, \\ u_4(x, y) &= u(x, y) + F(-x - y), \quad (x, y) \in Q, \end{aligned}$$

также являются решениями в  $\Omega$  уравнения (1), удовлетворяющими условиям (2) и отличными от  $u(x, y)$  в каждой точке множеств

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \Omega \cap \{(x, y) : y - x > 0\}, \\ \Omega_3 &= \Omega \cap \{(x, y) : x + y > 1\}, \\ \Omega_4 &= \Omega \cap \{(x, y) : x + y < 0\} \end{aligned}$$

соответственно.

Следовательно,  $Q$  — искомая область. ▲

**Пример 4.** Решить задачу Коши

$$x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^4, \quad (1)$$

$$u|_{y=1} = 3x^4, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 0 < x < 2. \quad (2)$$

Найти наибольшую область, где решение определено однозначно.

△ Найдем характеристики уравнения (1). Из (III) находим

$$x^2(dy)^2 - 4y^2(dx)^2 = 0, \quad \text{или} \quad x^2(y')^2 - 4y^2 = 0.$$

Отсюда получаем, что:

$$a) x \, dy - 2y \, dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x^2 + \ln C \Rightarrow \frac{x^2}{y} = C_1;$$

$$b) x \, dy + 2y \, dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x^2 + C \Rightarrow x^2 y = C_2.$$

Получили  $\frac{x^2}{y} = C_1$  и  $x^2 y = C_2$  — два семейства характеристик уравнения (1). Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = \frac{x^2}{y}, \\ \eta = x^2 y \end{cases} \quad (3)$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$$\begin{aligned} & x \left| \begin{aligned} u_x &= u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = +u_\xi \cdot \frac{2x}{y} + u_\eta \cdot 2xy, \\ u_y &= u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \left( -\frac{x^2}{y^2} \right) + u_\eta \cdot x^2, \\ u_{xx} &= \frac{2}{y} u_\xi + \frac{2x}{y} \left( u_{\xi\xi} \cdot \frac{2x}{y} + u_{\xi\eta} \cdot 2xy \right) + \\ & \quad 2y \cdot u_\eta + 2xy \left( u_{\xi\eta} \cdot \frac{2x}{y} + u_{\eta\eta} \cdot 2xy \right), \\ u_{yy} &= \frac{2x}{y^3} u_\xi - \frac{x^2}{y^2} \left[ u_{\xi\xi} \left( -\frac{x^2}{y^2} \right) + u_{\xi\eta} \cdot x^2 \right] + \\ & \quad + x^2 \left[ u_{\xi\eta} \left( -\frac{x^2}{y^2} \right) + u_{\eta\eta} \cdot x^2 \right]. \end{aligned} \right. \\ & -4y \\ & x^2 \\ & -4y^2 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & u_{\xi\xi} \left( \frac{4x^4}{y^2} - \frac{4x^4}{y^2} \right) + u_{\xi\eta} (4x^4 + 4x^4 + 4x^4 + 4x^4) + \\ & + u_{\eta\eta} (4x^4 y^2 - 4x^4 y^2) + u_\xi \left( \frac{2x^2}{y} + 4 \frac{x^2}{y} + \frac{2x^2}{y} - 8 \frac{x^2}{y} \right) + \\ & + u_\eta (2x^2 y - 4x^2 y + 2x^2 y) = 16x^4, \\ & 16x^4 u_{\xi\eta} = 16x^4, \\ & u_{\xi\eta} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует, что  $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi\eta$ , где  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  есть любые функции класса  $C^2$ , является общим решением

уравнения (4), а функция

$$u(x, y) = f\left(\frac{x^2}{y}\right) + g(x^2 y) + x^4 \quad (5)$$

есть общее решение уравнения (1).

Подберем функции  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  так, чтобы выполнялись условия (2).

Из (5) и (2) получаем

$$u|_{y=1} = f(x^2) + g(x^2) + x^4 = 3x^4, \quad 1 < x < 2, \quad (6)$$

$$u_y|_{y=1} = f'(x^2) \cdot (-x^2) + g'(x^2) \cdot x^2 = 0, \quad 1 < x < 2 \quad (7)$$

(так как  $u_y(x, y) = f'\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) + g'(x^2 y) \cdot x^2 = 0$ ).

Сделав замену  $z = x^2$  в (6) и (7), получаем

$$f(z) + g(z) = 2z^2, \quad 1 < z < 4, \quad (8)$$

$$-z \cdot f'(z) + z \cdot g'(z) = 0, \quad 1 < z < 4. \quad (9)$$

Продифференцировав тождество (8) по  $z$  и сократив тождество (9) на  $z$ , получаем

$$f'(z) + g'(z) = 4z, \quad 1 < z < 4, \quad (10)$$

$$-f'(z) + g'(z) = 0, \quad 1 < z < 4. \quad (11)$$

Сложив (10) и (11), имеем

$$\begin{aligned} 2g'(z) &= 4z, \quad 1 < z < 4, \\ g'(z) &= 2z, \quad 1 < z < 4, \\ g(z) &= z^2 + C, \quad 1 < z < 4. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (8) и (12) получаем, что

$$f(z) = z^2 - C, \quad 1 < z < 4. \quad (13)$$

Из (5), (12) и (13) находим, что

$$u(x, y) = \frac{x^4}{y^2} + x^4 y^2 + x^4,$$

где

$$(x, y) \in Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 1 < z = \frac{x^2}{y} < 4 & (\text{из (13)}) \\ 1 < z = x^2 y < 4 & (\text{из (12)}) \end{cases} \right\}.$$

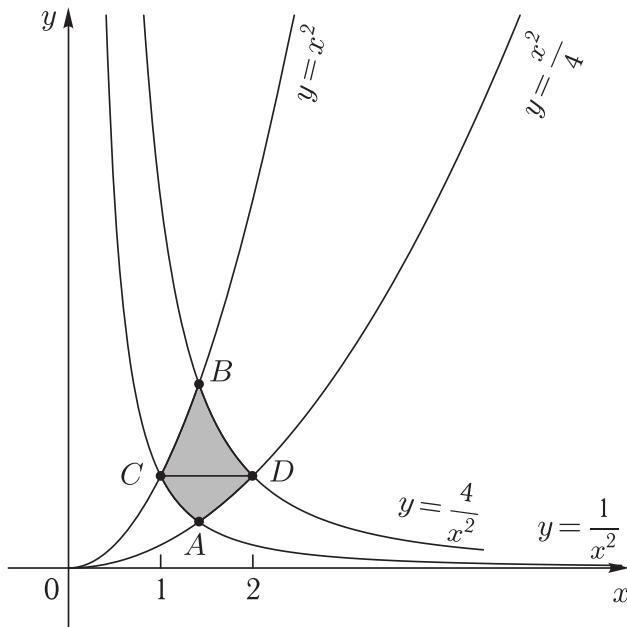


Рис. 1

Нарисуем область  $Q$ ,  $Q = \left\{ (x, y) : \begin{cases} \frac{x^2}{4} < y < x^2 \\ \frac{1}{x^2} < y < \frac{4}{x^2} \end{cases} \right\}$ .

$CD$  — это область задания начальных условий (2) задачи Коши (1), (2).

Найдем координаты точек  $A$  и  $B$ ; получим  $A(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, 2)$  (см. рис. 1).

Искомая наибольшая область  $Q$  — это криволинейный четырехугольник  $ABCD$  (доказать, что  $Q$  — действительно максимальная область).  $\blacktriangle$

**12.1.** Пусть на интервале  $(a, b)$  заданы функции  $\varphi \in C^2$ ,  $\varphi' \neq 0$ ,  $u_0 \in C^2$ ,  $u_1 \in C^1$ . Доказать, что задача Коши

$$u_{xy} = 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d, \\ u|_{y=\varphi(x)} = u_0(x), \quad u_y|_{y=\varphi(x)} = u_1(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = u_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi) \varphi'(\xi) d\xi,$$

где  $c = \inf \varphi(x)$ ,  $d = \sup \varphi(x)$ ,  $\varphi^{-1}(y)$  — функция, обратная к функции  $\varphi(x)$ .

**12.2.** Пусть на интервале  $(-1, 1)$  заданы функции  $u_0 \in C^2$ ,  $u_1 \in C^1$ . Доказать, что задача Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

имеет единственное решение в квадрате  $\{|x - y| < 1, |x + y| < 1\}$ . Показать, что этот квадрат является наибольшей областью единственности решения поставленной задачи.

**12.3.** Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \quad -\infty < x, \quad y < \infty;$$

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда  $u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ , а  $u_1(x) \equiv \text{const}$ . Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y(u_1(0) - f'(0)),$$

где  $f(y)$  — любая функция из класса  $C^2(\mathbb{R}^1)$ .

**12.4.** Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \quad |x| < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$u|_{y=x^2} = 0, \quad u_y|_{y=x^2} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда  $u_1(x) \in C(-1, 1)$ ,  $xu_1(x) \in C^1(-1, 1)$ ,  $u_1(x)$  — четная функция.

Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и

$$u(x, y) = 2 \int_x^{\sqrt{2}} \xi u_1(\xi) d\xi.$$

**12.5.** Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1;$$

$$u|_{y=x^2} = |x|^\alpha, \quad u_x|_{y=x^2} = 0$$

существует только тогда, когда  $\alpha = 0$  или  $\alpha \geqslant 6$ .

Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и  $u(x, y) = |y|^{\alpha/3}$ .

**12.6.** Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 6(x + y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R};$$

$$u|_{y=x} = 0, \quad u_x|_{y=x} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда  $u_1(x) - 3x^2 \equiv \text{const.}$

Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = x^3 - y^3 + f(x - y) - f(0) + (x - y)(u_1(0) - f'(0)),$$

где  $f(x)$  — любая функция из класса  $C^2(\mathbb{R}^1)$ .

В задачах 12.7–12.19 требуется найти наибольшую область, в которой поставленная задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

**12.7.**  $u_{xy} = 0; u|_{y=x^2} = 0, u_y|_{y=x^2} = \sqrt{|x|}, |x| < 1.$

**12.8.**  $u_{xy} + u_x = 0; u|_{y=x} = \sin x, u_x|_{y=x} = 1, |x| < \infty.$

**12.9.**  $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0; u|_{y=0} = x, u_y|_{y=0} = 0, |x| < \infty.$

**12.10.**  $u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4; u|_{x=0} = -y, u_x|_{x=0} = y - 1, |y| < \infty.$

**12.11.**  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2; u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = x + \cos x, |x| < \infty.$

**12.12.**  $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0; u|_{y=3x} = 0, u_y|_{y=3x} = e^{-5x^2}, x < 1.$

**12.13.** 1)  $u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0; u|_{y=0} = x, u_y|_{y=0} = 0, x > 0;$   
 2)  $xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3; u|_{y=x} = \sin x, u_x|_{y=x} = \cos x, x > 0.$

**12.14.**  $xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0; u|_{y=1/x} = x^3, u_x|_{y=1/x} = 2x^2, x > 0.$

**12.15.**  $xu_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} + 4x(1 + x)u_{yy} + 2u_y = 0; u|_{x=0} = y, u_x|_{x=0} = 2, |y| < \infty.$

**12.16.** 1)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0; u|_{x=1} = y, u_x|_{x=1} = y, y < 0;$   
 2)  $u_{xx} - 4x^2u_{yy} - \frac{1}{x}u_x = 0; u|_{x=1} = y^2 + 1, u_x|_{x=1} = 4, |y| < \infty.$

**12.17.**  $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0; u|_{y=1} = 0, u_y|_{y=1} = \sqrt[4]{x^7}, x > 0.$

**12.18.**  $yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x + \frac{2x}{1+2y}(u_x + 2xu_y) = 0; u|_{y=0} = x^2, u_y|_{y=0} = 1, x > 0.$

**12.19.**  $yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} - \frac{x+y}{x-y}(u_x - u_y) = 0; u|_{y=0} = x^2, u_y|_{y=0} = x, x > 0.$

Задачи 12.20–12.24 требуется решить методом Римана.

**12.20.**  $u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1; u|_{x+y=1} = x, u_x|_{x+y=1} = x.$

**12.21.**  $xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty; u|_{xy=1} = 1 - y, u_y|_{xy=1} = x - 1.$

**12.22.**  $u_{xy} + \frac{1}{x+y}(u_x + u_y) = 2, 0 < x < \infty, 0 < y < \infty; u|_{y=x} = x^2, u_x|_{y=x} = 1 + x.$

**12.23.**  $u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x - \frac{2}{y}u_y = 0, |x - y| < 1, |x + y - 2| < 1; u|_{y=1} = u_0(x), u_y|_{y=1} = u_1(x), u_0 \in C^2(0, 2), u_1 \in C^1(0, 2).$

**12.24.**  $] 2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; u|_{y=x} = x^2 \cos x, u_y|_{y=x} = x^2 + 1.$

**12.25.** Решить задачи.

1)  $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{y=0} = 1 + \frac{x}{3}, u_y|_{y=0} = \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}^1.$

2)  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{y=0} = 1 - x, u_y|_{y=0} = \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}^1.$

3)  $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} + u_x + 3u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{x=0} = 2 - y, u_x|_{x=0} = 2, y \in \mathbb{R}^1.$

4)  $2u_{xx} - 5u_{xy} - 3u_{yy} + 14u_x + 7u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{x=0} = 3y, u_x|_{x=0} = 2 - 7y, y \in \mathbb{R}^1.$

5)  $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + 3u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{x=0} = 1 - 3y, u_x|_{x=0} = 0, y \in \mathbb{R}^1.$

6)  $2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{y=0} = 1 + x, u_y|_{y=0} = 0, x \in \mathbb{R}^1.$

7)  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{x=0} = 1 - 4y, u_x|_{x=0} = 0, y \in \mathbb{R}^1.$

8)  $6u_{xx} - 5u_{xy} + u_{yy} - 2u_y + 4u_x = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{y=0} = 1 + x, u_y|_{y=0} = 3, x \in \mathbb{R}^1.$

9)  $2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

$u|_{y=0} = 1 + x, u_y|_{y=0} = 0, x \in \mathbb{R}^1.$

- 10)  $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + 3u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$   
 $u|_{x=0} = 1 - 3y, u_x|_{x=0} = 0, y \in \mathbb{R}^1.$
- 11)  $4u_{xx} - 4u_{xy} - 3u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$   
 $u|_{x=0} = 2y + 1, u_x|_{x=0} = -3, y \in \mathbb{R}^1.$
- 12)  $2u_{xx} - 5u_{xy} + 2u_{yy} - 3u_x + 6u_y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$   
 $u|_{y=0} = 2x - 1, u_y|_{y=0} = 4, x \in \mathbb{R}^1.$
- 13)  $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} + \frac{5}{2x+y+1}(2u_y - u_x) = 0, 2x + y + 1 > 0;$   
 $u|_{y=0} = 5x, u_y|_{y=0} = 0, x \geq 0.$
- 14)  $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} + \frac{4}{x+y+1}(u_x - u_y) = 0, x + y + 1 > 0;$   
 $u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = -\frac{2}{3}(x+1)^2, x \geq 0.$
- 15)  $3u_{xx} - 7u_{xy} - 6u_{yy} + \frac{11}{3x+y+1}(u_x - 3u_y) = 0, 3x + y + 1 > 0;$   
 $u|_{y=0} = \frac{11}{3} \ln(1+3x), u_y|_{y=0} = 0, x \geq 0.$
- 16)  $6u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} + \frac{2u_x + u_y}{x-2y} = 0, x - 2y > 0;$   
 $u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = x, x \geq 1.$

**12.26.** Решить задачи.

- 1)  $u_{xx} - yu_{yy} - \frac{1}{2}u_y = 0, y > 0; u|_{x=0} = y, u_x|_{x=0} = 0, y > 0.$
- 2)  $x^2u_{xx} - u_{yy} - u_y = 0, x > 0; u|_{x=1} = y^2, u_x|_{x=1} = 0, x > 0.$
- 3)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + xu_x - yu_y = -4y^4, x > 0; u|_{x=1} = 0, u_x|_{x=1} = y.$
- 4)  $4x^2u_{xx} + 4xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x = 0, x > 0, y > 1;$   
 $u|_{y=1} = 0, u_y|_{y=1} = x, x > 0.$
- 5)  $2xu_{xx} - (2x+y)u_{xy} + yu_{yy} + 2\frac{x+y}{y-2x}(u_x - u_y) = 0, x > 0,$   
 $y > 0; u|_{y=1} = 1, u_y|_{y=1} = 1 - 2x, x > 0.$
- 6)  $yu_{xx} + (y-x)u_{xy} - xu_{yy} + \frac{x-y}{x+y}(u_x + u_y) = 0, x > 0,$   
 $y > 0; u|_{y=0} = 1, u_y|_{y=0} = x, x > 0.$
- 7)  $xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} + \frac{y-x}{y+x}(u_x + u_y) = 0, x > 0,$   
 $y > 0; u|_{y=1} = x^2, u_y|_{y=1} = 2, x > 0.$
- 8)  $u_{xx} + (x+1)u_{xy} + xu_{yy} + \frac{1}{1-x}(u_x + u_y) = 0, x < 1;$   
 $u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=0} = 2.$

- 9)  $2x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x + yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = x, u_y|_{y=1} = 0, x > 0.$
- 10)  $x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2u_{yy} + xu_x + 2yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{x=1} = 0, u_x|_{x=1} = y, y > 0.$
- 11)  $2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x; \quad u|_{y=x} = x^5 \cos x, u_y|_{y=x} = x^2 + 1.$
- 12)  $y^2u_{xx} + (x^2 + y^2)u_{xy} + x^2u_{yy} + \frac{2xy}{x+y}(u_x + u_y) = 0,$   
 $y > x > 0; \quad u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = -3x^2, x > 0.$
- 13)  $u_{xx} + (3x^2 - 1)u_{xy} - 3x^2u_{yy} - \frac{6x}{1+3x^2}(u_x - u_y) = 0;$   
 $u|_{x=0} = 2y, u_x|_{x=0} = 3.$
- 14)  $2x^2u_{xx} + xyu_{xy} - y^2u_{yy} + 2xu_x - yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = x + 2, u_y|_{y=1} = 2x, x > 0.$

**12.27.** Решить задачи.

- 1)  $u_{xx} - 4y^2u_{yy} + 8u_x + 12yu_y = 0, y > 0;$   
 $u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=0} = 4y^2, y > 0.$
- 2)  $e^{2y}u_{xx} - u_{yy} - 4e^{2y}u_x + (1 - 4e^y)u_y = 0;$   
 $u|_{x=0} = 1 - e^y, u_x|_{x=0} = 5.$
- 3)  $x^2u_{xx} - u_{yy} - xu_x - 2u_y = 0, x > 0;$   
 $u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 2x, x > 0.$
- 4)  $u_{xx} - 4x^2u_{yy} + \left(4x - \frac{1}{x}\right)u_x + 8x^2u_y = 0, x > 0;$   
 $u|_{y=0} = 1 - x^2, u_y|_{y=0} = 3, x > 0.$
- 5)  $u_{xx} + (2x - 1)u_{xy} - 2xu_{yy} + \left(2x + 1 + \frac{2}{2x+1}\right)(u_y - u_x) =$   
 $= 0, x > -\frac{1}{2}; \quad u|_{x=0} = 1 + y, u_x|_{x=0} = 2, y \in \mathbb{R}^1.$
- 6)  $u_{xx} - (x + 2)u_{xy} + 2xu_{yy} + \left(x - 2 + \frac{1}{x-2}\right)(2u_y - u_x) = 0,$   
 $x < 2; \quad u|_{x=0} = 1 + y, u_x|_{x=0} = 2, y \in \mathbb{R}^1.$
- 7)  $u_{xx} - 2 \operatorname{ch} x \cdot u_{xy} + \operatorname{sh}^2 x \cdot u_{yy} + u_x + (1 + e^x)u_y = 0;$   
 $u|_{x=0} = 1 + y, u_x|_{x=0} = -1.$
- 8)  $u_{xx} + \operatorname{ch} x \cdot u_{xy} - 2(\operatorname{ch} x + 2)u_{yy} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 4}(2u_y - u_x) = 0;$   
 $u|_{x=0} = -y, u_x|_{x=0} = \frac{1}{2}.$
- 9)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + 2u_x + (2 - \cos x - 2 \sin x)u_y = 0; \quad u|_{x=0} = 2 - y, u_x|_{x=0} = -1.$
- 10)  $u_{xx} + \cos x \cdot u_{xy} + (\cos x - 1)u_{yy} - \frac{\sin x}{2 - \cos x}(u_x + u_y) = 0;$   
 $u|_{x=0} = 3y, u_x|_{x=0} = -2.$

- 11)  $x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = 3x^2, u_y|_{y=1} = -x^2, x > 0.$
- 12)  $yu_{xx} + 2(2x+y)u_{xy} + 8xu_{yy} + 2u_x + 4u_y = 0, y > 2|x|;$   
 $u|_{x=0} = \frac{3y^2}{4}, u_x|_{x=0} = -2y.$
- 13)  $8yu_{xx} + 2(x-2y)u_{xy} - xu_{yy} - 4u_x + 2u_y = 0, x > 2|y|;$   
 $u|_{y=0} = \frac{x^2}{2}, u_y|_{y=0} = x.$
- 14)  $4x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 4xu_x - yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{x=1} = 4y^2, u_x|_{x=1} = 2y^2, y > 0.$

**12.28.** Решить задачи.

- 1)  $8xu_{xx} - 6\sqrt{x}u_{xy} + u_{yy} + 4u_x = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{y=0} = \frac{x}{2}, u_y|_{y=0} = 0, x > 0.$
- 2)  $6x^2 u_{xx} + 7xu_{xy} - 3u_{yy} + 6xu_x = 0, x > 1;$   
 $u|_{x=1} = 8y, u_x|_{x=1} = -1.$
- 3)  $2xu_{xx} + 3x^2 u_{xy} - 2x^3 u_{yy} - 2u_x = 0, y > 0;$   
 $u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 10x^2.$
- 4)  $u_{xx} - 3x^2 u_{xy} + 2x^4 u_{yy} - \frac{2}{x}u_x = 0, x > 1;$   
 $u|_{x=1} = 7y + 2, u_x|_{x=1} = 6.$
- 5)  $u_{xx} + (x-1)u_{xy} - xu_{yy} - \frac{1}{x+1}(u_x - u_y) = 0, -x < y < \frac{x^2}{2},$   
 $x > 0; u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 2 + 2x, x > 0.$
- 6)  $yu_{xx} + (y+1)u_{xy} + u_{yy} + \frac{1}{1-y}(u_x + u_y) = 0, y < x < \frac{y^2}{2},$   
 $y < 0; u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=0} = 2 - 2y, y < 0.$
- 7)  $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, x > |y|;$   
 $u|_{y=0} = 2x^2, u_y|_{y=0} = 2x.$
- 8)  $yu_{xx} + (x+y)u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u_y = 0, y > |x|;$   
 $u|_{x=0} = 3y^2, u_x|_{x=0} = -4y.$
- 9)  $u_{xx} + (x-1)u_{xy} - xu_{yy} - \frac{u_x - u_y}{x+1} = 0, x > -1;$   
 $u|_{x=0} = 2y + y^2, u_x|_{x=0} = 2y.$
- 10)  $yu_{xx} + (1+y)u_{xy} + u_{yy} + \frac{u_x + u_y}{1-y} = 0, y < 1;$   
 $u|_{y=0} = x^2 + 2x, u_y|_{y=0} = -2x.$
- 11)  $u_{xx} - (1-2x)u_{xy} - 2xu_{yy} - 2\frac{u_x - u_y}{2x+1} = 0, x > -\frac{1}{2};$   
 $u|_{x=0} = y + y^2, u_x|_{x=0} = 2y.$

12)  $y^2 u_{xx} + (x^2 + y^2) u_{xy} + x^2 u_{yy} + \frac{2xy}{x+y} (u_x + u_y) = 0,$   
 $y > x > 0; u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = -3x^2, x > 0.$

**12.29.** Решить задачи.

- 1)  $2x^2 u_{xx} - 3xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2xu_x + yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = x^3 - x, u_y|_{y=1} = 3x^3 - 2x, x > 0.$
- 2)  $u_{yy} + x^2 u_{xy} - (x^2 + 1) u_{xx} + \frac{2x}{x^2 + 2} (u_y - u_x) = 0;$   
 $u|_{x=0} = y^2 + 1, u_x|_{x=0} = 2y + 4.$
- 3)  $xu_{xx} + x^3 u_{xy} - 2x^5 u_{yy} - 2u_x = 0, x > 0;$   
 $u|_{x=1} = 3y^2 + y + 1, u_x|_{x=1} = 6y + 4.$
- 4)  $y^4 u_{yy} + y^2 u_{xy} - 2u_{xx} + 2y^3 u_y = 0;$   
 $u|_{y=1} = x^2 + 5, u_y|_{y=1} = 2x - 6.$
- 5)  $u_{xx} + (x - 1) u_{xy} - xu_{yy} - \frac{u_x - u_y}{x + 1} = 0, x > -1;$   
 $u|_{x=0} = y^2 - \cos y, u_x|_{x=0} = \sin y.$
- 6)  $yu_{xx} + (1 + y) u_{xy} + u_{yy} + \frac{u_x + u_y}{1 - y} = 0, y < 1;$   
 $u|_{y=0} = x^3 - \operatorname{ch} x, u_y|_{y=0} = \operatorname{sh} x.$
- 7)  $3y^2 u_{xy} + u_{yy} + 9y^4 u_x + \left(3y^2 - \frac{2}{y}\right) u_y = 0, y < 0;$   
 $u|_{y=-1} = x + 1, u_y|_{y=-1} = 3(2 - x).$
- 8)  $2xu_{xx} + 3x^3 u_{xy} + (6x^3 - 4) u_x + 9x^5 u_y = 0, x > 0;$   
 $u|_{x=1} = 2y - 1, u_x|_{x=1} = 6(1 - y).$
- 9)  $u_{xx} - 6x^2 u_{xy} - \left(6x^2 + \frac{2}{x}\right) u_x + 36x^4 u_y = 0, x > 0;$   
 $u|_{x=1} = y - 2, u_x|_{x=1} = 6(y + 2).$
- 10)  $y^3 u_{xy} - yu_{yy} - 3y^5 u_x + (2 + 3y^3) u_y = 0, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = 1 + 3x, u_y|_{y=1} = 3(4 + 3x).$
- 11)  $5xy u_{xy} - 2x^2 u_{xx} - 2y^2 u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 9x^3 y^3, x > 0,$   
 $y > 0; u|_{y=1} = x^3 + 3x^2, u_y|_{y=1} = 3x^3, x > 0.$
- 12)  $x^2 u_{xx} - xy u_{xy} - 2y^2 u_{yy} + xu_x - 2yu_y = 9xy^2, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{x=1} = 3e^y, u_x|_{x=1} = -y^2, y > 0.$
- 13)  $2x^2 u_{xx} + xy u_{xy} - y^2 u_{yy} + 2xu_x - yu_y = 9y^3, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = \ln \frac{1}{x^3}, u_y|_{y=1} = \frac{3}{x}, x > 0.$
- 14)  $y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} - xu_x + yu_y = 4y^2, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{x=1} = y^2, u_x|_{x=1} = ye^y, y > 0.$

**12.30.** Решить задачи.

- 1)  $y u_{xx} + (x+y) u_{xy} + x u_{yy} + u_x + u_y = 0, y > |x|;$   
 $u|_{x=1} = 1, u_x|_{x=1} = 1 - \frac{1}{y}, y > 1.$
- 2)  $x u_{xx} + 2(x+1) u_{xy} + (x+2) u_{yy} + u_x + u_y = 0, x > 0,$   
 $y < 0; u|_{y=0} = -x, u_y|_{y=0} = 1 - \frac{2}{x}, x > 0.$
- 3)  $u_{xx} - 2(x+1) u_{xy} + 4x u_{yy} + \frac{2u_y - u_x}{x-1} = 0, x > 1, y > 0;$   
 $u|_{y=1} = -1, u_y|_{y=1} = \frac{1}{x} - 1, x > 1.$
- 4)  $x u_{xx} - (2x+1) u_{xy} + (x+1) u_{yy} + u_x - u_y = 0, x > 0,$   
 $y > 1; u|_{y=1} = x+1, u_y|_{y=1} = 1 - \frac{1}{x}, x > 0.$
- 5)  $2x^2 u_{xx} - 8y^2 u_{yy} + x u_x - 6yu_y = 0, x > 1, y > 1;$   
 $u|_{x=y} = y^3 + y^{1/4}, u_x|_{x=y} = 2y^2, y > 1.$
- 6)  $8x^2 u_{xx} - 2y^2 u_{yy} + 6xu_x - 3yu_y = 0, x > 1, y > 1;$   
 $u|_{x=y} = y + \frac{1}{\sqrt{y}}, u_x|_{x=y} = -1, y > 1.$
- 7)  $9x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 15xu_x + yu_y = 0, x > 1, y > 1;$   
 $u|_{x=y} = y^2 + y^{2/3}, u_x|_{x=y} = -\frac{1}{3}y^{-1/3}, y > 1.$
- 8)  $x^2 u_{xx} - 9y^2 u_{yy} + 3xu_x - 3yu_y = 0, x > 1, y > 1;$   
 $u|_{x=y} = y^{2/3}, u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}, y > 1.$
- 9)  $u_{xx} - y^2 u_{yy} + 2u_x + yu_y = 0, y > 0;$   
 $u|_{x=0} = y^2 + y^4, u_x|_{x=0} = 2y^4 - 2y^2, y > 0.$
- 10)  $(x^2 - 1) u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + 2xu_x = 4y^2, x > 0;$   
 $u|_{y=1} = 2(1+x), u_y|_{y=1} = 4(1+x), x > 0.$
- 11)  $3x^2 u_{xx} - 3y^2 u_{yy} + 5xu_x - yu_y = 0, x > 0, y > 0;$   
 $u|_{x=1} = 1 + y^3, u_x|_{x=1} = \frac{7}{3}y^3, y > 0.$
- 12)  $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + (y^2 - 4) u_{yy} + 2yu_y = -32x^2, x > 0;$   
 $u|_{y=1} = -16x^2 + 8x - 1, u_y|_{y=1} = 8x, x > 0.$
- 13)  $x^2 u_{xx} + x(x+y) u_{xy} + xy u_{yy} + (3x - 2y) u_x + \left(x + 2y - \frac{2y^2}{x}\right) u_y =$   
 $= 0, x < 0; u|_{y=1} = \frac{1}{x} + e^{-2/x}, u_y|_{y=1} = \frac{1}{x} \left(1 - 2e^{-2/x}\right), x < 0.$
- 14)  $2u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} - 14u_x + 7u_y = 49 \frac{e^{-x-2y}}{(y-3x)^2}, y > 3x + 1;$   
 $u|_{y=0} = \left(1 + \frac{1}{3x}\right) \operatorname{ch} x, u_y|_{y=0} = 2 \left(1 + \frac{1}{3x}\right) \operatorname{sh} x + \frac{1}{9x^2} \operatorname{ch} x.$

- 15)  $x^2 u_{xx} - x(x-y)u_{xy} - xyu_{yy} - \left(x + y + \frac{y^2}{x}\right)u_y - yu_x = 0,$   
 $x > 0; u|_{y=1} = 1 + (x+1)e^{-1/x}, u_y|_{y=1} = -\frac{1}{x}e^{-1/x}, x > 0.$
- 16)  $4u_{xx} - 6u_{xy} - 4u_{yy} + 10u_x + 5u_y = \frac{25e^{-y+\frac{x}{2}}}{(y+2x)^2}, y+2x > 0;$   
 $u|_{x=0} = -\frac{\operatorname{ch} y}{y}, u_x|_{x=0} = \frac{\operatorname{sh} y}{2y} + \frac{2\operatorname{ch} y}{y^2}.$

**2. Задача Коши для волнового уравнения.** Задача Коши для волнового уравнения есть задача разыскания в  $C^2(x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \cap C^1(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) = C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$  функции  $u(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (\text{IV})$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{V})$$

Решение задачи Коши единственno, и если выполняются условия

$$\begin{aligned} f &\in C^1(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad n = 1, \\ f &\in C^2(t \geq 0), \quad u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n = 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

то решение существует и выражается:

1) при  $n = 1$  формулой Даламбера

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau; \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

2) при  $n = 2$  формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi-x| < at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}}; \quad (\text{VIII})$$

3) при  $n = 3$  формулой Кирхгофа

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \int_{|\xi-x| < at} \frac{1}{|\xi - x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a}\right) d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi^2 a^2 t} \int_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS \right). \end{aligned} \quad (\text{IX})$$

При решении задачи Коши для волнового уравнения полезно иметь в виду следующее. Пусть  $u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  и ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k u_0(x), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k u_1(x)$$

и все ряды, полученные из них почленным дифференцированием до второго порядка включительно по переменным  $x_1, \dots, x_n, t$ , сходятся равномерно на множестве  $\{|x| \leq R, 0 \leq t \leq T\}$  при любых  $R > 0$  и  $T > 0$ . Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k u_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k u_1(x) \quad (\text{X})$$

является решением задачи (IV), (V) при  $f \equiv 0$ .

Рекомендуется также учесть, что если функции  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  в (IV) и (V) зависят только от  $|x| = r$  и  $t$ , т. е.  $f = f(r, t)$ ,  $u_0 = u_0(r)$ ,  $u_1 = u_1(r)$ , то решение задачи Коши (IV), (V) также зависит только от  $r$  и  $t$ , т. е.  $u = u(r, t)$ . Так как  $\Delta u(r, t) = (r \times u)_{rr}$  при  $n = 3$ , то в этом случае задача Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta u &= f, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

эквивалентно заменяется одномерной смешанной задачей

$$\begin{aligned} v_{tt} - a^2 v_{rr} &= f(r, t), \quad r > 0, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} &= r u_0(r), \quad v_t|_{t=0} = r u_1(r), \quad r \geq 0, \\ v|_{r=0} &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где  $v(r, t) = r \cdot u(r, t)$ .

**Пример 5.** Решить задачу Коши

$$u_{tt} = \Delta u + (x^2 + y^2) \sin t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin(2x - y + 2z)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} - y^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3)$$

Δ Уравнение (1) является неоднородным, поэтому ищем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Можем искать его, например, в виде

$$g(x, y, z, t) = (Ax^2 + By^2 + C) \sin t.$$

Подставляя функцию  $g(x, y, z, t)$  в уравнение (1), получаем  $A = -1$ ,  $B = -1$ ,  $C = -4$ . Следовательно, функция

$$g(x, y, z, t) = -(x^2 + y^2 + 4) \sin t$$

есть частное решение уравнения (1).

Введем новую искомую функцию  $v$  такую, что  $v = u - g$ , тогда

$$v = u + (x^2 + y^2 + 4) \sin t, \quad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для новой функции  $v$ :

$$v_{tt} = \Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin(2x - y + 2z)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

$$v_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} + x^2 + 4, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (7)$$

Пусть функция  $v_1$  есть решение задачи

$$v_{tt} = \Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

$$v|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin(2x - y + 2z)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (9)$$

$$v_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (10)$$

функция  $v_2$  — решение задачи

$$v_{tt} = \Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (11)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (12)$$

$$v_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (13)$$

а функция  $v_3$  — решение задачи

$$v_{tt} = \Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (14)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (15)$$

$$v_t|_{t=0} = x^2 + 4, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (16)$$

Тогда решением задачи (5), (6), (7) является функция  $v = v_1 + v_2 + v_3$ .

Будем искать функцию  $v_1$  в виде  $v_1(x, y, z, t) = V(\xi, t)$ , где  $\xi = 2x - y + 2z$ . Тогда получим задачу для функции  $V(\xi, t)$ :

$$V_{tt} = 9V_{\xi\xi}, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad (17)$$

$$V|_{t=0} = \xi \sin \xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad (18)$$

$$V_t|_{t=0} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^1. \quad (19)$$

Решение задачи (17), (18), (19) найдем с помощью формулы Даламбера (VII). Получим

$$V(\xi, t) = \frac{(\xi + 3t) \sin(\xi + 3t)^2 + (\xi - 3t) \sin(\xi - 3t)^2}{2}.$$

Следовательно, функция

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left[ & (2x - y + 2z + 3t) \sin(2x - y + 2z + 3t)^2 + \right. \\ & \left. + (2x - y + 2z - 3t) \sin(2x - y + 2z - 3t)^2 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

есть решение задачи (8), (9), (10).

Решение задачи (11), (12), (13) будем искать в виде

$$v_2(x, y, z, t) = W(r, t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Тогда для функции  $W(r, t)$  уравнение (11) примет вид

$$(rW)''_{tt} = (rW)''_{rr}, \quad t > 0, \quad r > 0.$$

Введя новую искомую функцию

$$w(r, t) = rW(r, t), \quad (21)$$

получим следующую смешанную задачу для «полубесконечной струны»<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= w_{rr}, \quad t > 0, \quad r > 0, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad w_t|_{t=0} = r^6, \quad r \geq 0, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Смешанная краевая задача для «полубесконечной струны» изложена в § 21 главы VI данной книги.

решением которой, как нетрудно показать (см. § 21 главы VI данной книги), является функция

$$w(r, t) = \frac{(r+t)^7}{14} + \begin{cases} -\frac{(r-t)^7}{14}, & r-t \geq 0, \\ \frac{(r-t)^7}{14}, & r-t \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, в силу (21) функция

$$v_2(x, y, z, t) = \frac{W(r, t)}{r} = \frac{(r+t)^7}{14r} + \begin{cases} -\frac{(r-t)^7}{14r}, & r-t \geq 0, \\ \frac{(r-t)^7}{14r}, & r-t \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

есть решение задачи (11), (12), (13).

Решение задачи (14), (15), (16) находим с помощью формулы (X). Получим функцию

$$v_3(x, y, z, t) = t(x^2 + 4) + \frac{t^3}{3!} \Delta(x^2 + 4) = t(x^2 + 4) + \frac{t^3}{3}, \quad (23)$$

которая есть решение задачи (14), (15), (16).

Следовательно, в силу (4) функция

$$u = -(x^2 + y^2 + 4) \sin t + v_1 + v_2 + v_3,$$

где функции  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  определены формулами (20), (22), (23) соответственно, есть решение задачи (1), (2), (3).  $\blacktriangleleft$

**12.31.** Пусть функция  $u(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

Доказать, что для любого  $T > 0$  существует решение задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}; \quad t < T, \quad x \in \mathbb{R}^1; \quad v|_{t=T} = u|_{t=T}, \quad v_t|_{t=T} = u_t|_{t=T}.$$

Показать, что  $u(x, t) \equiv v(x, t)$  при  $0 \leq t \leq T$ .

**12.32.** Доказать, что если существует решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

то  $u \in C^2(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$ .

**12.33.** Пусть функция  $u(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Доказать, что функция  $v(x, t) = \int_0^t u(x, \tau) d\tau$  является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v; \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

**12.34.** Пусть функция  $u(x, t, t_0)$  при каждом фиксированном  $t_0 \geq 0$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=t_0} = 0, \quad u_t|_{t=t_0} = f(x, t_0).$$

Доказать, что функция  $v(x, t, t_0) = \int_{t_0}^t u(x, t, \tau) d\tau$  является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x, t); \quad v|_{t=t_0} = 0, \quad v_t|_{t=t_0} = 0.$$

**12.35.** Доказать, что если функции  $f(x)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  гармонические в  $\mathbb{R}^n$ , а  $g(t) \in C^1(t \geq 0)$ , то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + g(t)f(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

выражается формулой

$$u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x) \int_0^t (t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

**12.36.** Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если  $\Delta^N f = 0$ ,  $\Delta^N u_0 = 0$ ,  $\Delta^N u_1 = 0$ .

**12.37.** Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u; \quad x \in \mathbb{R}^2; \\ u|_{t=0} &= f(x_1) + g(x_2), \quad u_t|_{t=0} = F(x_1) + G(x_2) \end{aligned}$$

достаточно, чтобы функции  $f(x_1)$  и  $g(x_2)$  принадлежали классу  $C^2(\mathbb{R}^1)$ , а функции  $F(x_1)$  и  $G(x_2)$  — классу  $C^1(\mathbb{R}^1)$ . Найти это решение.

**12.38.** Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u; \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} &= f(x_1)g(x_2, x_3), \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

достаточно, чтобы функция  $g(x_2, x_3)$  была гармонической и  $f \in C^2(\mathbb{R}^1)$ . Найти это решение.

**12.39.** Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u; \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} &= \alpha(|x|), \quad u_t|_{t=0} = \varphi(|x|) \end{aligned}$$

достаточно, чтобы  $\alpha(r) \in C^2(r \geq 0)$ ,  $\beta(r) \in C^2(r \geq 0)$  и  $\alpha'(0) = 0$ . Найти это решение.

**12.40.** Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u; \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} &= \theta(1 - |x|)|x|^\alpha(1 - |x|)^\beta, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha \geq 2$  и  $\beta \geq 3$ . Найти это решение.

Результат этой задачи сравнить с достаточными условиями (VI) в случаях  $2 < \alpha < 3$ ,  $\beta \geq 3$  и  $\alpha = 2$ ,  $2 < \beta < 3$ .

**12.41.** Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = \theta(1 - |x|)(x^2 - 1)^3, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Построить графики функций  $u(x, 0)$ ,  $u\left(x, \frac{1}{2}\right)$ ,  $u(x, 1)$ ,  $u(x, 2)$ .

Решение задач 12.42–12.44 можно находить по формулам (VII)–(IX), но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 12.33–12.38.

**12.42.** Решить задачи ( $n = 1$ ):

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + 6$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 4x$ ;
- 2)  $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 3)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$ ;  $u|_{t=0} = \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + e^x$ ;  $u|_{t=0} = \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = x + \cos x$ ;
- 5)  $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$ ;  $u|_{t=0} = 1$ ,  $u_t|_{t=0} = 1$ ;
- 6)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 7)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin \omega t$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**12.43.** Решить задачи ( $n = 2$ ):

- 1)  $u_{tt} = \Delta u + 2$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = y$ ;
- 2)  $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 - y^2$ ,  $u_t|_{t=0} = xy$ ;
- 3)  $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2$ ;  
 $u|_{t=0} = e^x \cos y$ ,  $u_t|_{t=0} = e^y \sin x$ ;

- 4)  $u_{tt} = \Delta u + t \sin y;$   
 $u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = \sin y;$
- 5)  $u_{tt} = 2\Delta u;$   
 $u|_{t=0} = 2x^2 - y^2, u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2;$
- 6)  $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3;$   
 $u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = y^2;$
- 7)  $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y};$   
 $u|_{t=0} = e^{3x+4y}, u_t|_{t=0} = e^{3x+4y};$
- 8)  $u_{tt} = a^2 \Delta u;$   
 $u|_{t=0} = \cos(bx + cy), u_t|_{t=0} = \sin(bx + cy);$
- 9)  $u_{tt} = a^2 \Delta u;$   
 $u|_{t=0} = r^4, u_t|_{t=0} = r^4;$
- 10)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + r^2 e^t;$   
 $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0.$

**12.44.** Решить задачи ( $n = 3$ ):

- 1)  $u_{tt} = \Delta u + 2xyz;$   
 $u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, u_t|_{t=0} = 1;$
- 2)  $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2;$   
 $u|_{t=0} = y^2, u_t|_{t=0} = x^2;$
- 3)  $u_{tt} = 3\Delta u + 6r^2;$   
 $u|_{t=0} = x^2 y^2 z^2, u_t|_{t=0} = xyz;$
- 4)  $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos x;$   
 $u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z \sqrt{2}, u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x;$
- 5)  $u_{tt} = a^2 \Delta u;$   
 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = r^4;$
- 6)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + r^2 e^t;$   
 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0;$
- 7)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \cos x \sin y e^z;$   
 $u|_{t=0} = x^2 e^{y+z}, u_t|_{t=0} = \sin x e^{y+z};$
- 8)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + xe^t \cos(3y + 4z);$   
 $u|_{t=0} = xy \cos z, u_t|_{t=0} = yze^x;$
- 9)  $u_{tt} = a^2 \Delta u;$   
 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos r.$

**12.45.** Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} - 9\Delta u = xyz\sqrt{1+t}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = ze^{2x}, u_t|_{t=0} = y, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$
- 2)  $u_{tt} - \Delta u = \sin(x + 2y) \cos t, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = \operatorname{ch} 3y, u_t|_{t=0} = xe^z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

- 3)  $u_{tt} - 3\Delta u = 2(x^3y - xy^3)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = yze^x$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 4)  $u_{tt} - \Delta u = 2 \sin(x + y + z) \sin t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = y^3 + z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 5)  $u_{tt} - 3\Delta u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = zx^3 + \cos(x - y)$ ,  $u_t|_{t=0} = \sqrt{x+y+z}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 6)  $u_{tt} - 9\Delta u = 27t \operatorname{sh} z$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2} + \operatorname{sh} z$ ,  $u_t|_{t=0} = xy^2z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 7)  $u_{tt} - \Delta u = t(x - y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 $u|_{t=0} = y^4$ ,  $u_t|_{t=0} = y^2 - 2x^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- 8)  $u_{tt} - \Delta u = e^t(x + 2y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 $u|_{t=0} = 2y + x + x^4$ ,  $u_t|_{t=0} = x + x^2 + y^3$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- 9)  $u_{tt} - \Delta u = (x^2 + y^2) \sin t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} - y^2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 10)  $u_{tt} - \Delta u = (3 \sin 2y - z) \cos t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} + \sin y$ ,  $u_t|_{t=0} = 1$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 11)  $5u_{tt} - \Delta u = 10e^{-t} \sin(2z - y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 - x$ ,  $u_t|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 12)  $u_{tt} - 2\Delta u = -4e^{-2t} \cos(y - x)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = z^3$ ,  $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 13)  $u_{tt} - \Delta u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x(y^2 + z^2)$ ,  $u_t|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin((2x - y + 2z)^2)$ ,  
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 14)  $u_{tt} - \Delta u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = xyz^2$ ,  $u_t|_{t=0} = (x + 2y + 2z)e^{-(x+2y+2z)^2}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**12.46.** Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} - \Delta u = (x^2 - z^2 + x - 2y + 3z)e^t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \sqrt[3]{x - 2y + 3z}$ ,  $u_t|_{t=0} = x^2yz$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 2)  $u_{tt} - \frac{1}{3}\Delta u = 5 \cos(x + y + 5z) \sin 2t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{(x+y+z)^3}$ ,  $u_t|_{t=0} = 8 \cos(x + y + 5z) + xyz^3$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 3)  $u_{tt} - 4\Delta u = e^{-t} \cos(x + 2y + 2z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 + 2z^2$ ,  $u_t|_{t=0} = y^2 + z^2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;

- 4)  $u_{tt} - 9\Delta u = x^4 + y^4 + z^4$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \cos(x+y-z)$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin(x+y+z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 5)  $u_{tt} - \Delta u = -81(t+1)^2 \operatorname{sh}(2x-2y+z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (2x+y-z) \cos y$ ,  $u_t|_{t=0} = x^2 - y^2 + z^2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 6)  $u_{tt} - \Delta u = -18(t+1)t \operatorname{ch}(x-2y+z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 - 3y^2 - 4z^2$ ,  $u_t|_{t=0} = (x+y+z) \cos x$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 7)  $u_{tt} - \Delta u = \cos(x-2y-2z+3t)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 8)  $u_{tt} - \Delta u = \operatorname{sh}(6x-2y-3z+7t)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = xy^2 + yz^2 + zx^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 9)  $u_{tt} - \Delta u = \left( x^2 - \frac{5}{8}y^2 - \frac{3}{8}z^2 \right) \operatorname{ch} t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)(\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3$ ,  $u_t|_{t=0} = xe^z$ ,  
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 10)  $u_{tt} - \Delta u = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} \right) \cos t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)(\sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3$ ,  $u_t|_{t=0} = ze^y$ ,  
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 11)  $u_{tt} - 2\Delta u = \sin(t+y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 $u|_{t=0} = (1+e^{-3x}) \sin y$ ,  $u_t|_{t=0} = \cos y + x(x^2 + y^2)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- 12)  $u_{tt} - \Delta u = 3 \cos(2t-x)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 $u|_{t=0} = xy^3 - \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = 2 \sin x(e^{2y} - 1)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- 13)  $u_{tt} - 4\Delta u = (2t+1) \sin(2x-y+z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \sqrt{2+x^2+y^2+z^2}$ ,  $u_t|_{t=0} = (x+2y-z)^3$ ,  
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 14)  $u_{tt} - 9\Delta u = (t-3) \cos(x+y-2z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \sqrt{3+x^2+y^2+z^2}$ ,  $u_t|_{t=0} = (2x-y-z)^3$ ,  
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**12.47.** Решить задачи:

- 1)  $2u_{tt} - \Delta u = -y$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin(x+z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 2)  $u_{tt} - 8\Delta u = x$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{y-z}$ ,  $u_t|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 3)  $u_{tt} - 3\Delta u = 18e^{3t} \cos(x-y+z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = xy^2 z$ ,  $u_t|_{t=0} = 3 \cos(x-y+z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 4)  $u_{tt} - \Delta u = 9t \sin(2x-2y+z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = 2 \sin(2x-2y+z)$ ,  $u_t|_{t=0} = x^3 y z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;

- 5)  $u_{tt} - \Delta u = (t - x)e^{t-x}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = y(y^2 - z^2)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 6)  $u_{tt} - \Delta u = \frac{1}{1 + (t+x)^2}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = yz(y-z)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 7)  $u_{tt} - 4\Delta u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^x yz$ ,  $u_t|_{t=0} = xy^3 + \operatorname{sh}(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;
- 8)  $u_{tt} - \frac{1}{5}\Delta u = 2t^2 \cos(x+2y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = yz^3$ ,  $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1 - (x-2z)^2}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**12.48.** Пусть выполнены достаточные условия (VI) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{t=0} = u_1(x)$$

и пусть при  $|x| \geq \delta > 0$

$$m|x|^\alpha \leq u_0(x) \leq M|x|^\alpha, \quad m|x|^{\alpha-1} \leq u_1(x) \leq M|x|^{\alpha-1},$$

где  $\alpha > 0$ ,  $0 < m < M$ . Доказать, что для каждой точки  $x_0$  существуют положительные числа  $t_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  такие, что при всех  $t \geq t_0$  выполняется оценка

$$C_1 t^\alpha \leq u(x_0, t) \leq C_2 t^\alpha.$$

**12.49.** Пусть выполнены достаточные условия (VI) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{t=0} = u_1(x)$$

и пусть для  $\alpha > 0$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_0(x)}{|x|^\alpha} = A, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_1(x)}{|x|^{\alpha-1}} = B.$$

Доказать, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^\alpha} = C_n$  и найти  $C_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

**3. Обобщенная задача Коши для волнового уравнения.** Если решение  $u(x, t)$  классической задачи Коши для волнового уравнения (IV), (V) из п. 2 и функцию  $f(x, t) \in C(t \geq 0)$  продолжить нулем при  $t < 0$ , то эта функция  $u(x, t)$  удовлетворяет (в обобщенном смысле) в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t).$$

Обобщенной задачей Коши для волнового уравнения с источником  $F \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $F(x, t) = 0$  при  $t < 0$ , называется задача о нахождении обобщенной функции  $u \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ , удовлетворяющей волновому уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F(x, t) \quad (11)$$

и обращающейся в нуль при  $t < 0$ .

Решение обобщенной задачи Коши существует, единственно и определяется формулой

$$u = \mathcal{E}_n * F, \quad (12)$$

где  $\mathcal{E}_n(x, t)$  — фундаментальное решение волнового оператора:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x, t) &= \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \quad \mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \\ \mathcal{E}_3(x, t) &= \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x). \end{aligned}$$

Свертка  $V_n = \mathcal{E}_n * F$  называется *обобщенным волновым (запаздывающим) потенциалом с плотностью*  $F$ .

В частности, если  $F = u_1(x) \cdot \delta(t)$  или  $F = u_0(x) \cdot \delta(t)$ , то свертка

$$\begin{aligned} V_n^{(0)} &= \mathcal{E}_n(x, t) * [u_1(x) \cdot \delta(t)] = \mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x), \\ V_n^{(1)} &= \mathcal{E}_n(x, t) * [u_0(x) \cdot \delta'(t)] = (\mathcal{E}_n(x, t) * u_0(x))_t \end{aligned}$$

называются *обобщенными поверхностными волновыми (запаздывающими) потенциалами (простого и двойного слоя с плотностями*  $u_1$  и  $u_0$  соответственно).

Волновой (запаздывающий) потенциал  $V_n$  удовлетворяет уравнению (11).

**12.50.** Доказать, что если  $F(x, t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $F = 0$  при  $t < 0$ , то свертка  $\mathcal{E}_n * F$  существует в  $D'(\mathbb{R}^{n+1})$ .

**12.51.** Доказать, что обобщенная задача Коши для уравнения (11) имеет единственное решение в классе обобщенных функций из  $D'(\mathbb{R}^{n+1})$ , обращающихся в нуль при  $t < 0$ .

**12.52.** Доказать:

- 1)  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  принадлежат классу  $C^\infty$  по  $t \in (0, \infty)$ ;
- 2)  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  удовлетворяют предельным соотношениям при  $t \rightarrow +0$

$$V_n^{(0)}(x, t) \longrightarrow 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} \longrightarrow u_1(x) \quad \text{в } D'(\mathbb{R}^n),$$

$$V_n^{(1)}(x, t) \longrightarrow u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}(x, t)}{\partial x} \longrightarrow 0 \quad \text{в } D'(\mathbb{R}^n).$$

**12.53.** Решить обобщенную задачу Коши для уравнения (11) ( $x \in \mathbb{R}^1$ ) со следующими источниками  $F(x, t)$ :

- 1)  $\delta(t) \cdot \delta(x);$
- 2)  $\delta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0), t_0 \geq 0;$
- 3)  $\delta(t) \cdot \delta'(x);$
- 4)  $\delta'(t) \cdot \delta(x);$
- 5)  $\delta'(t - t_0) \cdot \delta(x);$
- 6)  $\delta(t) \cdot \delta'(x_0 - x);$
- 7)  $\delta''(t) \cdot \delta(x);$
- 8)  $\delta(t) \cdot \delta''(x);$
- 9)  $\delta(t) \cdot \alpha(x)\delta(x),$  где  $\alpha(x) \in C$  и  $\alpha(0) = 0;$
- 10)  $\delta(t) \cdot \beta(x)\delta(x),$  где  $\beta(x) \in C$  и  $\beta(0) = 1.$

Ниже при постановке обобщенной задачи Коши будем считать источником функцию вида  $F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), f = 0$  при  $t < 0.$

**12.54.** Решить обобщенную задачу Коши со следующими источниками ( $x \in \mathbb{R}^1$ ):

- 1)  $f = \omega(t) \cdot \delta(x),$  где  $\omega(t) \in C(t \geq 0), \omega(t) = 0$  при  $t < 0,$   
 $u_0 = \delta(x), u_1 = \delta(x);$
- 2)  $f = \theta(t) \cdot \delta(x), u_0 = \delta(x - x_0), u_1 = x\delta(x);$
- 3)  $f = \theta(t)t \cdot \delta(x), u_0 = \delta(2 - x), u_1 = \delta(3 - x), a = 1;$
- 4)  $f = \theta(t) \sin t \cdot \delta(x - x_0), u_0 = 0, u_1 = x\delta'(x);$
- 5)  $f = \theta(t) \cos t \cdot \delta(x), u_0 = 0, u_1 = x^2\delta''(x);$
- 6)  $f = \theta(t)e^{\alpha t} \cdot \delta(x), u_0 = \delta(1 - |x|), u_1 = 0;$
- 7)  $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} \cdot \delta(2 - x), u_0 = 0, u_1 = \delta(R - |x|), a = 1;$
- 8)  $f = \theta(t)t^2 \cdot \delta(x), u_0 = C = \text{const}, u_1 = \theta'(R - |x|), a = 1;$
- 9)  $f = \theta(t) \ln t \cdot \delta(x), u_0 = \frac{1}{1 + x^2}\delta(x), u_1 = 0;$
- 10)  $f = \frac{\theta(t - 1)}{1 + t^2} \cdot \delta(x), u_0 = \theta'(2 - |x|), u_1 = 0, a = 1;$
- 11)  $f = 0, u_0 = 0, u_1 = \theta''(2 - |x|), a = 1;$
- 12)  $f = \frac{\theta(t)}{1 + t} \cdot \delta(x - 1), u_0 = 0, u_1 = \sin x\delta'(x - \pi);$
- 13)  $f = \theta(at - |x|), u_0 = 0, u_1 = 0;$
- 14)  $f = \theta(t)(\alpha t + \beta) \cdot x\delta'(x), u_0 = 0, u_1 = x\delta''(x), a = 1.$

**12.55.** Доказать, что если  $u_1(x)$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^1$ , то  $V_1^{(0)}(x, t)$  — непрерывная функция в  $\mathbb{R}^2$  и выражается формулой

$$V_1^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (13)$$

**12.56.** Доказать, что если  $u_0(x)$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^1$ , то  $V_1^{(1)}(x, t)$  — непрерывная функция в  $\mathbb{R}^2$  и выражается формулой

$$V_1^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2}[u_0(x + at) + u_0(x - at)]. \quad (14)$$

Указание. Воспользоваться тем, что  $V_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{E}_1 * u_0(x)]$  в силу задач 8.35 и 12.55.

**12.57.** Доказать, что если  $f(x, t)$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^2$ , равная нулю при  $t < 0$ , то потенциал  $V_1(x, t)$  принадлежит  $C(\mathbb{R}^2)$  и выражается формулой

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (15)$$

**12.58.** Решить обобщенные задачи:

- 1)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(x) \cdot \delta'(t) + \theta(x) \cdot \delta(t);$
- 2)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x - 1) + x \cdot \delta'(t) + \text{sign}(x) \cdot \delta(t);$
- 3)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)tx + \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} \cdot \delta(t);$
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{\theta(x)}{t+1} + \theta(-x) \cdot \delta(t);$
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-2) \ln t + |x| \cdot \delta'(t);$
- 6)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)t^m + \theta(2-|x|) \cdot \delta'(t), m \in \mathbb{N};$
- 7)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)e^{x+t} + \theta(x)e^{-x} \cdot \delta(t);$
- 8)  $u_{tt} = 9u_{xx} + \theta(t-\pi) \cos t + \theta(x-3) \cdot \delta'(t) + 1(x) \cdot \delta(t);$
- 9)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\theta(x);$
- 10)  $u_{tt} = u_{xx} + 2\theta(t)\theta(x) + e^{\alpha x} \cdot \delta(t), \alpha \neq 0;$
- 11)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-1)(x+t) + |x| \cdot \delta(t);$
- 12)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-2)t + \theta(x-1) \ln x \cdot \delta'(t);$
- 13)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(x)x^m \cdot \delta'(t) + \theta(x)x^m \cdot \delta(t), m = 1, 2, \dots;$
- 14)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{\theta(x)}{\sqrt{t}} + \theta(x) \cos x \cdot \delta(t);$
- 15)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\sqrt{t}x + \theta(-x) \cdot \delta'(t) + \theta(-x)x \cdot \delta(t);$
- 16)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(x)e^{-\sqrt{x}} \cdot \delta'(t) + x^2 \cdot \delta(t);$
- 17)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \sin(x+t) + \sin x \cdot \delta(t);$
- 18)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(1-|x|) \cdot \delta(t).$

**12.59.** Доказать:

- 1) если  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$  и  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$ , то потенциалы  $V_1^{(0)}$  и  $V_1^{(1)}$  принадлежат классу  $C^2(t \geq 0)$ , удовлетворяют при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = 0$  и начальным условиям

$$\begin{aligned} V_1^{(0)}|_{t=+0} &= 0, & (V_1^{(0)})_t|_{t=+0} &= u_1(x), \\ V_1^{(1)}|_{t=+0} &= u_0(x), & (V_1^{(1)})_t|_{t=+0} &= 0. \end{aligned}$$

Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (13) и (14).

- 2) если  $f \in C^1(t \geq 0)$ , то потенциал  $V_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$  удовлетворяет при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = f(x, t)$  и начальным условиям

$$V_1|_{t=+0} = 0, \quad (V_1)_t|_{t=+0} = 0.$$

Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (15).

**12.60.** Пусть в задаче Коши (обобщенной)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

функции  $u_0 \in C^2$  и  $u_1 \in C^1$  для всех  $x$ , кроме  $x = x_0$ , где  $u_0, u_1$  (или их производные), имеют разрыв первого рода. Показать, что решение этой задачи является классическим всюду в полу平面ности  $t > 0$ , кроме точек, лежащих на характеристиках, проходящих через точку  $x = x_0, t = 0$  (распад разрыва), для следующих случаев:

- 1)  $u_0 = \theta(x)\omega(x)$ , где  $\omega \in C^2(\mathbb{R}^1)$ ,  $\omega(0) \neq 0$  и  $u_1 = 0$ ;
- 2)  $u_0 = 0, u_1 = \theta(x - x_0)\omega(x)$ , где  $\omega \in C^1(\mathbb{R}^1)$ ,  $\omega(x_0) \neq 0$ ;
- 3)  $u_0 = \theta(x - 1), u_1 = \theta(x - 2)$ .

**12.61.** Для задачи Коши (11) убедиться в том, что:

- 1) от источника возмущения

$$F = u_0(x) \cdot \delta'(t) = \theta(x_0 - |x|)f(x) \cdot \delta'(t), \quad x_0 > 0, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^1),$$

возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени  $t > 0$  передний фронт в точках  $x = \pm(at + x_0)$  соответственно и в каждый момент времени  $t > \frac{x_0}{a}$  задний фронт в точках  $x = \pm(at - x_0)$  (принцип Гюйгенса);

- 2) от источника

$$F = u_1(x) \cdot \delta(t) = \theta(x_0 - |x|)f(x) \cdot \delta(t), \quad x_0 > 0, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^1),$$

возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени  $t > 0$  *передний фронт* в точках  $x = \pm(at + x_0)$  и не имеют *заднего фронта* (разрыв заднего фронта волны или *диффузия волн*). Указание. Воспользоваться формулами (13) и (14).

**12.62.** Решить следующие обобщенные задачи и доказать, что полученные решения являются решениями и классической задачи Коши (IV), (V):

- 1)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x + t) + e^{\alpha x} \cdot \delta'(t);$
- 2)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)t \ln t + 3^x \cdot \delta'(t);$
- 3)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x^2 + t^2) + x^m \cdot \delta'(t), m = 1, 2, \dots;$
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)x^2 + \cos x \cdot \delta'(t) + \cos x \cdot \delta(t);$
- 5)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 \ln |x| \cdot \delta(t);$
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \cos(x + t) + 2^x \cdot \delta(t);$
- 7)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \sin t + \frac{1}{1+x^2} \cdot \delta(t);$
- 8)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)e^t + \frac{1}{1+x^2} \cdot \delta'(t);$
- 9)  $u_{tt} = u_{xx} + (\alpha x^2 + \beta) \cdot \delta'(t) + x^{4/3} \cdot \delta(t);$
- 10)  $u_{tt} = u_{xx} + \ln(1 + e^x) \cdot \delta'(t) + e^{-x^2} \cdot \delta(t);$
- 11)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)t^m x + \sin x \cdot \delta'(t) + x^m \delta(t), m = 1, 2, \dots;$
- 12)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \operatorname{arctg} t + \ln(1 + x^2) \cdot \delta'(t);$
- 13)  $u_{tt} = 4u_{xx} + \theta(t) \cos x + \sqrt{1 + x^2} \cdot \delta'(t);$
- 14)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)x \sin t + x^2 e^{-|x|} \cdot \delta'(t);$
- 15)  $u_{tt} = 4u_{xx} + e^{-x^2} \cdot \delta'(t) + e^{-x} \sin x \cdot \delta(t);$
- 16)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin^2 x \cdot \delta'(t) + x e^{-|x|} \cdot \delta(t);$
- 17)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \frac{x}{1+t^2} + \frac{1}{2-\cos x} \cdot \delta'(t);$
- 18)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)(x e^t + t e^x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \delta(t).$

**12.63.** Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in \mathbb{R}^2$ ):

- 1)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t);$
- 2)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t)t^2 \cdot \delta(x) + |x|^m \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x - x^2) \cdot \delta(t), m = 1, 2, \dots;$

- 3)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + e^{|x|} \delta(x) \cdot \delta(t)$ , где  $\omega \in C(t \geq 0)$   
и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ;  
4)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t)(\alpha t + \beta) \cdot \delta(x) + \delta(x - x_0) \cdot \delta(t)$ .

**12.64.** Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in \mathbb{R}^3$ ):

- 1)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t)$ ;
- 2)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0) + \delta(x - x') \cdot \delta(t)$ ,  $t_0 \geq 0$ ;
- 3)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + |x|^2 \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_k^2} \cdot \delta'(t) + \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k} \cdot \delta(t)$ ,  
 $k = 1, 2, 3$ , где  $\omega \in C(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \sin t \cdot \delta(x) + e^{-|x|^2} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k} \cdot \delta'(t)$ .

**12.65.** Доказать, что если  $u_1(x)$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , то  $V_n^{(0)}$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и выражается формулами

$$V_2^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{|x-\xi| < at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}}, \quad (\text{XVI}_1)$$

$$V_3^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) ds. \quad (\text{XVI}_2)$$

Замечание. Так как  $V_n^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_n(x, t) * u_0(x))$ , то, заменив в (XVI<sub>1</sub>) и (XVI<sub>2</sub>)  $u_1$  на  $u_0$  и дифференцируя по  $t$ , получим

$$V_2^{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{|x-\xi| < at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}} \right), \quad (\text{XVI}_3)$$

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) ds \right). \quad (\text{XVI}_4)$$

**12.66.** Доказать, что если  $f(x, t)$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n = 2, 3$ , равная нулю при  $t < 0$ , то  $V_2$  — непрерывная функция и  $V_3$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и они выражаются формулами

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|x-\xi| < a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x - \xi|^2}}, \quad (\text{XVII}_1)$$

$$V_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi| < at} \frac{f(\xi, t - |x - \xi|/a)}{|x - \xi|} d\xi. \quad (\text{XVII}_2)$$

**12.67.** Доказать:

- 1) если  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$  при  $n=2, 3$ , то потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$ ,  $n = 2, 3$ , принадлежат классу  $C^2(t \geq 0)$ , удовлетворяют при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = 0$  и начальным условиям

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}|_{t=+0} &= 0, & \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t}\Big|_{t=+0} &= u_1(x), \\ V_n^{(1)}|_{t=+0} &= u_0(x), & \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t}\Big|_{t=+0} &= 0; \end{aligned}$$

- 2) если  $f \in C^2(t \geq 0)$ , то  $V_n \in C^2(t \geq 0)$ ,  $n = 2, 3$ , удовлетворяет при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = f(x, t)$  и начальным условиям

$$V_n|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0.$$

Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (XVI) и (XVII), если в них сделать замену переменных  $\xi - x = at\eta$  и  $\xi - x = a(t - \tau)\eta$  соответственно.

**12.68.** Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in \mathbb{R}^2$ ) и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (IV), (V):

- 1)  $f = \theta(t)$ ,  $u_0 = C$ ,  $u_1 = C$ ,  $C = \text{const}$ ;
- 2)  $f = \theta(t)|x|^2$ ,  $u_0 = |x|^2$ ,  $u_1 = |x|^2$ ;
- 3)  $f = \theta(t)t^2$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1 + |x|^2$ ;
- 4)  $f = \theta(t)e^{-t}|x|^2$ ,  $u_0 = 1 + |x|^2$ ,  $u_1 = 0$ .

**12.69.** Решить задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) со следующими данными:

- 1)  $f = \theta(t)|x|^2$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = |x|^2$ ;
- 2)  $f = \theta(t)t^2|x|^2$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$ ;
- 3)  $f = \omega(t)$ , где  $\omega \in C^2(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ,  
 $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \alpha|x|^2 + \beta$ ;
- 4)  $f = \theta(t) \ln|x|$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ;  $a = 1$ ;
- 5)  $f = \theta(t)$ ,  $u_0 = \frac{1}{1 + |x|^2}$ ,  $u_1 = 0$ ;
- 6)  $f = 0$ ,  $u_0 = \sin|x|^2$ ,  $u_1 = \operatorname{sh}|x|^2$ ;  $a = 1$ ;

- 7)  $f = \theta(t)t$ ,  $u_0 = |x|^2$ ,  $u_1 = \frac{1}{1 + |x|^2}$ ;
- 8)  $f = \theta(t)e^{-ikt}\omega(x)$ , где  $\omega \in C^2$ ,  $u_0 = \sqrt{1 + |x|^2}$ ,  $u_1 = 0$ ;  $a = 1$ ;
- 9)  $f = \theta(t)e^{-|x|^2}$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \cos|x|^2$ ;  $a = 1$ ;
- 10)  $f = 0$ ,  $u_0 = \ln(1 + |x|^2)$ ,  $u_1 = e^{-|x|^2}$ ;  $a = 1$ ;
- 11)  $f = 0$ ,  $u_0 = e^{-|x|^2}$ ,  $u_1 = \ln|x|$ ;  $a = 1$ ;
- 12)  $f = \theta(t)\sin t$ ,  $u_0 = \cos|x|^2$ ,  $u_1 = 0$ ;
- 13)  $f = 0$ ,  $u_0 = C\theta(R - |x|)$ ,  $u_1 = 0$ ;
- 14)  $f = \theta(at - |x|)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ .

Задачи Коши для уравнений 12.70–12.72 формулируются также, как для волнового уравнения.

**12.70.** Решить обобщенную задачу Коши для уравнения гиперболического типа

$$\square_a u = bu_x + \frac{b}{a}u_t + F(x, t), \quad a > 0, \quad b > 0,$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + \left( u_1(x) - \frac{b}{a}u_0(x) \right) \cdot \delta(t),$$

со следующими данными:

- 1)  $f = \theta(t) \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \delta(x)$ ,  $u_1 = \delta(x)$ ;
- 2)  $f = \theta(t)x$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \theta(x)$ ;  $a = b = 1$ ;
- 3)  $f = \theta(t)t$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = x$ ;  $a = b = 1$ ;
- 4)  $f = \theta(t)e^t$ ,  $u_0 = e^x$ ,  $u_1 = e^x$ ;  $b = 1$ ;
- 5)  $f = \theta(t)e^x$ ,  $u_0 = \alpha x + \beta$ ,  $u_1 = 0$ .

**12.71.** Решить обобщенную задачу Коши для уравнения Клейна–Гордона–Фока

$$\square_a u + m^2 u = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = 0$ ,  $u_0 = \delta(x)$ ,  $u_1 = \delta(x)$ ,  $a = m = 1$ ;
- 2)  $f = \omega(t) \cdot \delta(x)$ , где  $\omega \in C(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = x$ ;  $a = m = 1$ ;
- 3)  $f = \theta(t)$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$ ;  $a = m = 1$ ;
- 4)  $f = 0$ ,  $u_0 = \theta(x)$ ,  $u_1 = \theta(x)$ ;  $a = m = 1$ .

**12.72.** Решить обобщенную задачу Коши для телеграфного уравнения

$$\square_a u + 2mu_t = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = 0, u_0 = \delta(x), u_1 = \delta(x), a = m = 1;$
- 2)  $f = \omega(t) \cdot \delta(x)$ , где  $\omega \in C(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  
 $u_1 = 0; a = m = 1;$
- 3)  $f = 0, u_0 = 1, u_1 = \theta(x); a = m = 1.$

## Ответы к § 12

**12.7.**  $\frac{4}{5}(y^{5/4} - |x|^{1/2}); |x| < 1, 0 < y < 1.$

**12.8.**  $\sin y - 1 + e^{x-y}; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$

**12.9.**  $x - y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2y}; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$

**12.10.**  $\frac{1}{2}(1 - x - 3y + (x + y - 1)e^{2x}); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$

**12.11.**  $xy + \frac{3}{2} \sin \frac{2y}{3} \cos \left( x + \frac{y}{3} \right); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$

**12.12.**  $(y - 3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}; x < 1, y < 3.$

**12.13.** 1)  $x + \frac{1}{4}y^2; x > 0, |y| < 3\sqrt{x};$

2)  $x^2y + \sin x - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^4y^2; x > 0, y > 0.$

**12.14.**  $\frac{x^2}{y}; x > 0, y > 0.$

**12.15.**  $2x + y - x^2; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$

**12.16.** 1)  $\frac{y}{3x} + \frac{2\pi^2 y}{3}; x > 0, y < 0; \quad$  2)  $x^4 + y^2; x > 0.$

**12.17.**  $\frac{3}{4} \sqrt[4]{x^7 y} \left( \sqrt[3]{y} - \frac{1}{y} \right); x > 0, y > 0.$

**12.18.**  $x^2 + 2y^2 + 1; x > 0, -\frac{1}{2} < y < x^2.$

**12.19.**  $x^2 + xy + y^2; x > |y|.$

**12.20.**  $\frac{1}{2} + (4 - 3y)e^{1-x-y} - \left( 2x + \frac{3}{2} \right) e^{2(1-x-y)}; R = e^{x-\xi+2(y-\eta)}.$

**12.21.**  $xy - y; R = \frac{\xi y}{x\eta}.$

**12.22.**  $x - y + xy; R = \frac{x + y}{x + \eta}.$

**12.23.**  $\frac{1}{2xy} ((x + y - 1)u_0(x + y - 1) + (x - y + 1)u_0(x - y + 1)) +$

$$+\frac{1}{2xy} \int_{x-y+1}^{x+y-1} [u_0(\xi) + u_1(\xi)]\xi d\xi.$$

**12.24.**  $(y - x)(x^2 + 1) + x^5 \cos x.$

**12.25.** 1)  $u(x, y) = e^y + \frac{x - y}{3}.$

2)  $u(x, y) = e^{-\frac{2}{3}y} - x + y.$

3)  $u(x, y) = e^{-x} + 1 + 3x - y.$

4)  $u(x, y) = (y + 3x)e^{-7x} + 2y - x.$

5)  $u(x, y) = e^{-3x} - 3(y - x).$

6)  $u(x, y) = e^{-y} + x + y.$

7)  $u(x, y) = 2e^{-2x} - 1 - 4(y - x).$

8)  $u(x, y) = \frac{1}{2}e^{2y} + \frac{1}{2} + x + 2y.$

9)  $u(x, y) = e^{-y} + x + y.$

10)  $u(x, y) = e^{-3x} - 3(y - x).$

11)  $u(x, y) = e^{-2x} - x + 2y.$

12)  $u(x, y) = 2x + y - e^{-3y}.$

13)  $u(x, y) = \frac{5}{2}(2x + y) - \frac{3}{2}(2x + y + 1) \ln(2x + y + 1) + \frac{3}{2}(2x + y + 1) \ln \frac{6x - 2y + 3}{3}.$

14)  $u(x, y) = -\frac{2}{3}y(x + y + 1)^2.$

15)  $u(x, y) = \frac{11}{3} \ln(1 + 3x + y) - \frac{11}{3} \cdot \frac{y}{3x + y + 1}.$

16)  $u(x, y) = (2x - 3y)(x - 2y) - 2(x - 2y)^2 = y(x - 2y).$

**12.26.** 1)  $u(x, y) = \frac{x^2}{4} + y.$

2)  $u(x, y) = 2x(y + \ln x - 2) + (y - \ln x)^2 - 2(y - \ln x - 2).$

3)  $u(x, y) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) y - \frac{1}{8} \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right)^2 y^4.$

4)  $u(x, y) = \frac{x(y - 1)}{y^2}.$

5)  $u(x, y) = x + y - xy^2.$

6)  $u(x, y) = 1 + xy.$

7)  $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$

8)  $u(x, y) = 2x - x^2.$

- 9)  $u(x, y) = xy(2 - y).$   
 10)  $u(x, y) = xy(x - 1).$   
 11)  $u(x, y) = (1 + x^2)(y - x) + x^5 \cos x.$   
 12)  $u(x, y) = 3xy^2 - 3x^2y.$   
 13)  $u(x, y) = x^3 + 3x + 2y.$   
 14)  $u(x, y) = xy^2 + 2.$

**12.27.** 1)  $u(x, y) = 4xy^2e^{-4x}.$

- 2)  $u(x, y) = x + e^{4x} - e^y.$   
 3)  $u(x, y) = 2xye^{-y}.$   
 4)  $u(x, y) = e^{2y} + y - x^2.$   
 5)  $u(x, y) = e^{x+x^2} + x + y.$   
 6)  $u(x, y) = 1 + 2x + y.$   
 7)  $u(x, y) = y - x + \operatorname{ch} x.$   
 8)  $u(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x - y.$   
 9)  $u(x, y) = x + \cos x + e^{-2x} - y.$   
 10)  $u(x, y) = 3y - x - \sin x.$   
 11)  $u(x, y) = \frac{2x^2}{y} + yx^2.$   
 12)  $u(x, y) = \frac{3y^2}{4} + x^2 - 2xy.$   
 13)  $u(x, y) = xy + \frac{x^2}{2}.$   
 14)  $u(x, y) = \frac{y^2}{x} + 3xy^2.$

**12.28.** 1)  $u(x, y) = -y^2 + \frac{x}{2}.$

- 2)  $u(x, y) = 8y - \ln x.$   
 3)  $u(x, y) = 15y^2 + 10x^2y.$   
 4)  $u(x, y) = 7y + 2x^3.$   
 5)  $u(x, y) = 2 \left( y - \frac{x^2}{2} \right) + (y + x)^2.$   
 6)  $u(x, y) = (y - x)^2 - (y^2 - 2x).$

- 7)  $u(x, y) = 2x^2 + 2xy.$   
 8)  $u(x, y) = 3y^2 - 4xy + x^2.$   
 9)  $u(x, y) = 2xy + y^2 + 2y.$   
 10)  $u(x, y) = x^2 - 2xy + 2x.$   
 11)  $u(x, y) = y^2 + 2xy + y.$   
 12)  $u(x, y) = 3y^2x - 3yx^2.$

**12.29.** 1)  $u(x, y) = (xy)^3 - y^2x.$

2)  $u(x, y) = 1 - 2(y - \arctg x) + (y + x)^2 + 2(y + x).$

3)  $u(x, y) = 3 \left( y + \frac{1}{3}x^3 \right)^2 - \left( y - \frac{2}{3}x^3 \right).$

4)  $u(x, y) = \left( x - \frac{1}{y} \right)^2 + 4 \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{y} \right).$

5)  $u(x, y) = \left( y - \frac{x^2}{2} \right)^2 - \cos(x + y).$

6)  $u(x, y) = -\operatorname{ch}(y - x) - \frac{1}{8}(y^2 - 2x)^3.$

7)  $u(x, y) = 3 + (x - 2)e^{-1-y^3}.$

8)  $u(x, y) = 1 + 2(y - 1)e^{1-x^3}.$

9)  $u(x, y) = (2 + y)e^{2x^3-2} - 4.$

10)  $u(x, y) = (4 + 3x)e^{y^3-1} - 3.$

11)  $u(x, y) = x^3y^3 - x^2y^4 + 4x^2y.$

12)  $u(x, y) = e^{x^2y} + \frac{x^4y^2}{3} + 2e^{y/x} + \frac{2y^2}{3x^2} - xy^2.$

13)  $u(x, y) = 1 - y^3 + \frac{y}{x} - \frac{1}{xy^2} - 3 \ln \frac{x}{y}.$

14)  $u(x, y) = y^2 + \frac{e^{xy}}{2} - \frac{e^{y/x}}{2}.$

**12.30.** 1)  $u(x, y) = x - y + \sqrt{y^2 - x^2 + 1}.$

2)  $u(x, y) = 2 \ln(x - y) - 2 \ln x - x + y.$

3)  $u(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y - 1} - 2x - y.$

4)  $u(x, y) = x + \ln x + y - \ln(x + y - 1).$

5)  $u(x, y) = x^2y + y^{1/4}.$

$$6) \ u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{y^2}{x}.$$

$$7) \ u(x, y) = y^2 + yx^{-1/3}.$$

$$8) \ u(x, y) = xy^{-1/3} + x^{-2} - yx^{-3}.$$

$$9) \ u(x, y) = y^4 e^{2x} + y^2 e^{-2x}.$$

$$10) \ u(x, y) = 2y^2(x + 1).$$

$$11) \ u(x, y) = \frac{4}{5}y^3x^{1/3} + 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

$$12) \ u(x, y) = 8x(y - 2x) - 1.$$

$$13) \ u(x, y) = \frac{y}{x} + e^{-2y/x}.$$

$$14) \ u(x, y) = 1 + \frac{1}{3x - y} \cdot \operatorname{ch}(x + 2y).$$

$$15) \ u(x, y) = (x + y)e^{-y/x} + 1.$$

$$16) \ u(x, y) = -\frac{1}{y + 2x} \cdot \operatorname{ch}\left(y - \frac{1}{2}x\right).$$

**12.36.**  $\sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{(at)^{2k}}{(2k)!} \Delta^k u_0(x) + \frac{a^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k u_1(x) + \frac{a^{2k} t^{2k+2}}{(2k+2)!} \Delta^k f(x) \right].$

**12.37.**  $\frac{1}{2} [f(x_1 + at) + f(x_1 - at) + g(x_2 + at) + g(x_2 - at)] +$   
 $+ \frac{1}{2a} \int_{x_1 - at}^{x_1 + at} F(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_{x_2 - at}^{x_2 + at} G(\eta) d\eta.$

**12.38.**  $\frac{1}{2}g(x_2, x_3)[f(x_1 + at) + f(x_1 - at)].$

**12.39.**  $\frac{1}{2|x|}[(|x| + at)\alpha(|x| + at) + (|x| - at)\alpha(|x| - at)] +$   
 $+ \frac{1}{2a|x|} \int_{||x| - at|}^{|x| + at} r\beta(r) dr \text{ при } |x| \neq 0 \text{ и } u(0, t) = \alpha(at) + at\alpha'(at).$

**12.40.**  $\frac{1}{2|x|}[\theta(1 - |x| - t)(|x| + t)^{n+1}(1 - |x| - t)^\beta + \theta(1 - ||x| - t|) \operatorname{sign}(|x| - t)|x| - t|^{n+1}(1 - ||x| - t|)^\beta] \text{ при } |x| \neq 0 \text{ и } u(0, t) = \theta(1 - t)t^\alpha(1 - t)^{\beta-1}[(\alpha + 1)(1 - t) - \beta t].$

**12.41.**  $\frac{1}{2}\theta(1 - |x + t|)[(x + t)^2 - 1]^3 + \frac{1}{2}\theta(1 - |x - t|)[(x - t)^2 - 1]^3.$

**12.42.** 1)  $(x + 2t)^2.$  2)  $x^2 + xt + 4t^2 + \frac{1}{6}xt^3.$  3)  $\sin x.$

4)  $xt + \sin(x+t) - (1 - \operatorname{ch} t)e^x.$  5)  $1 + t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t) \sin x.$

6)  $\frac{1}{a^2\omega^2}(1 - \cos a\omega t) \sin \omega x.$  7)  $\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t.$

**12.43.** 1)  $x + ty + t^2.$  2)  $xyt(1 + t^2) + x^2 - y^2.$

3)  $\frac{1}{2}t^2(x^3 - 3xy^2) + e^x \cos y + te^y \sin x.$  4)  $x^2 + t^2 + t \sin y.$

5)  $2x^2 - y^2 + (2x^2 + y^2)t + 2t^2 + 2t^3.$

6)  $x^2 + ty^2 + \frac{1}{2}t^2(6 + x^3 + y^3) + t^2 + \frac{3}{4}t^4(x + y).$

7)  $e^{3x+4y} \left[ \frac{26}{25} \operatorname{ch} 5t - \frac{1}{25} + \frac{1}{5} \operatorname{sh} 5t \right].$

8)  $\cos(bx+cy) \cos(at\sqrt{b^2+c^2}) + \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}} \sin(bx+cy) \sin(at\sqrt{b^2+c^2}).$

9)  $(x^2 + y^2)^2(1 + t) + 8a^2t^2(x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{3}t\right) + \frac{8}{3}a^4t^4 \left(1 + \frac{1}{5}t\right).$

10)  $(x^2 + y^2 + 4a^2)(e^t - 1 - t) - 2a^2t^2 \left(1 + \frac{1}{3}t\right).$

**12.44.** 1)  $x^2 + y^2 - 2z^2 + t + t^2xyz.$

2)  $y^2 + tz^2 + 8t^2 + \frac{1}{12}t^4x^2 + \frac{2}{45}t^6.$

3)  $x^2y^2z^2 + txy + 3t^2(x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) +$   
 $+ 3t^4 \left(\frac{3}{2} + x^2 + y^2 + z^2\right) + \frac{9}{5}t^6.$

4)  $e^{x+y} \cos(z\sqrt{2}) + te^{3y+4z} \sin 5x + t^3e^{z\sqrt{2}} \sin y \cos z.$

5)  $(1 + t)(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 10a^2t^2 \left(1 + \frac{1}{3}t\right) (x^2 + y^2 + z^2) + a^4t^4(5 + t).$

6)  $(x^2 + y^2 + z^2 + 6a^2)(e^t - 1 - t) - a^2t^2(3 + t).$

7)  $\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)e^z \cos x \sin y + e^{y+z} \times$   
 $\times \left[ \frac{1}{a} \operatorname{sh} at \sin x + \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(at\sqrt{2}) + x^2 \operatorname{ch}(at\sqrt{2}) \right].$

8)  $xy \cos z \cos at + \frac{1}{a}yze^x \operatorname{sh} at + \frac{x}{1 + 25a^2} \cos(3y + 4z) \times$   
 $\times \left( e^t - \cos 5at - \frac{1}{5a} \sin 5at \right).$

9)  $\left( \cos at + \frac{1}{a} \sin at \right) \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times$   
 $\times \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left( t \cos at - at \sin at - \frac{1}{a} \sin at \right).$

- 12.45.** 1)  $u(x, y, z, t) = \left( \frac{4}{15} ((1+t)^{5/2} - 1) - \frac{2}{3}t \right) xyz + ze^{2x} \operatorname{ch} 6t + yt.$
- 2)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{4} (\cos t - \cos(\sqrt{5}t)) \sin(x+2y) + \operatorname{ch} 3t \cdot \operatorname{ch} 3y + xe^z \operatorname{sh} t.$
- 3)  $u(x, y, z, t) = t^2 (x^3y - xy^3) + yze^x \cdot \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}}.$
- 4)  $u(x, y, z, t) = \sin(x+y+z) \left( \sin t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right) + y^3t + yt^3 + zt.$
- 5)  $u(x, y, z, t) = \cos(\sqrt{6}t) \cos(x-y) + zx^3 + 9xzt^2 + \frac{1}{9} ((x+y+z+3t)^{3/2} - (x+y+z-3t)^{3/2}).$
- 6)  $u(x, y, z, t) = (e^{3t} - 3t) \operatorname{sh} z + xy^2zt + 3t^3xz + \frac{1}{2} (e^{-(x-y-3\sqrt{2}t)^2} + e^{-(x-y+3\sqrt{2}t)^2}).$
- 7)  $u(x, y, t) = (x-y) \frac{t^2}{2} + y^4 + 6t^2y^2 + t^4 + t(y^2 - 2x^2) - \frac{t^3}{3}.$
- 8)  $u(x, y, t) = e^t(x+2y) + x^4 + 6t^2x^2 + t^4 + t(x^2 + y^3 - 2y) + \frac{t^3}{3}(1+3y).$
- 9)  $u(x, y, z, t) = (4 - x^2 - y^2) \sin t + \frac{(x+t)^3 - (x-t)^3}{6} - 4t + \frac{1}{14r} \begin{cases} (r+t)^7 - (r-t)^7, & r \geq t, \\ (r+t)^7 + (r-t)^7, & r \leq t, \end{cases}$  где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
- 10)  $u(x, y, z, t) = (\sin 2y + z) \cos t + t - z + \frac{1}{2r} \begin{cases} (r+t)^6 - (r-t)^6, & r \geq t, \\ (r+t)^6 + (r-t)^6, & r \leq t, \end{cases}$  где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
- 11)  $u(x, y, z, t) = \left( x^2 - x + \frac{t^2}{5} \right) + (e^{-t} - \cos t + \sin t) \sin(2z-y) + \frac{\sqrt{5}}{2r} \left( \sqrt{1 + \left( r + \frac{t}{\sqrt{5}} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( r - \frac{t}{\sqrt{5}} \right)^2} \right),$  где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
- 12)  $u(x, y, z, t) = (z^3 + 6zt^2) + \frac{1}{2} (\cos 2t - \sin 2t - e^{-2t}) \cos(y-x) + \frac{1}{4\sqrt{2}r} \ln \frac{1 + (r + \sqrt{2}t)^2}{1 + (r - \sqrt{2}t)^2},$  где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
- 13)  $u(x, y, z, t) = x(y^2 + z^2) + 2xt^2 - \frac{1}{12} [\cos((2x-y+2z+3t)^2) - \cos((2x-y+2z-3t)^2)].$
- 14)  $u(x, y, z, t) = xyz^2 + xy t^2 + \frac{1}{12} (e^{-(x+2y+2z-3t)^2} - e^{-(x+2y+2z+3t)^2}).$

- 12.46.** 1)  $u(x, y, z, t) = (e^t - t - 1)(x^2 - z^2 + x - 2y + 3z) + tx^2yz + \frac{1}{3}t^3zy + \frac{1}{2} [\sqrt[3]{x - 2y + 3z + 14t} + \sqrt[3]{x - 2y + 3z - 14t}]$ .
- 2)  $u(x, y, z, t) = (2 \sin 3t + \sin 2t) \cos(x + y + 5z) + txyz^3 + \frac{1}{3}t^3xyz + \frac{1}{2} [e^{(x+y+z+t)^3} + e^{(x+y+z-t)^3}]$ .
- 3)  $u(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{37} \cos 6t + \frac{1}{222} \sin 6t + \frac{1}{37}e^{-t}\right) \cos(x + 2y + 2z) + 12t^2 + \frac{8}{3}t^3 + x^2 + 2z^2 + t(y^2 + z^2)$ .
- 4)  $u(x, y, z, t) = \frac{t^2}{2}(x^4 + y^4 + z^4) + \frac{9}{2}t^4(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{81}{10}t^6 + \cos(\sqrt{27}t) \cos(x + y - z) + \frac{1}{\sqrt{27}} \sin(\sqrt{27}t) \sin(x + y + z)$ .
- 5)  $u(x, y, z, t) = (9t^2 + 18t + 11) \operatorname{sh}(2x - 2y + z) + t(x^2 - y^2 + z^2) + \frac{t^3}{3} - (11 \operatorname{ch} 3t + 6 \operatorname{sh} 3t) \cdot \operatorname{sh}(2x - 2y + z) + (2x + y - z) \cos y \cos t - t \sin y \sin t$ .
- 6)  $u(x, y, z, t) = (3t^2 + 3t + 1) \operatorname{ch}(x - 2y + z) + x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 6t^2 - \left(\operatorname{ch}(\sqrt{6}t) + \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{6}t)\right) \operatorname{ch}(x - 2y + z) + (x + y + z) \cos x \sin t + t \sin x \cos t - \sin x \sin t$ .
- 7)  $u(x, y, z, t) = \frac{t}{6} \sin(x - 2y - 2z + 3t) + x(x^2 + y^2 + z^2) + 5t^2x - \frac{1}{18} \sin 3t \sin(x - 2y - 2z)$ .
- 8)  $u(x, y, z, t) = \frac{t}{14} \operatorname{ch}(6x - 2y - 3z + 7t) + xy^2 + yz^2 + zx^2 + t^2(x + y + z) - \frac{1}{98} \operatorname{sh} 7t \cdot \operatorname{ch}(6x - 2y - 3z)$ .
- 9)  $u(x, y, z, t) = \left(x^2 - \frac{5}{8}y^2 - \frac{3}{8}z^2\right) (\operatorname{ch} t - 1) + xe^z \operatorname{sh} t + \frac{1}{2r} ((r+t)^3 \operatorname{sh}^3(r+t) + (r-t)^3 \operatorname{sh}^3 |r-t|)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- 10)  $u(x, y, z, t) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right) (1 - \cos t) + ze^y \operatorname{sh} t + \frac{1}{2r} ((r+t)^3 \sin^3(r+t) + (r-t)^3 \sin^3 |r-t|)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- 11)  $u(x, y, z, t) = \sin(t + y) + \operatorname{ch} 4t \cdot \sin y \cdot e^{-3x} + t(x^3 + xy^2) + \frac{8t^3x}{3}$ .
- 12)  $u(x, y, z, t) = xy^3 + 3t^2xy - \cos(2t - x) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sh}(t\sqrt{3}) \sin xe^{2y}$ .
- 13)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{24} \left[2t + 1 - \cos(2\sqrt{6}t) - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(2\sqrt{6}t)\right] \sin(2x - y + z) + \frac{1}{2r} \left[(r + 2t)\sqrt{2 + (r + 2t)^2} + (r - 2t)\sqrt{2 + (r - 2t)^2}\right] + t(x + 2y - z)^3 + 24t^3(x + 2y - z)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$14) u(x, y, z, t) = \frac{1}{54} \left[ t - 3 + 3 \cos(3\sqrt{6}t) - \frac{1}{3\sqrt{6}} \sin(3\sqrt{6}t) \right] \cos(x + y - 2z) + \frac{1}{2r} \left[ (r + 3t)\sqrt{3 + (r + 3t)^2} + (r - 3t)\sqrt{3 + (r - 3t)^2} \right] + t(2x - y - z)^3 + 54t^3(2x - y - z), \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**12.47.** 1)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{4}yt^2 + x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{2}t^2 + \sin t \sin(x + z).$

2)  $u(x, y, z, t) = \frac{xt^2}{2} + \operatorname{ch} 4t \cdot e^{y-z} + t(x^2 + y^2 + z^2) + 8t^3.$

3)  $u(x, y, z, t) = (e^{3t} - \cos t) \cos(x - y + z) + 3t^2xz + xy^2z.$

4)  $u(x, y, z, t) = \left( 2 \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t + t \right) \sin(2x - 2y + z) + tx^3yz + t^3xyz.$

5)  $u(x, y, z, t) = \frac{t}{2}(t - x - 1)e^{t-x} + y(y^2 - z^2 + 2t^2) + \frac{1}{4}[e^{t-x}(x - t + 2) - e^{-x-t}(x + t + 2)].$

6)  $u(x, y, z, t) = (y - z)(yz - t^2) + \frac{1}{4}(x - t)[\operatorname{arctg}(x - t) - \operatorname{arctg}(x + t)] + \frac{1}{8} \ln \frac{1 + (x + t)^2}{1 + (x - t)^2}.$

7)  $u(x, y, z, t) = \operatorname{ch} 2t \cdot e^x yz + txy^3 + 4t^3xy + \frac{1}{8r}(\operatorname{ch}(r + 2t)^2 - \operatorname{ch}(r - 2t)^2), \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

8)  $u(x, y, z, t) = (4 \cos t + 2t^2 - 4) \cos(x + 2y) + yz^3 + 0,6t^2yz + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(t + x - 2z) + \operatorname{arctg}(t - x + 2z)).$

**12.49.**  $C_1 = a^\alpha \left( A + \frac{B}{a^\alpha} \right),$   
 $C_2 = \left[ A(a + 1) \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha+1} \varphi d\varphi + \frac{B}{a} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha \varphi d\varphi \right],$   
 $C_3 = a^\alpha \left[ A(a + 1) + \frac{B}{a} \right].$

**12.50.** Решение. Свертка  $\mathcal{E}_n * F$  существует в силу 8.34 и определяется формулой этой задачи, где  $g = \mathcal{E}_n$  и  $f = F$ , так как  $F(x, t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\operatorname{supp} \mathcal{E}_n(x, t) \subset \bar{\Gamma}^+$  в силу 11.15–11.17.

**12.51.** Решение. Для  $w = u - u^*$ , где  $u^*(x, t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $u^* = 0$  при  $t < 0$ , — другое решение задачи (11), имеем  $w \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $w = 0$  при  $t < 0$  и  $w_{tt} = a^2 \Delta w$ . Свертка  $\mathcal{E}_n * w$  существует в силу 12.50. Тогда  $w = \delta * w = ((\mathcal{E}_n)_{tt} - a^2 \Delta \mathcal{E}_n) * w = \mathcal{E}_n * (w_{tt} - a^2 \Delta w) = 0$ . Следовательно,  $u^* = u$ .

**12.52.** Решение. 1)  $\mathcal{E}_n(x, t) \in C^\infty$  по  $t \in [0, \infty)$  в силу 11.26. При каждом  $t > 0$  носитель  $\text{supp } \mathcal{E}_n$  содержится в шаре  $|x| \leq at$  и, следовательно, равномерно ограничен в  $\mathbb{R}^n$  при  $t \rightarrow t_0 \geq 0$ . Поэтому в силу непрерывности свертки в  $D'$  имеем

$$\left( \frac{\partial^k \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi(x) \right) \in C[0, \infty), \quad k = 0, 1, \dots. \quad (*)$$

Для всех функций  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$  (определение обобщенной функции  $(u(x, t), \varphi(x)) \in D'(\mathbb{R}^n)$  см. в конце § 11). Далее, в силу результатов задачи 8.35

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial t^k} (V_n^{(0)}(x, t), \varphi(x)) &= \left( \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x) \cdot \delta(t)), \varphi \right) = \\ &= \left( \frac{\partial^k \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi \right) \in C[0, \infty) \end{aligned}$$

в силу (\*). Следовательно,  $(V_n^{(0)}(x, t), \varphi(x)) \in C^\infty[0, \infty)$ , т. е.  $V_n^{(0)} \in C^\infty$  по  $t \in [0, \infty)$ . Аналогично, для  $V_n^{(1)}$ .

2) в силу 11.26 при  $t \rightarrow +0$

$$V_n^{(0)}(x, t) = \mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x) \rightarrow 0 * u_1 = 0 \quad \text{в } D'(\mathbb{R}^n),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)] = \\ &= \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} * u_1(x) \rightarrow \delta * u_1 = u_1(x) \quad \text{в } D'(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

**12.53.** Указание. Воспользоваться формулой (12) из п. 3, задачей 11.15, формулами (III), (III<sub>1</sub>) из § 8 и задачами 8.31 и 8.8.

- 1)  $u = \mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$
- 2)  $u = \mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(a(t - t_0) - |x - x_0|).$
- 3)  $\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} = \frac{1}{2a} \theta(t) \delta(at + x) - \frac{1}{2a} \theta(t) \delta(at - x).$
- 4)  $\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \delta(at - |x|).$
- 5)  $u = \frac{1}{2} \delta(a(t - t_0) - |x|).$
- 6)  $u = \frac{1}{2a} \theta(t) \delta(at + x - x_0) - \frac{1}{2a} \theta(t) \delta(at - x - x_0).$
- 7)  $u = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta(at - |x|).$
- 8)  $u = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial x^2} = \frac{\theta(t)}{2a} [\delta'(at + x) - \delta'(at - x)].$
- 9) 0.

10)  $u = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$ .

**12.54.** См. указания к задаче 12.53.

1) Решение. Уравнение (11) для искомой  $u(x, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t) = \\ &= a^2 u_{xx} + \omega(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t). \end{aligned} \quad (*)$$

В силу формулы (12)

$$\begin{aligned} u &= V_1 + V_1^{(1)} + V_1^{(0)} = \mathcal{E}_1 * [\omega(t) \cdot \delta(x)] + \\ &\quad + \mathcal{E}_1 * [\delta(x) \cdot \delta'(t)] + \mathcal{E}_1 * [\delta(x) \cdot \delta(t)]. \end{aligned} \quad (**)$$

В силу задачи 8.36, 1)

$$V_1 = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \int_0^{t-|x|/a} \omega(\tau) d\tau.$$

В силу задачи 12.53, 1) и 4)

$$V_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \quad \text{и} \quad V_1^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2}\delta(at - |x|).$$

Подставив  $V_1$ ,  $V_1^{(1)}$  и  $V_1^{(0)}$  в (\*\*), получим решение обобщенной задачи Коши (\*). Из 12.2 следует единственность задачи (\*). Из задачи 12.52 следуют предельные соотношения  $u(x, t) \rightarrow \delta(t)$ ,  $u_1(x, t) \rightarrow \delta(t)$ ,  $t \rightarrow 0$  в  $D'(\mathbb{R}^n)$ .

- 2)  $\frac{1}{2a^2}\theta(at - |x|)(at - |x|) + \frac{1}{2}\delta(at - |x - x_0|)$ .
- 3)  $\frac{1}{4}\theta(t - |x|)(t - |x|)^2 + \frac{1}{2}\theta(t - |x - 3|) + \frac{1}{2}\delta(t - |x - 2|)$ .
- 4)  $\frac{1}{2a}\theta(at - |x - x_0|) \left[ 1 - \cos \left( t - \frac{|x - x_0|}{a} \right) \right] - \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$   
(указание:  $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ).
- 5)  $\frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \left[ 2 + \sin \left( t - \frac{|x|}{a} \right) \right]$   
(указание:  $x^2\delta'(x) = 2\delta(x)$ ).
- 6)  $\frac{1}{2a\alpha}\theta(at - |x|)(e^{\alpha(t-|x|/a)} - 1) + \frac{1}{2}\delta(at - |x + 1|) + \frac{1}{2}\delta(at - |x - 1|)$ .
- 7)  $\theta(t - |x - 2|)\sqrt{1 - |x - 2|} + \frac{1}{2}\delta(at - |x + 1|) + \frac{1}{2}\delta(at - |x - 1|)$ .

- 8)  $\frac{1}{6}\theta(t - |x|)(t - |x|)^3 + C\theta(t) + \frac{1}{2}\theta(t - |x + R|) - \frac{1}{2}\theta(t - |x - R|)$   
 (указание: см. задачу 7.14, 1).
- 9)  $\frac{1}{2a}\theta(at - |x|)\left(t - \frac{|x|}{a}\right)\ln\left[e^{-1}\left(t - \frac{|x|}{a}\right)\right] + \frac{1}{2}\delta(at - |x|).$
- 10)  $\frac{1}{2}\theta(t - 1 - |x|)\left(\arctg(t - |x|) - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\delta(t - |x + R|) - \frac{1}{2}\delta(t - |x - R|).$
- 11)  $\frac{1}{2}\theta(t)\delta(t + x + 2) - \frac{1}{2}\theta(t)\delta(t - x - 2) - \frac{1}{2}\theta(t)\delta(t + x - 2) + \frac{1}{2}\theta(t)\delta(t - x + 2)$  (указание: см. задачи 7.14, 1) и 8.8, 2)).
- 12)  $\frac{1}{2a}\theta(at - |x - 1|)\ln\left(1 + t - \frac{|x - 1|}{a}\right) + \frac{1}{2a}\theta(at - |x - \pi|).$
- 13)  $\theta(at - |x|)\frac{a^2t^2 - x^2}{4a^2}.$
- 14)  $-\frac{1}{4}\theta(t - |x|)[\alpha(t - |x|)^2 + 2\beta(t - |x|)] - \theta(t)\delta(t + x) + \theta(t)\delta(t - x)$   
 (указание: воспользоваться равенством  $x\delta''(x) = -2\delta'(x)$  и задачей 8.8, 2)).

**12.58.** Указание. Воспользоваться формулами (12)–(15).

- 1) Решение.  $a = V_1 + V_1^{(1)} + V_1^{(0)}$ ;  $V_1 = 0$ . В силу формулы (13)

$$\begin{aligned} V_1^{(0)} &= \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \theta(\xi) d\xi = \frac{\theta(t)}{2a} \left[ \int_0^{x+at} \theta(\xi) d\xi - \int_0^{x-at} \theta(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{\theta(t)}{2a} [\theta(x+at)(x+at) - \theta(x-at)(x-at)], \\ V_1^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \theta(\xi) d\xi \right] = \frac{\theta(t)}{2a} (\theta(x+at) + \theta(x-at)). \end{aligned}$$

- 2)  $\theta(t) \left( x + \frac{t^2}{2}(x-1) + \frac{|a+at|-|x-at|}{2a} \right).$
- 3)  $\theta(t) \left( \frac{xt^3}{6} + \frac{1}{a}\theta(x+at)\sqrt{x+at} - \frac{1}{a}\theta(x-at)\sqrt{x-at} \right).$
- 4)  $\theta(t) \left( (t+1)\ln(t+1) - t + \frac{1}{2}\theta(t-x)(t-x) + \frac{1}{2}\theta(-t-x)(t+x) \right)$   
 (указание:  $V_1 = \frac{1}{2}\theta(t - |x|) * \frac{\theta(t)}{t+1} \cdot 1(x)$ ).
- 5)  $\theta(t-2) \left( t^2 \ln \sqrt{t} + (1-t) \ln 4 - (1-t)^2 + \frac{t^2}{4} \right) + \frac{\theta(t)}{2}(|x+t| + |x-t|).$

- 6)  $\frac{\theta(t)}{2} \left( \frac{2t^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \theta(2 - |x + at|) + \theta(2 - |x - at|) \right).$
- 7)  $\frac{\theta(t)}{2} (te^{x+t} - e^x \operatorname{sh} t + \theta(x+t)(1 - e^{-x-t}) - \theta(x-t)(1 - e^{t-x})).$
- 8)  $-\theta(t - \pi)(1 + \cos t) + \frac{\theta(t)}{2} [\theta(x + 3t - 3) + \theta(x - 3t - 3) + 2t].$
- 9)  $\frac{\theta(t)}{4} [\theta(x+t)(x+t)^2 + \theta(x-t)(x-t)^2 - 2\theta(x)x^2].$
- 10)  $\frac{\theta(t)}{6} \left[ \theta(x+t)(x+t)^3 + \theta(x-t)(x-t)^3 - 2\theta(x)x^3 + \frac{6}{\alpha} e^{\alpha x} \operatorname{sh} \alpha t \right],$   
 $\alpha \neq 0.$
- 11)  $\frac{\theta(t-1)}{6} (3x + t + 2)(t - 1)^2 +$   
 $+ \frac{\theta(t)}{4} [\operatorname{sign}(x+t)(x+t)^2 - \operatorname{sign}(x-t)(x-t)^2].$
- 12)  $\frac{\theta(t-2)}{6} (t + 4)(t - 2)^2 + \frac{\theta(t)}{2} [\theta(x - 1 + t) \ln(x + t) +$   
 $+ \theta(x - 1 - t) \ln(x - t)].$
- 13)  $\frac{\theta(t)}{2} \left[ \theta(x+t)(x+t)^m \left( 1 + \frac{x+t}{m+1} \right) + \theta(x-t)(x-t)^m \left( 1 - \frac{x-t}{m+1} \right) \right].$
- 14)  $\frac{\theta(t)}{6} [8t^{5/2} + 3\theta(x+t) \sin(x+t) - 3\theta(x-t) \sin(x-t)].$
- 15)  $\theta(t) \left[ \frac{4}{15} xt^{5/2} + \theta(-x-t) \left( \frac{1}{2} + \frac{(x+t)^2}{4} \right) + \right.$   
 $\left. + \theta(-x+t) \left( \frac{1}{2} - \frac{(-x+t)^2}{4} \right) \right].$
- 16)  $\frac{\theta(t)}{6} [6x^2t + 2t^2 + 3\theta(x+t)e^{-\sqrt{x+t}} + 3\theta(x-t)e^{-\sqrt{x-t}}].$
- 17)  $\frac{\theta(t)}{2} [\cos x \sin t + 2 \sin x \sin t - t \cos(x+t)].$
- 18)  $\frac{\theta(t)}{2} [\theta(1+x+t)(1+x+t) - \theta(1+x-t)(1+x-t) +$   
 $+ \theta(-1+x-t)(-1+x-t) - \theta(-1+x+t)(-1+x+t)].$

**12.62.** Указание. Воспользоваться формулами (12)–(15), задачей 12.50 и решением задачи 12.54, 1).

- 1)  $\theta(t) \left( \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} + e^{\alpha x} \operatorname{ch} \alpha at \right).$
- 2)  $\theta(t) \left( t^3 \left( \frac{1}{6} \ln t - \frac{5}{36} \right) + 3^x \operatorname{ch} at \right)$   
 $(\text{указание: } V_1 = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) * \theta(t) t \ln t \cdot 1(x)).$

- 3)  $\frac{\theta(t)}{12} [(1 - a^2)t^4 + 6t^2x^2 + 6(x + at)^m + 6(x - at)^m].$
- 4)  $\frac{\theta(t)}{12} [t^4 + 6t^2x^2 + 12 \cos x \cdot (\sin t + \cos t)].$
- 5)  $\frac{\theta(t)}{18a} [3(x + at)^3 \ln |x + at| - 3(x - at)^3 \ln |x - at| - 6ax^2t - 2a^3t^3].$
- 6)  $\frac{\theta(t)}{2} \left[ t \sin(x + t) - \sin x \sin t + \frac{2^{x+t} - 2^{x-t}}{\ln 2} \right].$
- 7)  $\theta(t) \left[ t - \sin t + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t}{1 + x^2 - t^2} \right].$
- 8)  $\theta(t) \left[ e^t - t - 1 + \frac{1}{2(1 + (x + at)^2)} + \frac{1}{2(1 + (x - at)^2)} \right].$
- 9)  $\theta(t) \left[ \alpha(x + t^2) + \beta + \frac{3}{14} ((x + t)^{7/3} - (x - t)^{7/3}) \right].$
- 10)  $\frac{\theta(t)}{2} \left[ \ln(1 + e^{2x} + 2e^x \operatorname{ch} t) + \int_{x-t}^{x+t} e^z dz \right].$
- 11)  $\theta(t) \left[ \frac{xt^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \sin x \cos t + \frac{(x+t)^{m+1} - (x-t)^{m+1}}{2(m+1)} \right].$
- 12)  $\frac{\theta(t)}{2} [(t^2 - 1) \operatorname{arctg} t + t - t \ln(t^2 + 1) + \ln[(t^2 + x^2 + 1)^2 - 4t^2x^2]].$
- 13)  $\frac{\theta(t)}{2} \left[ \cos x \sin^2 t + \sqrt{1 + (x + 2t)^2} + \sqrt{1 + (x - 2t)^2} \right].$
- 14)  $\frac{\theta(t)}{2} [2x(t - \sin t) + (x + t)^2 e^{-|x+t|} + (x - t)^2 e^{-|x-t|}].$
- 15)  $\theta(t) \left[ e^{-x^2 - 4t^2} \operatorname{ch} 4xt + \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-x} \left( e^{2t} \cos \left( x - 2t - \frac{\pi}{4} \right) - e^{-2t} \cos \left( x + 2t - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right].$
- 16)  $\theta(t) \left[ \sin^2 x \cos^2 t + \cos^2 x \sin^2 t + \frac{1}{2} e^{-|x-t|} (1 + |x - t|) - \frac{1}{2} e^{-|x+t|} (1 + |x + t|) \right].$
- 17)  $\theta(t) \left[ x(t \operatorname{arctg} t - \ln \sqrt{1 + t^2}) + \frac{1}{4 - 2 \cos(x + t)} + \frac{1}{4 - 2 \cos(x - t)} \right].$
- 18)  $\theta(t) \left[ e^x \operatorname{sh} t + x(e^t - 1) - xt - te^x + \frac{1}{2} \ln \frac{x + t + \sqrt{1 + (x + t)^2}}{x - t + \sqrt{1 + (x - t)^2}} \right].$

**12.63.** Указание. Воспользоваться формулой (12) и задачей 11.15, 2).

1)  $\frac{\theta(at - |x|)}{4\pi a^3} \left( \ln \frac{at + \sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}{|x|} + \frac{a}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}} \right) + \frac{\partial \mathcal{E}_2(x, t)}{\partial t}.$

- 2)  $\frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a^2} \left[ \left( 2at^2 + \frac{|x|^2}{a} \right) \ln \frac{at + \sqrt{(at)^2 - |x|^2}}{|x|} - 3t\sqrt{(at)^2 - |x|^2} \right] + \mathcal{E}_2(x - x_0, t).$
- 3)  $\frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a} \int_0^{t-|x|/a} \frac{\omega(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x|^2}} + \mathcal{E}_2(x, t).$
- 4)  $\frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a^2} \left( (\alpha t + \beta) \ln \frac{at + \sqrt{(at)^2 - |x|^2}}{|x|} - \frac{\alpha}{a} \sqrt{(at)^2 - |x|^2} \right) + \mathcal{E}_2(x - x_0, t).$

**12.64.** Указание. Воспользоваться формулой (12) и задачей 11.16, 1).

- 1)  $\frac{\theta(at - |x|)}{4\pi a^2|x|} + \mathcal{E}_3(x, t) + \frac{\partial \mathcal{E}_3(x, t)}{\partial t}$ , где  $\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x)$ .
- 2)  $\frac{\theta(a(t-t_0) - |x-x_0|)}{4\pi a^2|x-x_0|} + \mathcal{E}_3(x - x'', t)$ .
- 3) Решение.  $u = V_3 + V_3^{(0)} + V_3^{(1)}$ . В силу 8.35, 1)

$$\begin{aligned} (V_3, \varphi) &= (\mathcal{E}_3 * \omega(t), \varphi) = \\ &= \left( \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \cdot \omega(\tau), \eta(a^2 t^2 - |x|^2) \varphi(x, t + \tau) \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \left[ \int_0^{\infty} \int_{|x|=at} \frac{\varphi(x, t+\tau)}{4\pi a^2 t} dS_x dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

Так как  $dS_x d(at) = dx$  — элемент объема в  $\mathbb{R}^3$ . то

$$\begin{aligned} (V_3, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \tau + |x|/a)}{4\pi a^2 |x|} dx \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(t - |x|/a)}{4\pi a^2 |x|} \varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V_3 = \frac{\omega(t - |x|/a)}{4\pi a^2 |x|}, \quad V_3^{(0)} = \frac{\partial \mathcal{E}_3(x, t)}{\partial x_k}, \quad V_3^{(1)} = 2 \frac{\partial \mathcal{E}_3(x, t)}{\partial t},$$

так как  $|x|^2 \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_k^2} = 2\delta(x)$ .

- 4)  $\theta(at - |x|) \frac{\sin(t - |x|/a)}{4\pi a^2 |x|} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3(x, t)}{\partial x_k \partial t}$ , так как  $e^{|x|^2} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$ .

**12.68.** Указание. Воспользоваться задачей 11.15, формулами (12), (XVI<sub>1</sub>), (XVI<sub>3</sub>) и (XVII<sub>1</sub>).

- 1)  $\theta(t) \left( \frac{t^2}{2} + Ct + C \right).$
- 2)  $\theta(t) \left( \frac{a^2 t^4}{6} + \frac{2}{3} a^2 t^3 + 2a^2 t^2 + |x|^2 \left( \frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \right).$
- 3)  $\theta(t) \left( \frac{t^4}{12} + \frac{2}{3} a^2 t^2 + t(1 + |x|^2) \right).$
- 4)  $\theta(t) \left( \frac{2}{3} a^2 t^2 + (4a^2 + |x|^2)(t - 1 + e^{-t}) + 1 + |x|^2 \right).$

**12.69.** Указание. Воспользоваться задачей 11.16 и формулами (12), (XVI<sub>2</sub>), (XVI<sub>4</sub>) и (XVII<sub>2</sub>).

- 1)  $\theta(t) \left( \frac{|x|^2 t^2}{2} + \frac{a^2 t^4}{4} + |x|^2 t + a^2 t^2 \right).$
- 2)  $\theta(t) \left( \frac{|x|^2 t^4}{12} + \frac{a^2 t^6}{60} + t + 1 \right).$
- 3)  $\int_0^t \omega(\tau)(t - \tau) d\tau + \theta(t) (\alpha a^2 t^3 + \alpha |x|^2 t + \beta t).$
- 4)  $\frac{\theta(t)}{12} \left[ \frac{(|x|+t)^2}{|x|} \ln(|x|+t) + \frac{(|x|-t)^2}{|x|} \ln(|x|-t) - 2|x|^2 \ln|x| - 3t^2 \right].$
- 5)  $\frac{\theta(t)}{2|x|} \left[ |x|t^2 + \frac{|x|+at}{1+(|x|+at)^2} + \frac{|x|-at}{1+(|x|-at)^2} \right].$
- 6)  $\frac{\theta(t)}{2|x|} \left[ (|x|+t) \sin(|x|+t)^2 + (|x|-t) \sin(|x|-t)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(|x|+t)^2 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}(|x|-t)^2 \right].$
- 7)  $\frac{\theta(t)}{12} \left[ 2t^3 + 12|x|^2 + 36a^2 t^2 + \frac{2}{a|x|} \ln \frac{1+(|x|+at)^2}{1+(|x|-at)^2} \right].$
- 8)  $\theta(t) \left[ \frac{e^{-ikt}}{4\pi} \int_{|x|<|t|} \frac{e^{ik|x|} \omega(x-z)}{|z|} dz + \frac{|x|+t}{2|x|} \sqrt{1+(|x|+t)^2} + \frac{|x|-t}{2|x|} \sqrt{1+(|x|-t)^2} \right].$
- 9)  $\frac{\theta(t)}{4|x|} \left[ 2e^{-|x|^2} \int_0^t e^{-\rho^2} \operatorname{sh} 2\rho|x| d\rho + \sin(|x|+t)^2 - \sin(|x|-t)^2 \right].$
- 10)  $\frac{\theta(t)}{2|x|} \left[ (|x|+t) \ln(1+(|x|+t)^2) + (|x|-t) \ln(1+(|x|-t)^2) + e^{-(|x|^2-t^2)} \operatorname{sh} 2t|x| \right].$

- 11)  $\frac{\theta(t)}{8|x|} \left[ 8e^{-(|x|^2+t^2)}(|x|\operatorname{ch} 2t|x|-t\operatorname{sh} 2t|x|) + [(|x|+t)^2\ln(|x|+t)^2 - (|x|-t)^2\ln(|x|-t)^2 - 4t|x|] \right].$
- 12)  $\theta(t) \left[ t - \sin t + \frac{|x|+at}{2|x|} \cos(|x|+at)^2 + \frac{|x|-at}{2|x|} \cos(|x|-at)^2 \right].$
- 13)  $\frac{\theta(t)}{2|x|} [(|x|-at)\theta(R-||x|-at|) + (|x|+at)\theta(R-|x|-at)]$   
 (указание: решение зависит только от  $|x|$  и  $t$ , подстановкой  $u_1(r, t) = ru(r, t)$  свести задачу к задаче Коши для уравнения колебаний струны и воспользоваться формулой (14)).
- 14)  $\theta(at-|x|) \frac{(a^2t^2-|x|^2)}{8a^2}.$

**12.70.** Указание. Воспользоваться формулой (12) и задачей 11.18.

1) Решение.  $u_1 = V_1 + V_1^{(0)} + V_1^{(1)}$ , где

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathcal{E} * f = \mathcal{E} * \theta(t) = \\ &= \frac{\theta(at-|x|)}{b} \left[ \exp\left(-\frac{b(x-at)}{2a^2}\right) - \exp\left(-\frac{b(x-|x|)}{2a^2}\right) \right]; \\ V_1^{(0)} &= \mathcal{E} * \left[ u_1(x) \cdot \delta(t) - \frac{b}{a} u_0(x) \cdot \delta(t) \right] = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \mathcal{E}; \\ V_1^{(1)} &= \mathcal{E} * [u_0(x) \cdot \delta'(t)] = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} * [\delta(x) \cdot \delta(t)] = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \\ &= \frac{b}{2a} \mathcal{E} + \frac{\delta(at-|x|)}{2} \exp\left(-\frac{b(x-at)}{2a^2}\right), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}(x, t)$  определяется формулой задачи 11.18.

- 2)  $\theta(t) \left[ (e^t-1)(x+t-3) + 3t - xt + \frac{t^2}{2} + \theta(x+t)e^t - \theta(x-t) - \theta(t-|x|)e^{\frac{t-x}{2}} \right].$
- 3)  $\theta(t) \left[ e^t(-1+x+t) - x - \frac{t^2}{2} + 2 \right].$
- 4)  $\theta(t) \left[ \frac{a}{a-1} (e^t - ae^{t/a} + a - 1) + \frac{a^2+a}{2a^2+1} e^{x+at+t/a} + \frac{a^2-a+1}{2a^2+1} e^{x-at} \right],$   
 $a \neq 1.$
- 5)  $\theta(t) \left[ \frac{e^x}{b+2a^2} \left[ \frac{a^2}{b+a^2} (e^{(b+a^2)t/a} - 1) + e^{-at} - 1 \right] + \beta + \alpha(x-at) + \frac{\alpha a^2}{b} (e^{bt/a} - 1) \right].$

**12.71.** Указание. Воспользоваться задачей 11.22.

- 1)  $\frac{\theta(t - |x|)}{2} \left[ J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) - \frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}} J_1(\sqrt{t^2 - x^2}) \right] + \frac{1}{2} \delta(t - |x|).$
- 2) 
$$\begin{aligned} & \frac{\theta(t - |x|)}{2} \int_0^{t-|x|} \omega(\tau) J_0(\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau + \\ & + \frac{\theta(t)}{2} \int_{x-t}^{x+t} \xi J_0(\sqrt{t^2 - (\xi-x)^2}) d\xi. \end{aligned}$$
- 3)  $\theta(t) \left[ 2 - \sin t - \cos t + \int_0^t J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) d\xi - t \int_0^t \frac{J_1(\sqrt{t^2 - \xi^2})}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi \right].$
- 4) 
$$\begin{aligned} & \frac{\theta(t)}{2} \left[ \theta(x+t) + \theta(x-t) + \right. \\ & \left. + \int_{-t}^t \theta(x-\xi) \left( J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) - t \frac{J_1(\sqrt{t^2 - \xi^2})}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} \right) d\xi \right]. \end{aligned}$$

**12.72.** Указание. Воспользоваться задачей 11.22.

- 1)  $\frac{1}{2} e^{-t} \delta(t - |x|) + e^{-t} \theta(t - |x|) \left[ I_0(\sqrt{t^2 - x^2}) + \frac{t}{2} \frac{I_1(\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right].$
- 2)  $\frac{1}{2} \theta(t - |x|) e^{-t} \int_0^{t-|x|} \omega(\tau) e^\tau J_0(i\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau.$
- 3)  $\theta(t) \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_{-t}^t \theta(x-\xi) e^{-t} J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) d\xi \right].$

### § 13. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задачей Коши для уравнения теплопроводности называется задача о нахождении функции  $u(x, t) \in C^2(x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \cap C(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) = C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ , удовлетворяющей уравнению

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (I)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (II)$$

где  $f(x, t) \in C(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$  и  $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  — заданные функции.

Часто рассматривается задача Коши в области  $\{x \in \mathbb{R}^n, t > t_0\}$  при некотором  $t_0 \in \mathbb{R}^1$ , в которой начальное условие задается на плоскости  $\{x \in \mathbb{R}^n, t = t_0\}$ .

Будем говорить, что функция  $g(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , принадлежит классу  $B_\sigma$  при некотором  $\sigma > 0$ , если для любого  $T > 0$  существуют  $C = C(T)$  и  $\alpha = \alpha(T)$  такие, что

$$|g(x, t)| \leq Ce^{\alpha|x|^\sigma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Решение задачи (I), (II) единственno в классе  $B_2$  и тем более в классах  $B_p \subset B_2$  при  $0 \leq p < 2$ .

Если функция  $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap B_0$ , а функция  $f(x, t) \in C^2(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$  и все ее частные производные до второго порядка включительно принадлежат  $B_0$ , то принадлежащее  $B_0$  решение задачи (I), (II) задается *формулой Пуассона*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \cdot \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{(2a\sqrt{\pi(t - \tau)})^n} \cdot \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Для построения решения задачи (I), (II) иногда может быть полезен следующий результат. Пусть (для простоты)  $f(x, t) \equiv 0$ , а функция  $u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  и такова, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^k}{k!} \Delta^k u_0(x)$$

и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием до второго порядка включительно по  $x_1, \dots, x_n, t$ , равномерно сходятся в  $\{|x| \leq R, 0 \leq t \leq T\}$  при любых  $R > 0$  и  $T > 0$ . Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^k}{k!} \Delta^k u_0(x) \tag{III}$$

является решением задачи (I), (II) при  $f(x, t) \equiv 0$ .

Кроме того, отметим, что решением задачи

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n), \quad x_1 \in \mathbb{R}^1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n,$$

является функция

$$u(x, t) = u(x_1, \dots, x_n, t) = \prod_{i=1}^n u_i(x_i, t),$$

где  $u_i(x, t)$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{it} - a^2 u_{i\xi\xi} &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \\ u_i|_{t=0} &= \varphi_i(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

**13.1.** Пусть функция  $u(x, t, t_0)$  принадлежит классу  $C^2$ , ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq t_0 \geq 0$ ). Доказать, что функция  $u(x, t, t_0)$  при каждом  $t_0 \geq 0$  является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=t_0} = f(x, t_0)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x, t, t_0) = \int_{t_0}^t u(x, t, \tau) d\tau$$

при каждом  $t_0 \geq 0$  является решением задачи Коши

$$v_t = a^2 \Delta v + f(x, t), \quad v|_{t=t_0} = 0.$$

**13.2.** Пусть  $u_k(x_k, t)$  — решение задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = f_k(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказать, что функция  $u(x, t) = \prod_{k=1}^n u_k(x_k, t)$  является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = \prod_{k=1}^n f_k(x_k).$$

**13.3.** Пусть функция  $f(x, t) \in C^2(t \geq 0)$  является гармонической по  $x$  при каждом фиксированном  $t \geq 0$ . Доказать, что функция  $u(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$  является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad u|_{t=0} = 0.$$

**13.4.** Пусть  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , а ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \Delta^k u_0(x)$ ,  $\delta > 0$ , и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся равномерно в каждой конечной области. Доказать, что функция

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} t^k}{k!} \Delta^k u_0(x)$$

является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < t < \frac{\delta}{a^2}; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

**Пример 1.** Решить задачу Коши

$$u_t = 2\Delta u + xe^{8t-2z}, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = (x+z)^4 y \cos y + \operatorname{sh}(y-z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

△ Уравнение (1) является неоднородным, поэтому ищем какое-нибудь частное решение уравнения (1) в виде

$$u(x, y, z, t) = g(t)xe^{-2z}. \quad (3)$$

Если  $u = w$ , где  $w$  — функция, определяемая формулой (3), то из уравнения (1) следует, что функция  $g(t)$  удовлетворяет уравнению

$$g'(t) = 8g(t) + e^{8t},$$

а в качестве решения этого уравнения можно взять функцию

$$g(t) = te^{8t}.$$

Следовательно, функция

$$w = te^{8t}xe^{-2z}$$

есть частное решение уравнения (1).

Введем новую исходную функцию  $v$  такую, что  $v = u - w$ . Тогда

$$v = u - te^{8t}xe^{-2z}. \quad (4)$$

Запишем задачу (1), (2) для новой функции  $v$ :

$$v_t = 2\Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = (x+z)^4 y \cos y + \operatorname{sh}(y-z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (6)$$

Пусть функция  $v_1$  есть решение задачи

$$v_t = 2\Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (7)$$

$$v|_{t=0} = (x+z)^4, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (8)$$

функция  $v_2$  — решение задачи

$$v_t = 2\Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (9)$$

$$v|_{t=0} = y \cos y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (10)$$

функция  $v_3$  — решение задачи

$$v_t = 2\Delta v, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (11)$$

$$v|_{t=0} = \operatorname{sh}(y-z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (12)$$

Тогда функция  $v = v_1 \cdot v_2 + v_3$  есть решение задачи (5), (6).

Из формулы (III) следует, что функция

$$\begin{aligned} v_1 &= (x+z)^4 + 2t\Delta((x+z)^4) + \frac{2^2 t^2}{2!} \Delta^2((x+z)^4) = \\ &= (x+z)^4 + 48t(x+z)^2 + 192t^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Из формулы (III) получаем, что

$$v_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k \Delta^k(y \cos y)}{k!}.$$

Поскольку  $\Delta^k(y \cos y) = (y \cos y)^{(2k)} = (-1)^k y \cos y + (-1)^k 2k \times \sin y$ , то

$$\begin{aligned} v_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k ((-1)^k y \cos y + (-1)^k 2k \sin y)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2t)^k}{k!} y \cos y - \\ &\quad - 4t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-2t)^l}{l!} \sin y = e^{2t} y \cos y - 4te^{-2t} \sin y. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как  $\Delta \operatorname{sh}(y-z) = 4 \operatorname{sh}(y-z)$ , то решение задачи (11), (12) ищем в виде

$$v_3 = g(t) \operatorname{sh}(y-z). \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (11), получаем

$$g'(t) \operatorname{sh}(y-z) = 4g(t) \operatorname{sh}(y-z),$$

откуда

$$g(t) = Ce^{4t}, \quad v_3 = Ce^{4t} \operatorname{sh}(y-z).$$

Учитывая условие (12), получаем:  $C = 1$  и

$$v_3 = e^{4t} \operatorname{sh}(y-z) \quad (16)$$

есть решение задачи (11), (12).

Таким образом, из (4) следует, что функция

$$u = te^{8t} xe^{-2x} + v_1 \cdot v_2 + v_3,$$

где функции  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  определены формулами (13), (14), (16) соответственно, есть решение задачи (1), (2).  $\blacktriangle$

**Пример 2.** Найти ограниченное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ u|_{t=0} &= e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (1)$$

△ Искомое решение можно получить с помощью формулы Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{(x-y)^2}{4t} &= \left(1 + \frac{1}{4t}\right)y^2 - \frac{2xy}{4t} + \frac{x^2}{4t} = \\ &= \left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} \cdot y\right)^2 - 2\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} y\right)\left(\sqrt{\frac{4t}{4t+1}} \frac{x}{4t}\right) + \frac{x^2}{4t} = \\ &= \left[\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} y\right)^2 - 2\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} y\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4t(4t+1)}}\right) + \frac{x^2}{4t(4t+1)}\right] - \\ &\quad - \frac{x^2}{4t(4t+1)} + \frac{x^2}{4t} = \left[\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} y - \frac{x}{\sqrt{4t(4t+1)}}\right]^2 + \frac{x^2}{4t+1} = \\ &= \left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\right)^2 \left(y - \frac{x}{4t+1}\right)^2 + \frac{x^2}{4t+1}, \end{aligned}$$

то, сделав замену переменных в интеграле формулы Пуассона,

$$\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} \left(y - \frac{x}{4t+1}\right) = \tau, \quad \frac{dy \cdot \sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}} = d\tau,$$

получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}} \cdot e^{-\tau^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t+1}} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}. \end{aligned}$$

Однако можно воспользоваться и следующими соображениями. Функция

$$v(x, t, \tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}, & x \in \mathbb{R}^1, t > \tau, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^1, t \leq \tau, \end{cases}$$

лишь постоянным множителем отличающаяся от фундаментального решения уравнения теплопроводности с особенностью в точке  $(x = 0, t = \tau)$ , является при  $x \in \mathbb{R}^1, t > \tau$ , решением уравнения

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно, при любой постоянной  $C$  и любом  $\tau < 0$  функция  $w(x, t) = Cv(x, t, \tau)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ , является ограниченным решением задачи Коши

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ w|_{t=0} &= \frac{Ce^{\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{-\tau}}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Полагая  $\tau = -\frac{1}{4}$ ,  $C = \frac{1}{2}$ , в силу теоремы единственности получим, что решение задачи (1) имеет вид

$$u(x, t) = w(x, t) = \frac{1}{2}v\left(x, t, -\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}.$$

С помощью полученного решения можно найти ограниченное решение задачи

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ u|_{t=0} &= xe^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку начальная функция в задаче (2) равна  $-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{-x^2})$ , то решение этой задачи имеет вид

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}\right) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{(4t+1)^{3/2}}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad \blacktriangle$$

В качестве упражнения покажите, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ u|_{t=0} &= xe^{-(x-a)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{aligned}$$

где  $a$  — вещественная постоянная, имеет вид

$$u(x, t) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{4t+1}}}{(4t+1)^{3/2}}(x + 4at), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

а решение задачи

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

$$u|_{t=0} = \cos x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

представляется в виде

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{1-4ti}} \right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Решения задач 13.5–13.8 можно находить по формуле Пуассона, но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 13.1–13.4.

**13.5.** Решить задачи ( $n = 1$ ):

- |                                    |                               |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t,$      | $u _{t=0} = 2.$               |
| 2) $u_t = u_{xx} + 3t^2,$          | $u _{t=0} = \sin x.$          |
| 3) $u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x,$ | $u _{t=0} = \cos x.$          |
| 4) $u_t = u_{xx} + e^t \sin x,$    | $u _{t=0} = \sin x.$          |
| 5) $u_t = u_{xx} + \sin t,$        | $u _{t=0} = e^{-x^2}.$        |
| 6) $4u_t = u_{xx},$                | $u _{t=0} = e^{2x-x^2}.$      |
| 7) $u_t = u_{xx},$                 | $u _{t=0} = xe^{-x^2}.$       |
| 8) $4u_t = u_{xx},$                | $u _{t=0} = \sin x e^{-x^2}.$ |

**13.6.** Решить задачи ( $n = 2$ ):

- |   |                              |
|---|------------------------------|
| 1) $u_t = \Delta u + e^t,$                  | $u _{t=0} = \cos x \sin y.$  |
| 2) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y,$ | $u _{t=0} = 1.$              |
| 3) $u_t = \Delta u + \cos t,$               | $u _{t=0} = xye^{-x^2-y^2}.$ |
| 4) $8u_t = \Delta u + 1,$                   | $u _{t=0} = e^{-(x-y)^2}.$   |
| 5) $2u_t = \Delta u,$                       | $u _{t=0} = \cos xy.$        |

**13.7.** Решить задачи ( $n = 3$ ):

- |  |  |
|--|--|
| 1) $u_t = 2\Delta u + t \cos x,$       | $u _{t=0} = \cos y \cos x.$                          |
| 2) $u_t = 3\Delta u + e^t,$            | $u _{t=0} = \sin(x - y - z).$                        |
| 3) $4u_t = \Delta u + \sin 2x,$        | $u _{t=0} = \frac{1}{4} \sin 2x + e^{-x^2} \cos 2y.$ |
| 4) $u_t = \Delta u + \cos(x - y + z),$ | $u _{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}.$                         |
| 5) $u_t = \Delta u,$                   | $u _{t=0} = \cos(xy) \sin x.$                        |

**13.8.** Решить задачу Коши

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

для следующих  $u_0$ :

- 1)  $u_0 = \cos \sum_{k=1}^n x_k.$     2)  $u_0 = e^{-|x|^2}.$
- 3)  $u_0 = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) e^{-|x|^2}.$     4)  $u_0 = \left( \sin \sum_{k=1}^n x_k \right) e^{-|x|^2}.$
- 5)  $u_0 = \exp \left\{ - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right\}.$

**13.9.** Решить задачи.

- 1)  $u_t - \frac{1}{4}\Delta u = \cos 5x \cdot e^{t-5z}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = y^3 \operatorname{sh} 2x, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 2)  $u_t - \Delta u = ye^{2z-t}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = (y - x^4) \sin z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 3)  $u_t - 4\Delta u = e^{x+z+4t}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = x^3 \cos y, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 4)  $u_t - 2\Delta u = (x^2 + 4y^2 - 5z^2)e^t, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = xy^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 5)  $u_t - \Delta u = xy, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = z^3 \sin(x - 2y), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 6)  $3u_t - \Delta u = (z^2 - x^2)t, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = (y^4 + 6z^2y)e^{3x}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 7)  $5u_t - \Delta u = e^t \cos(x + y), t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$   
 $u|_{t=0} = (x + 2y)^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$
- 8)  $10u_t - \Delta u = 2t \cos x \sin y, t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$   
 $u|_{t=0} = (3x + y)^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$
- 9)  $u_t - 2\Delta u = xe^{8t-2z}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = (x + z)^4 \cos y, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 10)  $5u_t - \Delta u = 0, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = (20x + z^5)e^{x-3y}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 11)  $u_t - 5\Delta u = \frac{\operatorname{ch}(4y - 3z) \cos 5x}{(t + 3)^2}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = y \operatorname{ch}(4y - 3z) \cos 5x, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 12)  $2u_t - 3\Delta u = \sqrt{t+9} \cdot e^{-y} \cos z, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = (2x + y + z)e^{-y} \cos z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$
- 13)  $u_t - 3\Delta u = \frac{\cos(3x - 4y) \operatorname{sh} 5z}{t + 2}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$   
 $u|_{t=0} = x \cos(3x - 4y) \operatorname{sh} 5z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

- 14)  $2u_t - 7\Delta u = \frac{\sin x \operatorname{ch} z}{\sqrt{t+4}}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 15)  $u_t - \Delta u = (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \sin(x+z)e^{-y^2}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 16)  $u_t - \frac{1}{4}\Delta u = t^4(x+1)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \sin(x+y)e^{2z-z^2}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 17)  $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = \operatorname{ch} t \cdot e^{-5z} \cos(3x+4y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x+y) \cos(x+z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 18)  $u_t - \frac{1}{4}\Delta u = (x^2 + 7x + 2y^2 - 3z^2 + 11)t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^3e^{-y^2} \sin 2z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**13.10.** Решить задачи.

- 1)  $u_t - \Delta u = \cos(3t + x + y + z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = xyz \cos x$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 2)  $u_t - \Delta u = e^{t+x+y} \cos z$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x+y+z) \sin x$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 3)  $u_t - \Delta u = t^2 x$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-z} \cdot \sin^3(x+y)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 4)  $u_t - \Delta u = 27(t^2 - 1) \cos(x+y+z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x-y+z) \sin z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 5)  $u_t - \Delta u = (5t^2 + 2t + 5) \sin(x-2z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (x+y+z) \cos y$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 6)  $u_t - \Delta u = \operatorname{ch}(x-y+2z+6t)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 y^2 z^2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 7)  $u_t - \Delta u = e^{-9t} \cos(2x-y+2z)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = xy^2 z^3 \cos y \sin(x+y+z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 8)  $17u_t - \Delta u = te^{-3t}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (15x+8y)e^{-\frac{(15x+8y)^2}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{12}-z\right)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 9)  $13u_t - \Delta u = te^{-2t}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (12x+5y)e^{-\frac{(12x+5y)^2}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}-z\right)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 10)  $u_t - \Delta u = (\cos t - 2 \sin t) e^{x+y}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \cos x \cos 2y$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- 11)  $u_t - \Delta u = 4e^{-t} \cos(2x - y)$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-2x^2-y^2} + \cos(2x - y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- 12)  $u_t - 2\Delta u = \frac{5x^2 - 12y^2 + 7z^2}{9t^2 + 4}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = \left(x - \frac{y}{2}\right) e^{-(x-\frac{y}{2})^2+z}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 13)  $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = \frac{8x^2 - 5y^2 - 3z^2}{4t^2 + 25}$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = (3x + y)e^{-(3x+y)^2-2z}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 14)  $u_t - \Delta u = -12 \operatorname{ch} 2t \operatorname{ch} z$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = 2x^3 \cos^2 y + z \sin(x + 2y)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 15)  $u_t - \Delta u = 5e^t \sin t \cos z$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x^4 \operatorname{ch} z + 2 \operatorname{sh}^2(y - 2z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 16)  $u_t - \frac{1}{4}\Delta u = (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-3y^2} \sin(x + z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 17)  $u_t - 2\Delta u = (zx^2 - zy^2) \sin 2t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-(x-z)^2} \cos y$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 18)  $u_t - \Delta u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = x(y^2 - z^2) \operatorname{ch} x$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 19)  $u_t - \Delta u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = xyz \cos x$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 20)  $u_t - 2\Delta u = t^2$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-3x^2} \cos(y + z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- 21)  $u_t - 3\Delta u = \sin t$ ,  $t > 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $u|_{t=0} = e^{-2z^2} \sin(2x + y)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Если решение  $u(x, t)$  классической задачи Коши (I), (II) и функцию  $f(x, t) \in C$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ ) продолжить нулем при  $t < 0$ , то полученная таким путем функция  $u(x, t)$  удовлетворяет (в обобщенном смысле) в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнению

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t). \quad (\text{IV})$$

*Обобщенной задачей Коши* для уравнения теплопроводности с источником  $F(x, t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $F = 0$  при  $t < 0$ , называется задача о нахождении обобщенной функции  $u \in D'$ , обращающейся в нуль при  $t < 0$  и удовлетворяющей в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + F(x, t). \quad (\text{V})$$

Если существует свертка  $\mathcal{E} * F$ , где

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{at})^n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\}$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности, то

$$u = \mathcal{E} * F$$

есть решение обобщенной задачи Коши (V). Это решение единственно в классе обобщенных функций  $u(x, t)$ , для которых существует свертка  $\mathcal{E} * u$ .

Свртка  $V = \mathcal{E} * F$  называется обобщенным *тепловым потенциалом с плотностью*  $F$ .

В частности, если  $F = u_0(x) \cdot \delta(t)$ , где  $u_0 \in D'(\mathbb{R}^n)$ , то свртка

$$V^{(0)} = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x) \cdot \delta(t) = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x)$$

(если она существует) называется обобщенным *поверхностным тепловым потенциалом с плотностью*  $u_0$ .

Тепловой потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению (V).

Обозначим через  $M$  класс всех функций, локально интегрируемых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , равных нулю при  $t < 0$  и ограниченных в каждой полосе  $0 \leq t \leq T$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**13.11.** Найти решение обобщенной задачи Коши (V) для следующих  $F$ :

- 1)  $\delta(t) \cdot \delta(x)$ .      2)  $\delta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0)$ ,  $t_0 \geq 0$ .
- 3)  $\delta(t) \cdot \frac{\partial(\delta(x))}{\partial x_k}$ .      4)  $\delta'(t) \cdot \delta(x)$ .
- 5)  $\delta(t - t_0) \cdot \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_k^2}$ ,  $t_0 \geq 0$ .      6)  $\delta(t)' \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$ .
- 7)  $\theta(t) \cdot \delta(x)$ . 8)  $\theta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0)$ ,  $t_0 \geq 0$ . 9)  $\delta'(t) \cdot \delta(x - x_0)$ .
- 10)  $\omega(t) \cdot \delta(x)$ , где  $\omega \in C(t \geq 0)$ ,  $\omega = 0$  при  $t < 0$ .

**13.12.** Пусть  $f(x, t) \in M$ . Показать, что свртка  $V = \mathcal{E} * f$ :

- 1) существует в  $M$  и представляется формулой

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi d\tau. \quad (\text{VI})$$

- 2) удовлетворяет оценке

$$|V(x, t)| \leq t \sup_{\substack{\xi \\ 0 \leq \tau \leq t}} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0.$$

- 3) представляет собой единственное в классе  $M$  решение (обобщенное) уравнения  $V_t = a^2 \Delta V + f(x, t)$ .

**13.13.** Пусть  $u_0(x)$  — ограниченная функция в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что свертка

$$V^{(0)} = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x) \cdot \delta(t) = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x):$$

- 1) существует в  $M$  и представляется формулой

$$V^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi. \quad (\text{VII})$$

- 2) удовлетворяет оценке

$$|V^{(0)}(x, t)| \leq t \sup_{\xi} |u_0(\xi)|, \quad t > 0.$$

- 3) представляет собой единственное в классе  $M$  решение (обобщенное) уравнения  $V_t^{(0)} = a^2 \Delta V^{(0)} + u_0(x) \cdot \delta(t)$ .

**13.14.** Доказать, что решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t) \quad (\text{VIII})$$

выражается классической формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t - \tau)}]^n} \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} d\xi d\tau, \quad (\text{IX}) \end{aligned}$$

если функция  $f$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и равна нулю при  $t < 0$ , функция  $u_0$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и оба слагаемых в формуле (IX) локально интегрируемы в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**13.15.** Доказать:

- 1) если  $f \in C^2(t \geq 0)$  и все ее производные до второго порядка включительно принадлежат классу  $M$ , то  $V = \mathcal{E} * f \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$  удовлетворяет при  $t > 0$  уравнению  $V_t = a^2 \Delta V + f(x, t)$  и начальному условию  $V|_{t=+0} = 0$ ;
- 2) если  $u_0(x)$  — непрерывная и ограниченная функция, то

$$V^{(0)} = \mathcal{E} * u_0 \in C^\infty(t > 0) \cap C(t \geq 0)$$

- удовлетворяет уравнению  $V_t^{(0)} = a^2 \Delta V^{(0)}$  и начальному условию  $V|_{t=+0} = u_0(x)$ ;
- 3) при выполнении условий 1), 2) функция  $u = V + V^{(0)}$ , где  $V, V^{(0)}$  определяются формулами (VI) и (VII), есть решение классической задачи Коши (I), (II).
- Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (VIII).

**13.16.** Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

для следующих  $u_0$ :

- 1)  $\theta(x)$ , 2)  $\theta(1-x)$ , 3)  $\theta(1-|x|)$ ,  
 4)  $\theta(x)e^{-x}$ , 5)  $\theta(x)(x+1)$ , 6)  $\theta(x-1)x$ .

Показать, что найденные функции  $u(x, t)$  при  $t > 0$  принадлежат классу  $C^\infty$  и удовлетворяют уравнению  $u_t = u_{xx}$ , а при  $t \rightarrow +0$  непрерывны во всех точках непрерывности функции  $u_0(x)$  и в этих точках удовлетворяют начальному условию  $u|_{t=+0} = u_0(x)$ .

**13.17.** Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)$$

для следующих  $f$ :

- 1)  $\theta(t-1)e^t$ , 2)  $\theta(t-\pi) \cos t$ , 3)  $\theta(t-1)x$ ,  
 4)  $\theta(t-2)e^x$ , 5)  $\theta(t)\theta(x)$ , 6)  $\theta(t) \cdot \theta(1-|x|)$ .

Показать, что найденные функции  $u(x, t)$  при  $t > 0$  принадлежат классу  $C(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяют начальному условию  $u|_{t=0} = 0$ , а в точках непрерывности функции  $f(x, t)$  принадлежат классу  $C^2$ .

**13.18.** Решить обобщенную задачу Коши (VIII) для уравнения теплопроводности ( $x \in \mathbb{R}^1$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (I), (II).

- 1)  $f = \theta(t)x$ ,  $u_0 = x$ .  
 2)  $f = \theta(t)x^2$ ,  $u_0 = x^2$ .  
 3)  $f = \theta(t)2xt$ ,  $u_0 = x^3 + x^4$ ,  $a = 1$ .  
 4)  $f = \theta(t)3x^2t^2$ ,  $u_0 = e^x$ ,  $a = 1$ .  
 5)  $f = \theta(t)\sqrt{t}$ ,  $u_0 = \operatorname{sh} x$ .  
 6)  $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$ ,  $u_0 = xe^x$ .  
 7)  $f = \theta(t)\ln t$ ,  $u_0 = x \sin x$ ,  $a = 1$ .  
 8)  $f = \theta(t)x \cos x$ ,  $u_0 = x \cos x$ ,  $a = 1$ .

- 9)  $f = \theta(t)e^x$ ,  $u_0 = \theta(x)x$ ,  $a = 1$ .  
 10)  $f = \theta(t)xe^x$ ,  $u_0 = \theta(x)x^2$ ,  $a = 1$ .

**13.19.** Решить обобщенную задачу Коши (VIII) для уравнения теплопроводности ( $x \in \mathbb{R}^2$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (I), (II).

- 1)  $f = \theta(t)xye^t$ ,  $u_0 = x^2 - y^2$ .  
 2)  $f = \theta(t)(x^2 + y^2)$ ,  $u_0 = x^2 + y^2$ .  
 3)  $f = \theta(t)4xy$ ,  $u_0 = x^2y^2$ ,  $a = 1$ .  
 4)  $f = \theta(t)e^x \cos y$ ,  $u_0 = e^{x+y}$ .  
 5)  $f = 0$ ,  $u_0 = x \cos y$ .  
 6)  $f = \theta(t)xy$ ,  $u_0 = \cos y$ .

**13.20.** Решить обобщенную задачу Коши (VIII) для уравнения теплопроводности ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (I), (II).

- 1)  $f = \theta(t)xye^z$ ,  $u_0 = xe^y \cos x$ .  
 2)  $f = \theta(t)xy \cos z$ ,  $u_0 = (x^2 + y^2) \cos z$ ,  $a = 1$ .  
 3)  $f = \theta(t)xyz \cos t$ ,  $u_0 = xy^2z^3$ .  
 4)  $f = \theta(t)(x^2 - 2y^2 + z^2)e^t$ ,  $u_0 = x + y^2 + z^3$ .  
 5)  $f = \theta(t) \cos t \sin 3x \cos 4ye^{5z}$ ,  $u_0 = \sin 3x \cos 4ye^{4z}$ ,  $a = 1$ .

**13.21.** Решить обобщенную задачу Коши (VIII) для уравнения теплопроводности ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (I), (II).

- 1)  $f = \theta(t)|x|^2$ ,  $u_0 = |x|^2$ .  
 2)  $f = \theta(t) \sum_{k=1}^n x_k^3$ ,  $u_0 = \sum_{k=1}^n x_k^3$ .  
 3)  $f = \theta(t)e^t$ ,  $u_0 = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}$ .  
 4)  $f = 0$ ,  $u_0 = \sum_{k=1}^n x_k \exp \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}$ .  
 5)  $f = 0$ ,  $u_0 = \left( \cos \sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}$ .

Уравнение  $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t)$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — постоянные, заменой  $v(y, t) = e^{-ct}u(y - bt, t)$  сводится к уравнению теплопроводности.

**13.22.** Найти решение задачи

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t), \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = 1, u_0 = 1, c = 1;$
- 2)  $f = e^t, u_0 = \cos x, a = c = 1, b = 0;$
- 3)  $f = e^t, u_0 = \cos x, a = \sqrt{2}, c = 2, b = 0;$
- 4)  $f = t \sin x, u_0 = 1, a = c = 1, b = 0;$
- 5)  $f = 0, u_0 = e^{-x^2};$
- 6)  $f = w(t) \in C^1(t \geq 0), u_0 \in C$  и ограничена.

**13.23.** Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = \theta(t-1), u_0 = \theta(x), c \neq 0;$
- 2)  $f = \theta(t-1), u_0 = \theta(1-x), c = 0;$
- 3)  $f = \theta(t-1)e^t, u_0 = \theta(1-|x|), c \neq 1;$
- 4)  $f = \theta(t-1)e^t, u_0 = \theta(x)e^x, c = 1;$
- 5)  $f = \theta(t-1)e^x, u_0 = x\theta(x); a = 2, b = c = -2;$
- 6)  $f = \theta(t)\theta(x), u_0 = x.$

Исследовать гладкость полученных решений, как и в 13.16, 13.17.

**13.24.** Решить обобщенную задачу Коши

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t), \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

- 1)  $f = \theta(t)x^2, u_0 = x^2, a = b = c = 1.$
- 2)  $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}, u_0 = e^x.$
- 3)  $f = \theta(t)te^x, u_0 = xe^x, a = 2, b = -1, c = -2.$
- 4)  $f = \theta(t)xe^x, u_0 = xe^x + \operatorname{sh} x, a = c = 1, b = -2.$
- 5)  $f = \theta(t)e^x \cos t \sin x, u_0 = e^x \cos x; a = 1, b = -2, c = 2.$
- 6)  $f = \theta(t)x, u_0 = \sin x, a = b = c = 1.$

**13.25.** Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

где  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  и  $|u_0(x)| \leq M e^{-\delta|x|^2}, \delta \geq 0$ .

Доказать, что при всех  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(t, x)| \leq M(1 + 4a^2 \delta t)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{\delta|x|^2}{1 + 4a^2 \delta t} \right\}.$$

**13.26.** Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

где  $u_0$  — финитная непрерывная функция.

Доказать, что для любых  $T > 0$ ,  $\delta < \frac{1}{4a^2 T}$  существует  $M > 0$  такое, что

$$|u(x, t)| \leq M e^{-\delta|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

**13.27.** Пусть  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  и  $|u_0(x)| \leq M e^{\delta|x|^2}$ , где  $\delta > 0$ . Доказать, при  $0 < t < \frac{1}{4a^2 \delta}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  функция

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi \quad (\text{X})$$

принадлежит классу  $C^\infty$  и является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < t < \frac{1}{4a^2 \delta}, \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

**13.28.** Доказать, что если условие задачи 13.27 выполняется для всех  $\delta > 0$ , то функция (X) принадлежит классу  $C^\infty$  при  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  и является решением классической задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

**13.29.** Методом обобщенных функций решить задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u|_{x=0} = 0, \end{aligned}$$

где  $u_0(x) \in C(x \geq 0)$ .

### Ответы к § 13

**13.5.** 1)  $1 + e^x + \frac{1}{2}t^2$ . 2)  $t^2 + e^{-t} \sin x$ .

3)  $(1+t)e^{-t} \cos x$ . 4)  $\operatorname{ch} t \sin x$ .

5)  $1 - \cos t + (1+4t)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{x^2}{1+4t} \right\}$ .

6)  $(1+t)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{2x - x^2 + t}{1+t} \right\}$ .

$$7) x(1+4t)^{-3/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{1+4t}\right\}.$$

$$8) (1+4t)^{-1/2} \sin \frac{x}{1+t} \exp\left\{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}\right\}.$$

**13.6.** 1)  $e^t - 1 + e^{-3t} \cos x \sin y$ .

$$2) 1 + \frac{1}{5} \sin x \sin y (2 \sin t - \cos t + e^{-2t}).$$

$$3) \sin t + \frac{xy}{(1+4t)^3} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}\right\}.$$

$$4) \frac{t}{8} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{1+t}\right\}.$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cos \frac{xy}{1+t^2} \exp\left\{-\frac{t(x^2+y^2)}{2(1+t^2)}\right\}.$$

**13.7.** 1)  $\frac{1}{4} \cos x (e^{-2t} - 1 + 2t) + \cos y \cos z e^{-4t}$ .

$$2) e^t - 1 + \sin(x-y-z)e^{-9t}.$$

$$3) \frac{1}{4} \sin 2z + \frac{\cos 2y}{\sqrt{1+t}} \exp\left\{-t - \frac{x^2}{1+t}\right\}.$$

$$4) \frac{1}{3} \cos(x-y+z)(1-e^{-3t}) + \frac{1}{\sqrt{1+12t}} \exp\left\{-\frac{(x+y-z)^2}{1+12t}\right\}.$$

$$5) \frac{\sin z}{\sqrt{1+4t^2}} \cos \frac{xy}{1+4t^2} \exp\left\{-\frac{t(x^2+y^2)}{2(1+t^2)}\right\}.$$

**13.8.** 1)  $e^{-nt} \cos \sum_{k=0}^n x_k$ . 2)  $(1+4t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{1+4t}\right\}$ .

$$3) (1+4t)^{-(n+2)/2} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{1+4t} (\sum_{k=1}^n x_k)\right\}.$$

$$4) (1+4t)^{-n/2} \sin\left(\frac{1}{1+4t} \sum_{k=1}^n x_k\right) \exp\left\{-\frac{nt+|x|^2}{1+4t}\right\}.$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{1+4nt}} \exp\left\{-\frac{1}{1+4nt} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\right\}.$$

**13.9.** 1)  $u(x, y, z, t) = (e^t - 1) \cos 5x e^{-5z} + \left(y^3 + \frac{3}{2}ty\right) e^t \sin 2x$ .

$$2) u(x, y, z, t) = \frac{1}{5} (e^{4t} - e^{-t}) y e^{-2z} + (y - x^4 - 12tx^2 - 12t^2) e^{-t} \sin z.$$

- 3)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{4}e^{x+z+4t}(e^{4t} - 1) + (x^3 + 24tx)e^{-4t} \cos y.$
- 4)  $u(x, y, z, t) = (x^2 + 4y^2 - 5z^2)(e^t - 1) + xy^2 + 4tx.$
- 5)  $u(x, y, z, t) = txy + (z^3 + 12tz)e^{-10t} \sin(x - 2y).$
- 6)  $u(x, y, z, t) = \frac{t^2}{6}(z^2 - x^2) + e^{3t+3x} \left( y^4 + 6z^2y + 4t(y^2 + y) + \frac{4}{3}t^2 \right).$
- 7)  $u(x, y, t) = \frac{1}{7}(e^t + e^{-\frac{2}{5}t}) \cos(x + y) + (x + 2y)^2 + 2t.$
- 8)  $u(x, y, t) = \left( 5e^{-\frac{1}{5}t} + t - 5 \right) \cos x \sin y + (3x + y)^3 + 6t(3x + y).$
- 9)  $u(x, y, z, t) = txe^{8t-2z} + ((x+z)^4 + 48t(x+z)^2 + 192t^2)e^{-2t} \cos y.$
- 10)  $u(x, y, z, t) = (8t + 20x)e^{2t+x+3y} + \left( z^5 + 4tz^3 + \frac{12}{5}t^2z \right) e^{2t+x-3y}.$
- 11)  $u(x, y, z, t) =$   
 $= \left( y - \frac{1}{t+3} + \frac{1}{3} \right) \operatorname{ch}(4y - 3z) \cos 5x + 40t \operatorname{sh}(4y - 3z) \cos 5x.$
- 12)  $u(x, y, z, t) =$   
 $= \left( \frac{1}{3}(t+9)^{3/2} - 9 + 2x + y + z \right) e^{-y} \cos z - 3te^{-y}(\sin z + \cos z).$
- 13)  $u(x, y, z, t) = \left( \ln \frac{t+2}{2} + x \right) \cos(3x - 4y) \operatorname{sh} 5z - 18t \sin(3x - 4y) \operatorname{sh} 5z.$
- 14)  $u(x, y, z, t) = (\sqrt{t+4} - 2 + x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z + 7t(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z).$
- 15)  $u(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - 2z^2) \sin t + \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \cdot e^{-\frac{y^2}{1+4t}-2t} \cdot \sin(x + z).$
- 16)  $u(x, y, z, t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin(x + y) \frac{1}{\sqrt{1+t}} \cdot e^{\frac{2z-z^2+1}{t+1}} + \frac{1}{5}t^5(x + 1).$
- 17)  $u(x, y, z, t) = \operatorname{sh} t \cdot e^{-5z} \cos(3x + 4y) + e^{-t}y \cos(x + z) + e^{-t}x \times \cos(x + z) - te^{-t} \sin(x + z).$
- 18)  $u(x, y, z, t) =$   
 $= \frac{1}{2}t^2(x^2 + 7x + 2y^2 - 3z^2 + 11) + \left( x^3 + \frac{3}{2}xt \right) e^{-z} \sin 2z \frac{1}{\sqrt{t+1}} e^{-\frac{y^2}{1+t}}.$
- 13.10.** 1)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{6}[\cos(3t + x + y + z) +$   
 $+ \sin(3t + x + y + z)] + e^{-t}(x \cos x - 2t \sin x)yz - \frac{1}{6}e^{-3t}[\cos(x + y + z) + \sin(x + y + z)].$
- 2)  $u(x, y, z, t) = te^{t+x+y} \cos z + e^{-t}[(x + y + z) \sin x + 2t \cos x].$

- 3)  $u(x, y, z, t) = \frac{t^3 x}{3} + e^{-z} \left[ e^{-t} \frac{3}{4} \sin(x+y) - e^{-17t} \frac{1}{4} \sin(3(x+y)) \right].$
- 4)  $u(x, y, z, t) = (9t^2 - 6t - 7) \cos(x+y+z) + 7e^{-3t} \cos(x+y+z) + e^{-t}(x-y+z) \sin z + 2te^{-t} \cos z.$
- 5)  $u(x, y, z, t) = (t^2 + 1) \sin(x-2z) - e^{-5t} \sin(x-2z) + e^{-t}(x+y+z) \cos y - 2te^{-t} \sin y.$
- 6)  $u(x, y, z, t) = \frac{t}{2} \operatorname{ch}(x-y+2z+6t) + \left( \frac{t}{2} + \frac{1}{12} \right) \operatorname{sh}(x-y+2z+6t) + (x^2 + 2t)(y^2 + 2t)(z^2 + 2t) - \frac{1}{12} e^{6t} \operatorname{sh}(x-y+2z).$
- 7)  $u(x, y, z, t) = te^{-9t} \cos(2x-y+2z) + x(y^2 + 2t)(z^3 + 6zt) + \frac{1}{2} e^{-6t} \sin(x+2y+z) + \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(x+z).$
- 8)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{153} - \frac{1}{51} e^{-3t} \left( t + \frac{1}{3} \right) + \frac{15x+8y}{(1+34t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(15x+8y)^2}{2+68t} - \frac{t}{17} \right] \cos \left( \frac{\pi}{12} - z \right).$
- 9)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{52} - \frac{1}{26} \left( t + \frac{1}{2} \right) e^{-2t} + \frac{12x+5y}{(1+26t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(12x+5y)^2}{2+52t} - \frac{t}{13} \right] \sin \left( \frac{\pi}{8} - z \right).$
- 10)  $u(x, y, z, t) = \sin t e^{x+y} + e^{-5t} \cos x \cos 2y.$
- 11)  $u(x, y, z, t) = e^{-t} \cos(2x-y) + \frac{1}{\sqrt{1+8t} \sqrt{1+4t}} e^{\frac{-2x^2}{1+8t}} e^{\frac{-y^2}{1+4t}}.$
- 12)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{6} (5x^2 - 12y^2 + 7z^2) \operatorname{arctg} \frac{3t}{2} + \frac{x - \frac{y}{2}}{(1+10t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{1+10t} + z + 2t}.$
- 13)  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{10} (8x^2 - 5y^2 - 3z^2) \operatorname{arctg} \frac{2t}{5} + \frac{3x+y}{(1+20t)^{3/2}} e^{-\frac{(3x+y)^2}{1+20t} - 2z + 2t}.$
- 14)  $u(x, y, z, t) = (4e^t - 6e^{2t} + 2e^{-2t}) \operatorname{ch} z + (x^3 + 6xt)(1 + e^{-4t} \cos 2y) + ze^{-5t} \sin(x+2y).$
- 15)  $u(x, y, z, t) = [e^{-t} + e^t(-\cos t + 2 \sin t)] \cos z + e^t(x^4 + 12x^2t + 12t^2) \operatorname{ch} z + e^{20t} \operatorname{ch}(2(y-2z)) - 1.$
- 16)  $u(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - 2z^2) \sin t + \sin(x+z) \frac{1}{\sqrt{1+3t}} e^{-\frac{3y^2}{1+3t} - \frac{t}{2}}.$
- 17)  $u(x, y, z, t) = z(x^2 - y^2) \sin^2 t + \cos y \frac{1}{\sqrt{1+16t}} e^{-\frac{(x-z)^2}{1+16t} - 2t}.$
- 18)  $u(x, y, z, t) = (y^2 - z^2) e^t (x \operatorname{ch} x + 2t \operatorname{sh} x).$

19)  $u(x, y, z, t) = yze^{-t}(x \cos x - 2t \sin x).$

20)  $u(x, y, z, t) = xt^2 + \frac{1}{\sqrt{2t+1}}e^{-\frac{3x^2}{24t+1}} \cdot e^{-4t} \cos(y+z).$

21)  $u(x, y, z, t) = 1 - \cos t + \frac{1}{\sqrt{24t+1}}e^{-\frac{2z^2}{24t+1}} \cdot e^{-15t} \sin(2x+y).$

**13.11.** 1)  $\mathcal{E}(x, t).$  2)  $\mathcal{E}(x - x_0, t - t_0).$

3)  $-\frac{x_k}{2a^2 t} \mathcal{E}(x, t).$  4)  $\left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t}\right) \mathcal{E}(x, t) + \delta(x, t).$

5)  $\frac{x_k^2 - 2a^2(t - t_0)}{4a^4(t - t_0)^2} \mathcal{E}(x, t - t_0).$

6)  $\frac{x_k}{4a^2 t^2} \left(n + 2 - \frac{|x|^2}{2a^2 t}\right) \mathcal{E}(x, t) + \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial x_k}.$

7)  $\int_0^t \mathcal{E}(x, \tau) d\tau.$  8)  $\int_0^{t-t_0} \mathcal{E}(x - x_0, \tau) d\tau.$

9)  $\left[\frac{|x - x_0|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t}\right] \mathcal{E}(x - x_0, t) + \delta(x - x_0, t).$  10)  $\int_0^t \omega(\tau) \mathcal{E}(x, t - \tau) d\tau.$

**13.16.** 1)  $\theta(t)\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right).$  2)  $\theta(t)\Phi\left(\frac{1-x}{\sqrt{2t}}\right).$

3)  $\theta(t) \left[ \Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{\sqrt{2t}}\right) \right].$  4)  $\theta(t)e^{t-x}\Phi\left(\frac{x-2t}{\sqrt{2t}}\right).$

3)  $\theta(t) \left[ \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + (x+1)\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \right].$

4)  $\theta(t) \left[ \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{4t}\right) + x\Phi\left(\frac{x-1}{\sqrt{2t}}\right) \right].$

**13.17.** 1)  $\theta(t-1)(e^t - e).$  2)  $\theta(t-\pi) \sin t.$

3)  $\theta(t-1)(t-1)x.$  4)  $\theta(t-2)(e^{t-2} - 1)e^x.$

5)  $\theta(t) \int_0^t \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right) d\tau.$  6)  $\theta(t) \int_0^t \left[ \Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{3\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{\sqrt{3\tau}}\right) \right] d\tau.$

**13.18.** Ука з а н и е. Для доказательства см. задачу 13.15, для нахождения решения см. текст перед задачей 13.5.

1)  $\theta(t)(t+1)x.$  2)  $\theta(t)(x^2 + x^2 t + 2a^2 t + a^2 t^2).$

3)  $\theta(t)[x^3 + x^4 + 6t(x + 2x^2) + t^2(12 + x)].$

4)  $\theta(t)\left(x^2 t^3 + \frac{1}{2}t^4 + e^{x+t}\right).$  5)  $\theta(t)\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + e^{a^2 t} \operatorname{sh} x\right).$

- 6)  $\theta(t) \left( 2\sqrt{t} + (x + 2a^2 t)e^{x+a^2 t} \right).$
- 7)  $\theta(t)[t \ln t - t + (x \sin x + 2t \cos x)e^{-t}].$
- 8)  $\theta(t)[x \cos x + 2 \sin x(e^{-t} - 1)].$
- 9)  $\theta(t) \left[ e^x (e^t - 1) + \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-x^2/(4t)} + x \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \right].$
- 10)  $\theta(t) \left[ (2-x)e^x + (x+2t-2)e^{x+t} + x \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-x^2/(4t)} + (x^2+2t)\Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \right].$

**13.19.** Указание. См. указание в ответе к задаче 11.18.

- 1)  $\theta(t)[x^2 - y^2 + xy(e^t - 1)].$
- 2)  $\theta(t)[(x^2 + y^2)(t + 1) + 4a^2 t + 2a^2 t^2].$
- 3)  $\theta(t)[x^2 y^2 + 2t(x + y)^2 + 4t^2].$  4)  $\theta(t)[te^x \cos y + e^{x+y+2a^2 t}].$
- 5)  $\theta(t)xe^y \cos z.$  6)  $\theta(t) \left( xy t + \cos y e^{-a^2 t} \right).$

**13.20.** Указание. См. указание в ответе к задаче 11.18.

- 1)  $\theta(t)[xe^y \cos z + e^{-2}xye^z(e^{a^2 t} - 1)].$
- 2)  $\theta(t) \cos z[xy(1 - e^{-t}) + (x^2 + y^2 + 4t)e^{-t}].$
- 3)  $\theta(t)[xyz \sin t + x(y^2 + 2a^2 t)(z^2 + 6a^2 tz)].$
- 4)  $\theta(t)[x + y^2 + z^2 + 2a^2 t(1 + 3z) + (x^2 - 2y^2 + z^2)(e^t - 1)].$
- 5)  $\theta(t)[\sin 3x \cos 4ye^{4z}(e^{-9t} + \sin te^z)].$

**13.21.** Указание. См. указание в ответе к задаче 11.18.

- 1)  $\theta(t)[(1 + t)|x|^2 + na^2 t(2 + t)].$
- 2)  $\theta(t) \left( \sum_{k=1}^n [(1 + t)x_k^3 + 3a^2 t(2 + t)x_k] \right).$
- 3)  $\theta(t) \left[ e^t - 1 + \exp \left( na^2 t + \sum_{k=1}^n x_k \right) \right].$
- 4)  $\theta(t) \left[ \left( 2na^2 t + \sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left( na^2 t + \sum_{k=1}^n x_k \right) \right].$
- 5)  $\theta(t) \left[ \cos \left( 2na^2 t + \sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \right].$

**13.22.** 1)  $2e^t - 1$ . 2)  $te^t + \cos x$ .

3)  $e^{2t} - e^t + e^{-2t} \cos x$ . 4)  $e^t + \frac{1}{2}t^2 \sin x$ .

5)  $(1 + 4a^2t)^{-1/2} \exp \left[ ct - \frac{(x + bt)^2}{1 + 4a^2t} \right]$ .

6)  $\int_0^t \omega(t - \tau) e^{c\tau} d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp \left[ ct - \frac{(x - \xi + bt)^2}{4a^2t} \right] d\xi$ .

**13.23.** 1)  $\frac{1}{c}\theta(t-1)(e^{ct-c}-1) + \theta(t)e^{ct}\Phi\left(\frac{x+bt}{a\sqrt{2t}}\right)$ .

2)  $\theta(t-1)(t-1) + \theta(t)\Phi\left(\frac{1-x-bt}{a\sqrt{2t}}\right)$ .

3)  $\frac{\theta(t-1)}{1-c}(e^t - e^{ct-c+1}) + \theta(t)e^{ct} \left[ \Phi\left(\frac{x+bt+1}{a\sqrt{2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+bt-1}{a\sqrt{2t}}\right) \right]$ .

4)  $\theta(t-1)(t-1)e^t + \theta(t)e^{x+t(1+b+a^2)}\Phi\left(\frac{x+bt+2a^2t}{a\sqrt{2t}}\right)$ .

5)  $\theta(t-1)(t-1)e^t + \theta(t)e^{-2t} \left[ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2t)^2}{16t}\right) + (x-2t)\Phi\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{2t}}\right) \right]$ .

6)  $\theta(t) \left[ (x+bt)e^{ct} + e^{ct} \int_0^t \Phi\left(\frac{x+bt}{a\sqrt{2\tau}}\right) d\tau \right]$ .

**13.24.** 1)  $\theta(t)(2x - x^2 + 2[t - x + (x + t)^2]e^t)$ .

2)  $\theta(t) \left( e^{x+t(a^2+b+c)} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{c\tau} d\tau \right)$ .

3)  $\theta(t)[(1+x+7t)e^{x+t} - (1+t)e^t]$ .

4)  $\theta(t)[x(t+1)e^x + e^{2t} \operatorname{sh}(x-2t)]$ . 5)  $\theta(t)(\cos x + \sin t \sin x)e^x$ .

6)  $\theta(t)[1-x+(x+t-1)e^t + (x+t)\sin(x+t) + 2t\cos(x+t)]$ .

**13.29.** 1)  $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(y) \left[ \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}\right) \right] dy$ .

## § 14. Задача Коши для других уравнений и задача Гурса

**1. Задача Коши для уравнения Шредингера.** Для уравнения Шредингера постановка задачи Коши

$$u_t = i\Delta u + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{I})$$

и обобщенной задачи Коши

$$u_t = i\Delta u + F(x, t) \quad (\text{II})$$

аналогична соответствующим постановкам для уравнения теплопроводности (см. § 13).

Фундаментальным решением уравнения Шредингера является функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(\frac{i|x|^2}{4t} - \frac{\pi n i}{4}\right).$$

Для задачи Коши (I) справедливы результаты, аналогичные тем, которые сформулированы в задачах 13.1–13.4.

Будем говорить, что функция  $u(x, t)$  принадлежит классу  $P$ , если она удовлетворяет оценке

$$|u(x, t)| \leq c(1 + |x|)^\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

при некоторых  $c$  и  $\lambda$ .

**14.1.** Доказать, что если  $u_0(x) \in P(\mathbb{R}^n)$ , то функция

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it|y|^2 - i(x, y)} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{i(\xi, y)} d\xi dy \quad (\text{III})$$

является решением задачи Коши

$$u_t = i\Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x); \quad (\text{IV})$$

$u(x, t) \in C^\infty(t \geq 0)$ ,  $u(x, t) \in L(\mathbb{R}^n)$  при каждом фиксированном  $t > 0$ ; для любых  $\alpha$  и  $\beta$  функции  $x^\beta D^\alpha u(x, t)$  равномерно ограничены по  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ .

**14.2.** Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи Коши (IV). Доказать, что для любого  $T > 0$  функция  $v(x, t) = u(x, T - t)$  является решением задачи Коши

$$v_t = -i\Delta v, \quad 0 < t < T; \quad v_{t=T} = u_0(x).$$

**14.3.** Пусть  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  — решения задач

$$\begin{aligned} u_t &= iu_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x); \\ v_t &= -iv_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad u|_{t=T} = v_0(x), \end{aligned} \quad (\text{V})$$

причем  $u(x, t) \in P$ , а функция  $v(x, t)$  находится с помощью формул задач 14.4 и 14.2. Доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}^1} u_0(x)v(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}^1} u(x, T)v_0(x) dx.$$

**Указание.** В равенстве

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} v(x, t) \varphi_\delta(x) [u_t(x, t) - i u_{xx}(x, t)] dx dt = 0,$$

где функция  $\varphi_\delta(x)$  та же, что и в задаче 6.5, интегрированием по частям избавиться от производных функции  $u(x, t)$  и перейти к пределу при  $\delta \rightarrow \infty$ .

**14.4.** Доказать единственность решения задачи Коши (V) в классе  $P$ .

**Указание.** Воспользоваться результатом задачи 14.3.

Решение задачи Коши (I) единствено в классе  $P$  (для  $n = 1$  см. задачу 14.4). В задачах 14.5–14.10 рассматриваются решения только из этого класса, причем существования  $u_{tt}$  не требуется.

**14.5.** Пусть  $u_0(x) \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $|x|^{n+3}|u_0(x)| \leq M$ ,  $|x|^{n+1}|D^\alpha u_0(x)| \leq M$  для всех  $\alpha$ ,  $\alpha \leq n + 1$ .

Доказать, что решение задачи Коши (IV) существует и выражается формулой (III), которую можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\frac{\pi ni}{4}\right) \int_{\mathbb{R}^1} u_0(\xi) \exp\left(\frac{i|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi.$$

**14.6.** Пусть  $u_0(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^1)$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $u_0(x) = 0$  при  $|x| \geq 1$  и  $|u_0^{(r)}(x)| \leq M$ ,  $r \leq \alpha$ .

Доказать, что решение задачи Коши (V) принадлежит классу  $C^\infty(t > 0)$  и

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x, t) \right| \leq CM(1 + |x|)^{2+r-\alpha}, \quad r = 0, 1, \dots, \alpha - 2,$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \geq 0$ .

**14.7.** Пусть  $u_0(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^1)$ ,  $|u_0^{(r)}(x)| \leq C(1 + |x|)^\lambda$ ,  $r \leq \alpha$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $\lambda < \alpha - 5$ . И пусть  $u_k(x, t)$  — решение задачи Коши

$$u_t = i u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x) e(x - k),$$

где функция  $e(x)$  та же, что и в задаче 6.4. Доказать, что решение задачи Коши (V) существует, выражается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x, t)$$

и  $|u(x, t)| \leq C_1(1 + |x|)^{\alpha-2}$  для всех  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \geq 0$ .

Укаzание. Используя результат задачи 14.6, показать, что

$$|u_k(x, t)| \leq \frac{C_1(2 + |k|)^\lambda}{(1 + |x - k|)^{\alpha-2}} \leq \frac{C_1(1 + |x|)^{\alpha-2}(2 + |k|)^\lambda}{(1 + |k|)^{\alpha-2}}.$$

**14.8.** Пусть  $u_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$  и  $\int_{\mathbb{R}^1} |xu'_0(x)| dx < \infty$ . Доказать, что решение задачи Коши (V) существует и выражается формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2}[u_0(+\infty) + u_0(-\infty)] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i/4} \int_{\mathbb{R}^1} u'_0(\xi) \int_0^{(x-\xi)/(2\sqrt{t})} e^{iy^2} dy d\xi. \end{aligned}$$

**14.9.** Пусть  $u_0(x) = e^{ia|x|^2}$ , где  $a$  — действительное число,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Доказать, что при  $a \geq 0$  существует решение задачи Коши (IV), а при  $a < 0$  решение существует только при  $0 \leq t < -\frac{1}{4a}$ . Найти это решение.

Результат этой задачи сравнить с результатом задачи 14.7 при  $n = 1$  в случаях  $a = 0, \pm 1$ .

**14.10.** Решить задачи.

- 1)  $u_t = iu_{xx} + tx^3$ ;  $u|_{t=0} = x^4$ .
- 2)  $u_t = iu_{xx}$ ,  $0 < t < \frac{1}{4}$ ;  $u|_{t=0} = xe^{-ix^2}$ .
- 3)  $u_t = i\Delta u + x \cos t - y^2 \sin t$ ;  $u|_{t=0} = x^2 + y^2$ .
- 4)  $u_t = i\Delta u + 6x + y^2 + iz^3$ ;  $u|_{t=0} = i(x^3 + y^3 + z^3)$ .
- 5)  $u_t = i\Delta u$ ;  $u|_{t=0} = e^{-|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**14.11.** Найти решение обобщенной задачи Коши (II) для следующих  $F \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ .

- 1)  $\delta(t) \cdot \delta(x)$ .
- 2)  $\delta(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$ .
- 3)  $\theta(t) \cdot \delta(x + x_0)$ ,  $n = 1$ .
- 4)  $\theta(t - t_0) \cdot \delta(x)$ ,  $n = 1$ ,  $t_0 \geq 0$ .

**14.12.** Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = iu_{xx} + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

при  $t > 0$  для следующих  $F$  и  $u_0$  ( $f = 0$  при  $t < 0$  и задается только для  $t > 0$ ):

- 1)  $f = \theta(x)$ ,  $u_0 = \theta(x)$ ;

$$2) f = \theta(t - 1), u_0 = \theta(1 - |x|);$$

$$3) f = \theta(t - \pi) \sin t, u_0 = x^2;$$

$$4) f = \frac{1}{\sqrt{t}}, u_0 = \cos x; \quad 5) f = \theta(t - 1)(e^t - e), u_0 = x \sin x.$$

Доказать, что функции  $u(x, t)$ , найденные в задаче 14.12, 3), 4), 5), являются решением классической задачи Коши.

**2. Задача Коши для уравнения  $u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$**

**14.13.** Пусть  $u(x, t) \in C^4(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$ . Доказать, что функция  $u(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

тогда и только тогда, когда функция

$$w(x, t) = u(x, t) + i \int_0^t \Delta u(x, \tau) d\tau$$

является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x).$$

**14.14.** Пусть функция  $u(x, t) \in C^4(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$  является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — действительная функция. Доказать, что функция  $u(x, t) = \operatorname{Re} w(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**14.15.** Пусть функция  $f(x, t) \in C^4(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$  является бигармонической ( $\Delta^2 f = 0$ ) при каждом  $t \geq 0$ . Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x, t); \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**14.16.** Пусть  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  — бигармонические функции. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

**14.17.** Пусть функция  $w(x, t) \in C^4(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$  является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — действительная функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

**14.18.** Пусть функция  $w(x, t) \in C^4(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$  является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — чисто мнимая функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**14.19.** Пусть  $u_0(x) \in C^{n+3}(\mathbb{R}^n)$ ,  $|x|^{n+5}|u_0(x)| \leq M$ ,  $|x|^{n+1}|D^\alpha u_0(x)| \leq M$ ,  $|\alpha| \leq n+3$ .

Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

существует и выражается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int u_0(\xi) \cos \left( \frac{|x - \xi|^2}{4t} - \frac{\pi n}{4} \right) d\xi.$$

Указание. Воспользоваться результатами задач 14.5 и 14.14.

**14.20.** Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6tx^3$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x^4$ ;
- 2)  $u_{tt} = -\Delta^2 u + xye^t$ ;  $u|_{t=0} = x^2y^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 3)  $u_{tt} = -\Delta^2 u + 6x^2y^2z^2$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ,  $0 < t < \frac{1}{4}$ ;  $u|_{t=0} = \cos x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**3. Задача Коши для уравнения**  $\frac{\partial u}{\partial t} = P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ . Классическая задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (\text{VI})$$

где  $P(\sigma) = a_0\sigma^N + a_1\sigma^{N-1} + \dots + a_N$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $N \geq 2$ , с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (\text{VII})$$

ставится в классе функций  $u(x, t) \in C(x \in \mathbb{R}^1, t \geq 0)$ , у которых при  $t > 0$  существуют непрерывные производные  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^N u}{\partial x^N}$ .

Задача Коши (VI), (VII) называется *поставленной корректно* в классе  $L$  (определение класса  $L$  см. в § 9), если для каждой функции  $u_0(x) \in L$  существует единственное решение задачи (VI), (VII), которое при каждом  $t > 0$  принадлежит классу  $L$  и убывает при  $|x| \rightarrow \infty$  вместе со своими производными,

входящими в уравнение (VI), быстрее любой степени  $|x|^{-1}$  равномерно относительно  $t$  в каждом интервале  $0 < t < T < \infty$ .

**14.21.** Пусть задача Коши (VI), (VII) поставлена корректно в классе  $L$  и

$$v(\sigma, t) = F[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ix\sigma} dx,$$

где  $u(x, t)$  — решение задачи (VI), (VII). Доказать, что функция  $v(\sigma, t)$  при каждом  $t \geq 0$  принадлежит классу  $L$  и является решением задачи

$$\frac{dv}{dt} = P(\sigma)v, \quad v|_{t=0} = F[u_0(x)]. \quad (\text{VIII})$$

**14.22.** Пусть  $u_0(x) \in L$  и

$$\operatorname{Re} P(\sigma) \leq C < \infty \quad (\text{A})$$

при всех действительных  $c$ . Доказать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma)-ix\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi d\sigma \quad (\text{IX})$$

является решением задачи (VI), (VII), принадлежит классу  $C^\infty(t \geq 0)$  и при  $|x| \rightarrow \infty$  убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$  равномерно относительно  $t \geq 0$ .

**14.23.** Доказать, что условие (A) является необходимым и достаточным для корректности постановки задачи Коши (VI), (VII) в классе  $L$ . Указание. Для доказательства необходимо показать, что если условие (A) не выполнено, то существует такая функция  $u_0(x) \in L$ , для которой решение задачи (VIII) не принадлежит классу  $L$ .

**14.24.** Пусть задача Коши (VI), (VII) поставлена корректно в классе  $L$ . Доказать, что ее решение выражается формулой (IX), которую можно записать в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) G(x - \xi, t) d\xi, \quad (\text{X})$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma)-ix\sigma} d\sigma. \quad (\text{XI})$$

Указание. Воспользоваться оценкой

$$|G(x, t)| \leq Ct^{-1/N}.$$

**14.25.** Пусть условие (A) выполнено,  $u_0(x) \in C^{N+2}(\mathbb{R}^1)$  и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0^{(k)}(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, N + 2.$$

Доказать, что решение задачи (VI), (VII) существует, выражается формулой (IX) (или формулами (X), (XI)) и функция  $u(x, t)$  ограничена при  $t \geq 0$  вместе со своими производными, входящими в уравнение (XI).

**4. Задача Коши для уравнения первого порядка.** В области  $Q \subset \mathbb{R}^n$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(\mathbf{A}(x), \nabla u) + a(x)u = f(x), \quad x \in Q, \quad (\text{XII})$$

в котором  $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ ,  $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ ,  $a_i(x) \in C^1(Q)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $|A(x)| > 0$ ,  $x \in Q$ ,  $a(x) \in C(Q)$ ,  $f(x) \in C(Q)$ .

Пусть  $S$  — лежащая в  $Q$  гладкая  $(n - 1)$ -мерная поверхность, на которой задано значение  $u_0(x)$  функции  $u(x)$

$$u(x)|_{x \in S} = u_0(x). \quad (\text{XIII})$$

*Задача Коши* состоит в нахождении в некоторой, содержащей поверхность  $S$  подобласти  $Q'$  области  $Q$  функции  $u(x) \in C^1(Q')$ , удовлетворяющей уравнению (XII) в  $Q'$  и условию (XIII).

Если на поверхности  $S$  выполнено условие

$$(\mathbf{A}(x), \mathbf{v}(x)) \neq 0, \quad x \in S,$$

где вектор  $\mathbf{v}(x)$  — вектор нормали к поверхности  $S$  в точке  $x$ , а функция  $u_0(x) \in C^1(S)$ , то существует, причем единственное, решение задачи Коши. (О задаче Коши для уравнения первого порядка, более общего, чем уравнение (XII) см., например, в [4].)

**14.26.** Решить задачи:

- 1)  $u_t + 2u_x + 3u = 0$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ;
- 2)  $u_t + 2u_x + u = xt$ ;  $u|_{t=0} = 2 - x$ ;
- 3)  $2u_t = u_x + xu$ ;  $u|_{t=0} = 1$ ;
- 4)  $2u_t = u_x - xu$ ;  $u|_{t=0} = 2xe^{x^2/2}$ ;
- 5)  $u_t + (1 + x^2)u_x - u = 0$ ;  $u|_{t=0} = \operatorname{arctg} x$ ;
- 6)  $u_t + (1 + t^2)u_x + u = 0$ ;  $u|_{t=0} = e^{-x}$ ;
- 7)  $u_t = u_x + \frac{2x}{1+x^2}u$ ;  $u|_{t=0} = 1$ ;
- 8)  $2tu_t + xu_x - 3x^2u = 0$ ;  $u|_{t=0} = 5x^2$ .

**5. Задача Гурса для гиперболического уравнения на плоскости.** Рассмотрим один частный случай задачи Гурса. Так называют, в частности, задачу нахождения в  $C^2 \left( |t| < \frac{x}{a} \right)$  решения уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad |t| < \frac{x}{a}, \quad (\text{XIV})$$

удовлетворяющего условиям

$$u|_{t=\alpha x} = g_1(x), \quad u|_{t=\beta x} = g_2(x), \quad x > 0,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные,  $\alpha \neq \beta$ ,  $|\alpha| \leq \frac{1}{a}$ ,  $|\beta| \leq \frac{1}{a}$ , и  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  — заданные функции (для уравнения (XIV) рассматривают и более общую задачу, в которой прямолинейные лучи  $t = \alpha x$  и  $t = \beta x$ ,  $x > 0$ , заменены соответствующими кривыми).

Решение задачи Гурса единственно и при условиях  $g_i(x) \in C^2[0, \infty)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $g_1(0) = g_2(0)$ , существует.

**Пример 1.** Найти решение задачи Гурса для уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1. \quad (2)$$

△ Найдем общее решение уравнения (1). Характеристическое уравнение  $(dy)^2 - 3dx dy - 4(dy)^2 = 0$  распадается на два уравнения  $dy + dx = 0$ ,  $dy - 4dx = 0$ , для которых  $y + x = C$ ,  $y - 4x = C$  являются общими интегралами. Заменой переменных  $\xi = y + x$ ,  $\eta = y - 4x$  уравнение (1) приводится к каноническому виду  $u_{\xi\eta} - \frac{1}{5}u_\eta = 0$ . Интегрируя это уравнение, находим

$$u = f(\eta)e^{-\xi/5} + g(\xi) = f(y - 4x)e^{-(y+x)/5} + g(y + x).$$

Воспользуемся условиями (2):

$$\begin{cases} f(0)e^{-x} + g(5x) = 5x + e^x, \\ f(-5x) + g(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Решая эту систему, получаем  $f(x) = 1 - g(0)$ ,  $g(x) = x + e^{x/5} - f(0)e^{-x/5}$ . Следовательно,

$$u(x, y) = [1 - g(0)]e^{-(x+y)/5} + x + y + e^{(x+y)/5} - f(0)e^{-(x+y)/5}.$$

Учитывая, что из системы (3) при  $x = 0$  следует равенство  $f(0) + g(0) = 1$ , окончательно находим решение задачи (1), (2):  $u(x, y) = x + y + e^{(x+y)/5}$ . ▲

**Пример 2.** Решить задачу Гурса

$$x^2 u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 3xu_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0; \quad (1)$$

$$u|_{x=\frac{1}{y}} = 1 + y, \quad u|_{x=y} = y + y^2, \quad y > 0. \quad (2)$$

△ Найдем характеристики уравнения (1). Имеем

$$z^2(dy)^2 + 3xy \, dx \, dy + 2y^2(dx)^2 = 0,$$

или

$$x^2(y')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$$

Отсюда следует, что  $y' = -\frac{2y}{x}$  и  $y' = -\frac{y}{x}$ . Получаем два семейства характеристик уравнения (1)

$$y = \frac{C_1}{x^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{C_2}{x}.$$

Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = xy, \\ \eta = x^2y \end{cases} \quad (3)$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$$\begin{array}{l} 3x \left| \begin{array}{l} u_x = u_\xi \cdot y + u_\eta \cdot 2xy, \\ u_y = u_\xi \cdot x + u_\eta \cdot x^2, \\ u_{xx} = y^2 u_{\xi\xi} + 4xy^2 u_{\xi\eta} + 4x^2y^2 u_{\eta\eta} + 2yu_\eta, \\ u_{yy} = x^2 u_{\xi\xi} + 2x^3 u_{\xi\eta} + x^4 u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} = xyu_{\xi\xi} + 3x^2yu_{\xi\eta} + 2x^3yu_{\eta\eta} + u_\xi + 2xu_\eta; \end{array} \right. \\ 0 \\ x^2 \\ 2y^2 \\ -3xy \end{array}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} & u_{\xi\xi}(x^2y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^2) + \\ & + u_{\xi\eta}(4x^3y^2 - 4x^3y^2 - 9x^3y^2) + u_{\eta\eta}(4x^4y^2 + 2x^4y^2 - 6x^2y^2) + \\ & + u_\xi(3xy - 3xy) + u_\eta(6x^2y + 2x^2y - 6x^2y) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$-x^3y^2u_{\xi\eta} + 2x^2yu_\eta = 0,$$

или (так как  $x > 0, y > 0$ ) в виде

$$-xyu_{\xi\eta} + 2u_\eta = 0.$$

Используя замену переменных (3), получаем

$$-\xi u_{\xi\eta} + 2u_\eta = 0. \quad (4)$$

Введем функцию  $v = u_\eta$ . Тогда уравнение (4) примет вид

$$-\xi v_\xi + 2v = 0.$$

Следовательно,  $v = C_1(\eta)\xi^2$ , где  $C_1(\eta)$  — любая функция класса  $C^1$ .

Таким образом,  $u_\eta = C_1(\eta)\xi^2$ . Проинтегрировав последнее равенство по  $\eta$ , получаем, что

$$u(\xi, \eta) = f(\eta)\xi^2 + g(\xi),$$

где  $f(\eta)$  и  $g(\xi)$  — любые гладкие функции класса  $C^2$ , является общим решением уравнения (4), а функция

$$u(x, y) = f(x^2y)x^2y^2 + g(xy) \quad (5)$$

является общим решением уравнения (4).

Подберем теперь функции  $f(\eta)$  и  $g(\xi)$  так, чтобы выполнялись условия (2). Из (5) и (2) следует, что

$$u|_{x=\frac{1}{y}} = f\left(\frac{1}{y}\right) + g(1) = 1 + y, \quad y > 0, \quad (6)$$

$$u|_{x=y} = f(y^3)y^4 + g(y^2) = y + y^2, \quad y > 0. \quad (7)$$

Из (6), положив  $p = \frac{1}{y}$ , получаем

$$f(p) = 1 + \frac{1}{p} - g(1). \quad (8)$$

Из (6) и (7) находим

$$g(y^2) = y^2 - y^4 + y^4g(1).$$

Отсюда, положив  $q = y^2$ , имеем

$$g(q) = q - q^2 + q^2g(1). \quad (9)$$

Из (5), (8) и (9) получаем

$$u(x, y) = \left(1 + \frac{1}{x^2y} - g(1)\right)x^2y^2 + xy - x^2y^2 + x^2y^2g(1).$$

Следовательно, функция

$$u(x, y) = y + xy$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

**14.27.** Доказать, что задача Гурса

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, \quad 0 < y < \alpha x, \quad x > 0, \quad y > 0; \\ u|_{y=0} &= f(x), \quad u|_{y=\alpha x} = g(x) \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = f(x) + g\left(\frac{y}{\alpha}\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $f(0) = g(0)$ .

**14.28.** Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0 \quad x > 0, \quad y > 0; \quad u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{x=0} = g(y)$$

имеет единственное решение  $u(x, y) = f(x) + g(y) - f(0)$ , если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $f(0) = g(0)$ .

**14.29.** Доказать, что решение задачи Гурса

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, \quad y > \alpha x, \quad x > 0, \quad \alpha < 0; \\ u|_{y=\alpha x} &= 0, \quad u|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

не единственно. Показать, что множество всех решений этой задачи имеет вид

$$u(x, y) = f(x) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

где  $f(x)$  — любая функция из класса  $C^2(\mathbb{R}^1)$ , равная нулю при  $x \leq 0$ .

**14.30.** Доказать, что задача Гурса

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, \quad 0 < y < \varphi(x), \quad x > 0; \\ u|_{y=0} &= f(x), \quad u|_{y=\varphi(x)} = g(x) \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = f(x) + g(\varphi^{-1}(y)) - f(\varphi^{-1}(y)),$$

если функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ ,  $f(0) = g(0)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(x) > 0$ ,  $\varphi^{-1}(x)$  — функция, обратная к функции  $\varphi(x)$ .

**14.31.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$ . При каких действительных значениях  $a$  задача Гурса

$$\begin{aligned} au_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad x > 0, \quad y > 0; \\ u|_{y=0} &= \varphi(x), \quad u|_{x=0} = \psi(y) \end{aligned}$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

**14.32.** Для каких положительных значений параметра  $b$  задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < t < bx, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u|_{t=bx} = 0 \end{aligned}$$

имеет только нулевое решение?

В задачах 14.33–14.55 требуется найти решение поставленной задачи Гурса и доказать единственность этого решения.

**14.33.**  $u_{xy} + u_x = x$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;  $u|_{x=0} = y^2$ ,  $u|_{y=0} = x^2$ .

**14.34.**  $u_{xy} + x^2 y u_x = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{y=0} = x$ .

**14.35.**  $u_{xy} + u_y = 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;

$u|_{x=0} = \varphi(y)$ ,  $u|_{y=0} = \psi(x)$ , где функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$ .

**14.36.**  $u_{xy} + x u_x = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;  $u|_{x=0} = \varphi(y)$ ,  $u|_{y=0} = \psi(x)$ , где функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$ .

**14.37.**  $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$ ,  $y > |x|$ ;  
 $u|_{y=x} = 1$ ,  $u|_{y=-x} = (x+1)e^x$ .

**14.38.**  $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$ ,  $-\frac{1}{2}x < y < x$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{y=x} = 1 + 3x$ ,  $u|_{y=-x/2} = 1$ .

**14.39.**  $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$ ,  $x < y < 5x$ ,  $x > 0$ ;  $u|_{y=x} = \varphi(x)$ ,  $u|_{y=5x} = \psi(x)$ , где функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$ .

**14.40.**  $u_{xx} + y u_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$ ,  $-\frac{1}{4}x^2 < y < x$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{y=0} = 0$ ,  $u|_{y=-x^2/4} = x^2$ .

**14.41.**  $u_{xy} - e^x u_{yy} = 0$ ,  $y > e^{-x}$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{x=0} = y^2$ ,  $u|_{y=-e^x} = 1 + x^2$ .

**14.42.**  $y u_{xx} + (x - y) u_{xy} - x u_{yy} - u_x + u_y = 0$ ,  $0 < y < x$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{y=0} = 0$ ,  $u|_{y=x} = 4x^4$ .

**14.43.**  $x u_{xx} + (x - y) u_{xy} - y u_{yy} = 0$ ,  $0 < y < x$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{y=0} = 0$ ,  $u|_{y=x} = x$ .

**14.44.**  $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$ ,  $y^3 - 8 < 3x < y^3$ ,  $0 < y < 2$ ;  
 $u|_{y=2} = 3x + 8$ ,  $u|_{3x=y^2} = 2y^3$ .

**14.45.**  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ ,  $y > x$ ,  $x > 1$ ;  $u|_{x=1} = 1$ ,  $u|_{y=x} = x$ .

**14.46.**  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + x u_x - y u_y = 0$ ,  $\frac{1}{x} < y < x$ ,  $x > 1$ ;  
 $u|_{y=x} = x$ ,  $u|_{y=1/x} = 1 + \ln x$ .

**14.47.**  $3x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$ ,  $x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ,  $0 < x < 1$ ;  
 $u|_{x=y} = y$ ,  $u|_{xy^2=1} = y^2$ .

**14.48.**  $3x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$ ,  $1 < y < x$ ,  $x > 1$ ;  
 $u|_{y=x} = 0$ ,  $u|_{y=1} = \cos \frac{\pi x}{2}$ .

**14.49.**  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$ ,  $|y - \cos x| < x$ ,  
 $x > 1$ ;  $u|_{y=x+\cos x} = \cos x$ ,  $u|_{y=-x+\cos x} = \cos x$ .

**14.50.**  $u_{xy} - \frac{1}{x-y}(u_x - u_y) = 1$ ,  $y < -x$ ,  $x > 2$ ;  
 $u|_{y=-x} = 0$ ,  $u|_{x=2} = 2 + 2y + \frac{1}{2}y^2$ .

**14.51.**  $u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x} u_x = 0$ ,  $y > 1 + |x|$ ;  
 $u|_{y=x+1} = 1 - x$ ,  $u|_{y=1-x} = 1 + x$ .

**14.52.**  $u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{x} u_x + \frac{2}{x^2} u = 0$ ,  $y > x$ ,  $x > 1$ ;  
 $u|_{y=x} = 1$ ,  $u|_{x=1} = y$ .

**14.53.**  $u_{xy} = 1$ ,  $\alpha x < y < \beta x$ ,  $x > 0$ ,  $0 < \alpha < \beta$ ;  
 $u|_{y=\alpha x} = 0$ ,  $u|_{y=\beta x} = 0$ .

**14.54.**  $u_{xy} = 0$ ,  $x^2 < y < 2x^2$ ,  $x > 0$ ;  $u|_{y=x^2} = x^4$ ,  $u|_{y=2x^2} = x^2$ .

**14.55.**  $u_{xy} = 0$ ,  $x^4 < y < x^2$ ,  $0 < x < 1$ ;  
 $u|_{y=x^2} = 0$ ,  $u|_{y=x^4} = x(1 - x)$ .

**14.56.** Решить задачи:

- 1)  $2u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + 3u_y = 0; u|_{y=3x} = e^{-x/2}, u|_{x=0} = 1 + y^2;$
- 2)  $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + 6u_y = 0; u|_{y=-x} = e^{4x}, u|_{y=-2x} = e^{6x} - x;$
- 3)  $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 7u_x + 7u_y = 0; u|_{y=-x} = e^{-3x}, u|_{y=-3x} = e^{7x} - 2x;$
- 4)  $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0; u|_{y=0} = 2xe^x, u|_{y=2x} = 0;$
- 5)  $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - 2u_y = 0; u|_{y=0} = 1 + 4x, u|_{y=-2x} = e^{-2x};$
- 6)  $2u_{xx} - 3u_{xy} - 2u_{yy} = 25 \sin(x - 2y); u|_{y=-2x} = 2 - 5x, u|_{x=2y} = 2;$
- 7)  $2u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} = 7 \cos(x + 2y); u|_{y=3x} = 1 + 14x, u|_{x=-2y} = 1 + 7y;$
- 8)  $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x - 12u_y = 0; u|_{y=0} = 3x + 1, u|_{y=-3x} = e^{-12x};$
- 9)  $u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + 4u_x - 8u_y = 0; u|_{x=0} = y^2 + 1, u|_{x=-\frac{y}{2}} = e^{2y};$
- 10)  $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0; u|_{y=0} = x^2 + 1, u|_{y=x} = e^{-\frac{3x}{2}}.$

**14.57.** Решить задачи:

- 1)  $u_{xx} + (1 - 2x)u_{xy} - 2xu_{yy} - \frac{2(u_x + u_y)}{2x + 1} = 0, x < y < -x^2, x < -\frac{1}{2}; u|_{y=x} = \sqrt{-x - x^2}, u|_{y=x^2} = x^4 + 2x^3 + x^2, x < -\frac{1}{2};$
- 2)  $u_{xx} + (x + 1)u_{xy} + xu_{yy} + \frac{u_x + u_y}{1 - x} = 0, \frac{x^2}{2} < y < x, x > 1; u|_{y=x} = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}, u|_{y=\frac{x^2}{2}} = \sqrt[3]{x^2 - 2x}, x > 1;$
- 3)  $x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2u_{yy} + 3xu_x = 0, x > 0, y > 0; u|_{x=1/y} = 1 + y, u|_{x=y} = y + y^2, y > 0;$
- 4)  $x^2u_{xx} - 4xyu_{xy} + 3y^2u_{yy} + 4xu_x = 0, x > 0, y > 0; u|_{x=1/y} = y - 1, u|_{x=1} = y - y^2, y > 0;$
- 5)  $4x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + 4xu_x - yu_y = 0, \frac{1}{y^2} < x < y^2, y > 0; u|_{x=\frac{1}{y^2}} = 3 + y^4, u|_{x=y^2} = 3y^4 + 1, y > 0;$
- 6)  $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, \frac{1}{x^2} < y < x^2, x > 0;$

$$u|_{y=\frac{1}{x^2}} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4, \quad x > 0;$$

$$7) \quad u_{xx} + (1 - 2x)u_{xy} - 2xu_{yy} - 2\frac{u_x + u_y}{2x + 1} = 0, \quad x < y < -x^2, \quad x < -\frac{1}{2};$$

$$u|_{y=x} = x^2 + x, \quad u|_{y=-x^2} = 2x^2 + 2x, \quad x < -\frac{1}{2};$$

$$8) \quad u_{xx} + (x + 1)u_{xy} + xu_{yy} + \frac{u_x + u_y}{1 - x} = 0, \quad \frac{x^2}{2} < y < x, \quad y > 0;$$

$$u|_{y=x} = x^2 - 2x, \quad u|_{y=\frac{x^2}{2}} = 2x^2 - 4x, \quad x > 1;$$

$$9) \quad yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x;$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = x^3, \quad x > 0;$$

$$10) \quad 2xu_{xx} + (x + 2y)u_{xy} + yu_{yy} + 3u_x + u_y = 0, \quad 0 < x < 2y - 4;$$

$$u|_{x=0} = 2y, \quad u|_{x=2y-4} = 2 + \frac{4}{y};$$

$$11) \quad xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad 0 < x < y - 1;$$

$$u|_{x=0} = y, \quad u|_{x=y-1} = \frac{1}{y};$$

$$12) \quad 2yu_{xx} - u_{xy} + 2yu_x + u_y = 0, \quad y > 0;$$

$$u|_{x=y^2} = \sin y, \quad u|_{x=0} = e^{y^2} \sin y, \quad y > 0;$$

$$13) \quad xu_{xy} - yu_{yy} - (x^2 - 1)u_y = 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=x} = e^{x^2/2}, \quad u|_{y=1/x} = x^4 e^{x^2/2}, \quad x > 0;$$

$$14) \quad yu_{xy} - xu_{yy} + x \left( 2y + \frac{1}{y} \right) u_y = 0, \quad y > 0;$$

$$u|_{y=0} = xe^{-x^2}, \quad u|_{x=0} = y^2;$$

$$15) \quad u_{xy} + u_{yy} + (x - y)^2(u_x + u_y - 1) = 0;$$

$$u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=x} = x^2;$$

$$16) \quad xu_{xx} + (y - x)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 1 < y < x;$$

$$u|_{y=x} = 0, \quad u|_{y=1} = x^2 - 1;$$

$$17) \quad yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x;$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = x^3.$$

## 6. Задача Коши для некоторых квазилинейных уравнений

**14.58.** Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное для  $t \geq 0$ ,  $|x| + t \neq 0$ , и непрерывно дифференцируемое при  $t \neq |x|$ .

**14.59.** Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = \begin{cases} \alpha & \text{при } x < 0, \\ \beta & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta \geq \alpha$  — постоянные, непрерывное для  $t \geq 0$ ,  $|x| + t \neq 0$ , и непрерывно дифференцируемое вне прямых  $t = \frac{x}{\alpha}$ ,  $t = \frac{x}{\beta}$ .

**14.60.** Доказать, что задача Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = a^2 u_{xx}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

подстановкой  $u = -2a^2 \frac{v_x}{v}$  сводится к задаче Коши

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad v|_{t=0} = \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right\}.$$

**14.61.** Пусть  $u$  — решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}; \quad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

где постоянная  $\varepsilon > 0$ , непрерывное при  $t \geq 0$ ,  $|x| + t \neq 0$ , и непрерывно дифференцируемое при  $t > 0$ . Доказать, что это решение при  $\varepsilon \rightarrow +0$  стремится к решению задачи 14.58 (теорема Э. Хопфа).

**14.62.** Проверить, что решением уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\sqrt{a}}{2} (x - x_0 - at) \right]}, \quad a > 0,$$

описывающая «уединенную волну» (солитонное решение). Показать, что это — решение с конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2) dx < \infty.$$

**14.63.** Для уравнения Лиувилля

$$u_{tt} - u_{xx} = g e^u, \quad g > 0,$$

проверить следующие утверждения:

1) функция

$$u(x, t) = \ln \frac{\alpha^2(1 - a^2)}{2g \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\alpha}{2}(x - x_0 - at) \right]}, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

является решением при всех  $x$  и  $t$ ;

2) функция

$$u(x, t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\psi'(x-t)}{g [\varphi(x+t) - \psi(x-t)]^2}$$

является решением при любых  $\varphi$  и  $\psi$  таких, что  $\varphi, \psi \in C^3$ ,

$$\varphi' \psi' > 0;$$

3) функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] - \ln \left\{ \cos^2 \left[ \sqrt{\frac{g}{8}} \int_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2} d\xi \right] \right\}$$

является решением задачи Коши с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

если

$$\left| \sqrt{\frac{g}{8}} \int_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2} d\xi \right| < \frac{\pi}{2}.$$

**14.64.** Проверить, что для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u, \quad g > 0$$

функция

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{g}(x - x_0 - at)}{\sqrt{1 - a^2}} \right\}, \quad 0 \leq a < 1,$$

является решением с конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2) dx < \infty.$$

**14.65.** Проверить, что решением нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + \nu|u|^2u = 0, \quad \nu > 0,$$

является функция

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}} \frac{\exp\left\{i\left[\frac{a}{2}x - \left(\frac{a^2}{4} - \alpha\right)t\right]\right\}}{\operatorname{ch}\left[\sqrt{\alpha}(x - x_0 - at)\right]}, \quad \alpha \geq 0.$$

## Ответы к § 14

**14.9.**  $(1 + 4at)^{-n/2} \exp\left\{\frac{ia|x|^2}{1 + 4at}\right\}$ .

**14.10.** 1)  $u = x^4 + t^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 12\right) + itx(12x + t^2)$ .

2)  $u = \frac{x}{(1 - 4t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{ix^2}{1 - 4t}\right\}$ .

3)  $u = x \sin t + x^2 + y^2 \cos t + 2i(t + \sin t)$ .

4)  $u = i(x^3 + y^3 + z^3) - t(6y + 6x - y^2 - iz^3) + t^2(i - 3z)$ .

5)  $u = (\sqrt{1 + 4it})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{1 + 4it}\right\}, 0 \leq \arg \sqrt{1 + 4it} < \frac{\pi}{2}$ .

**14.11.** 1)  $\mathcal{E}(x, t)$ . 2)  $\frac{ix_k}{2t} \mathcal{E}(x, t)$ .

3)  $\int_0^t \mathcal{E}(x + x_0, \tau) d\tau$ . 4)  $\int_0^{t-t_0} \mathcal{E}(x, \tau) d\tau$ .

**14.12.** 1)  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i/4} \left( \int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{iy^2} dy + \int_0^{t} \int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{\tau})} e^{iy^2} dy d\tau \right)$ .

2)  $\theta(t-1)(t-1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i/4} \int_{(x-1)/(2\sqrt{t})}^{(x+1)/(2\sqrt{t})} e^{iy^2} dy$ .

3)  $x^2 + 2it - \theta(t - \pi)(1 + \cos t)$ .

4)  $2\sqrt{t} + \cos x e^{-it}$ .

5)  $\theta(t-1)(e^t - e - te) + (x \sin x + 2it \cos x) e^{-it}$ .

**14.15.**  $\int_0^t (t - \tau) f(x, \tau) d\tau$ .

**14.16.**  $u_0(x) + tu_1(x)$ .

**14.17.**  $\operatorname{Re} \int_0^t w(x, \tau) d\tau.$

**14.18.**  $i \operatorname{Im} w(x, t).$

**14.20.** 1)  $tx^4 + t^3(x^3 - 4)$ . 2)  $x^2y^2 - 4t^2 + xy(e^t - 1 - t)$ .

3)  $3x^2y^2x^2t^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)t^4$ .

4)  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \cos \frac{x^2}{1+4t} + \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \cos \frac{x^2}{1-4t} \right).$

**14.26.** 1)  $(x - 2t)^2 e^{-3t}$ . 2)  $4 - x - 2t + xt - 2e^{-t}$ .

3)  $\exp \left\{ \frac{t}{8}(4z + t) \right\}$ . 4)  $(2x + t) \exp \left\{ \frac{1}{2}x^2 \right\}$ .

5)  $(\arctg x - t)e^t$ . 6)  $1 - e^{-t} + \exp \left\{ -x + \frac{1}{3}t^3 \right\}$ .

7)  $\frac{1 + (x + t)^2}{1 + x^2}$ . 8)  $\frac{5x^2}{t} \exp \left\{ \frac{3x^2(t - 1)}{2t} \right\}$ .

**14.31.**  $\varphi(x - ay) - \varphi(-ay) + \psi(y)$ ,  $a \leq 0$ .

**14.32.**  $b \leq \frac{1}{a}$ .

**14.33.**  $y^2 + \frac{1}{2}x^2(1 + e^{-y})$ .

**14.34.**  $\int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{2}\xi^2 y^2 \right\} d\xi$ .

**14.35.**  $y + \psi(x) + [\varphi(y) - \varphi(0) - y]e^{-x}$ .

**14.36.**  $\varphi(y) + \int_0^x \psi'(\xi) e^{-\xi y} d\xi$ .

**14.37.**  $\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \exp \left\{ \frac{1}{2}(x - y) \right\}$ .

**14.38.**  $1 + (x + 2y) \exp \left\{ \frac{1}{3}(y - x) \right\}$ .

**14.39.**  $\varphi \left( \frac{5x - y}{4} \right) + \varphi \left( \frac{y - x}{4} \right) - \varphi(0)$ .

**14.40.**  $2x\sqrt{-y}$ .

**14.41.**  $x^2 + (y - 1 + e^x)^2$ .

**14.42.**  $xy(x + y)^2$ .

**14.43.**  $y$ .

**14.44.**  $3x + y^3$ .

**14.45.**  $x$ .

**14.46.**  $\sqrt{xy} + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}$ .

**14.47.**  $\sqrt[4]{\frac{y^5}{x}}$ .

**14.48.**  $y \cos \frac{\pi x}{2y}$ .

**14.49.**  $-1 + 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y - \cos x}{2}$ .

**14.50.**  $\frac{1}{2}(x+y)^2$ . Указание. Сделать замену  $u = \frac{1}{x-y}v$ .

**14.51.**  $2 - y$ . Указание. Сделать замену  $u = \frac{1}{x}v$ .

**14.52.**  $\frac{y}{x}$ . Указание. Сделать замену  $u = \frac{1}{x^2}v$ .

**14.53.**  $\frac{1}{\alpha + \beta}(y - \alpha x)(\beta x - y)$ .

**14.54.**  $\frac{4}{3}x^4 - x^2 + y - \frac{1}{3}y^2$

**14.55.**  $x - \sqrt{y}$ .

**14.56.** 1)  $u(x, y) = e^{-x/2} + (3x - y)^2$ .

2)  $u(x, y) = e^{2x-2y} + x + y$ .

3)  $u(x, y) = e^{x-2y} + x + y$ .

4)  $u(x, y) = (2x - y)e^{x-y}$ .

5)  $u(x, y) = e^y + 4x + 2y$ .

6)  $u(x, y) = -(y + 2x) \cos(2y - x) + x + 3y + 2$ .

7)  $u(x, y) = \frac{1}{7}(3x - y) \sin(2y + x) + 1 - x + 5y$ .

8)  $u(x, y) = e^{4y} + 3x + y$ .

9)  $u(x, y) = e^{-4x} + (2x + y)^2$ .

10)  $u(x, y) = e^{-3y/2} + (x - y)^2$ .

**14.57.** 1)  $u(x, y) = (y - x)^2 + \sqrt{-y - x^2}$ .

2)  $u(x, y) = \sqrt[3]{2y - 2x} + \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2$ .

3)  $u(x, y) = y + xy$ .

4)  $u(x, y) = y - (xy)^2$ .

5)  $u(x, y) = y^2 \left(3x + \frac{1}{x}\right)$ .

6)  $u(x, y) = x^2 \left(y + \frac{2}{y}\right)$ .

7)  $u(x, y) = x^2 + 2x - y$ .

8)  $u(x, y) = x^2 - 4x + 2y$ .

9)  $u(x, y) = \frac{1}{2}xy(x + y)$ .

10)  $u(x, y) = 2y - x - \frac{x}{y}$ .

11)  $u(x, y) = y - x - \frac{x}{y}.$

12)  $u(x, y) = e^{y^2-x} \sin y.$

13)  $u(x, y) = e^{x^2/2} \cdot \left( x^4 + \frac{y}{x} - xy^2 \right).$

14)  $u(x, y) = (x + y^2)e^{-x^2}.$

15)  $u(x, y) = (x^2 - x)e^{(x-y)^3/3} + x + (x - y)^2.$

16)  $u(x, y) = \frac{x^2}{y} - y.$

17)  $u(x, y) = \frac{1}{2}xy(x + y).$

**14.58.**  $-1$  при  $x \leq -t$ ;  $+1$  при  $x \geq t$ ;  $\frac{x}{t}$  при  $x \leq t$ .

Указание. Исследовать решение в виде  $f\left(\frac{x}{t}\right)$ .

**14.59.**  $\alpha$  при  $x \leq t\alpha$ ;  $\beta$  при  $x \geq t\beta$ ;  $\frac{x}{t}$  при  $t\alpha \leq x \leq t\beta$ .

## Г л а в а 5

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $S = \partial G$  — ее гладкая граничная поверхность, а  $\mathbf{n}_x$  — внешняя по отношению к  $G$  нормаль к  $S$  в точке  $x \in S$ . Принадлежащая  $C^1(G)$  функция  $u$  имеет *правильную нормальную производную*  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ , если существует

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G \cap (-n_x)}} \frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$$

равномерно по всем  $x \in S$ .

**I. Внутренняя задача Дирихле:** для уравнения Лапласа: найти гармоническую в  $G$  функцию  $u \in C(\overline{G})$ , принимающую на  $S$  заданные (непрерывные) значения  $u_0^-$ .

**II. Внешняя задача Дирихле:** найти гармоническую в области  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$  функцию  $u \in C(\overline{G}_1)$ , регулярную на бесконечности, т. е. в трехмерном случае ( $n = 3$ )  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ , т. е.  $u(\infty) = 0$ , принимающую на  $S$  заданные (непрерывные) значения  $u_0^+$ .

**III. Внутренняя задача Неймана:** найти гармоническую в  $G$  функцию  $u \in C(\overline{G})$ , имеющую на  $S$  заданную (непрерывную) правильную нормальную производную  $u_1^-$ .

**IV. Внешняя задача Неймана:** найти гармоническую в  $G_1$  функцию  $u \in C(\overline{G}_1)$ , регулярную на бесконечности, т. е. в трехмерном случае ( $n = 3$ )  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ , т. е.  $u(\infty) = 0$ , имеющую на  $S$  заданную (непрерывную) правильную нормальную производную  $u_1^+$ .

Задачи I, II и IV в трехмерном случае ( $n = 3$ ) однозначно разрешимы. Решение задачи III определено с точностью до произвольной постоянной, причем

$$\int_S u_1^- dS = 0$$

— условие ее разрешимости.

В двумерном случае ( $n = 2$ ) условие регулярности на бесконечности в задачах внешнего типа есть условие ограниченности при  $|x| \rightarrow \infty$ . В этом случае задачи I и II однозначно разрешимы. Решения задач III и IV определены с точностью до произвольных постоянных, причем

$$\int_S u_1^\mp dS = 0$$

— условие их разрешимости.

## § 15. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (\text{II})$$

где  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ ,  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ ,  $p \in C^1(a, b)$ ,  $p(x) \neq 0$ ,  $q \in C(a, b)$ ,  $f \in C(a, b) \cap L_2(a, b)$ .

Обычно в физических задачах выполняются условия

$$\alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Область определения  $M_L$  оператора  $L$  состоит из функций  $y(x)$  класса  $C^2(a, b) \cap C^1(a, b)$ ,  $y'' \in L_2(a, b)$ , удовлетворяющих граничным условиям (II).

Задача о нахождении тех значений  $\lambda$  (собственных значений оператора  $L$ ), при которых уравнение  $Ly = \lambda y$  имеет ненулевые решения  $y(x)$  из области определения  $M_L$  (собственные функции, соответствующие этим собственным значениям), называется задачей *Штурма–Лиувилля*.

Если  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ , то решение краевой задачи (I), (II) в классе  $M_L$  единствено и выражается формулой

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi)$  — функция Грина краевой задачи (I)–(II) или оператора  $L$ .

Функция  $G(x, \xi)$  представляется в виде

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{k} \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi), & a \leq x \leq \xi, \\ y_1(\xi)y_2(x), & \xi \leq x \leq b, \end{cases} \quad (\text{III})$$

где  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — ненулевые решения уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющие соответственно первому и второму граничному условию (II);

$$k = p(x)w(x) = p(a)w(a) \neq 0, \quad x \in [a, b], \quad (\text{IV})$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} \quad (\text{V})$$

— определитель Вронского.

Краевая задача

$$Ly = \lambda y + f,$$

где  $f \in C(a, b) \cap L_2(a, b)$  при условии, что  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ , эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)y(\xi) d\xi + \int_a^b G(x, \xi)f(\xi) d\xi. \quad (\text{VI})$$

Этот метод иногда можно применять и к задачам с вырождением, когда  $p(x)$  обращается в нуль или бесконечность или  $q(x)$  обращается в бесконечность на одном из концов отрезка  $[a, b]$ .

**Пример 1.** Свести к интегральному уравнению задачу

$$-x^2y'' - xy' = \lambda y + \cos x, \quad 1 < x < 2, \quad (1)$$

$$y(1) = y'(1) \ln 2, \quad (2)$$

$$y(2) = 0. \quad (3)$$

△ Разделив обе части уравнения (1) на  $x$ , получим

$$-xy'' - y' = \lambda \cdot \frac{1}{x}y + \frac{\cos x}{x}, \quad 1 < x < 2.$$

Отсюда имеем

$$-(xy')' = \lambda \cdot \frac{1}{x}y + \frac{\cos x}{x}, \quad 1 < x < 2, \quad (4)$$

то есть  $Ly = -(xy')'$ ,  $p(x) \equiv x$ .

Решая уравнение  $Ly = 0$ , получаем

$$y = C_1 \ln x + C_2. \quad (5)$$

Найдем какое-нибудь ненулевое решение уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющее условию (2). Из (5) и (2) имеем

$$\begin{aligned} y(1) &= C_2, \quad y'(1) = C_1, \\ y(1) &= y'(1) \ln 2 \quad \text{или} \quad C_2 = C_1 \ln 2. \end{aligned}$$

Возьмем, например,  $C_1 = 1$ . Тогда

$$y_1(x) = \ln x + \ln 2 \tag{6}$$

есть решение уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющее условию (2).

Найдем какое-нибудь ненулевое решение уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющее условию (3). Из (5) и (3) имеем

$$y(2) = C_1 \ln 2 + C_2 = 0,$$

то есть

$$C_2 = -C_1 \ln 2.$$

Возьмем, например,  $C_1 = 1$ . Тогда

$$y_2(x) = \ln x - \ln 2 \tag{7}$$

есть решение уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющее условию (3).

Используя (6) и (7), составим определитель Бронского (см. (V))

$$w(x) = \begin{vmatrix} \ln x + \ln 2 & \ln x - \ln 2 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$

и найдем  $w(1)$ , т. е.

$$w(x) = \begin{vmatrix} \ln 2 & -\ln 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ln 2.$$

Так как  $p(1) = 1$ , то  $k = p(1)w(1) = 2 \ln 2$  (см. (IV)). Воспользовавшись (III), получаем

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2 \ln 2} \cdot \begin{cases} (\ln x + \ln 2)(\ln \xi - \ln 2), & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ (\ln \xi + \ln 2)(\ln x - \ln 2), & 1 \leq \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Отсюда согласно (VI) имеем

$$y(x) = \lambda \int_1^2 G(x, \xi) \cdot \frac{1}{\xi} y(\xi) d\xi + \int_1^2 G(x, \xi) \cdot \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi. \quad \blacktriangle$$

**15.1.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -y''$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -y''$ ,  $y'(0) = y(0)$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -y''$ ,  $y(0) = hy'(0)$ ,  $h \geq 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 4)  $Ly = -y'' - y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 5)  $Ly = -y'' - y$ ,  $y(0) = y'(0)$ ,  $y(1) = y'(1)$ ;
- 6)  $Ly = -y'' + y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 7)  $Ly = -y'' + y$ ,  $y'(0) = y'(1) = 0$ .

**15.2.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(1, 2)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -x^2y'' - 2xy'$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -xy'' - y'$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -x^3y'' - 3x^2y - xy$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) + 2y'(2) = 0$ ;
- 4)  $Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y$ ,  $y(1) + y'(1) = 0$ ,  $y(2) + 3y'(2) = 0$ .

**15.3.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -(\cos^2 x \cdot y')'$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -\left(\frac{y'}{\cos x}\right)', y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y'$ ,  $y(0) = y'(0)$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**15.4.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -(1 + x^2)y'' - 2xy'$ ,  $y(0) = y'(0)$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -(1 + x^2)y'' - 2xy'$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) + y'(1) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -(3 + x^2)y'' - 2xy'$ ,  $y(0) = y'(0)$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 4)  $Ly = -(x + 1)^2y'' - 2(x + 1)y' + 2y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 5)  $Ly = -\left(\frac{y'}{x - 2}\right)' + \frac{3y}{(x - 2)^2}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 6)  $Ly = -(4 - x^2)y'' + 2xy'$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 7)  $Ly = -(xy')' + \frac{4}{x}y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 8)  $Ly = -\frac{1}{x^2}y'' + \frac{2}{x^3}y' - \frac{2}{x^4}y$ ,  $y'(0) = y(1) = 0$ .

**15.5.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{4})$  при условии  $|y(0)| < \infty$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  в следующих случаях:  
 1)  $Ly = -(\operatorname{tg}^2 x \cdot y')'$ ; 2)  $Ly = -(\operatorname{tg} x \cdot y')'$ .

**15.6.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y'$ ;  $y(0) = 0$ ,  $\left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty$ ;
- 2)  $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y'$ ;  $|y(0)| < \infty$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y'$ ;  $|y(0)| < \infty$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**15.7.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  при условии  $|y(0)| < \infty$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -x^2 y'' - 2xy + 6y$ ,  $y'(1) + 3y(1) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -y'' + \frac{2}{x^2}y$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -x^2 y'' - 2xy' + 2y$ ,  $y'(1) = 0$ ;
- 4)  $Ly = -(xy')'$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 5)  $Ly = -xy'' - y'$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ ;
- 6)  $Ly = -x^2 y'' - 2xy' + 2y$ ,  $y(1) + y'(1) = 0$ ;
- 7)  $Ly = -x^2 y'' - 2xy' + 2y$ ,  $2y(1) + y'(1) = 0$ ;
- 8)  $Ly = -y'' + \frac{a(a-1)}{x^2}y$ ,  $a > 1$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 9)  $Ly = -(xy')' + (1+x)y$ ,  $y(1) = 0$ .

**15.8.** Найти функцию Грина оператора  $Ly = -x^4 y'' - 4x^3 y' - 2x^2 y$  на интервале  $(1, 3)$  если  $y(1) + y'(1) = 0$ ,  $2y(3) + 3y'(3) = 0$ .

**15.9.** Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -\left(e^{-x^2/2} y'\right)' + e^{-x^2/2} y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -e^{x^2} y'' - 2xe^{x^2} y'$ ,  $y(0) = 2y'(0)$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -y'' + (1+x^2)y$ ,  $y(0) = y'(1) = 0$ .

Ука з а н и е. Частное решение уравнения  $-y'' + (1+x^2)y = 0$  можно искать в виде  $y = e^{z(x)}$ .

**15.10.** Найти функцию Грина оператора  $Ly = -(\sqrt{x} y')' + 3x^{-3/2}y$  на интервале  $(0, 2)$ , если  $|y(0)| < \infty$ ,  $y(2) = 0$ .

**15.11.** Найти функцию Грина оператора  $Ly = -(x + 1)y'' - y'$ , если  $|y(-1)| < \infty$ ,  $y(0) = 0$ .

**15.12.** Найти функцию Грина оператора  $Ly = -x^2y'' - xy' + n^2y$ , если  $|y(0)| < \infty$ ,  $y(1) = 0$ .

**15.13.** Найти функцию Грина оператора  $Ly = -[(x^2 - 1)y']' + 2y$ , если  $|y(1)| < \infty$ ,  $y(2) = 0$ .

**15.14.** Найти функцию Грина соответствующего дифференциального оператора:

$$1) L(y) = -\frac{y''}{\sin^2 x} + \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} y', \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2};$$

$$4y\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$2) L(y) = -(1 + e^{-x})y'' + e^{-x}y', \quad 0 < x < \ln 2;$$

$$y(0) - 2 \ln 2 \cdot y'(0) = 0, \quad y(\ln 2) = 0;$$

$$3) L(y) = -(1 + \sqrt{x})y'' - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y', \quad 0 < x < 1;$$

$$y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$$

$$4) L(y) = -\frac{y''}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} y', \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}; \quad 2y(0) - y'(0) = 0,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$5) L(y) = \frac{x-2}{2x+1}y'' + \frac{5}{(2x+1)^2}y', \quad 1 < x < 2;$$

$$y(1) + y'(1) = 0, \quad |y(2)| < +\infty;$$

$$6) L(y) = \sqrt{x(1-x)} \cdot y'' + \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}y', \quad \frac{1}{2} < x < 1;$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$7) L(y) = x^2 \cdot y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y, \quad 1 < x < 2; \quad y(1) + y'(1) = 0,$$

$$y(2) + 4y'(2) = 0;$$

$$8) L(y) = (\cos x - 1)y'' - \sin x \cdot y', \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad |y(0)| < +\infty,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$9) L(y) = (x+1)^2y'' + 2(x+1)y' - 2y, \quad 0 < x < 1;$$

$$2y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0;$$

$$10) L(y) = \frac{1-x}{1+x}y'' - \frac{2}{(1+x)^2}y', \quad 2 < x < 3; \quad y(2) + y'(2) = 0,$$

$$y'(3) = 0;$$

- 11)  $L(y) = \frac{x+1}{x^2}y'' - \frac{x+2}{x^3}y', \quad 1 < x < 2;$   
 $y(1) - 2 \ln 2 \cdot y'(1) = 0, \quad y'(2) = 0;$
- 12)  $L(y) = y'' \cdot \operatorname{ctg}^2 x - 2y' \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2};$   
 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < +\infty;$
- 13)  $L(y) = y'' \cdot \operatorname{tg}^2 x + 2y' \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$   
 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad |y(0)| < +\infty.$

**15.15.** Свести задачу Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению в следующих случаях:

- 1)  $L(y) \equiv -(1 + e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \quad 0 < x < 1,$   
 $y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$
- 2)  $L(y) \equiv -(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1,$   
 $y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0;$
- 3)  $L(y) \equiv -\sqrt{1 + e^{2x}}y'' - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}y' = \lambda xy, \quad 0 < x < 1,$   
 $y(0) - \sqrt{2}y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$
- 4)  $L(y) \equiv -(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = 0,$   
 $|y(1)| < \infty;$
- 5)  $L(y) \equiv -\cos^4 x \cdot y'' + 4 \sin x \cos^3 x \cdot y' = \lambda xy, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$   
 $2y(0) - y'(0) = 0, \quad \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty;$
- 6)  $L(y) \equiv -x^2y'' - 2xy' + (2 \cos^2 x + 1)y = \lambda y \cos 2x, \quad 1 < x < 2,$   
 $y(1) = 0, \quad y'(2) = 0;$
- 7)  $L(y) \equiv -y'' = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$

**15.16.** Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$-2xy'' - y' = 2\lambda\sqrt{x}y, \quad 0 < x < 1,$$

при граничных условиях  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \cdot y') = 0, \quad y(1) = 0.$

**15.17.** Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$-xy'' + y' = \lambda y, \quad 1 < x < 2,$$

при граничных условиях  $y(1) = y'(2) = 0.$

**15.18.** Свести к интегральному уравнению нахождение решений каждого из следующих уравнений при указанных граничных условиях:

- 1)  $-(1+x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, y(0) = y'(1) = 0;$
- 2)  $-e^x y'' - e^x y' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0;$
- 3)  $-y'' + \lambda y = f(x), y(0) = hy'(0), h \geq 0, y(1) = 0;$
- 4)  $-xy'' - y' + \lambda xy = 0, |y(0)| < \infty, y(1) = 0.$

**15.19.** Свести к интегральному уравнению нахождение решений каждого из следующих уравнений при указанных граничных условиях:

- 1)  $-\left(x + \frac{4}{x}\right)y'' - 2y' = \lambda y + 1, 2 < x < 3; y(2) = \pi y'(2), y'(3) = 0;$
- 2)  $-y'' + \frac{2}{x}y' = \lambda y + x^3, 1 < x < 3; 3y(1) = 2y'(1), y'(3) = 0;$
- 3)  $-(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}, 0 < x < 2;$   
 $y(0) - 2 \ln 2 \cdot y'(0) = 0, y'(2) = 0;$
- 4)  $-\sin x \cdot \cos x \cdot y'' - y' = \lambda y + \cos^2 x, \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{6};$   
 $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, \sqrt{3} \cdot y\left(\frac{\pi}{6}\right) + \ln 2 \cdot y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0;$
- 5)  $\frac{1}{\cos x}y'' - \frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{\cos x}y' = \lambda y \sin x + e^x, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3};$   
 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0;$
- 6)  $x^2y'' - xy' + y = \lambda yx^3, \frac{1}{2} < x < 1; 2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$   
 $y(1) = 0;$
- 7)  $-\sin x \cdot y'' - \frac{1}{\cos x}y' = \lambda y \cos x, \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4};$   
 $y\left(\frac{\pi}{6}\right) + y'\left(\frac{\pi}{6}\right) \ln 2 = 0, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$
- 8)  $(x^3 + x)y'' + 2x^2y' = \lambda xy + \sin x, 0 < x < 1;$   
 $y(0) - y'(0) = 0, y'(1) = 0;$
- 9)  $-y'' - 2y' = \lambda y e^{-x^2} + e^{-x}, 0 < x < 3; y(0) = 3y'(0), y'(3) = 0;$
- 10)  $-x^2y'' - xy' = \lambda y + \cos x, 1 < x < 2; y(1) = y'(1) \ln 2,$   
 $y(2) = 0;$
- 11)  $-xy'' + 2y' = \lambda y + \sin x, \frac{1}{4} < x < 1;$   
 $12y\left(\frac{1}{4}\right) = y'\left(\frac{1}{4}\right), y(1) + y'(1) = 0;$

- 12)  $-x^2y'' - 3xy' = \lambda y + x, \quad \frac{1}{2} < x < 1; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad 2y(1) + y'(1) = 0;$
- 13)  $(1+e^x)y'' + e^x y' = \lambda x^2 y, \quad 0 < x < 1; \quad y(0) = 2y'(0), \quad y'(1) = 0;$
- 14)  $\cos^4 x \cdot y'' - 4 \sin x \cdot \cos^3 x \cdot y' + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $2y(0) = y'(0), \quad \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < +\infty.$

**15.20.** Свести к интегральному уравнению нахождение решений каждого из следующих уравнений при указанных граничных условиях:

- 1)  $\frac{1-x}{1+x}y'' - \frac{2}{(1+x)^2}y' = \lambda y, \quad 0 < x < 1; \quad y(0) = y'(0), \quad |y(1)| < +\infty;$
- 2)  $x(\ln x - 1)y'' + y' \ln x = \lambda y, \quad 1 < x < e; \quad y(1) = y'(1),$   
 $|y(e)| < +\infty;$
- 3)  $\frac{x}{2-x}y'' + \frac{2}{(2-x)^2}y' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $y(1) + 2y'(1) = 0, \quad |y(0)| < +\infty;$
- 4)  $x(x-1)y'' + (2x-1)y' + \lambda y = 0, \quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}; \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 0,$   
 $y'\left(\frac{1}{2}\right) + 4y\left(\frac{1}{2}\right) = 0;$
- 5)  $(e^x - 1)y'' + e^x y' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1; \quad y(1) = 0, \quad |y(0)| < +\infty;$
- 6)  $-\sin x \cdot y'' - \cos x \cdot y' + y = \lambda y, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}; \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$   
 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- 7)  $-\operatorname{tg} x \cdot y'' - \frac{1}{\cos^2 x}y' + 3y = \lambda y, \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3};$   
 $\sqrt{3}y\left(\frac{\pi}{6}\right) + \ln 2 \cdot y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0;$
- 8)  $-e^x y'' - e^x y' + 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1; \quad y'(1) + y(1) = 0, \quad y'(0) = 0;$
- 9)  $-\operatorname{ctg} x \cdot y'' + \frac{1}{\sin^2 x}y' + 2y = \lambda y, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3};$   
 $\sqrt{3}y\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln 2 \cdot y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$
- 10)  $-e^{-x}y'' + e^{-x}y' + y = \lambda y, \quad 0 < x < 1; \quad y(0) = y'(0), \quad y'(1) = 0;$
- 11)  $\sqrt{x^2 - 1}y'' + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}y' + y = \lambda y, \quad 2 < x < 3; \quad y'(2) = 0, \quad y(3) = 0;$
- 12)  $\sqrt{x^2 + 1}y'' + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}y' - 2e^x y = \lambda e^x y, \quad 0 < x < 1;$   
 $y(0) = y'(0), \quad y'(1) = 0;$
- 13)  $x\sqrt{x}y'' + \frac{3}{2}\sqrt{x}y' + 2y = \lambda y, \quad 1 < x < 2; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0;$

- 14)  $\operatorname{ch} x \cdot y'' + \operatorname{sh} x \cdot y' + y = \lambda y$ ,  $0 < x < 1$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ ;  
 15)  $\sin^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y' + y = \lambda y$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ;  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  
 $|y(0)| < +\infty$ .

**15.21.** С помощью функции Грина решить следующие задачи:

- 1)  $-\frac{xy''}{1+x} - \frac{y'}{(1+x)^2} = f(x)$ ,  $1 < x < e$ ;  $y(1) = 0$ ,  
 $y(e) = ey'(e)$ , где  $e$  — основание натуральных логарифмов;
- 2)  $-x^4 y'' - 4x^3 y' - 2x^2 y = f(x)$ ,  $1 < x < 2$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y(2) + y'(2) = 0$ ;
- 3)  $-\frac{xy''}{1-x} - \frac{y'}{(1-x)^2} = f(x)$ ,  $-1 < x < 0$ ;  $2y(-1) + y'(-1) = 0$ ,  $|y(0)| < \infty$ ;
- 4)  $-(1 + \cos x)y'' + \sin x \cdot y' = f(x)$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $y(0) = 2y'(0)$ ,  
 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;
- 5)  $-y'' + \frac{2y}{x^2} = f(x)$ ,  $1 < x < 2$ ;  $2y(1) = y'(1)$ ,  $y(2) + 2y'(2) = 0$ .

**15.22.** Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y'(a) - hy(a) = c_1, \quad y'(b) + Hy(b) = c_2$$

эквивалентна трем задачам Коши:

- 1)  $g' + g^2 = q(x)$ ,  $g(a) = -h$ ;
- 2)  $Y' - g(x)Y = -f(x)$ ,  $Y(a) = c_1$ ;
- 3)  $y' + g(x)y = Y(x)$ ,  $Y(b) = \frac{c_2 - Y(b)}{H - g(b)}$ .

Указание. Факторизовать оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q = -\left(\frac{d}{dx} - g\right)\left(\frac{d}{dx} + g\right).$$

## Ответы к § 15

- 15.1.** 1)  $\begin{cases} x(1-\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$  2)  $\frac{1}{3} \cdot \begin{cases} (x+1)(2-\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\xi+1)(2-x), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$   
 3)  $-\frac{1}{h+1} \cdot \begin{cases} (x+h)(\xi-1), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\xi+h)(x-1), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$   
 4)  $\frac{1}{\sin 1} \cdot \begin{cases} \sin x \sin(1-\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \sin(1-x) \sin \xi, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$5) \frac{1 - \operatorname{ctg} 1}{2} \cdot \begin{cases} (\sin x + \cos x) \left( \frac{\operatorname{ctg} 1 + 1}{\operatorname{ctg} 1 - 1} \sin \xi + \cos \xi \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left( \frac{\operatorname{ctg} 1 + 1}{\operatorname{ctg} 1 - 1} \sin x + \cos x \right) (\sin \xi + \cos \xi), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$6) \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \cdot \begin{cases} \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(1 - \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(1 - x), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$7) \frac{1}{2(e^2 - 1)} \cdot \begin{cases} (e^x + e^{-x})(e^\xi + e^{2-\xi}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (e^\xi + e^{-\xi})(e^x + e^{2-x}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.2.} \quad 1) \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{x}, & \xi \leq x \leq 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \ln \frac{2}{\xi}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \ln \frac{2}{x}, & \xi \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{-\ln x}{x\xi}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{-\ln \xi}{x\xi}, & \xi \leq x \leq 2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\xi^2} - \frac{2}{\xi} \right), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\xi} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.3.} \quad 1) \begin{cases} \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{tg} \xi(1 - \operatorname{tg} x), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -\sin x(\sqrt{2} \sin \xi - 1), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\sin \xi(\sqrt{2} \sin x - 1), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$3) \frac{1}{4} \cdot \begin{cases} (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} \xi - 3), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\operatorname{tg} \xi + 1)(\operatorname{tg} x - 3), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.4.} \quad 1) \frac{4}{\pi + 4} \cdot \begin{cases} (1 + \operatorname{arctg} x) \left( \operatorname{arctg} \xi - \frac{\pi}{4} \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (1 + \operatorname{arctg} \xi) \left( \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \operatorname{arctg} x \left( -\frac{4}{\pi + 2} \operatorname{arctg} \xi + 1 \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{arctg} \xi \left( -\frac{4}{\pi + 2} \operatorname{arctg} x + 1 \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$3) \frac{2}{\pi + 2\sqrt{3}} \cdot \begin{cases} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$4) \frac{1}{21} \cdot \begin{cases} \left( \frac{1}{(1+x)^2} - (x+1) \right) \left( \frac{8}{(\xi+1)^2} - (\xi+1) \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left( \frac{1}{(1+\xi)^2} - (\xi+1) \right) \left( \frac{8}{(x+1)^2} - (x+1) \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$5) \frac{1}{60} \cdot \begin{cases} \left( (x-2)^3 - \frac{16}{x-2} \right) \left( \frac{1}{\xi-2} - (\xi-2)^3 \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left( (\xi-2)^3 - \frac{16}{\xi-2} \right) \left( \frac{1}{x-2} - (x-2)^3 \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$6) -\frac{1}{4 \ln 3} \cdot \begin{cases} \ln \frac{2+x}{2-x} \left( \ln \frac{2+\xi}{2-\xi} - \ln 3 \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \ln \frac{2+\xi}{2-\xi} \left( \ln \frac{2+x}{2-x} - \ln 3 \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x^2}{4} \left( \frac{1}{\xi^2} - \xi^2 \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2}{4} \left( \frac{1}{x^2} - x^2 \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x^2(\xi - \xi^2), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^2(x - x^2), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.5.} \quad 1) \begin{cases} -\operatorname{ctg} \xi - \xi + \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\operatorname{ctg} x - x + \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \ln(\sqrt{2} \sin \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \ln(\sqrt{2} \sin x), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.6.} \quad 1) \begin{cases} -\operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\operatorname{tg} \xi, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \operatorname{ctg} \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{ctg} x, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$3) G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \xi + 1, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{ctg} x + 1, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.7.} \quad 1) G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{5\xi^3}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2}{5x^3}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$2) G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} \left( \frac{1}{\xi} - \xi^2 \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2}{3} \left( \frac{1}{x} - x^2 \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$3) G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{3} \left( 2\xi + \frac{1}{\xi^2} \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi}{3} \left( 2x + \frac{1}{x^2} \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$4) G(x, \xi) = \begin{cases} -\ln \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\ln x, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases} \quad 5) G(x, \xi) = \begin{cases} 1 - \ln \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ 1 - \ln x, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$6) G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{6}(\xi + 2\xi^{-2}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi}{6}(x + 2x^{-2}), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$7) G(x, \xi) = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} x\xi^{-2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi x^{-2}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$8) G(x, \xi) = \frac{1}{1 - 2a} \cdot \begin{cases} x^a(\xi^a - \xi^{1-a}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^a(x^a - x^{1-a}), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$9) G(x, \xi) = \begin{cases} e^{x+\xi} \int_{\xi}^1 \frac{e^{-2t}}{t} dt, & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{x+\xi} \int_x^1 \frac{e^{-2t}}{t} dt, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.8.} G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{x\xi^2}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\xi x^2}, & \xi \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$\mathbf{15.9.} 1) G(x, \xi) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\Phi(0) - \Phi(1)} e^{(x^2 + \xi^2)/2} (\Phi(x) - \Phi(0))(\Phi(\xi) - \Phi(1)), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\Phi(0) - \Phi(1)} e^{(x^2 + \xi^2)/2} (\Phi(\xi) - \Phi(0))(\Phi(x) - \Phi(1)), & \xi \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi$ ;

$$2) G(x, \xi) = \\ = \begin{cases} - \left( 2 + \int_0^1 e^{-t^2} dt \right)^{-1} \left( 2 + \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \cdot \int_1^\xi e^{-t^2} dt, & 0 \leq x \leq \xi, \\ - \left( 2 + \int_0^1 e^{-t^2} dt \right)^{-1} \left( 2 + \int_0^\xi e^{-t^2} dt \right) \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$3) G(x, \xi) = \begin{cases} Ky_1(x)y_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ Ky_1(\xi)y_2(x), & \xi \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где  $K = \left( e^{-1} + \int_0^1 e^{-t^2} dt \right)^{-1}$ ,

$$y_1(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad y_2(x) = e^{x^2/2} \left( e^{-1} + \int_x^1 e^{-t^2} dt \right).$$

$$\mathbf{15.10.} G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{28\sqrt{2}} (\xi^2 - 8\sqrt{2}\xi^{-3/2}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2}{28\sqrt{2}} (x^2 - 8\sqrt{2}x^{-3/2}), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.11.} G(x, \xi) = \begin{cases} -\ln(\xi + 1), & -1 \leq x \leq \xi, \\ -\ln(x + 1), & \xi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.12.} G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^n}{2n}(\xi^{-n} - \xi^n), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^n}{2n}(x^{-n} - x^n), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.13.} G(x, \xi) = \begin{cases} x \left( 1 + \frac{\xi}{2} \ln \frac{\xi-1}{\xi+1} + \frac{\xi}{2}(\ln 3 - 1) \right), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \xi \left( 1 + \frac{x}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{x}{2}(\ln 3 - 1) \right), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.14.} 1) G(x, \xi) = \frac{1}{4} \cdot \begin{cases} 2x - \sin 2x + 1, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2\xi - \sin 2\xi + 1, & \frac{\pi}{4} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2) G(x, \xi) = -\frac{1}{\ln 3} \cdot \begin{cases} \ln(1 + e^x)[\ln(1 + e^\xi) - \ln 3], & 0 \leq x \leq \xi \leq \ln 2, \\ \ln(1 + e^\xi)[\ln(1 + e^x) - \ln 3], & 0 \leq \xi \leq x \leq \ln 2. \end{cases}$$

$$3) G(x, \xi) = 2 \cdot \begin{cases} \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + 1, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \sqrt{\xi} - \ln(1 + \sqrt{\xi}) + 1, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$4) G(x, \xi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} x + \frac{1}{2} \sin 2x + 1, & 0 \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}, \\ \xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi + 1, & 0 \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$5) G(x, \xi) = - \begin{cases} 2x + 5 \ln(2-x) + 1, & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ 2\xi + 5 \ln(2-\xi) + 1, & 1 \leq \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$6) G(x, \xi) = \begin{cases} \arcsin(2\xi - 1) - \frac{\pi}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \arcsin(2x - 1) - \frac{\pi}{2}, & \frac{1}{2} \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$7) G(x, \xi) = - \begin{cases} \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x\xi}}, & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ \frac{\ln \xi - 2}{\sqrt{x\xi}}, & 1 \leq \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$8) G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} - 2, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2, & 0 \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$9) G(x, \xi) = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} \frac{\xi + 1}{(x+1)^2}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \frac{x + 1}{(\xi+1)^2}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$10) G(x, \xi) = \begin{cases} x + 2 \ln(x-1) - 5, & 2 \leq x \leq \xi \leq 3, \\ \xi + 2 \ln(\xi-1) - 5, & 2 \leq \xi \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$11) \quad G(x, \xi) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \ln(x+1) + 1, & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ \xi^2 - 2\xi + 2 \ln(\xi+1) + 1, & 1 \leq \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$12) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{tg} x - x - 1, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} \xi - \xi - 1, & \frac{\pi}{4} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$13) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \xi + \operatorname{ctg} \xi, & 0 \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}, \\ -\frac{\pi}{4} + x + \operatorname{ctg} x, & 0 \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\mathbf{15.15.} \quad 1) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi^2 y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} x - \ln(1 + e^x) + 1 + \ln 2, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi - \ln(1 + e^\xi) + 1 + \ln 2, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$2) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} -\xi(1 + x \operatorname{arctg} x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -x(1 + \xi \operatorname{arctg} \xi), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$3) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + 1 + \ln(1+\sqrt{2}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\ln(e^{-\xi} + \sqrt{1+e^{-2\xi}}) + 1 + \ln(1+\sqrt{2}), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$4) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \xi \left( \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ x \left( \frac{\xi}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} - 1 \right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$5) \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\operatorname{tg}^3 \xi}{3} + \operatorname{tg} \xi + \frac{1}{2}, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$6) \quad y(x) = (\lambda - 1) \int_1^2 G(x, \xi) \cos 2\xi y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \frac{1}{15} \cdot \begin{cases} (x - x^{-2})(\xi + 4\xi^{-2}), & 1 \leq x \leq \xi, \\ (\xi - \xi^{-2})(x + 4x^{-2}), & \xi \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$7) \quad y(x) = (\lambda - a) \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = -\frac{1}{\sqrt{a} \sin \sqrt{a}} \cdot \begin{cases} \cos \sqrt{a} \cdot x \cdot \cos \sqrt{a}(\xi - 1), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \cos \sqrt{a} \cdot \xi \cdot \cos \sqrt{a}(x - 1), & \xi \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$a > 0$ ,  $a \neq (\pi n)^2$ ,  $n$  целое.

**15.16.**  $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} 2(-1 + \sqrt{\xi}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ 2(-1 + \sqrt{x}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$

**15.17.**  $y(x) = \lambda \int_1^2 G(x, \xi) \frac{y(\xi)}{\xi^2} d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 1), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$

**15.18.** 1)  $y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{arctg} \xi, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

2)  $y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} (-e^{-x} + 1)e^{-\xi}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (-e^{-\xi} + 1)e^{-x}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

3)  $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{-\xi + 1}{h + 1}(x + h), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{-x + 1}{h + 1}(\xi + h), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

4)  $y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \ln x, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$

**15.19.** 1)  $y(x) = \int_2^3 G(x, \xi) (\lambda \xi y(\xi) + \xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}, & 2 \leq x \leq \xi \leq 3, \\ \operatorname{arctg} \frac{\xi}{2}, & 2 \leq \xi \leq x \leq 3; \end{cases}$

2)  $y(x) = \int_1^3 G(x, \xi) \left( \frac{\lambda y(\xi)}{\xi^2} + \xi \right) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} x^3 + 1, & 1 \leq x \leq \xi \leq 3, \\ \xi^3 + 1, & 1 \leq \xi \leq x \leq 3; \end{cases}$

3)  $y(x) = \int_0^2 G(x, \xi) (\lambda e^\xi y(\xi) + e^{3\xi}) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \frac{4e^x}{1+e^x}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ \ln \frac{4e^\xi}{1+e^\xi}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 2; \end{cases}$

4)  $y(x) = \int_{\pi/8}^{\pi/6} G(x, \xi) \left( \frac{\lambda y(\xi)}{\cos^2 \xi} + 1 \right) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = - \begin{cases} \ln \sin \xi, & \frac{\pi}{8} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{6}, \\ \ln \sin x, & \frac{\pi}{8} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{6}; \end{cases}$

5)  $y(x) = \frac{\pi}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} G(x, \xi) \frac{e^\xi}{\sin \xi} d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \cos 2x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{3}, \\ \cos 2\xi, & \frac{\pi}{4} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

6)  $y(x) = -\lambda \int_{1/2}^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = - \begin{cases} x\xi \ln \xi, & \frac{1}{2} \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \xi x \ln x, & \frac{1}{2} \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

7)  $y(x) = \lambda \int_{\pi/6}^{\pi/4} G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \sin x + (1 - \sqrt{3}) \ln 2, & \frac{\pi}{6} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}, \\ \ln \sin \xi + (1 - \sqrt{3}) \ln 2, & \frac{\pi}{6} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$

8)  $y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi - \int_0^1 G(x, \xi) \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + 1, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \xi + 1, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

9)  $y(x) = \lambda \int_0^3 e^{2\xi - \xi^2} G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_0^3 e^\xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{cases} e^{-2x} - 7, & 0 \leq x \leq \xi \leq 3, \\ e^{-2\xi} - 7, & 0 \leq \xi \leq x \leq 3; \end{cases}$

$$10) \quad y(x) = \lambda \int_1^2 G(x, \xi) \frac{y(\xi)}{\xi} d\xi + \int_1^2 G(x, \xi) \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = -\frac{1}{\ln 4} \cdot \begin{cases} \ln(2x) \ln\left(\frac{\xi}{2}\right), & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ \ln(2\xi) \ln\left(\frac{x}{2}\right), & 1 \leq \xi \leq x \leq 2; \end{cases}$

$$11) \quad y(x) = \lambda \int_{1/4}^1 G(x, \xi) \frac{y(\xi)}{\xi^3} d\xi + \int_{1/4}^1 G(x, \xi) \frac{\sin \xi}{\xi^3} d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = -\frac{1}{12} \cdot \begin{cases} x^3(\xi^3 - 4), & \frac{1}{4} \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \xi^3(x^3 - 4), & \frac{1}{4} \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$12) \quad y(x) = \lambda \int_{1/2}^1 G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi + \int_{1/2}^1 G(x, \xi) \xi^2 d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = -\frac{1}{8} \cdot \begin{cases} \left(\frac{1}{x^2} - 4\right) \frac{1}{\xi^2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \left(\frac{1}{\xi^2} - 4\right) \frac{1}{x^2}, & \frac{1}{2} \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$13) \quad y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi^2 y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} x - \ln(1 + e^x) + 1 + \ln 2, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \xi - \ln(1 + e^\xi) + 1 + \ln 2, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$14) \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \xi + \operatorname{tg} \xi + \frac{1}{2}, & 0 \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

$$\mathbf{15.20.} \quad 1) \quad y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} 1 - 2 \ln(1 - x) - x, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ 1 - 2 \ln(1 - \xi) - \xi, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$2) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} 1 - \ln(1 - \ln x), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ 1 - \ln(1 - \ln \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

3)  $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = - \begin{cases} 2 \ln \xi - \xi - 1, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ 2 \ln x - x - 1, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

4)  $y(x) = -\lambda \int_{1/3}^{1/2} G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \text{ где } G(x, \xi) =$

$$= -\frac{1}{\ln(2e)} \cdot \begin{cases} \ln\left(\frac{2x}{1-x}\right) \left(\ln\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) - 1\right), & \frac{1}{3} \leq x \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \\ \ln\left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right) \left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1\right), & \frac{1}{3} \leq \xi \leq x \leq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

5)  $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = - \begin{cases} \ln(1 - e^{-\xi}) - \ln(1 - e^{-1}), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 - e^{-1}), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

6)  $y(x) = (\lambda - 1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\xi}{2}\right), & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right), & \frac{\pi}{4} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

7)  $y(x) = (\lambda - 3) \int_{\pi/6}^{\pi/3} G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \sin x, & \frac{\pi}{6} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{3}, \\ \ln \sin \xi, & \frac{\pi}{6} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

8)  $y(x) = (\lambda - 2) \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ e^{-x}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

9)  $y(x) = (\lambda - 2) \int_{\pi/4}^{\pi/3} G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \cos \xi, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{3}, \\ \ln \cos x, & \frac{\pi}{4} \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

$$10) \quad y(x) = (\lambda - 1) \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ e^\xi, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$11) \quad y(x) = (\lambda - 1) \int_2^3 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{3 + \sqrt{8}}, & 2 \leq x \leq \xi \leq 3, \\ \ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{3 + \sqrt{8}}, & 2 \leq \xi \leq x \leq 3; \end{cases}$

$$12) \quad y(x) = -(\lambda + 2) \int_0^1 G(x, \xi) e^\xi y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) + 1, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$13) \quad y(x) = (2 - \lambda) \int_1^2 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}, & 1 \leq x \leq \xi \leq 2, \\ 2 - \frac{2}{\sqrt{\xi}}, & 1 \leq \xi \leq x \leq 2; \end{cases}$

$$14) \quad y(x) = (1 - \lambda) \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \operatorname{arctg} e^\xi - \frac{\pi}{4}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$15) \quad y(x) = (1 - \lambda) \int_0^{\pi/4} G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1, & 0 \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{ctg} \xi - 1, & 0 \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

**15.21.** 1)  $y(x) = \int_1^e G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$

где  $G(x, \xi) = \begin{cases} (x + \ln x - 1)(\xi + \ln \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\xi + \ln \xi - 1)(x + \ln x), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$

$$3) \quad y(x) = \int_1^2 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{\xi^2}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\right) \frac{1}{x^2}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$4) \quad y(x) = \int_{-1}^0 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \ln|x| - x, & -1 \leq x \leq \xi, \\ \ln|\xi| - \xi, & \xi \leq x \leq 0; \end{cases}$$

$$5) \quad y(x) = \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}\right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + 1\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$6) \quad y(x) = \int_1^2 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{3\xi}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2}{3x}, & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

## § 16. Метод разделения переменных для уравнений Лапласа и Пуассона

Рассмотрим сначала *двумерный* случай. Решение краевых задач в случае простейших областей (круг, круговое кольцо, прямоугольник и др.) можно получить методом разделения переменных.

Изложим этот метод для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in Q, \quad (\text{I})$$

в круговых областях: в круге  $Q = \{|x| < R\}$  при некотором  $R > 0$ , вне этого круга, т. е. в области  $Q = \{|x| > R\}$ ,  $R > 0$ , и в кольце  $Q = \{R_1 < |x| < R_2\}$ ,  $0 < R_1 < R_2$ . При этом, естественно, перейдем от декартовых к полярным координатам:

$$u(x) = u(x_1, x_2) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u(r, \varphi).$$

Уравнение (I) в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r, \varphi) \in Q. \quad (\text{II})$$

Найдем частные решения этого уравнения, имеющие вид

$$u(r, \varphi) = Z(r) \cdot \Phi(\varphi). \quad (\text{III})$$

В результате подстановки (III) в (II) получим два равенства

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (\text{IV})$$

$$r \frac{d}{dr}(rZ'(r)) - \lambda Z(r) = 0, \quad (\text{V})$$

в которых  $\lambda$  — некоторая постоянная.

Поскольку нас интересуют  $2\pi$ -периодические по  $\varphi$  решения  $u(r, \varphi)$ , то функция  $\Phi(\varphi)$  обязана при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$  удовлетворять равенству

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Следовательно, в (IV) (и в (V))  $\lambda = k^2$  при произвольном целом  $k \geq 0$ . А это означает, что функция  $\Phi(\varphi)$  имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi$$

при  $k = 0, 1, 2, \dots$  и при произвольных коэффициентах  $A_k$  и  $B_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а соответствующая функция  $Z(r)$  имеет вид

$$Z(r) = Z_k(r) = \begin{cases} \alpha_k r^k + \beta_k \cdot r^{-k}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, \\ \alpha_0 \cdot 1 + \beta_0 \cdot \ln r, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

при произвольных постоянных  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Таким образом, найдено множество простейших гармонических в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  функций:

$$\begin{aligned} 1, \quad \ln r, \quad r \cos \varphi, \quad r \sin \varphi, \quad \frac{1}{r} \cos \varphi, \quad \frac{1}{r} \sin \varphi, \dots, \\ r^k \cos k\varphi, \quad r^k \sin k\varphi, \quad \frac{1}{r^k} \cos k\varphi, \quad \frac{1}{r^k} \sin k\varphi, \dots, \end{aligned}$$

с помощью которых можно строить решения краевых задач для уравнения Лапласа в круговых областях.

Решение краевой задачи в круге  $\{|x| < R\}$ ,  $R > 0$ , будем искать в виде

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k, \quad r < R, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

в котором коэффициенты  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots$ , находятся из граничного условия. Если, в частности, граничное условие есть условие первой краевой задачи (задачи Дирихле)

$$u|_{|x|=R} = u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

то

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos k\psi d\psi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin k\psi d\psi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и тогда решение этой задачи имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^k \cos(k(\varphi - \psi)) \right] d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi.$$

Регулярное на бесконечности (т. е. в двумерном случае — ограниченное решение) в области  $\{|x| > R\}$ ,  $R > 0$ , будем искать в виде

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \cdot \frac{1}{r^k},$$

$$r > R, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

с соответствующими, найденными с помощью граничного условия коэффициентами  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots$ .

Решение краевой задачи в кольце  $\{R_1 < |x| < R_2\}$ , где  $0 < R_1 < R_2 < \infty$ , будем искать в виде

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_k r^k + \tilde{a}_k r^{-k}) \cos k\varphi + (b_k r^k + \tilde{b}_k r^{-k}) \sin k\varphi \right],$$

$$R_1 < r < R_2, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

с коэффициентами  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots$ , которые определяются с помощью граничных условий.

Рассмотрим теперь *трехмерный* случай. Используя сферические координаты, в этом случае получаем

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

С помощью метода разделения переменных проведем построение системы простейших гармонических в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  функций,

разложением в ряды по которой в областях шарового типа можно получать решения краевых задач для уравнения Лапласа.

Как и в двумерном случае, эта система обладает следующим свойством: при любом  $R > 0$  функции системы, рассмотренные на сфере  $\{|x| = R\}$ , составляют полную ортогональную в  $L_2(|x| = R)$  систему функций.

Уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad x = (r, \varphi, \theta) \in Q. \quad (\text{VI})$$

Решения уравнения (VI), имеющие вид  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r) \cdot Y(\varphi, \theta)$ , удовлетворяют условиям:

$$r^2 Z''(r) + 2rZ'(r) - \lambda Z(r) = 0, \quad r \geq 0, \quad (\text{VII})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\varphi, \theta)}{\partial \varphi^2} + \lambda Y(\varphi, \theta) = 0, \\ \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (\text{VIII})$$

в которых  $\lambda$  — некоторая постоянная. Нас интересуют только ограниченные и  $2\pi$ -периодические по  $\varphi$  на единичной сфере  $\{r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  решения уравнения (VIII). Поэтому для решений этого уравнения, имеющих вид  $Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi) \times W(\theta)$ , получаем следующие две задачи:

- функция  $\Phi(\varphi)$  должна быть  $2\pi$ -периодическим решением уравнения

$$\Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (\text{IX})$$

- а функция  $W(\theta)$  должна быть ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cdot W'(\theta)) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) W(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (\text{X})$$

Уравнение (IX) имеет  $2\pi$ -периодические решения только при  $\mu = \mu_m = m^2$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , причем эти решения имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

А уравнение (X), в котором  $\mu = \mu_m = m^2$ , имеет ограниченное решение только при  $\lambda = n(n+1)$  при произвольном це-

лом  $n \geq m$  (см., например, [1], [4]), причем это решение имеет вид  $W(\theta) = \alpha_{mn} P_n^{(m)}(\cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , где  $\alpha_{mn}$  — произвольные постоянные, а  $P_n^{(m)}(\xi)$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$ , есть  $m$ -я присоединенная функция многочлена Лежандра  $P_n(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^1$ , где

$$P_n(\xi) = \frac{d^n}{d\xi^n} [(\xi^2 - 1)^n], \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad (\text{XII})$$

$$P_n^{(m)}(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m}{d\xi^m} [P_n(\xi)], \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (\text{XIII})$$

Общее решение уравнения (VII) при  $\lambda = n$  ( $n + 1$ ) имеет вид

$$Z(r) = Z_n(r) = \alpha_n r^n + \beta_n r^{-(n+1)}, \quad r > 0, \quad (\text{XIV})$$

при произвольных постоянных  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ .

Из сказанного следует, что при любом целом  $n \geq 0$  существует гармоническая в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  функция

$$u_n(r, \varphi, \theta) = Z_n(r) Y_n(\varphi, \theta), \quad (\text{XV})$$

где

$$\begin{aligned} Y_n(\varphi, \theta) &= \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot [\alpha_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi] = \\ &= \alpha_{0m} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [\alpha_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi], \end{aligned} \quad (\text{XVI})$$

где  $\alpha_{mn}$ ,  $m$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, n$  — произвольные постоянные.

Функция  $Y_n(\varphi, \theta)$  (и в частности, любое слагаемое в сумме (XVI), т. е.  $P_n(\cos \theta)$ ,  $P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi$ ,  $P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi$ , где  $m = 1, \dots, n$ ) называется сферической функцией порядка  $n$ , а произведение сферической функции порядка  $n$  и функции  $r^n$  или функции  $r^{-(n+1)}$  (см. (XV) и (XIV)) является гармоническим продолжением сферической функции со сферы  $\{r = R, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$  при любом  $R > 0$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

По аналогии с двумерным случаем решение внутренней краевой задачи в шаре  $\{|x| < R\} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $R > 0$ , следует искать в виде

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot Y_n(\varphi, \theta), \quad r < R, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi],$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами  $a_{mn}$  в (XVI).

Решение внешней краевой задачи в  $\{|x| > R\} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $R > 0$ , регулярное на бесконечности (то есть в трехмерном случае стремящееся к нулю на бесконечности), следует искать в виде

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \cdot Y_n(\varphi, \theta), \quad r > R, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi],$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами  $a_{mn}$  в (XVI).

Решение же краевой задачи в шаровом слое  $\{R_1 < |x| < R_2\} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $0 < R_1 < R_2 < \infty$ , следует искать в виде

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( r^n Y_n(\varphi, \theta) + r^{-(n+1)} \cdot \tilde{Y}_n(\varphi, \theta) \right),$$

$$R_1 < r < R_2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n(\varphi, \theta) &= \\ &= \tilde{a}_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_{nk} \cos k\varphi + \tilde{b}_{nk} \sin k\varphi) \cdot P_n^{(k)}(\cos \theta) \quad (\widetilde{XVI}) \end{aligned}$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами в (XVI) и в (XVI).

Поскольку в приведенных формулах для решения краевых задач функции  $P_n$  и  $P_n^{(m)}$  умножаются на постоянные, которые в процессе решения задач следует еще определить, то и для самих этих функций в наших целях удобнее пользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \alpha_n \cdot \frac{d^n}{dt^n} ((1 - t^2)^n), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad n = 1, 2, \dots, \\ P_n^{(m)}(t) &= \beta_{nm} (1 - t^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m}{dt^m} (P_n(t)), \\ &\quad -1 \leq t \leq 1, \quad m, n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с такими постоянными  $\alpha_n$  и  $\beta_{nm}$ , чтобы соответствующие выражения выглядели «пригляднее». Например, в формуле  $P_1(t) = \alpha_1 \frac{d}{dt} (1 - t^2) = -2\alpha_1 t$  следует положить  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$  и считать,

что  $P_1(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , в формуле  $P_2(t) = \alpha_2 \frac{d^2}{dt^2} ((1 - t^2)^2) = \alpha_2 (-4 + 12t^2) = 4\alpha_2 (3t^2 - 1)$  положить  $\alpha_2 = \frac{1}{4}$  и считать, что  $P_2(t) = 3t^2 - 1$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , и т. д.

Таким образом, для наших целей можно считать, что

$$\begin{aligned} P_0(t) &\equiv 1, \\ P_1(t) &\equiv t, \\ P_2(t) &\equiv 3t^2 - 1, \\ P_3(t) &\equiv 5t^3 - 3t, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из аналогичных соображений в качестве присоединенных функций можно пользоваться выражениями:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(t) &= (1 - t^2)^{1/2}, \quad t \in [-1, 1], \\ P_2^{(1)}(t) &= (1 - t^2)^{1/2} \cdot t, \quad P_2^{(2)}(t) = 1 - t^2, \quad t \in [-1, 1], \\ P_3^{(1)}(t) &= (1 - t^2)^{1/2}(5t^2 - 1), \quad P_3^{(2)}(t) = (1 - t^2)t, \\ P_3^{(3)}(t) &= (1 - t^2)^{3/2}, \quad t \in [-1, 1], \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, можно считать, что

$$\begin{aligned} Y_0(\varphi, \theta) &= a_{00}, \\ Y_1(\varphi, \theta) &= a_{10} \cos \theta + a_{11} \sin \theta \cos \varphi + b_{11} \sin \theta \sin \varphi, \\ Y_2(\varphi, \theta) &= a_{20}(3 \cos^2 \theta - 1) + a_{21} \sin 2\theta \cos \varphi + b_{21} \sin 2\theta \sin \varphi + \\ &\quad + a_{22} \sin^2 \theta \cos 2\varphi + b_{22} \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\ Y_3(\varphi, \theta) &= a_{30}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \varphi) + a_{31} \sin \theta(5 \cos^2 \theta - 1) \cos \varphi + \\ &\quad + b_{31} \sin \theta(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \varphi + \\ &\quad + a_{32} \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\varphi + b_{32} \sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\varphi + \\ &\quad + a_{33} \sin^3 \theta \cos 3\varphi + b_{33} \sin^3 \theta \sin 3\varphi, \\ &\dots \end{aligned}$$

Решение краевой задачи для уравнения Пуассона можно свести к решению краевой задачи для уравнения Лапласа следующим образом. Берем какое-нибудь (гладкое) решение  $u_0(x)$  уравнения Пуассона. Тогда функция  $v(x) = u(x) - u_0(x)$ , где  $u(x)$  — искомое решение краевой задачи для уравнения Пуассона, является решением соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа и тем самым  $u(x) = v(x) + u_0(x)$ .

Ниже в областях  $\{|x| < R\}$ ,  $\{R_1 < |x| < R_2\}$ ,  $\{|x| > R\}$ ,  $0 < R < \infty$ ,  $0 < R_1 < R_2 < \infty$  рассматриваются простейшие краевые задачи для уравнения Лапласа (и Пуассона), при этом в граничном условии  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)\Big|_{|x|=\rho} = f$  всегда считается, что  $\mathbf{n}$  —

единичный вектор внешней по отношению к рассматриваемой области нормали к границе, а постоянная  $\sigma \geqslant 0$ .

Напомним некоторые результаты.

**Случай области  $\{|x| < R\}$ .** В этом случае уравнение Лапласа при граничном условии  $u|_{|x|=R} = f$  единствено и существует при любой  $f \in C(|x| = R)$ . В случае граничного условия  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)|_{|x|=R} = f$  при  $\sigma > 0$  решение также единствено и существует при всех  $f \in C(|x| = R)$ . Если же  $\sigma = 0$ , то решение существует для тех  $f \in C(|x| = R)$ , для которых  $\int_{|x|=R} f dS = 0$ , при этом решение определяется с точностью до постоянного слагаемого.

**Случай области  $\{|x| > R\}$ .** В этом случае рассматриваются решения уравнения Лапласа, регулярные на бесконечности.

В двумерном случае дело обстоит так же, как и в случае области  $\{|x| < R\}$ : задача с граничным условием  $u|_{|x|=R} = f$  однозначно разрешима при любой  $f \in C(|x| = R)$ , задача с граничным условием  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)|_{|x|=R} = f$ , где  $\sigma > 0$ , также однозначно разрешима при любой  $f \in C(|x| = R)$ , а эта задача с  $\sigma = 0$  при  $f \in C(|x| = R)$  разрешима только при условии  $\int_{|x|=R} f ds = 0$  и решение ее определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

В трехмерном случае задача с граничным условием  $u|_{|x|=R} = f$  однозначно разрешима при любой  $f \in C(|x| = R)$ , а задача с граничным условием  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)|_{|x|=R} = f$ , где  $\sigma \geqslant 0$ , также однозначно разрешима при любой  $f \in C(|x| = R)$ .

**Случай области  $\{R_1 < |x| < R_2\}$ .** В этом случае, если хотя бы на одной части границы (на  $\{|x| = R_1\}$  или на  $\{|x| = R_2\}$ ) задано граничное условие первой краевой задачи, например  $u|_{|x|=R_1} = f_1$ , а на другой части границы — условие  $u|_{|x|=R_2} = f_2$  либо условие  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma_2 u\right)|_{|x|=R_2} = f_2$  при  $\sigma_2 \geqslant 0$ , то задача однозначно разрешима для любых  $f_1 \in C(|x| = R_1)$  и  $f_2 \in C(|x| = R_2)$ . Если на обеих частях границы заданы условия третьей (второй) краевой задачи, т. е.  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma_1 u\right)|_{|x|=R_1} = f_1$ ,  $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma_2 u\right)|_{|x|=R_2} = f_2$ , то при  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$  эта задача однозначно разрешима при любых  $f_1 \in C(|x| = R_1)$ ,  $f_2 \in C(|x| = R_2)$ ; если же  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , то задача имеет решение тогда и только тогда,

когда  $\int_{|x|=R_1} f_1 dS - \int_{|x|=R_2} f_2 dS = 0$  и это решение определяется с точностью до постоянного слагаемого.

**Пример 1.** Решить задачу в  $\mathbb{R}^2$  ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ):

$$\Delta u = 12x, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (1)$$

$$u|_{r=1} = 2 \cos^3 \varphi + 1 - \sin \varphi \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (2)$$

$$u|_{r=2} = 16 \cos^3 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3)$$

△ Так как уравнение (1) является неоднородным, то прежде всего подберем какое-нибудь частное решение уравнения (1).

Возьмем, например,

$$w(x, y) = 2x^3.$$

Введем новую исходную функцию  $v(x, y)$  такую, что

$$v(x, y) = u(x, y) - w(x, y),$$

$$v(x, y) = u(x, y) - 2x^3, \quad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции  $v(x, y)$ :

$$\Delta v = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (5)$$

$$v|_{r=1} = 1 - \sin \varphi \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (6)$$

$$v|_{r=2} = -4 \sin \varphi \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7)$$

Разложив правые части условий (6) и (7) в ряды Фурье по системе  $\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \dots, \cos n\varphi, \sin n\varphi, \dots\}$ , получим

$$v|_{r=1} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (6')$$

$$v|_{r=2} = -2 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7')$$

В силу ортогональности системы функций  $\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \dots, \cos n\varphi, \sin n\varphi, \dots\}$  в пространстве  $L_2(0, 2\pi)$  ищем решение задачи (5), (6'), (7') в виде

$$v(r, \varphi) = a + b \ln r + \left( cr^2 + \frac{d}{r^2} \right) \sin 2\varphi. \quad (8)$$

Найдем коэффициенты  $a, b, c, d$ , подставляя (8) в (6') и (7'). Получим

$$v|_{r=1} = a + (c + d) \sin 2\varphi = 1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi,$$

$$v|_{r=2} = a + b \ln 2 + \left( 4c + \frac{d}{4} \right) \sin 2\varphi = -2 \sin 2\varphi.$$

Отсюда имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a = 1, \\ c + d = -\frac{1}{2}, \\ a + b \ln 2 = 0, \\ 4c + \frac{d}{4} = -2. \end{cases}$$

Следовательно,  $a = 1$ ,  $b = -\frac{1}{\ln 2}$ ,  $c = -\frac{1}{2}$ ,  $d = 0$ .

Из равенства (8) следует, что функция

$$v = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\varphi$$

есть решение задачи (5), (6), (7), а из (4) следует, что функция

$$u = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\varphi + 2x^3 = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\varphi + 2r^3 \cos^3 \varphi$$

есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

**Пример 2.** Решить задачу в  $\mathbb{R}^2$  ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ):

$$\Delta u = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi, \quad r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (1)$$

$$(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2)$$

Δ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Запишем оператор Лапласа в полярных координатах и подберем частное решение уравнения

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi, \quad (3)$$

которое является ограниченным в области  $\{r > 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Такое решение уравнения (3) можно найти, например, в виде

$$w(r, \varphi) = A \cos 3\varphi, \quad (4)$$

где постоянная  $A$  определяется из уравнения (3):  $A = 1$ . Следовательно,  $w(r, \varphi) = \cos 3\varphi$  есть частное решение уравнения (3) (или, что то же самое, уравнения (1)). Введем новую исковую функцию  $v(r, \varphi)$  такую, что

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= u(r, \varphi) - w(r, \varphi), \\ v(r, \varphi) &= u(r, \varphi) - \cos 3\varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

и запишем задачу (1), (2) для функции  $v(r, \varphi)$ :

$$\Delta v = 0, \quad r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (6)$$

$$(v - v_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi - \cos 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7)$$

Представив правую часть условия (7) рядом Фурье по системе  $\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \dots, \cos n\varphi, \sin n\varphi, \dots\}$ , получим

$$\begin{aligned} (v - v_r)|_{r=1} &= \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi - \cos 3\varphi = \\ &= \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{3}{4} \cos 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (7')$$

Решение задачи (6), (7) ищем в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{a}{r} \cos \varphi + \frac{b}{r^3} \cos 3\varphi. \quad (8)$$

Из равенств (7') и (8) следует, что

$$\begin{aligned} (v - v_r)|_{r=1} &= (a \cos \varphi + b \cos 3\varphi) - (-a \cos \varphi - 3b \cos 3\varphi) = \\ &= 2a \cos \varphi + 4b \cos 3\varphi = \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{3}{4} \cos 3\varphi, \end{aligned}$$

откуда находим, что  $a = \frac{3}{8}$ ,  $b = -\frac{3}{16}$ .

Поэтому функция

$$v(r, \varphi) = \frac{3}{8} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{3}{16} \frac{\cos 3\varphi}{r^3}$$

есть решение задачи (6), (7), а из (5) следует, что функция

$$u(r, \varphi) = \frac{3}{8} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{3}{16} \frac{\cos 3\varphi}{r^3} + \cos 3\varphi$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

**Пример 3.** Решить задачу в  $\mathbb{R}^3$  ( $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \times \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ):

$$\Delta u = 6z, \quad r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (1)$$

$$u|_{r=1} = 2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^3 \theta. \quad (2)$$

△ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Можно взять, например,

$$w(x, y, z) = z^3 = r^3 \cos^3 \theta.$$

Введем новую искомую функцию  $v(x, y, z)$  такую, что

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= u(x, y, z) - w(x, y, z), \\ v(x, y, z) &= u(x, y, z) - z^3, \end{aligned}$$

или

$$v = u - r^3 \cos^3 \theta, \quad (3)$$

и запишем задачу (1), (2) для новой искомой функции  $v$ . Получим

$$\Delta v = 0, \quad r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (4)$$

$$v|_{r=1} = 2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5)$$

Представляя правую часть условия (5) рядом Фурье по системе сферических функций, находим

$$\begin{aligned} v|_{r=1} &= \sin^2 \theta (1 - \cos 2\varphi) = \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos 2\varphi = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(3 \cos^2 \theta - 1) - \sin^2 \theta \cos 2\varphi. \quad (5') \end{aligned}$$

Следовательно, ищем решение задачи (4), (5) (или (5')) в виде

$$v = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3}(3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{c}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi \quad (6)$$

(с учетом условия регулярности решения на бесконечности:  $v \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ ). Находим коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , подставляя (6) в (5'). Получаем

$$\begin{aligned} v|_{r=1} &= a + b(3 \cos^2 \theta - 1) + c \sin^2 \theta \cos 2\varphi = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(3 \cos^2 \theta - 1) - \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

откуда находим, что  $a = \frac{2}{3}$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ ,  $c = -1$ .

Следовательно, функция

$$v = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r^3}(3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi$$

есть решение задачи (4), (5), а из (3) следует, что функция

$$u = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r^3}(3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi + r^3 \cos^3 \theta$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

**Пример 4.** Решить задачу в  $\mathbb{R}^3$  ( $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \times \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ):

$$\Delta u = 1, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (1)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 2 \sin \theta \sin \varphi + \frac{2}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (2)$$

Δ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Можно искать его, например, в виде

$$w(r, \varphi, \theta) = f(r).$$

Тогда из уравнения (1) следует, что

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 1. \quad (3)$$

Ищем решение уравнения (3) в виде

$$f(r) = Ar^2, \quad (4)$$

где постоянную  $A$  найдем, используя уравнение (3) и равенство (4):

$$2A + \frac{2}{r} \cdot 2Ar = 1.$$

Следовательно,  $A = \frac{1}{6}$  и  $w(r, \varphi, \theta) = f(r) = \frac{1}{6}r^2$  есть частное решение уравнения (3) (или (1)).

Введем новую искомую функцию  $v$  такую, что

$$\begin{aligned} v &= u - w, \\ v &= u - \frac{1}{6}r^2, \end{aligned} \quad (5)$$

и запишем задачу (1), (2) для функции  $v$ :

$$\Delta v = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (6)$$

$$v|_{r=1} = -\frac{1}{6}, \quad v|_{r=2} = 2 \sin \theta \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (7)$$

Так как правые части условий (7) представлены рядами Фурье по системе сферических функций, ищем решение задачи (6), (7) в виде

$$v = a + \frac{b}{r} + \left( cr + \frac{d}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi. \quad (8)$$

Найдем постоянные  $a, b, c, d$ , используя равенство (8) и условие (7). Получим

$$v|_{r=1} = a + b + (c + d) \sin \theta \sin \varphi = -\frac{1}{6},$$

$$v|_{r=2} = a + \frac{b}{2} + \left( 2c + \frac{d}{4} \right) \sin \theta \sin \varphi = 2 \sin \theta \sin \varphi,$$

где  $a, b, c, d$  определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a + b = -\frac{1}{6}, \\ c + d = 0, \\ a + \frac{b}{2} = 0, \\ 2c + \frac{d}{4} = 2, \end{cases}$$

откуда находим,  $a = \frac{1}{6}$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ ,  $c = \frac{8}{7}$ ,  $d = -\frac{8}{7}$ . Поэтому из равенства (8) следует, что функция

$$v = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r} + \frac{8}{7} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi$$

есть решение задачи (6), (7), а в силу (5) функция

$$u = \frac{1}{6}r^2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r} + \frac{8}{7} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

**16.1.** Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что  $u|_{r=1} = f(\varphi)$ , где:

- 1)  $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$ ; 2)  $f(\varphi) = \sin^3 \varphi$ ;
- 3)  $f(\varphi) = \cos^4 \varphi$ ; 4)  $f(\varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$ .

**16.2.** Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что:

$$1) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = A \cos \varphi; \quad 2) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = A \cos 2\varphi; \quad 3) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sin^3 \varphi.$$

**16.3.** Найти стационарное распределение температуры  $u(r, \varphi)$  внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если:

- 1) на его поверхности поддерживается температура

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = A \sin \varphi;$$

- 2) на одной половине поверхности цилиндра ( $0 \leq \varphi < \pi$ ) поддерживается температура  $-T_0$ , а на другой половине ( $-\pi \leq \varphi < 0$ ) — температура  $T_0$ .

**16.4.** Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = f_1(\varphi)$ ,  $u|_{r=2} = f_2(\varphi)$ , где:

- 1)  $f_1(\varphi) = u_1 = \text{const}$ ,  $f_2(\varphi) = u_2 = \text{const}$ ;

- 2)  $f_1(\varphi) = 1 + \cos^2 \varphi$ ,  $f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi$ .

**16.5.** Найти решение уравнения  $\Delta u = A$  в кольце  $R_1 < r < R_2$ , если  $u|_{r=R_1} = u_1$ ,  $u|_{r=R_2} = u_2$  ( $A, u_1, u_2$  — заданные числа).

**16.6.** Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -Axy \quad (A = \text{const})$$

в круге радиуса  $R$  с центром в начале координат, если  $u|_{r=R} = 0$ .

**16.7.** Найти функцию  $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = 96x^2$ ,  $r < 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi$ ;
- 2)  $\Delta u = 24x$ ,  $r < 1$ ;  $(2u + u_r)|_{r=1} = 20 \sin^3 \varphi$ ;
- 3)  $\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi$ ,  $r < 1$ ;  $(3u + u_r)|_{r=1} = 11 \sin 6\varphi - 5 \cos 7\varphi + 3$ ;
- 4)  $\Delta u = r^3 \sin 3\varphi$ ,  $r < 1$ ;  $(u + 3u_r)|_{r=1} = 11 \sin 3\varphi + 5 \cos 8\varphi - 3$ ;
- 5)  $\Delta u = 1 + 24x$ ,  $r < 2$ ;  $(u + u_r)|_{r=2} = 8 \sin^3 \varphi$ ;
- 6)  $\Delta u = 96y^2$ ,  $r < \frac{1}{2}$ ;  $(u + u_r)|_{r=1/2} = 2 \sin^4 \varphi$ ;
- 7)  $\Delta u = 2(1 + 3y)$ ,  $r < 1$ ;  $(u + u_r)|_{r=1} = 4y^3$ ;
- 8)  $\Delta u = 6(x + y)$ ,  $r < 1$ ;  $(u + u_r)|_{r=1} = 4x^3$ ;
- 9)  $\Delta u = 12y^2 - 2$ ,  $r < 1$ ;  $(u + u_r)|_{r=1} = 5y^4$ ;
- 10)  $\Delta u = 2(x - y)$ ,  $r < 1$ ;  $(u + u_r)|_{r=1} = 4x(1 - x^2)$ .

**16.8.** Найти функцию  $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = -\frac{1}{r^2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $r > 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = \cos^2 \varphi$ ;
- 2)  $\Delta u = \frac{1}{r^3} \cos^2 \varphi$ ,  $r > 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = \sin \varphi$ ;
- 3)  $\Delta u = -\frac{8}{r^3} \cos 3\varphi$ ,  $r > 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = \sin^2 \varphi$ ;
- 4)  $\Delta u = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi$ ,  $r > 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi$ ;
- 5)  $\Delta u = \frac{8}{r^2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $r > 2$ ;  $u|_{r=2} = \sin^4 \varphi$ ;
- 6)  $\Delta u = \frac{16}{r^2} \sin\left(4\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $r > \frac{1}{2}$ ;  $u|_{r=1/2} = 8 \cos^4 \varphi$ ;
- 7)  $\Delta u = \frac{1}{r^3} \cos 2\varphi$ ,  $r > 1$ ;  $(2u - u_r)|_{r=1} = 3 \cos 2\varphi + 11 \sin 9\varphi$ ;
- 8)  $\Delta u = \frac{3}{r^4} \cos \varphi$ ,  $r > 1$ ;  $(4u - u_r)|_{r=1} = \cos \varphi + 24 \sin 4\varphi$ .

**16.9.** Найти функцию  $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = 24y, \frac{1}{3} < r < 1;$   
 $u_r|_{r=1/3} = 12 \cos^2 \varphi, u|_{r=1} = 9 \cos 2\varphi + 12 \sin \varphi;$
- 2)  $\Delta u = 72\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{1}{2} < r < 1;$   
 $u_r|_{r=1/2} = 4 \sin \varphi, u|_{r=1} = \sin \varphi(2 \cos \varphi - 1);$
- 3)  $\Delta u = 16x, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = 1 + 3 \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi, u_r|_{r=2} = 8 \sin^2 \varphi;$
- 4)  $\Delta u = 12(x^2 - y^2), 1 < r < 3;$   
 $u_r|_{r=1} = 8 \cos^2 \varphi, u|_{r=3} = 2 \sin^2 \varphi;$
- 5)  $\Delta u = 40x, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = 5 \cos \varphi + \cos 2\varphi, u_r|_{r=2} = -9 \cos^2 \varphi;$
- 6)  $\Delta u = 24xy, \frac{1}{2} < r < 1;$   
 $u_r|_{r=1/2} = 4 + 5 \sin \varphi, u|_{r=1} = 1 - 8 \sin 2\varphi;$
- 7)  $\Delta u = -24r \sin \varphi, \frac{1}{3} < r < 1;$   
 $u_r|_{r=1/3} = 12 \cos^2 \varphi, u|_{r=1} = 9 \cos 2\varphi + 8 \sin \varphi;$
- 8)  $\Delta u = 9r, \frac{1}{2} < r < 1;$   
 $u_r|_{r=1/2} = 4 \sin \varphi, u|_{r=1} = \sin \varphi(2 \cos \varphi - 1);$
- 9)  $\Delta u = 2r \cos \varphi, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = 6 \cos \varphi - \cos 2\varphi, u_r|_{r=2} = 8 \sin^2 \varphi;$
- 10)  $\Delta u = 10r \cos 2\varphi, 1 < r < 2;$   
 $u_r|_{r=1} = 12 \cos^2 \varphi, u|_{r=2} = 2 \sin^2 \varphi.$

**16.10.** Найти функцию  $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = 12r^2 \cos 2\varphi, 1 < r < 2;$   
 $u_r|_{r=1} = 4 \cos 4\varphi - 24 \sin 3\varphi + 4 \cos 2\varphi,$   
 $u|_{r=2} = 16 \cos 4\varphi + \sin 3\varphi + 16 \cos 2\varphi + 2;$
- 2)  $\Delta u = 12r^2 \sin 2\varphi, 1 < r < 2;$   
 $u_r|_{r=1} = 4 \sin 4\varphi + 24 \cos 3\varphi + 4 \sin 2\varphi,$   
 $u|_{r=2} = 16 \sin 4\varphi - \cos 3\varphi + 16 \sin 2\varphi - 2;$
- 3)  $\Delta u = 12x, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = 2 \cos^3 \varphi + 1 - \sin \varphi \cos \varphi,$   
 $u|_{r=2} = 16 \cos^3 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi;$

- 4)  $\Delta u = 12y, \frac{1}{2} < r < 1;$   
 $u|_{r=1/2} = \frac{1}{4} \sin^3 \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi, \quad u|_{r=1} = 2 \sin^3 \varphi + \cos 2\varphi;$
- 5)  $\Delta u = 4r^2(1 + 6 \cos^2 \varphi), 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = \cos 2\varphi,$   
 $u|_{r=2} = \sin \varphi;$
- 6)  $\Delta u = 16r^2, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u|_{r=1/2} = 2 \sin \varphi, \quad u|_{r=1} = \sin^2 \varphi;$
- 7)  $\Delta u = 6r^2 \sin \varphi \cos \varphi, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi,$   
 $u|_{r=2} = 4 \cos \varphi;$
- 8)  $\Delta u = 4r^2(1 + 4 \sin^2 \varphi), \frac{1}{2} < r < 1; \quad u|_{r=1/2} = \cos \varphi,$   
 $u|_{r=1} = 2 \cos^2 \varphi;$
- 9)  $\Delta u = -24r \sin \varphi, \frac{1}{3} < r < 1; \quad u_r|_{r=1/3} = 12 \cos^2 \varphi,$   
 $u|_{r=1} = 8 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi;$
- 10)  $\Delta u = 9r, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u_r|_{r=1/2} = 4 \sin \varphi,$   
 $u|_{r=1} = \sin \varphi(2 \cos \varphi - 1);$
- 11)  $\Delta u = 2r \cos \varphi, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 6 \cos \varphi - \cos 2\varphi,$   
 $u_r|_{r=2} = 8 \sin^2 \varphi;$
- 12)  $\Delta u = 10r \cos 2\varphi, 1 < r < 2; \quad u_r|_{r=1} = 12 \cos^2 \varphi,$   
 $u|_{r=2} = 2 \sin^2 \varphi;$
- 13)  $\Delta u = -3 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 1 < r < 2; \quad u_r|_{r=1} = 1 + 17(x^2 - y^2),$   
 $u|_{r=2} = 0;$
- 14)  $\Delta u = 3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 < r < 2; \quad u_r|_{r=1} = 2xy,$   
 $u|_{r=2} = x \left( \frac{5}{2} + y \right);$
- 15)  $\Delta u = 3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = -3y - 8(x^2 - y^2),$   
 $u_r|_{r=2} = \frac{x^2 - y^2}{2};$
- 16)  $\Delta u = -\frac{6xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 10(1 + xy),$   
 $u_r|_{r=2} = 1.$

**16.11.** Найти функцию  $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , которая является решением задачи Неймана:

1)  $\Delta u = 16r^3 \cos 3\varphi$ ,  $1 < r < 2$ ;

$$u_r|_{r=1} = \frac{5}{16} \cos 5\varphi + 5 \cos 3\varphi - 48 \sin 3\varphi,$$

$$u_r|_{r=2} = 5 \cos 5\varphi - 3 \sin 3\varphi + 80 \cos 3\varphi;$$

2)  $\Delta u = 16r^3 \sin 3\varphi$ ,  $1 < r < 2$ ;

$$u_r|_{r=1} = \sin 5\varphi - \cos 3\varphi + 5 \sin 3\varphi,$$

$$u_r|_{r=2} = 16 \sin 5\varphi - \frac{1}{16} \cos 3\varphi + 80 \sin 3\varphi;$$

3)  $\Delta u = 24r^3 \sin \varphi$ ,  $r < 1$ ;  $u_r|_{r=1} = \cos \varphi$ ;

4)  $\Delta u = 12r^2 \cos 2\varphi$ ,  $\frac{1}{2} < r < 1$ ;  $u_r|_{r=1/2} = 0$ ,  $u_r|_{r=1} = 0$ ;

5)  $\Delta u = 12r \sin^2 \varphi$ ,  $1 < r < 2$ ;  $u_r|_{r=1} = \sin \varphi$ ,  $u_r|_{r=2} = 7$ ;

6)  $\Delta u = 15r^2 \sin \varphi$ ,  $\frac{1}{2} < r < 1$ ;  $u_r|_{r=1/2} = 2 \sin^2 \varphi$ ,

$$u_r|_{r=1} = \cos^2 \varphi;$$

7)  $\Delta u = 18r \cos^2 \varphi$ ,  $1 < r < 2$ ;  $u_r|_{r=1} = -21$ ,  $u_r|_{r=2} = \cos \varphi$ ;

8)  $\Delta u = 30r^2 \cos \varphi$ ,  $\frac{1}{2} < r < 2$ ;  $u_r|_{r=1/2} = 4 \cos^2 \varphi$ ,

$$u_r|_{r=2} = \sin^2 \varphi;$$

9)  $\Delta u = \frac{64}{r^5} \sin \varphi$ ,  $1 < r < 2$ ;  $u_r|_{r=1} = 2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ ,

$$u_r|_{r=2} = \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right);$$

10)  $\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi$ ,  $\frac{1}{2} < r < 1$ ;  $u_r|_{r=1/2} = 28 \sin^2 \varphi$ ,

$$u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5.$$

**16.12.** Пусть  $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  есть решение задачи Неймана:

$$\Delta u = -r, \quad 1 < r < 2;$$

$$u_r|_{r=1} = 0, \quad u_r|_{r=2} = 3\lambda - 1,$$

где  $\lambda$  — некоторая постоянная. При каком  $\lambda$  разрешима задача? Найти решение при этом  $\lambda$ .

**16.13.** Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в прямоугольнике  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , если на границе этого прямоугольника  $u(x, y)$  принимает следующие значения:

$$u|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0,$$

$$u|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

**16.14.** Найти распределение потенциала электростатического поля  $u(x, y)$ , внутри прямоугольника ( $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ), если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси  $Oy$ , равен  $v_0$ , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

**16.15.** Найти распределение потенциала электростатического поля  $u(x, y)$ , внутри коробки прямоугольного сечения  $-a < x < a$ ,  $-b < y < b$ , две противоположные грани которой ( $x = a$  и  $x = -a$ ) имеют потенциал  $v_0$ , а две другие ( $y = b$ ,  $y = -b$ ) заземлены.

**16.16.** Найти стационарное распределение температуры  $u(x, y)$  в прямоугольной однородной пластинке  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , если ее стороны  $x = a$  и  $y = b$  покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной скоростью  $q$ .

**16.17.** Найти стационарную температуру  $u(r, z)$  внутренних точек цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ , если:

1) температура нижнего основания и боковой поверхности цилиндра равна нулю, а температура верхнего основания зависит только от  $r$  (расстояние от оси цилиндра);

2) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом, а температура верхнего основания есть функция от  $r$ ;

3) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания есть функция от  $r$ ;

4) температура верхнего и нижнего оснований цилиндра равна нулю, а температура в каждой точке боковой поверхности зависит только от расстояния этой точки до нижнего основания (т. е. от  $z$ );

5) основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от  $z$ .

**16.18.** Найти стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ , если:

1) к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , а боковая поверхность  $r = R$  и верхнее основание  $z = h$  поддерживаются при нулевой температуре;

2) к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , верхнее основание поддерживаются при нулевой

температуре, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

**16.19.** Найти функцию  $u$ , гармоническую внутри шара радиуса  $R$ , с центром в начале координат и такую, что  $u|_{r=R} = f(\theta)$ , где:

- 1)  $f(\theta) = \cos \theta;$
- 2)  $f(\theta) = \cos^2 \theta;$
- 3)  $f(\theta) = \cos 2\theta;$
- 4)  $f(\theta) = \sin^2 \theta.$

**16.20.** Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса  $R$  и такую, что  $(u + u_r)|_{r=R} = 1 + \cos^2 \theta.$

**16.21.** Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса  $R$  и такую, что:

- 1)  $u_r|_{r=R} = \sin^2 \theta;$
- 2)  $(u - u_r)|_{r=R} = \sin^2 \theta;$
- 3)  $u_r|_{r=R} = A \cos \theta.$

**16.22.** Выяснить, разрешима ли внутренняя задача Неймана для шара радиуса  $R$ , если:

- 1)  $u_r|_{r=R} = A \cos \theta;$
- 2)  $u_r|_{r=R} = \sin \theta.$

Найти соответствующее решение.

**16.23.** Найти гармоническую внутри шарового слоя  $1 < r < 2$  функцию такую, что  $u|_{r=1} = f_1(\theta)$ ,  $u|_{r=2} = f_2(\theta)$ , если:

- 1)  $f_1 = \cos^2 \theta$ ,  $f_2 = \frac{1}{8}(\cos^2 \theta + 1);$
- 2)  $f_1 = \cos^2 \theta$ ,  $f_2 = 4 \cos^2 \theta - \frac{4}{3};$
- 3)  $f_1 = 1 - \cos 2\theta$ ,  $f_2 = 2 \cos \theta;$
- 4)  $f_1 = \frac{1}{2} \cos \theta$ ,  $f_2 = 1 + \cos 2\theta;$
- 5)  $f_1 = 9 \cos 2\theta$ ,  $f_2 = 3(1 - 7 \cos^2 \theta).$

**16.24.** Найти стационарную температуру внутренних точек полушара радиуса  $R$ , если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре  $T_1$ , а основание полушара — при нулевой температуре.

**16.25.** Найти стационарную температуру внутри однородного изотропного шара радиуса  $R$ , если на поверхности шара поддерживается температура

$$u|_{r=R} = \begin{cases} u_1 & \text{при } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u_2 & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

**16.26.** Найти функцию, гармоническую внутри шара  $\{r < 1\}$  и такую, что:

- 1)  $u|_{r=1} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \theta;$
- 2)  $u|_{r=1} = (\sin \theta + \sin 2\theta) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right);$
- 3)  $u|_{r=1} = \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta);$
- 4)  $u_r|_{r=1} = \sin^{10} \theta \sin 10\varphi, u|_{r=0} = 1.$

**16.27.** Найти функцию, гармоническую внутри шара  $\{r < R\}$  и такую, что:

- 1)  $u|_{r=R} = \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2 \theta \cos \theta;$
- 2)  $u|_{r=R} = \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin^3 \theta;$
- 3)  $u|_{r=R} = \sin^2 \theta \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \theta \sin \varphi;$
- 4)  $(u + r)|_{r=R} = \sin^2 \theta \left[ \sqrt{2} \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos^2 \varphi \right];$
- 5)  $(u + u_r)|_{r=R} = \sin \theta (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \theta + \sin \theta).$

**16.28.** Найти функцию, гармоническую вне шара  $\{r < 1\}$  и такую, что:

- 1)  $u|_{r=1} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin \theta; 2) u|_{r=1} = \cos^2 \theta \sin \theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$

**16.29.** Найти функцию, гармоническую вне шара  $\{r < R\}$  и такую, что:

- 1)  $u|_{r=R} = \sin^2 \theta \cos \theta \cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right);$
- 2)  $u|_{r=R} = \sin 100\varphi \sin^{100} \theta;$
- 3)  $(u - u_r)|_{r=R} = \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$

**16.30.** Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя  $\{1 < r < 2\}$  и такую, что  $u|_{r=1} = f_1(\theta, \varphi), u|_{r=2} = f_2(\theta, \varphi)$ , где:

- 1)  $f_1 = \sin \theta \sin \varphi, f_2 = 0;$
- 2)  $f_1 = 3 \sin 2\varphi \sin^2 \theta, f_2 = 3 \cos \theta;$
- 3)  $f_1 = 7 \sin \theta \cos \varphi, f_2 = 7 \cos \theta;$
- 4)  $f_1 = \sin^2 \theta (3 - \sin 2\varphi), f_2 = 4f_1;$
- 5)  $f_1 = 12 \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \varphi, f_2 = 0;$
- 6)  $f_1 = \sin 2\varphi \sin^2 \theta, f_2 = \cos 2\varphi \sin^2 \theta;$
- 7)  $f_1 = \cos \varphi \sin 2\theta, f_2 = \sin \varphi \sin 2\theta;$

- 8)  $f_1 = 31 \sin 2\theta \sin \varphi$ ,  $f_2 = 31 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$ ;  
 9)  $f_1 = \cos \theta$ ,  $f_2 = \cos \varphi (12 \sin \theta - 15 \sin^3 \theta)$ .

**16.31.** Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя  $\{1 < r < 2\}$  и такую, что:

- 1)  $(3u + u_r)|_{r=1} = 5 \sin^2 \theta \sin 2\varphi$ ,  $u|_{r=2} = -\cos \theta$ ;  
 2)  $u|_{r=1} = \sin \theta \sin 2\varphi (5 + 6 \cos \theta)$ ,  $u_r|_{r=2} = 12 \sin 2\theta \sin \varphi$ ;  
 3)  $u|_{r=1} = 1$ ,  $u_r|_{r=2} = 15 \cos \varphi (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta)$ .

**16.32.** Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя  $\left\{\frac{1}{2} < r < 1\right\}$  и такую, что:

- 1)  $u|_{r=1/2} = 0$ ,  $u|_{r=1} = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta$ ;  
 2)  $u|_{r=1/2} = 30 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta$ ,  $u|_{r=1} = 0$ .

**16.33.** Найти функцию

$$u(x, y, z) = u(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = 0$ ,  $r < 1$ ;  $u|_{r=1} = 5 + \sin \theta \sin(\varphi - 2) + 3 \cos 2\theta$ ;  
 2)  $\Delta u = 0$ ,  $r < 1$ ;  $(u + u_r)|_{r=1} = \cos \theta (\sin \varphi \sin \theta + \cos \theta)$ ;  
 3)  $\Delta u = 0$ ,  $r < 2$ ;  $u|_{r=2} = 3 \cos 2\theta + 2 \sin \varphi \sin \theta$ ;  
 4)  $\Delta u = 0$ ,  $r < 2$ ;  $u|_{r=2} = 12 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2 \theta \cos(2\varphi + 1)$ ;  
 5)  $\Delta u = 0$ ,  $r < 1$ ;  $u|_{r=1} = 1 + 3 \sin \theta \cos(\varphi + 4) - 3 \sin^2 \theta$ ;  
 6)  $\Delta u = 0$ ,  $r < 2$ ;  $u|_{r=2} = \cos 2\theta (1 + \sin 2\varphi) - \sin^2 \theta - \sin 2\varphi$ .

**16.34.** Найти функцию

$$u(x, y, z) = u(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = 0$ ,  $r > R$ ;  
 $u|_{r=R} = 3 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \sin^2 \theta$ ;
- 2)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = 3 \sin^2 \theta \cdot \cos^2(\varphi + 1)$ ;
- 3)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 1$ ;  $u|_{r=1} = \cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \theta + 1$ ;
- 4)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 1$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = \sin \theta (\sin \theta + \sin \varphi)$ ;
- 5)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 1$ ;  $u|_{r=1} = \sin \theta (\sin \theta + \sin \varphi)$ ;
- 6)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 1$ ;  $u|_{r=1} = 2 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta$ ;
- 7)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 2$ ;  
 $u|_{r=2} = 1 + 2(\cos \varphi - \sin \theta) \cos \varphi - \cos 2\theta \cos 2\varphi$ ;
- 8)  $\Delta u = 0$ ,  $r > 3$ ;  $(u - u_r)|_{r=3} = \frac{4}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$ ;

- 9)  $\Delta u = 0, r > 2; \quad (u - 2u_r)|_{r=2} = \sin^2 \theta(1 + \sin \varphi \cos \varphi);$
- 10)  $\Delta u = 0, r > \frac{1}{2}; \quad (2u - u_r)|_{r=1/2} = 24(\cos \theta + \cos 2\varphi).$

**16.35.** Найти функцию

$$u(x, y, z) = u(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

которая является решением следующей краевой задачи:

- 1)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u_r|_{r=1/2} = 4(4 - 3 \sin^2 \theta),$   
 $u|_{r=1} = 6 \cos 2\theta;$
- 2)  $\Delta u = 0, 2 < r < 3;$   
 $u|_{r=2} = -\frac{1}{2} + 8 \cos 2\varphi - 8 \cos^2 \theta \cos 2\varphi,$   
 $u|_{r=3} = 9 \cos 2\varphi - 9 \cos 2\theta \cos 2\varphi;$
- 3)  $\Delta u = 0, 1 < r < 3; \quad u|_{r=1} = 3(\sin^2 \theta \cos 3\varphi + 4),$   
 $(u + u_r)|_{r=3} = 5;$
- 4)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u|_{r=1/2} = 3(1 + \cos 2\theta),$   
 $u|_{r=1} = 6(3 - 4 \sin^2 \theta);$
- 5)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 0,$   
 $u|_{r=2} = 31 \sin^2 \theta (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi);$
- 6)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u_r|_{r=1} = -6 \sin^2 \theta,$   
 $u|_{r=2} = 2(2 + 3 \cos 2\theta);$
- 7)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 31(\cos \varphi + \sin \varphi) \sin 2\theta,$   
 $u|_{r=2} = 0;$
- 8)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = -\frac{31}{2} \sin 2\theta \sin \varphi, \quad u|_{r=2} = 14 \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \right);$
- 9)  $\Delta u = 0, \frac{1}{3} < r < 1;$   
 $u|_{r=1} = 3 \sin \theta \cos \varphi (1 + 6 \cos \theta),$   
 $u|_{r=1/3} = \cos \varphi (\sin \theta + \sin 2\theta);$
- 10)  $\Delta u = 0, 1 < r < 3; \quad u|_{r=1} = 4 + 2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi,$   
 $u|_{r=3} = 2 + 9 \sin 2\varphi - 9 \cos 2\theta \sin 2\varphi;$
- 11)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 14 - 6 \sin \varphi - 21 \sin^2 \theta,$   
 $u|_{r=2} = \sin \theta (2 \sin \varphi + 9 \sin \theta) - 6;$
- 12)  $\Delta u = 0, 2 < r < 3;$   
 $u|_{r=2} = 4 + 2 \cos 2\varphi - 2 \cos 2\theta \cdot \cos 2\varphi,$   
 $u|_{r=3} = 3 \sin^2 \theta (1 + 3 \cos 2\varphi) + 3 \cos^2 \theta;$
- 13)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1;$   
 $u|_{r=1/2} = 18 - 7 \cos \theta - 27 \sin^2 \theta, \quad u|_{r=1} = 10 - 15 \sin^2 \theta;$

- 14)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u_r|_{r=1/2} = 0,$   
 $u|_{r=1} = \frac{1}{3} - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi;$
- 15)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = 2 \sin \theta \cos(\theta + \varphi) + (1 - \cos 2\theta) \sin \varphi;$
- 16)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = \sin \theta \cos(\varphi + 2),$   
 $u|_{r=2} = \sin^2 \theta - \frac{2}{3};$
- 17)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = \sin^2 \theta (3 - \sin 2\varphi), \quad u|_{r=2} = 4 \sin^2 \theta (3 - \sin 2\varphi);$
- 18)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = \sin \theta \sin \varphi (5 + 6 \cos \theta), \quad u_r|_{r=2} = 12 \sin 2\theta \sin \varphi;$
- 19)  $\Delta u = 0, 1 < r < 4;$   
 $u_r|_{r=1} = 2(\sin \theta \cos \varphi + 3 \cos \theta), \quad (u + 2u_r)|_{r=4} = 12 \cos \theta;$
- 20)  $\Delta u = 0, 1 < r < 3; \quad u|_{r=1} = 3(\sin^2 \theta \cos 2\varphi + 4),$   
 $(u + u_r)|_{r=3} = 5;$
- 21)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad u|_{r=2} = 1 + \sin 2\varphi - \cos 2\theta \sin 2\varphi;$
- 22)  $\Delta u = 0, 2 < r < 3;$   
 $u_r|_{r=2} = -\frac{1}{2} + 8 \cos 2\varphi - 8 \cos^2 \theta \cos 2\varphi,$   
 $u|_{r=3} = 9 \cos 2\varphi - 9 \cos 2\theta \cos 2\varphi;$
- 23)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 6 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi,$   
 $u_r|_{r=2} = 4 - 12 \cos 2\theta;$
- 24)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1;$   
 $u|_{r=1/2} = \sin 2\theta \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad u|_{r=1} = 3(\cos 2\theta + \sin^2 \theta) - 1;$
- 25)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u_r|_{r=1/2} = 4,$   
 $u|_{r=1} = 21 \sin^2 \theta (\sin \varphi - \cos \varphi)^2;$
- 26)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = \frac{3}{8} \operatorname{tg} \theta \sin \varphi (1 + \cos 2\theta),$   
 $u|_{r=2} = \cos \theta;$
- 27)  $\Delta u = 0, 1 < r < 3; \quad u|_{r=1} = 3 \sin^2 \theta, \quad u|_{r=3} = 6 \cos^2 \theta;$
- 28)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin \varphi;$
- 29)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2;$   
 $u_r|_{r=1} = 5 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad u|_{r=2} = -\frac{5}{6} - \frac{5}{2} \cos 2\theta;$
- 30)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 3 \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta) - 2,$   
 $u|_{r=2} = 0;$
- 31)  $\Delta u = 0, 1 < r < 2; \quad (u + u_r)|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 3 + 3 \cos^2 \theta;$

32)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1;$

$$u_r|_{r=1/2} = 49 \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin^2 \theta, \quad u|_{r=1} = 10;$$

33)  $\Delta u = 0, \frac{1}{2} < r < 1; \quad u|_{r=1/2} = 2, \quad u_r|_{r=1} = \sin 2\theta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$

**16.36.** Найти функцию

$$u(x, y, z) = u(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

которая является решением следующей краевой задачи:

1)  $\Delta u = 6z, \quad r < 1; \quad u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^3 \theta;$

2)  $\Delta u = 12(x^2 - y^2), \quad 1 < r < 2;$

$$u|_{r=1} = 2 \sin \varphi \sin 2\theta + \sin^4 \theta \cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = -4 \sin^2 2\theta \cos 2\varphi;$$

3)  $\Delta u = 1, \quad 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 2 \sin \theta \sin \varphi + \frac{2}{3};$

4)  $\Delta u = 24xy, \quad r < \frac{1}{2};$

$$u|_{r=1/2} = \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{16} \sin^4 \theta \sin 2\varphi;$$

5)  $\Delta u = \frac{3}{r^5}, \quad \frac{1}{2} < r < 1;$

$$u|_{r=1/2} = (\cos 2\theta - 1) \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta, \quad u_r|_{r=1} = \sin 2\theta \sin \varphi;$$

6)  $\Delta u = 6r^3, \quad 1 < r < 2;$

$$u|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1) \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta, \quad u_r|_{r=2} = 15 + \sin \theta \cos \varphi;$$

7)  $\Delta u = \frac{6}{r}, \quad \frac{1}{3} < r < 1;$

$$u|_{r=1/3} = \cos^2 \theta \cos 2\varphi + 2 \sin^2 \varphi, \quad u|_{r=1} = 1 + \cos \theta;$$

8)  $\Delta u = 12r, \quad 1 < r < 3; \quad u|_{r=1} = 0,$

$$u|_{r=3} = \cos 2\theta \sin 2\varphi + (\sin \theta - 2 \cos \varphi) \sin \varphi;$$

9)  $\Delta u = \frac{1}{r^4}, \quad r > 2; \quad (u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right);$

10)  $\Delta u = 20, \quad r < \sqrt{3};$

$$u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi.$$

## Ответы к § 16

**16.1.** 1)  $\frac{1}{2}(1 + r^2 \cos 2\varphi); \quad 2) \frac{r}{4}(3 \sin \varphi - r^2 \sin 2\varphi);$

3)  $\frac{3}{8} + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{r^4}{8} \cos 4\varphi; \quad 4) \frac{5}{8} + \frac{3}{8} r^4 \cos 4\varphi.$

**16.2.** 1)  $A r \cos \varphi + C; \quad 2) \frac{A}{2R} r^2 \cos 2\varphi + C;$

3)  $\frac{1}{4} \left( 3r \sin \varphi - \frac{r^3}{3R^2} \sin 3\varphi \right) + C$ . Здесь  $C$  — произвольная постоянная.

**16.3.** 1)  $\frac{Ar}{R} \sin \varphi$ ;

2)  $-\frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{1n+1} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2rR \sin \varphi} - T_0$ .

**16.4.** 1)  $u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\ln r}{\ln 2}$ ; 2)  $\frac{3}{2} - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left( \frac{2}{3r^2} - \frac{1}{6}r^2 \right) \cos 2\varphi$ .

**16.5.**  $u_2 + \frac{A}{4}(r^2 - R_2^2) + \frac{u_1 - u_2 + A(R_2^2 - R_1^2)/4}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln \frac{R_2}{r}$ .

**16.6.**  $\frac{Ar^2}{24}(R^2 - r^2) \sin 2\varphi$ .

Указание:  $u = v + w$ , где  $v = -\frac{Ax}{12}(x^2 + y^2) = -\frac{Ar^4 \sin 2\varphi}{24}$  — частное решение уравнения Пуассона, а  $w$  — решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию  $w|_{r=R} = \frac{A}{24}R^4 \sin 2\varphi$ .

**16.7.** 1)  $u = 3r^4 + 4r^4 \cos 2\varphi + 9 - 12r^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)$ ;

2)  $u = 3r^3 \cos \varphi + 5r(\sin \varphi - \cos \varphi) - r^3 \sin 3\varphi$ ;

3)  $u = (2r^6 - r^4) \sin 6\varphi - \frac{1}{2}r^7 \cos 7\varphi + 1$ ;

4)  $u = \left( \frac{1}{16}r^5 + r^3 \right) \sin 3\varphi + \frac{1}{5}r^8 \cos 8\varphi - 3$ ;

5)  $u = 3r^3 \cos \varphi + \frac{1}{4}r^2 - 2 + 2r \sin \varphi - 20r \cos \varphi - \frac{1}{10}r^3 \sin 3\varphi$ ;

6)  $u = 3r^4 - 4r^4 \cos 2\varphi - \frac{15}{16} + r^2 \cos 2\varphi + \frac{4}{9}r^4 \cos 4\varphi$ ;

7)  $u = -\frac{3}{2} + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi = -\frac{3}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} + y^3$ ;

8)  $u = -\frac{3}{2}r \sin \varphi + \frac{1}{4}r^3 \sin 3\varphi + r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)$ ;

9)  $u = \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + r^4 \sin^4 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = \frac{3}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} + y^4$ ;

10)  $u = \frac{r}{2} \sin \varphi + \frac{r^3}{4} \sin 3\varphi + r^3(\sin^2 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi)$ .

**16.8.** 1)  $u = \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2r} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{6r^2} \cos 2\varphi$ ;

2)  $u = \frac{1}{2r} - \frac{1}{6r} \cos 2\varphi - 1 + \frac{1}{2r} \sin \varphi + \frac{1}{9r^2} \cos 2\varphi$ ;

3)  $u = \frac{1}{r} \cos 3\varphi + \frac{1}{2} - \frac{1}{6r^2} \cos 2\varphi - \frac{1}{2r^3}$ ;

- 4)  $u = \cos 3\varphi + \frac{8}{3r} \cos \varphi - \frac{1}{16r^3} \cos 3\varphi;$   
 5)  $u = \left(\frac{8}{r^4} - \frac{1}{2}\right) \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{8} - \frac{2}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{2}{r^4} \cos 4\varphi;$   
 6)  $u = \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{r^4} - 1\right) \sin\left(4\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + 3 + \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{1}{16} \frac{1}{r^4} \cos 4\varphi;$   
 7)  $u = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{3r}\right) \cos 2\varphi + \frac{1}{r^9} \sin 9\varphi;$   
 8)  $u = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + \frac{3}{r^4} \sin 4\varphi.$

- 16.9.** 1)  $u = 3r^3 \sin \varphi + 2 \ln r + \left(8r + \frac{1}{r}\right) \sin \varphi + 9r^2 \cos 2\varphi;$   
 2)  $u = 8r^3 - 8 - 3 \ln r - \frac{1}{r} \sin \varphi + \left(\frac{16}{17}r^2 + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{r^2}\right) \sin 2\varphi;$   
 3)  $u = 2r^3 \cos \varphi + 8 \ln r + \left(\frac{20}{r} - 19r\right) \cos \varphi - r^2 \cos 2\varphi;$   
 4)  $u = r^4 \cos 2\varphi + 1 + 4 \ln\left(\frac{r}{3}\right) - \left(9r^2 + \frac{9}{r^2}\right) \cos 2\varphi;$   
 5)  $u = 5r^3 \cos \varphi - 9 \ln r - 48 \left(r - \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + \left(r^2 - \frac{2}{r^2}\right) \cos 2\varphi;$   
 6)  $u = r^4 \sin 2\varphi + 1 + 2 \ln r + \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi - \frac{1}{2} \left(17r^2 + \frac{1}{r^2}\right) \sin 2\varphi;$   
 7)  $u = -3r^3 \sin \varphi + 2 \ln r + \left(10r + \frac{1}{r}\right) \sin \varphi + 9r^2 \cos 2\varphi;$   
 8)  $u = -1 - \frac{3}{8} \ln r + \frac{1}{17} \left(16r^2 + \frac{1}{r^2}\right) \sin 2\varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi + r^3;$   
 9)  $u = \frac{1}{4}r^3 \cos \varphi + 8 \ln r + \left(\frac{7}{r} - \frac{5}{4}r\right) \cos \varphi - r^2 \cos 2\varphi;$   
 10)  $u = 2r^3 \cos 2\varphi + 1 + 6 \ln\left(\frac{r}{2}\right) - 4 \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) \cos 2\varphi.$

- 16.10.** 1)  $u = r^4(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) + \frac{8}{r^3} \sin 3\varphi + 1;$   
 2)  $u = r^4(\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) - \frac{8}{r^3} \cos 3\varphi - 2;$   
 3)  $u = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{1}{2}r^3(\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\varphi;$   
 4)  $u = r^2 \cos 2\varphi - \frac{\ln r}{4 \ln 2} + \frac{1}{2}r^3(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi);$   
 5)  $u = r^4(1 + \cos 2\varphi) - 15 \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{2}{3} \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi - \frac{64}{15} \left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right) \cos 2\varphi - 1;$

- 6)  $u = r^4 - \frac{7}{16} \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{4}{3} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi - \frac{1}{30} \left( 16r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi - \frac{1}{2};$
- 7)  $u = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{8}{3} \left( r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( r^2 - \frac{16}{r^2} \right) \cos 2\varphi - \frac{1}{20} \left( 21r^2 - \frac{16}{r^2} \right) \sin 2\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 2\varphi;$
- 8)  $u = \frac{3}{4} r^4 + \frac{19}{64} \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{2}{3} \left( r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{30} \left( 53r^2 - \frac{3}{r^2} \right) \cos 2\varphi - \frac{2}{3} r^4 \cos 2\varphi + \frac{1}{4};$
- 9)  $u = -3r^3 \sin \varphi + \left( 10r + \frac{1}{r} \right) \sin \varphi + 2 \ln r + 9r^2 \cos 2\varphi;$
- 10)  $u = -\frac{3}{8} \ln r + \frac{1}{17} \left( 16r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi + r^3 - 1;$
- 11)  $u = \frac{1}{4} r^3 \cos \varphi + \left( \frac{7}{r} - \frac{5}{4} r \right) \cos \varphi + 8 \ln r - r^2 \cos 2\varphi;$
- 12)  $u = 2r^3 \cos 2\varphi + 6 \ln \left( \frac{r}{2} \right) - 4 \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi + 1;$
- 13)  $u = \ln \left( \frac{r}{2} \right) + \left( r - \frac{8}{r^2} \right) \cos 2\varphi;$
- 14)  $u = \left( r^2 + \frac{2}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi;$
- 15)  $u = (r^2 - 4r) \sin \varphi - \frac{8}{r^2} \cos 2\varphi;$
- 16)  $u = 2 \ln r + \left( r + \frac{4}{r^2} \right) \sin 2\varphi + 10.$

- 16.11.** 1)  $u = r^5 \left( \cos 3\varphi + \frac{1}{16} \cos 5\varphi \right) + \frac{16}{r^3} \sin 3\varphi + C;$
- 2)  $u = r^5 \left( \sin 3\varphi + \frac{1}{5} \sin 5\varphi \right) + \frac{1}{3r^3} \cos 3\varphi + C;$
- 3)  $u = (r^5 - 5r) \sin \varphi + r \cos \varphi + C;$
- 4)  $u = \left( r^4 - \frac{21}{10} r^2 - \frac{1}{10r^2} \right) \cos 2\varphi + C;$
- 5)  $u = \frac{2}{3} r^3 - \frac{6}{5} r^3 \cos 2\varphi - 2 \ln r - \frac{1}{3} \left( r + \frac{4}{r} \right) \sin \varphi + \frac{1}{25} \left( 93r^2 + \frac{48}{r^2} \right) \cos 2\varphi + C;$
- 6)  $u = r^4 \sin \varphi + \frac{1}{2} \ln r - \frac{1}{6} \left( 31r + \frac{7}{r} \right) \sin \varphi + \frac{1}{12} \left( 4r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi + C;$
- 7)  $u = r^3 + \frac{9}{5} r^3 \cos 2\varphi - 24 \ln r + \frac{4}{3} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi - \frac{1}{50} \left( 279r^2 + \frac{144}{r^2} \right) \cos 2\varphi + C;$
- 8)  $u = 2r^4 \cos \varphi + \ln r - \frac{1}{5} \left( 341r + \frac{84}{r} \right) \cos \varphi - \frac{2}{15} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi + C;$

$$9) u = \left( \frac{8}{r^3} - \frac{30}{r} - 6r \right) \sin \varphi - \left( \frac{2}{r} + r \right) \cos \varphi + \ln r + C;$$

$$10) u = \left( \frac{7}{5r^2} - \frac{6}{r} - \frac{8r^2}{5} \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{1}{r^2} + 2r^2 \right) \cos 2\varphi + 7 \ln r + C.$$

**16.12.** Если  $\lambda = \frac{1}{48}$ , то  $u = C - \frac{1}{4r} - \frac{r^3}{12}$ , где  $C$  — произвольная постоянная, есть решение краевой задачи. Если  $\lambda \neq \frac{1}{48}$ , то краевая задача решений не имеет.

**16.13.**  $A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} + B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$ . Указание. Решение искать в виде  $u = v + w$ , где  $v$  и  $w$  — гармонические функции такие, что  $v|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b}$ ,  $v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0$ ,  $w|_{x=0} = w|_{x=a} = w|_{y=b}=0$ ,  $w|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}$ .

$$16.14. \frac{4v_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1) \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

$$16.15. \frac{4v_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{(2n+1) \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2b} \pi a}.$$

$$16.16. \frac{16qa^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi(b-y)}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a},$$

$k$  — коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $\Delta u = -\frac{q}{k}$  при условиях  $u|_{x=0} = u|_{y=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=a} = u_y|_{y=b} = 0$ .

**16.17.** 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} J_0 \left( \mu_n \frac{r}{R} \right)$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r u_0(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right) dr$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} J_0 \left( \mu_n \frac{r}{R} \right)$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_1(\mu) = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R r u_0(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right) dr$  (указание: краевые условия имеют вид  $|u|_{r=0} < \infty$ ,  $u|_{z=0} = 0$ ,  $u_r|_{r=R} = 0$ ,  $u|_{z=h} = u_0(r)$ );

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} J_0 \left( \mu_n \frac{r}{R} \right)$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные

корни уравнения  $\mu J_1(\mu) - h_0 R J_0(\mu) = 0$ ,  $a_n = \frac{2}{R^2} \left( 1 + \frac{h_1^2 R^2}{\mu_n^2} \right) \times$   
 $\times \frac{1}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^R r u_0(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right) dr$

(указание: краевые условия имеют вид  $|u|_{r=0} < \infty$ ,  $u|_{z=0} = 0$ ,  $(u_r + h_1 u)|_{r=R} = 0$ ,  $u|_{z=h} = u_0(r)$ );

4)  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_0 \left( \frac{\pi n R}{h} i \right) \right]^{-1} \left( \int_0^h f(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{h} d\xi \right) \sin \frac{\pi n z}{h} J_0 \left( \frac{\pi n r}{h} i \right)$ ,

где  $J_0(iz)$  — функция Бесселя нулевого порядка от чисто мнимого аргумента;

5)  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_0 \left( \frac{\pi n R}{h} i \right) \right]^{-1} \left( \int_0^h f(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{h} d\xi \right) \cos \frac{\pi n z}{h} J_0 \left( \frac{\pi n r}{h} i \right)$

(указание: краевые условия имеют вид  $u_z|_{z=0} = u_z|_{z=h} = 0$ ,  $u|_{r=R} = f(z)$ ).

**16.18.** 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n(h-z)}{R}}{\operatorname{ch} \frac{\mu_n h}{R}} J_0 \left( \mu_n \frac{r}{R} \right)$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) —

положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ,  $a_n = \frac{2aq}{k\mu_n^2 J_1(\mu_n)}$ ,  $k$  — коэффициент теплопроводности.

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $\Delta u = 0$  при краевых условиях  $-ku_z|_{z=0} = 0$ ,  $u|_{r=R} = u|_{z=h} = 0$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n(h-z)}{R}}{\operatorname{ch} \frac{\mu_n h}{R}} J_0 \left( \mu_n \frac{r}{a} \right)$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $\mu J_1(\mu) - Rh_1 J_0(\mu) = 0$ ,  $h_1$  — коэффициент теплообмена,  $a_n = \frac{2h_1^2 R^3 q}{k(R^2 h_1^2 + \mu_n^2)} |J_1(\mu_n)|^{-1} \mu_n^{-2}$ .

Указание. Краевые условия имеют вид  $(u_r + h_1 u)|_{r=R} = 0$ ,  $-ku_z|_{z=0} = 0$ ,  $u|_{z=h} = 0$ .

**16.19.** 1)  $\frac{r}{R} \cos \theta$ ; 2)  $\frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta$ ;

3)  $\frac{2}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 (\cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{3}$ ; 4)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1)$ .

**16.20.**  $-\frac{1}{3} + \frac{r^2}{3(R^2 + 2R)} (3 \cos^2 \theta - 1)$ .

- 16.21.** 1)  $-\frac{2R^2}{3r} + \frac{R^4}{9r^3}(3\cos^2\theta - 1) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  
 2)  $C + \left(\frac{2}{3} - C\right) \frac{R^2}{r(R+1)} - \frac{R^4}{(R+1)r^3} \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная;  
 3)  $C - \frac{A}{2} \cdot \frac{R^3}{r^2} \cos\theta$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

**16.22.** 1) Задача разрешима:  $u = Ar \cos\theta$ , где  $C$  — произвольная постоянная;

2) задача не имеет решения.

- 16.23.** 1)  $\frac{1}{3r} + \frac{2\cos^2\theta - 1}{3r^3}$ ; 2)  $\frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} - 1 + r^2(3\cos^2\theta - 1) \right]$ ;  
 3)  $\frac{4}{3} \left(-1 + \frac{2}{r}\right) + \frac{8}{7} \left(r - \frac{1}{r^2}\right) \cos\theta + \frac{2}{93} \left(r^2 - \frac{32}{r^3}\right) (3\cos^2\theta - 1)$ ;  
 4)  $\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{14} \left(-r + \frac{8}{r^2}\right) \cos\theta + \frac{16}{93} \left(r^2 - \frac{1}{r^3}\right) (3\cos^2\theta - 1)$ ;  
 5)  $-5 + \frac{2}{r} + \left(-2r^2 + \frac{8}{r^3}\right) (3\cos^2\theta - 1)$ .

**16.24.**  $T_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} (4n+3) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

**16.25.**  $\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} (4n+3) \times$   
 $\times P_{2n+1}(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}$ .

- 16.26.** 1)  $r^2 \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin^2\theta$ ; 2)  $(r \sin\theta + r^2 \sin 2\theta) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ ;  
 3)  $\frac{2}{3} - \frac{r^2}{6}(3 \cos 2\theta + 1) + r \sin\theta \sin\varphi$ ; 4)  $1 + \frac{r^{10}}{10} \sin^{10}\theta \sin 10\varphi$ .

- 16.27.** 1)  $\left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\theta \cos\theta$ ;  
 2)  $\left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin^3\theta$ ;  
 3)  $\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\theta \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{r}{R} \sin\theta \sin\varphi$ ;  
 4)  $\frac{2}{3} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left[ -\frac{R}{3(2+R)} (3 \cos^2\theta - 1) + \frac{R}{2+R} (2 \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \sin^2\theta \right]$ ;  
 5)  $\frac{2}{3} + \frac{r}{R+1} \sin\varphi \sin\theta + \frac{r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi}{R(R+2)} - \frac{r^2}{3} \cdot \frac{3 \cos^2\theta - 1}{R(R+2)}$ .

- 16.28.** 1)  $-\frac{1}{2r^2} \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ ;
- 2)  $\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{r^4} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) (15 \cos^2 \theta - 3) \sin \theta + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{r^2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin \theta$ .

- 16.29.** 1)  $\left(\frac{R}{r}\right)^5 \sin^3 \theta \cos \theta \cos \left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ ;
- 2)  $\left(\frac{R}{r}\right)^{101} \sin^{100} \theta \sin 100\varphi$ ;
- 3)  $\frac{R}{R+2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \sin \theta + \frac{R}{2(R+3)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \sin \theta \cos \theta$ .

- 16.30.** 1)  $\frac{1}{7} \left(\frac{8}{r^2} - r\right) \sin \varphi \sin \theta$ ;
- 2)  $\frac{12}{7} \left(r - \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta + \left(\frac{96}{31r^2} - \frac{3r^2}{31}\right) \sin 2\varphi \sin^2 \theta$ ;
- 3)  $4 \left(r - \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta + \left(\frac{8}{r^2} - r\right) \cos \varphi \sin \theta$ ;
- 4)  $14 - \frac{12}{r} + r^2(1 - 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cdot \sin 2\varphi)$ ;
- 5)  $\frac{12}{7} \left(\frac{4}{r^2} - \frac{r}{2}\right) \cos \varphi \sin \theta + \frac{12}{31} \left(\frac{8}{r^3} - \frac{r^2}{4}\right) \cos \varphi \sin 2\theta$ ;
- 6)  $\left[r^2 \left(\frac{8}{31} \cos 2\varphi - \frac{1}{31} \sin 2\varphi\right) + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{8}{31} \cos 2\varphi + \frac{32}{31} \sin 2\varphi\right)\right] \sin^2 \theta$ ;
- 7)  $\left[r^2 \left(-\frac{1}{31} \cos \varphi + \frac{8}{31} \sin \varphi\right) + \frac{1}{r^3} \left(\frac{32}{31} \cos \varphi - \frac{8}{31} \sin \varphi\right)\right] \sin 2\theta$ ;
- 8)  $\left(\frac{32}{r^3} - r^2\right) \sin 2\theta \sin \varphi + \left(8r^2 - \frac{8}{r^3}\right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi$ ;
- 9)  $\frac{1}{7} \left(\frac{8}{r^2} - r\right) \cos \theta + \frac{32}{127} \left(r^3 - \frac{1}{r^4}\right) \frac{12 \sin \theta - 15 \sin^3 \theta}{2} \cos \varphi$ .

- 16.31.** 1)  $\left(\frac{4}{r^2} - r\right) \cos \theta + \left(r^2 - \frac{32}{r^3}\right) \sin^2 \theta \sin 2\varphi$ ;
- 2)  $\left(\frac{4}{r^2} + r\right) \sin \theta \sin \varphi + 3r^2 \sin 2\theta \sin \varphi$ ;
- 3)  $1 + \frac{8}{97} \left(r^3 - \frac{1}{r^4}\right) \cos \varphi \sin \theta (15 \cos^2 \theta - 3) + \frac{12}{5} \left(r - \frac{1}{r^2}\right) \sin \theta \cos \varphi + \frac{60}{97} \left(r^3 - \frac{1}{r^4}\right) \sin 2\varphi \sin^2 \theta \cos \theta$ .

**16.32.** 1)  $4 - \frac{2}{r} + \frac{1}{31} \left( -32r^2 + \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{31} \left( 32r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \times \cos 2\varphi \sin^2 \theta;$

2)  $\frac{12}{7} \left( \frac{1}{r^2} - r \right) \cos \theta + \frac{120}{127} \left( \frac{1}{r^4} - r^3 \right) \cos 2\varphi \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{24}{127} \left( r^3 - \frac{1}{r^4} \right) \times (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta).$

**16.33.** 1)  $u = 4 + r \sin \theta \sin(\varphi - 2) + 2r^2(3 \cos^2 \theta - 1);$

2)  $u = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}r^2(3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{3}r^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi;$

3)  $u = -1 + r \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{2}r^2(3 \cos^2 \theta - 1);$

4)  $u = 4 - 3r \cos \theta + \frac{1}{4}r^2(3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{4}r^2 \sin^2 \theta \cdot \cos(2\varphi + 1);$

5)  $u = -1 + 3r \sin \theta \cos(\varphi + 4) + r^2(3 \cos^2 \theta - 1);$

6)  $u = -1 + \frac{1}{4}r^2(3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\varphi \sin^2 \theta.$

**16.34.** 1)  $u = \frac{7}{3} \cdot \frac{R}{r} + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left[ \frac{4}{3}(3 \cos^2 \theta - 1) + \cos \left( 2\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \theta \right];$

2)  $u = \frac{7}{12r^3} \cdot [4r^2 + 3 \sin^2 \theta \cos(2\varphi + 2)];$

3)  $u = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \cos \left( 2\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \sin^2 \theta;$

4)  $u = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8r} \cos \theta \right) \sin \theta \cos(\varphi + 2);$

5)  $u = \frac{1}{r^3} [2r^2 + 3r \sin \theta \sin \varphi - 3 \cos^2 \theta + 1];$

6)  $u = \frac{2}{3r} - \frac{1}{3r^3}(3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$

7)  $u = \frac{4}{r} - \frac{8}{r^2} \sin \theta \cos \varphi + \frac{16}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$

8)  $u = \frac{9}{r^3} \cos 2\varphi \sin^2 \theta + \frac{1}{r} - \frac{3}{r^3}(3 \cos^2 \theta - 1);$

9)  $u = \frac{1}{r^3} \sin 2\varphi \sin^2 \theta + \frac{2}{3r} - \frac{2}{3r^3}(3 \cos^2 \theta - 1);$

10)  $u = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{4r^3}(3 \cos^2 \theta - 1).$

**16.35.** 1)  $u = 4r^2(3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{2}{r};$

2)  $u = 1 - \frac{3}{r} + 2r^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$

- 3)  $u = 3 + \frac{9}{r} + \frac{3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$
- 4)  $u = 2 + 8r^2(3 \cos^2 \theta - 1);$
- 5)  $u = 8 \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \sin^2 \theta (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi);$
- 6)  $u = \frac{4}{r} + r^2(3 \cos^2 \theta - 1);$
- 7)  $u = \left( \frac{32}{r^3} - r^2 \right) (\cos \varphi + \sin \varphi) \sin 2\theta;$
- 8)  $u = 4 \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta + \left( r^2 - \frac{32}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi;$
- 9)  $u = 3r \sin \theta \cos \varphi + 18r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi;$
- 10)  $u = 1 + \frac{3}{r} + 2r^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi;$
- 11)  $u = \left( 2r - \frac{8}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi + \left( \frac{8}{r^3} - r^2 \right) (3 \cos^2 \theta - 1);$
- 12)  $u = 1 + \frac{6}{r} + r^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$
- 13)  $u = \left( 2r - \frac{2}{r^2} \right) \cos \theta + \left( 4r^2 + \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1);$
- 14)  $u = \frac{1}{294} \left( 48r^2 + \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{96} \left( 48r^2 + \frac{1}{r^3} \right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$
- 15)  $u = -1 + \frac{2}{r} + \frac{16}{31} \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi;$
- 16)  $u = \frac{8}{93} \left( -r^2 + \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{7} \left( -r + \frac{8}{r^2} \right) \sin \theta \cos(\varphi + 2);$
- 17)  $u = 14 - \frac{12}{r} + r^2(1 - 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \sin 2\varphi);$
- 18)  $u = \frac{1}{7} \left( -5r + \frac{40}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi + 3r^2 \sin 2\theta \sin \varphi;$
- 19)  $u = 2 \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta;$
- 20)  $u = 3 + \frac{9}{r} + \frac{3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\theta;$
- 21)  $u = 2 \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi;$
- 22)  $u = 1 - \frac{3}{r} + 2r^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$
- 23)  $u = 2 - r^2(3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{1}{67} \left( 9r^2 + \frac{192}{r^3} \right) \cos 2\varphi \sin^2 \theta;$

- 24)  $u = \frac{1}{31} \left( 32r^2 - \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{8}{31} \left( -r^2 + \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta \sin \theta \times \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right);$
- 25)  $u = 15 - \frac{1}{r} - \frac{1}{7} \left( 48r^2 + \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{3}{7} \left( 48r^2 + \frac{1}{r^3} \right) \sin 2\varphi \sin^2 \theta;$
- 26)  $u = \frac{4}{7} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{3}{124} \left( -r^2 + \frac{32}{r^3} \right) \cos \theta \sin \theta \sin \varphi;$
- 27)  $u = 2 + \frac{1}{22} \left( 5r^2 - \frac{27}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1);$
- 28)  $u = -1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{31} \left( r^2 - \frac{32}{r^3} \right) \cos 2\varphi \sin^2 \theta + \frac{124}{7} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \sin \varphi \sin 2\theta;$
- 29)  $u = \frac{5}{6} - \frac{5}{3r} - \frac{5}{12} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{5}{49} \left( \frac{1}{4} r^2 - \frac{8}{r^3} \right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi;$
- 30)  $u = \left( -\frac{3r}{7} + \frac{24}{7r^2} \right) \sin \varphi \sin \theta + \left( \frac{r^2}{31} - \frac{32}{31r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1);$
- 31)  $u = \frac{1}{67} \left( 16r^2 + \frac{24}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{8}{r};$
- 32)  $u = 10 + \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \sin \left( 2\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \theta;$
- 33)  $u = 2 + \frac{1}{67} \left( 32r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \sin 2\theta \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{3} \right).$

**16.36.** 1)  $u = r^3 \cos^3 \theta - r^2 \cos 2\varphi \sin^2 \theta + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)$

(указание:  $u_{\text{частн}} = z^3 = r^3 \cos^2 \theta$ );

2)  $u = r^4 \sin^4 \theta \cos 2\varphi + \frac{2}{31} \left( \frac{32}{r^3} - r^2 \right) \sin \varphi \sin 2\theta + \frac{128}{31} \left( \frac{1}{r^3} - r^2 \right) \times \sin^2 \theta \cos 2\varphi$   
 (указание:  $u_{\text{частн}} = x^4 - y^4 = r^4 \sin^4 \theta \cos 2\varphi$ );

3)  $u = \frac{1}{6} r^2 + \frac{8}{7} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right)$   
 (указание:  $u_{\text{частн}} = \frac{1}{6} r^2$ );

4)  $u = r^4 \sin^4 \theta \sin 2\varphi + \frac{4}{3} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) - 4r \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{3}$   
 (указание:  $u_{\text{частн}} = 2(x^3 y + xy^3) = r^4 \sin^2 \theta \sin 2\varphi$ );

5)  $u = \frac{1}{2r^3} - \frac{3}{2r} + \frac{1}{67} \left( 32r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \sin 2\theta \sin \varphi + \frac{8}{67} \left( 3r^2 + \frac{2}{r^3} \right) \times \sin^2 \theta \cos 2\varphi$  (указание: искать  $u_{\text{частн}} = f(r)$ );

6)  $u = \frac{r^5}{5} - \frac{21}{5} + \frac{4}{r} + \frac{4}{5} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{67} \left( 3r^2 + \frac{64}{r^3} \right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi$   
 (указание: искать  $u_{\text{частн}} = f(r)$ );

- 7)  $u = 3r - 3 + \frac{1}{r} + \frac{1}{26} \left( 27r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{9}{242} \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) \sin^2 \theta \cos 2\varphi$   
 (указание: искать  $u_{\text{частн}} = f(r)$ );
- 8)  $u = r^3 - 40 + \frac{39}{r} + \frac{9}{26} \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \sin \varphi + \frac{27}{121} \left( \frac{1}{r^3} - r^2 \right) \sin^2 \theta \sin 2\varphi$   
 (указание: искать  $u_{\text{частн}} = f(r)$ );
- 9)  $u = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) + \frac{8}{5r^3} \sin \theta \cos \theta \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right)$   
 (указание: искать  $u_{\text{частн}} = f(r)$ );
- 10)  $u = 10r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta \sin \varphi$   
 (указание:  $u_{\text{частн}} = 10z^2 = 10r^2 \cos^2 \theta$ ).

## § 17. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа

Функцией Грина (внутренней) задачи Дирихле для области  $G \in \mathbb{R}^3$  называется функция  $\mathcal{G}(x, y)$ ,  $x \in \overline{G}$ ,  $y \in G$ , обладающая свойствами:

- 1)  $\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$ , где функция  $g$  — гармоническая в  $G$  и непрерывная в  $\overline{G}$  по  $x$  при каждом  $y \in G$ ;
- 2)  $\mathcal{G}(x, y)|_{x \in S} = 0$  при каждом  $y \in G$ , где  $S$  — граница области  $G$ ; для неограниченных областей  $G$  требуем, чтобы  $g(x, y) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Если  $G$  — ограниченная область и  $S$  — достаточно гладкая поверхность, то  $\mathcal{G}$  существует, единственна, имеет правильную нормальную производную  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{n}_x}$  на  $S$  при каждом  $y \in G$  и симметрична, т. е.  $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$ ,  $x \in G$ ,  $y \in G$ ;  $g(x, y)$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, y)$  в  $\overline{G} \times \overline{G}$ .

Если решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона  $\Delta u = -f(x)$ ,  $u|_S = u_0(x)$ , где  $f \in C(\overline{G})$  и  $u_0 \in C(S)$ , имеет правильную нормальную производную на  $S$ , то оно определяется формулой

$$u(x) = - \int_S \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} u_0(y) ds_y + \int_G \mathcal{G}(x, y) f(y) dy. \quad (9)$$

Для ряда областей функцию Грина можно найти методом отражений.

**17.1.** Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ :

- 1) полупространство  $x_3 > 0$ ;

- 2) двугранный угол  $x_2 > 0, x_3 > 0$ ;  
 3) октант  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .

**17.2.** Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ :

- 1) шар  $|x| < R$ ;
- 2) полушар  $|x| < R, x_3 > 0$ ;
- 3) четверть шара  $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$ ;
- 4) восьмая часть шар  $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .

**17.3.** Пользуясь методом отражений, построить функцию Грина для части пространства, заключенного между двумя параллельными плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_2 = 1$ .

Ниже даны краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона, решения которых могут быть найдены с помощью соответствующей функции Грина из задач 17.1–17.3 и формулы (9).

**17.4.** Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0; \quad u|_{x_3=0} = u_0(x),$$

для следующих  $f$  и  $u_0$ :

- 1)  $f, u_0$  непрерывны и ограничены;
- 2)  $f = 0, u_0 = \cos x_1 \cos x_2$ ;
- 3)  $f = e^{-x_3} \sin x_1 \cos x_2, u_0 = 0$ ;
- 4)  $f = 0, u_0 = \theta(x_2 - x_1)$ ;
- 5)  $f = 0, u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$ ;
- 6)  $f = 2 [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2]^{-2}, u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ ;
- 7)  $f = 0, u_0 = \begin{cases} -1, & x_1 < 0, \\ 1, & x_1 > 0. \end{cases}$

**17.5.** Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0; \quad u|_S = u_0(x),$$

$u_0$  — кусочно-непрерывна и ограничена.

**17.6.** Решить задачу 17.5 со следующими  $u_0$ :

- 1)  $u_0|_{x_2=0}, u_0|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2$ ;
- 2)  $u_0|_{x_2=0} = 0, u_0|_{x_3=0} = x_2(1 + x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}$ ;
- 3)  $u_0|_{x_2=0} = 0, u_0|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|)$ .

**17.7.** Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :

$$\Delta u = -f(x), \quad |x| < R, \quad u|_{|x|=R} = u_0(x).$$

**17.8.** Решить задачу 17.7 для следующих  $f$  и  $u_0$ :

- 1)  $f = a = \text{const}$ ,  $u_0 = 0$ ;
- 2)  $f = |x|^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $u_0 = a$ ;
- 3)  $f = e^{|x|}$ ,  $u_0 = 0$ .

**17.9.** Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара  $|x| < R$ ,  $x_3 > 0$ .

**17.10.** Найти решение уравнения Пуассона  $\Delta u = -f(|x|)$ ,  $f \in C(a \leq |x| \leq b)$  в шаровом слое  $a < |x| < b$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{|x|=a} = 1, \quad u|_{|x|=b} = 0.$$

Функцией Грина задачи Дирихле для области  $G \subset \mathbb{R}^2$  является

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \zeta|} + g(z, \zeta),$$

где  $z = x + iy \in \overline{G}$ ,  $\zeta = \xi + i\eta \in G$ ,  $\mathcal{G}(z, \zeta)$  обладает всеми свойствами функции Грина в  $\mathbb{R}^3$  (см. начало § 17). Решение задачи Дирихле  $\Delta u = -f(z)$ ,  $z \in G$ ;  $u|_S = u_0(x)$  в  $\mathbb{R}^2$  (если оно существует) определяется формулой, соответствующей формуле (9) в  $\mathbb{R}^2$ . В случае когда область  $G$  односвязная с достаточно гладкой границей  $S$  и известна некоторая функция  $w = w(z)$ , конформно отображающая  $G$  на единичный круг  $|w| < 1$ , функция Грина находится по формуле

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\omega(z, \zeta)|}, \quad \omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)w(\zeta)}.$$

**17.11.** Найти функцию Грина для областей:

- 1) полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ ;
- 2) четверть плоскости  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ;
- 3) круг  $|z| < R$ ;
- 4) полукруг  $|z| < r$ ,  $\text{Im } z > 0$ ;
- 5) четверть круга  $|z| < 1$ ,  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ;
- 6) полоса  $0 < \text{Im } z < \pi$ ;
- 7) полуполоса  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$ .

**17.12.** Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad u|_{y=0} = u_0(x)$$

для следующих  $u_0(x)$ :

- 1)  $u_0(x)$  кусочно-непрерывна и ограничена;

- 2)  $u_0(x) = \theta(z - a);$  3)  $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$   
 4)  $u_0(x) = \frac{1}{1+x^2};$  5)  $u_0(x) = \frac{x}{1+x^2};$   
 6)  $u_0(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2};$  7)  $u_0(x) = \cos x.$

**17.13.** Найти решение уравнения  $\Delta u = 0$  в первом квадранте  $x > 0, y > 0$  со следующими краевыми условиями:

- 1)  $u|_S = u_0(x, y)$  — кусочно-непрерывная, ограниченная функция, где  $S$  состоит из полупрямых  $\{x > 0, y \geq 0\}$  и  $\{y = 0, x \geq 0\};$
- 2)  $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = 1;$
- 3)  $u|_{x=0} = a, u|_{y=0} = b;$
- 4)  $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \theta(x - 1);$
- 5)  $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \frac{x}{(1+x^2)^2};$
- 6)  $u|_{x=0} = \sin y, u|_{y=0} = \sin x.$

**17.14.** Найти решение уравнения  $\Delta u = 0$  в первом квадранте  $x > 0, y > 0$  со следующими краевыми условиями:

- 1)  $u|_S = u_0(x, y)$  — кусочно-непрерывная, ограниченная функция, где  $S$  — граница полосы  $0 < y < \pi;$
- 2)  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = 0;$  3)  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = \theta(x);$
- 4)  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = -\theta(x);$  5)  $u|_{y=0} = \theta(x), u|_{y=\pi} = \theta(-x);$
- 6)  $u|_{y=0} = \cos x, u|_{y=\pi} = 0.$

**17.15.** Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в полуполосе  $0 < y < \pi, x > 0$ , со следующими краевыми условиями:

- 1)  $u|_{x=0} = 1, u|_{y=0} = 0, u|_{y=\pi} = 0;$
- 2)  $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \sin x, u|_{y=\pi} = 0;$
- 3)  $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \operatorname{th} x, u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x;$
- 4)  $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = 0, u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x.$

**17.16.** Найти решение уравнения Пуассона  $\Delta u = -f(z)$  в круге  $|z| < R$  при краевом условии  $u|_{|z|=R} = u_0(z)$  для следующих  $f$  и  $u_0$ :

- 1)  $f, u_0$  — непрерывные функции;
- 2)  $f = a, u_0 = b;$
- 3)  $f = |z|^n, n = 1, 2, \dots, u_0 = 0;$
- 4)  $f = \sin |x|, u_0 = 0;$
- 5)  $f = 0, u_0 = \cos \varphi$ , где  $\varphi = \arg z, 0 \leq \varphi < 2\pi.$

**17.17.** Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в полуокружности  $|z| < 1$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ , при условии  $u|_S = u_0(x)$ , где  $S$  — граница полукруга, для следующих  $u_0(z)$ :

- 1)  $u_0(z)$  — кусочно-непрерывная функция;
- 2)  $u_0|_{r=1} = \sin \varphi$ ,  $u_0|_{\varphi=0} = 0$ ,  $u_0|_{\varphi=\pi} = 0$ ,  
где  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ;
- 3)  $u_0|_{r=1} = 0$ ,  $u_0|_{\varphi=0} = 1$ ,  $u_0|_{\varphi=\pi} = 1$ ;
- 4)  $u_0|_{r=1} = \cos \frac{\varphi}{2}$ ,  $u_0|_{\varphi=0} = \sqrt{r}$ ,  $u_0|_{\varphi=\pi} = 0$ .

**17.18.** Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad |z - 5| > 3; \quad u|_{\operatorname{Re} z=0} = 0, \quad u|_{|z-5|=3} = 1.$$

## Ответы к § 17

В ответах к задачам 17.1–17.10 введены обозначения

$$y_{mnk} = ((-1)^m y_1, (-1)^n y_2, (-1)^k y_3).$$

- 17.1.** 1)  $\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{|x - y_{00k}|}$ ; 2)  $\frac{1}{4\pi} \sum_{n,k=0}^1 \frac{(-1)^{n+k}}{|x - y_{0nk}|}$ ;  
 3)  $\frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,k=0}^1 \frac{(-1)^{m+n+k}}{|x - y_{mnk}|}$ .

- 17.2.** 1)  $\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x - y|} - \frac{R}{|y||x - y^*|} \right)$ , где, как и всюду в задаче 17.2,  
 $y_{mnk}^* = \frac{R^2}{|y|^2} y_{mnk}$ ,  $|y_{mnk}| |y_{mnk}^*| = R^2$ ;  
 2)  $\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \left( \frac{1}{|x - y_{00k}|} - \frac{R}{|y||x - y_{00k}^*|} \right)$ ;  
 3)  $\frac{1}{4\pi} \sum_{n,k=0}^1 (-1)^{n+k} \left( \frac{1}{|x - y_{0nk}|} - \frac{R}{|y||x - y_{0nk}^*|} \right)$ ;  
 4)  $\frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,k=0}^1 (-1)^{m+n+k} \left( \frac{1}{|x - y_{mnk}|} - \frac{R}{|y||x - y_{mnk}^*|} \right)$ .

- 17.3.**  $\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - (2n + y_3))^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - (2n - y_3))^2}} \right).$

Указание (к задаче 17.4 и ниже). В случае когда  $f$  и  $u_0$  кусочно-непрерывны и ограничены, а поверхность  $S$  кусочно-гладкая, постановка задачи Дирихле может быть обобщена таким образом, чтобы решение ее также определялось формулой (9).

- 17.4.** 1)  $\frac{x_3}{2\pi} \int_{y_3=0} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3} dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_{y_3>0} f(y) \left( \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{001}|} \right) dy;$   
 2)  $e^{-\sqrt{2}x_3} \cos x_1 \cos x_2;$       3)  $(e^{-\sqrt{2}x_3} - e^{-x_3}) \sin x_1 \cos x_2;$   
 4)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}x_3};$       5)  $[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2]^{-1/2};$   
 6)  $[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2]^{-1};$       7)  $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_3}.$

**17.5.**  $\frac{x_2}{2\pi} \int_{\substack{y_2=0 \\ y_3 \geq 0}} u_0(y) \left( \frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y_{001}|^3} \right) dS_y +$   
 $+ \frac{x_3}{2\pi} \int_{\substack{y_2 \geq 0 \\ y_3=0}} u_0(y) \left( \frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y_{010}|^3} \right) dS_y.$

- 17.6.** 1)  $e^{-4x_1-3x_3} \sin 5x_2;$       2)  $x_2 [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2]^{-3/2};$   
 3)  $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}x_3} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}x_3}.$

**17.7.**  $\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0(y) dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|\leqslant R} u_0(y) \left( \frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y||x-y^*|} \right) f(y) dy,$  где  $y^* = \frac{yR^2}{|y|^2}$  — точка, симметричная точке  $y$  относительно сферы  $|y|=R.$

- 17.8.** 1)  $\frac{a}{6} (R^2 - |x|^2);$       2)  $a + \frac{R^{n+2} - |x|^{n+2}}{(n+2)(n+3)};$   
 3)  $e^R - e^{|x|} - \frac{2}{R}(e^R - 1) + \frac{2}{|x|}(e^{|x|} - 1).$

**17.9.**  $u(x) = \frac{x_3}{2\pi} \int_{\substack{|y| \leqslant R \\ y_3=0}} u_0(y_1, y_2) \left( \frac{1}{|x-y|^3} - \frac{R^3}{|y|^3|x-y^*|^3} \right) dy_1 dy_2 +$   
 $+ \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{\substack{|y|=R \\ y_3>0}} u_0(y) \left( \frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y^{**}|^3} \right) dS_y,$   
 где  $|x| < R,$   $x_2 > 0;$   $y^*$  и  $y^{**}$  — точки, симметричные точке  $y$  относительно сферы  $|y|=R$  и плоскости  $y_3=0$  соответственно.

- 17.10.**  $\frac{a(b-|x|)}{|x|(b-a)} - \frac{1}{|x|} \int_0^{|x|} (|x| - \rho) \rho f(\rho) d\rho +$   
 $+ \frac{b-|x|}{|x|(b-a)} \int_0^a (a - \rho) \rho f(\rho) d\rho - \frac{a-|x|}{|x|(b-a)} \int_0^b (b - \rho) \rho f(\rho) d\rho.$

- 17.11.** 1)  $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|$ , где  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ;
- 2)  $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - \bar{\zeta}^2}{z^2 - \zeta^2} \right|$ ; 3)  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R|z - \zeta|}$ ;
- 4)  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \bar{\zeta}| |R^2 - z\bar{\zeta}|}{|z - \zeta| |R^2 - z\zeta|}$ ; 5)  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^2 - \bar{\zeta}^2| |R^4 - (z\bar{\zeta})^2|}{|z^2 - \zeta^2| |R^4 - (z\zeta)^2|}$ ;
- 6)  $\frac{1}{2\pi} \frac{|e^z - e^{\bar{\zeta}}|}{|e^z - e^\zeta|}$ ; 7)  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{\zeta}|}{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \zeta|}$ .

- 17.12.** 1)  $\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}$ ; 2)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - a}{y}$ ;
- 3)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y^2 + (x - a)(x - b)}{y(b - a)}$ ; 4)  $\frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}$ ;
- 3)  $\frac{x}{x^2 + (y + 1)^2}$ ; 6)  $\frac{x^2 - (y + 1)^2}{[x^2 + (y + 1)^2]^2}$ ; 7)  $e^{-y} \cos x$ .
- 17.13.** 1)  $\frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} u_0(\xi, 0) \left[ \frac{1}{(x - \xi)^2 + y^2} - \frac{1}{(x + \xi)^2 + y^2} \right] d\xi +$   
 $+ \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} u_0(0, \eta) \left[ \frac{1}{x^2 + (y - \eta)^2} - \frac{1}{x^2 + (y + \eta)^2} \right] d\eta$ ;
- 2)  $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ; 3)  $\frac{2}{\pi} \left( a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + b \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)$ ;
- 4)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t^2 - x^2 + 1}{2xy}$ ; 5)  $\frac{x(y + 1)}{[x^2 + (y + 1)^2]^2}$ ; 6)  $e^{-y} \sin x + e^{-x} \sin y$ .

- 17.14.** 1)  $\sum_{k=0}^1 \frac{1}{\pi} e^x \sin y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, k\pi) e^{-\xi}}{e^{2(x-\xi)} - 2e^{x-\xi} \cos(y - k\pi) + 1} d\xi$ ;
- 2)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}$ ; 3)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} y}$ ;
- 4)  $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} y - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2x}{e^{2x} - \cos 2y}$ ;
- 5)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} y}$ ; 6)  $\frac{\cos x \operatorname{sh}(\pi - y)}{\operatorname{sh} \pi}$ .

- 17.15.** 1)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin^2 y - \operatorname{sh}^2 y}{2 \sin y \operatorname{sh} x}$ ; 2)  $\frac{\sin x \cdot \operatorname{sh}(\pi - y)}{\operatorname{sh} \pi}$ ;
- 3)  $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \sin y}$ ; 4)  $\frac{x \sin 2y + y \operatorname{sh} 2x - \pi \sin y \operatorname{sh} x}{\pi(\operatorname{ch} 2x + \cos 2y)}$ .

- 17.16.** 1)  $\frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0(\zeta) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \zeta|^2} dS_\zeta +$   
 $+ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| \leq R} f(\zeta) \ln \frac{|\zeta||z - \zeta^*|}{R|x - \zeta|} d\xi d\eta$ , где  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\zeta^* = \frac{\zeta R^2}{|\zeta|^2}$ ;  
 2)  $\frac{a}{4}(R^2 - r^2) + b$ ; 3)  $\frac{R^{n+2} - r^{n+2}}{(n+2)^2}$ ;  
 4)  $\sin r - \sin R + \int_r^R \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho$ ; 5)  $\frac{r}{R} \cos \varphi$ .

Ука з а н и е. В задачах 17.16, 2)–5) воспользоваться формулой задачи 17.16, 1), где перейти к полярным координатам  $z = re^{i\varphi}$ ,  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ,  $0 < \varphi, \theta < 2\pi$ .

- 17.17.** 1)  $\frac{1}{2\pi} \int_{\substack{|\xi|=1 \\ \operatorname{Im} \xi \geq 0}} u_0(\zeta) \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z - \zeta|^2} - \frac{|z|^2 - 1}{|z - \bar{\zeta}|^2} \right) d\xi d\eta +$   
 $+ \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 u_0(\xi, 0) \left( \frac{1}{|z - \xi|^2} - \frac{1}{|\xi z - 1|^2} \right) d\xi$ , где  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ;  
 2)  $r \sin \varphi$ ; 3)  $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r \sin \varphi}{r^2 - 1}$ ; 4)  $\sqrt{r} \cos \varphi$ .

- 17.18.**  $\frac{1}{\ln 3} \ln \frac{|z+4|}{|z-4|}$ .

## § 18. Метод потенциалов

Пусть  $\rho \in D'(\mathbb{R}^n)$ . Свертка  $V_n = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho$ ,  $n \geq 3$ , называется *ньютоновым потенциалом*, а  $V_2 = \ln \frac{1}{|x|} * \rho$ ,  $n = 2$ , — *логарифмическим потенциалом* с плотностью  $\rho$  (определение свертки см. в § 8).

Потенциал  $V_n$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_n = -(n-2)\sigma_n \rho, \quad n \geq 3, \quad \Delta V_2 = -2\pi \rho.$$

Если  $\rho$  — финитная абсолютно интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^n$ , то соответствующий ньютонов (логарифмический) потенциал  $V_n$  называется *объемным потенциалом* (*потенциалом площади*).

Пусть  $S$  — ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $S$  и  $\mu \delta_S$  и  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S)$  — простой и двойной слои на  $S$  с плотностями  $\mu$  и  $\nu$  (определение слоев см. в § 6 и § 7).

Свертки

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu \delta_S \quad \text{и} \quad V_n^{(1)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S), \quad n \geq 3,$$

называются *поверхностными потенциалами простого и двойного слоя* с плотностями  $\mu$  и  $\nu$ . Свертки

$$V_2^{(0)} = \ln \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S \quad \text{и} \quad V_2^{(1)} = -\ln \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S), \quad n = 2,$$

называются соответственно *логарифмическими потенциалами простого и двойного слоя*.

Если  $S$  — поверхность Ляпунова и  $\nu \in C(S)$ , то в  $\mathbb{R}^3$  предельные значения потенциала двойного слоя  $V_+^{(1)}$  и  $V_-^{(1)}$  извне и внутри  $S$  выражаются формулами

$$V_{\pm}^{(1)}(x) = \pm 2\pi\nu(x) + V^{(1)}x = \pm 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (\text{I})$$

где  $\varphi_{xy}$  — угол между вектором  $\overrightarrow{(x-y)}$  и нормалью  $\mathbf{n}_y$  в точке  $y \in S$ .

Если  $\mu \in C(S)$ , то потенциал простого слоя имеет правильные нормальные производные  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+$  и  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-$  на  $S$  извне и изнутри  $S$  (см. определение в начале гл. V), причем на  $S$

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+(x) = \mp 2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}x}{\partial \mathbf{n}} = \mp 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (\text{II})$$

где  $\psi_{xy}$  — угол между вектором  $\overrightarrow{(x-y)}$  и нормалью  $\mathbf{n}_x$ .

Аналогичные формулы для  $V_{\pm}^{(1)}$  и  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\pm}(x)$  справедливы и в  $\mathbb{R}^2$  с заменой  $2\pi$  на  $\pi$  и  $|x-y|^2$  на  $|x-y|$ .

**18.1.** Пусть  $\rho$  — абсолютно интегрируемая функция,  $\rho = 0$  вне  $\overline{G} \subset \mathbb{R}^n$ . Доказать:

а) объемный потенциал выражается формулой

$$V_n(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad n \geq 3; \quad (\text{III})$$

б)  $V_n$  — гармоническая функция вне  $\overline{G}$ ;

в)  $V_3(x) = \frac{1}{|x|} \int_G \rho(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**18.2.** Пусть  $\rho$  — абсолютно интегрируемая функция,  $\rho = 0$  вне  $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$ . Доказать:

а) потенциал площиади выражается формулой

$$V_2(x) = \int_G \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy; \quad (\text{IV})$$

б)  $V_2$  — гармоническая функция вне  $\overline{G}$ ;

в)  $V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_G \rho(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**18.3.** Пусть  $S$  — ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность и  $\mu, \nu \in C(S)$ . Доказать:

а) потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$\begin{aligned} V_3^{(0)}(x) &= \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y, \\ V_3^{(1)}(x) &= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \end{aligned} \quad (\text{V})$$

где угол  $\varphi_{xy}$  определен в начале § 18;

б)  $V_3^{(0)}$  и  $V_3^{(1)}$  — гармонические функции вне  $S$ ;

в)  $V_3^{(0)}(x) = \frac{1}{|x|} \int_S \mu(y) dS + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$  и  $V_3^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**18.4.** Пусть  $S$  — ограниченная кусочно-гладкая кривая и  $\mu, \nu \in C(S)$ . Доказать:

а) логарифмические потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$\begin{aligned} V_2^{(0)}(x) &= \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y, \\ V_2^{(1)}(x) &= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|} dS_y, \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

где угол  $\varphi_{xy}$  определен в тексте;

б)  $V_2^{(0)}$  и  $V_2^{(1)}$  — гармонические функции вне  $S$ ;

$$\text{в)} V_2^{(0)}(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_S \mu(\zeta) ds + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad V_2^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \\ x \longrightarrow \infty.$$

Выяснить физический смысл этих потенциалов.

- 18.5.** 1) Вычислить ньютонов потенциал  $V_3$  с плотностью  $\delta_{S_R}$ ;  
 2) вычислить логарифмический потенциал  $V^2$  с плотностью  $\delta_{S_R}$ .

**18.6.** Вычислить объемный потенциал  $V_3$  для шара  $|x| < R$  со следующими плотностями:

- $$\begin{array}{lll} 1) \rho = \rho(|x|) \in C; & 2) \rho = \rho_0 = \text{const}; & 3) \rho = |x|; \\ 4) \rho = |x|^2; & 5) \rho = \sqrt{|x|}; & 6) \rho = e^{-|x|}; \\ 7) \rho = \frac{1}{1 + |x|^2}; & 8) \rho = \sin|x|; & 9) \rho = \cos|x|; \\ 10) \rho = \ln\left(1 + \frac{|x|}{R}\right). \end{array}$$

**18.7.** Для шарового слоя  $R_1 < |x| < R_2$  вычислить объемный потенциал  $V_3$  масс, распределенных с плотностями:

- 1)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ; 2)  $\rho = \rho(|x|) \in C(R_1 \leq |x| \leq R_2)$ .

**18.8.** Пусть масса распределена в шаре  $r < R$  с плотностью  $\rho$ . Найти объемный потенциал  $V_3$  в точке, лежащей на оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) для следующих плотностей:

- $$\begin{array}{l} 1) \rho \text{ пропорциональна квадрату расстояния от плоскости } \theta = \\ = \frac{\pi}{2}; \\ 2) \rho = \cos \theta; \quad 3) \rho = \sin \varphi; \\ 4) \rho = \rho(\varphi) \text{ — непрерывная } 2\pi\text{-периодическая функция, } 0 \leq \\ \leq \varphi < 2\pi. \end{array}$$

**18.9.** Пусть масса распределена с постоянной плотностью  $\rho_0$  в цилиндре  $\{x_1^2 + x_2^2 < R^2, 0 < x_3 < H\}$ . Найти объемный потенциал в точках оси  $x_3 \geq H$ .

**18.10.** Найти потенциал площасти для круга  $r < R$  со следующими плотностями:

- $$\begin{array}{lll} 1) \rho = \rho(r) \in C(0, R); & 2) \rho = \rho_0 = \text{const}; & 3) \rho = r; \\ 4) \rho = r^2; & 5) \rho = e^{-r}; & 6) \rho = \frac{1}{1 + r^2}; \\ 7) \rho = \sqrt{r}; & 8) \rho = \sin r; & 9) \rho = \cos r; \\ 10) \rho = \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi; & 11) \rho = \cos \varphi; & \\ 12) \rho = \rho(\varphi) \text{ — непрерывная } 2\pi\text{-периодическая функция.} & & \end{array}$$

**18.11.** Найти логарифмический потенциал площасти для кольца  $R_1 < r < R_2$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ; 2)  $\rho = \rho(r) \in C([R_1, R_2])$ .

**18.12.** Пусть  $f(|y|)$  непрерывна при  $|y| \leq R$  и  $f(|y|) = 0$  при  $|y| > R$ ,  $y \in \mathbb{R}^3$ . Доказать:

а) объемный потенциал  $V_3(x)$  с плотностью  $f(|y|)$  зависит только от  $|x|$  и

$$V_3(x) = \frac{1}{|x|} \int_{|y| < R} f(|y|) dy, \quad |x| > R;$$

б) для того чтобы  $V_3(x)$  обратился в нуль при  $|x| > R$ , необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int f(|y|) dy = 0; \quad (*)$$

в) при условии (\*) справедливо равенство

$$\int V_3(x) dx = -\frac{2\pi}{3} \int f(|y|)|y|^2 dy.$$

Дать физическую интерпретацию полученных равенств.

**18.13.** Доказать: если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(|x|)$  непрерывны при  $|x| \leq R$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , обращаются в нуль при  $|x| > R$  и удовлетворяют уравнению

$$\Delta f_1(x) = D^\alpha f_2(|x|),$$

то потенциал  $V_3(x)$  с плотностью  $f_2(|x|)$  обращается в нуль при  $|x| > R$ .

**18.14.** Доказать результаты, аналогичные результатам задач 18.12 и 18.14, для потенциалов площади, а именно:

$$1) V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_{|y| < R} f(|y|) dy, \quad |y| > R;$$

$$2) \int V_2(x) dx = -\frac{\pi}{2} \int f(|y|)|y|^2 dy, \text{ если } \int f(|y|) dy = 0.$$

**18.15.** Распространить задачи 18.12–18.14 на случай, когда плотность  $f$  есть обобщенная функция. Под «интегралом»  $\int f(x) dx$  для финитной  $f \in D'$  следует понимать число  $(f, \eta)$ , где  $\eta \in D$ ,  $\eta \equiv 1$  в окрестности носителя  $f$  (это число не зависит от выбора вспомогательной функции  $\eta$ ).

**18.16.** Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере  $|x| = R$ .

**18.17.** В точке, лежащей на оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), найти потенциал простого слоя, распределенного на сфере  $r = R$

со следующими плотностями:

- 1)  $\mu$  пропорциональна квадрату расстояния от плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ;
- 2)  $\mu = \sin \frac{\theta}{2}$ ;    3)  $\mu = e^\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и  $\mu = e^{2\pi-\varphi}$ ,  $\pi \leq \varphi < 2\pi$ .

**18.18.** На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\rho$ . Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска, для следующих плотностей:

- 1)  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = r$ ;
- 3)  $\mu = r^2$ ;
- 4)  $\mu = \mu(\varphi)$  — непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция.

**18.19.** Найти потенциал простого слоя, распределенного с плотностью  $\mu$  на цилиндре  $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$  в точке, лежащей на оси  $x_3$ , для следующих плотностей:

- 1)  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = \mu(\varphi)$  — непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция.

**18.20.** Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью  $\nu_0$  для сферы  $|x| = R$ .

**18.21.** На сфере  $r = R$  распределены диполи с плотностью момента  $\nu$ , ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ), для следующих плотностей:

- 1)  $\nu = \cos \theta$ ;
- 2)  $\nu = \sin \frac{\theta}{2}$ ;
- 3)  $\nu = e^\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  и  $\nu = e^{2\pi-\varphi}$ ,  $\pi \leq \varphi < 2\pi$ ;
- 4)  $\nu = \nu(\varphi)$  — непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция;
- 5)  $\nu$  равна квадрату расстояния от плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**18.22.** На круглом диске радиуса  $R$  распределены диполи с плотностью момента  $\nu$ , ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных  $x_3$ . Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска, для следующих плотностей:

- 1)  $\nu = \text{const}$ ;
- 2)  $\nu = \nu(r) \in C(0, R)$ ;
- 3)  $\nu = \nu(\varphi)$  — непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция;
- 4)  $\nu = r + \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  и  $\nu = r + 2\pi - \varphi$ ,  $\pi \leq \varphi < 2\pi$ .

**18.23.** Найти логарифмический потенциал простого слоя для окружности радиуса  $R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = \cos^2 \varphi$ ,  $R = 2$ .

**18.24.** Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса  $R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\nu = \text{const}$ ; 2)  $\nu = \sin \varphi$ .

**18.25.** Найти логарифмический потенциал простого слоя для отрезка  $-a \leq x \leq a, y = 0$  со следующими плотностями:

- 1)  $\mu = \text{const}$ ;  
2)  $\mu = -\mu_0, -a \leq x < 0$  и  $\mu = \mu_0, 0 < x \leq a$ ;  
3)  $\mu = x$ .

**18.26.** Найти логарифмический потенциал двойного слоя для отрезка  $-a \leq x \leq a, y = 0$  со следующими плотностями:

- 1)  $\nu = \text{const}$ ;  
2)  $\nu = -\nu_0, -a \leq x < 0$  и  $\nu = \nu_0, 0 < x \leq a$ ;  
3)  $\nu = x$ ;  
4)  $\nu = x^2$ .

Пусть  $\rho(x)$  — финитная обобщенная функция. Свертки  $V = -4\pi\mathcal{E} * \rho$  и  $\bar{V} = -4\pi\bar{\mathcal{E}} * \rho$ , где

$$\mathcal{E} = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{\mathcal{E}} = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

— фундаментальные решения оператора Гамильтона  $\Delta + k^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , являются аналогами ньютона потенциала. Потенциалы  $V$  и  $\bar{V}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho$ .

Так же определяются аналоги потенциалов простого и двойного слоев.

То же справедливо для оператора  $\Delta - k^2$ . Здесь аналогом ньютона потенциала является  $V_* = -4\pi\mathcal{E}_* * \rho$ , где  $\mathcal{E}_* = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$  — фундаментальное решение оператора  $\Delta - k^2$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**18.27.** Пусть  $\rho$  — абсолютно интегрируемая функция и  $\rho(x) = 0, x \in G_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$ . Доказать:

- 1)  $V, \bar{V}$  и  $V_*$  выражаются формулами

$$V(x) = \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy, \quad \bar{V}(x) = \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy, \\ V_*(x) = \int_G \frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy; \tag{VII}$$

- 2)  $V, \bar{V}$  и  $V_* \subset C^1(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(G_1)$  удовлетворяют в области  $G_1$  однородным уравнениям  $\Delta u + k^2 u = 0$  и  $\Delta u - k^2 u = 0$  соответственно;

3)  $V$  и  $\bar{V}$  удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} \mp iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty$$

и  $V_*(x) \rightarrow \infty, \quad |x| \rightarrow \infty.$  (VIII)

**18.28.** Для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал  $V$  для шара  $|x| < R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho(|x|) \in C(\bar{U}_R); \quad 2) \rho = \rho_0 = \text{const}; \quad 3) \rho = e^{-|x|}.$

**18.29.** Для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал  $V$  для сферического слоя  $R_1 < |x| < R_2$  с постоянной плотностью  $\rho_0.$

**18.30.** 1) Для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал простого слоя  $V^{(0)},$  распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере;

- 2) для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал двойного слоя  $V^{(1)},$  распределенного с постоянной плотностью  $\nu_0$  на сфере.

**18.31.** Для оператора  $\Delta - k^2$  вычислить потенциал  $V_*$  для шара  $|x| < R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho(|x|) \in C(\bar{U}_R);$   
 2)  $\rho = \rho_0 = \text{const};$   
 3)  $\rho = e^{-|x|}.$

**18.32.** 1) Для оператора  $\Delta - k^2$  вычислить потенциал простого слоя  $V_*^{(0)},$  распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере;

- 2) для оператора  $\Delta - k^2$  вычислить потенциал двойного слоя  $V_*^{(1)},$  распределенного с постоянной плотностью  $\nu_0$  на сфере.

**18.33.** 1) Предполагая границу  $S$  области  $G \subset \mathbb{R}^3$  поверхностью Ляпунова, доказать, что

$$V_3^{(1)}(x) = \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}, \end{cases} \quad (\text{IX})$$

где угол  $\varphi_{xy}$  определен в начале параграфа;

- 2) предполагая границу  $S$  области  $G \subset \mathbb{R}^2$  кривой Ляпунова, доказать, что

$$V_2^{(1)}(x) = \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|} dS_y = \begin{cases} -2\pi, & x \in G, \\ -\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}. \end{cases} \quad (\text{IX}_1)$$

**18.34.** Доказать:

1) подстановка  $u = v + V_3$ , где

$$V_3(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x - y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

сводит внутренние краевые задачи для уравнения Пуассона  $\Delta u = -f$  к соответствующим внутренним краевым задачам для уравнения Лапласа, если  $f \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ ;

2) то же справедливо и для внешних задач при дополнительном условии, что  $f$  — финитная функция.

**18.35.** С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

**18.36.** Найти стационарное распределение температуры внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса  $R$  при условии, что на границе поддерживается следующая температура  $u_0$ :

1)  $u_0 = \text{const}$ ; 2)  $u_0 = \sin \varphi$ ; 3)  $u_0 = \cos \varphi$ ;

4)  $u_0 = C = \text{const}$  при  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , и  $u_0 = 0$  при  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ .

**18.37.** Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq R$  при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью  $f(r, \varphi)$  и на границе  $r = R$  поддерживается температура  $u_0^-(R, \varphi)$  для следующих  $f$  и  $u_0^-$ :

1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_0^- = 0$ ; 2)  $f = r$ ,  $u_0^- = 0$ ;

3)  $f = r^2$ ,  $u_0^- = a$ ; 4)  $f = e^{-r}$ ,  $u_0^- = \sin \varphi$ ;

5)  $f = \sin r$ ,  $u_0^- = \cos \varphi$ ; 6)  $f = \sin \varphi$ ,  $u_0^- = \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right)$ ;

7)  $f = \cos \varphi$ ,  $u_0^- = \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)$ .

**18.38.** С помощью потенциала простого слоя решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

**18.39.** Найти плотность диффундирующего вещества при стационарном процессе  $U(r, \varphi, z)$  внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса  $R$  при условии, что источники вещества отсутствуют и коэффициент диффузии  $D = \text{const}$ , а на границе поддерживается заданный поток диффузии  $u_1$  для следующих  $u_1$ :

1)  $u_1 = \text{const}$ ; 2)  $u_1 = \sin \varphi$ ; 3)  $u_1 = \cos \varphi$ .

**18.40.** Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра радиуса  $R$  при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью  $f(r, \varphi)$  и на границе поддерживается заданный поток тепла  $u_1^-(R, \varphi)$  для следующих  $f$  и  $u_1^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_1^- = -\frac{f_0 R}{2k}$ ;
- 2)  $f = r$ ,  $u_1^- = -\frac{R^3}{3}$ , коэффициент теплопроводности  $k = 1$ ;
- 3)  $f = \frac{1}{1+r^2}$ ,  $u_1^- = \frac{\ln(1+R^2)}{R}$ ,  $k = 1$ ;
- 4)  $f = \sin \varphi$ ,  $u_1^- = \sin \varphi$ ,  $k = 1$ ;
- 5)  $f = \cos \varphi$ ,  $u_1^- = \cos \varphi$ ,  $k = 1$ .

**18.41.** С помощью потенциалов простого и двойного слоя найти стационарную температуру точек полуплоскости  $y > 0$ , если:

- 1) на границе  $y = 0$  поддерживается заданная температура  $u_0(x)$ ;
- 2) на  $y = 0$  поддерживается заданный поток тепла, т. е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{y=0} = u_1(x).$$

Источников тепла нет.

**18.42.** Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала  $V_0 = \text{const}$  для следующих случаев:

- 1)  $x > 0, y > 0, -\infty < z < \infty$ ;
- 2)  $0 < \varphi < \varphi_0, \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r < \infty$ .

**18.43.** С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара  $|x| < R$ .

**18.44.** Найти стационарное распределение температуры в шаре  $r < R$  при условии, что в шаре выделяется тепло с плотностью  $f$  и на границе  $r = R$  поддерживается температура  $u_0^-$  для следующих  $f$  и  $u_0^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_0^- = 0$ ;
- 2)  $f = r$ ,  $u_0^- = a$ ;
- 3)  $f = \sqrt{r}$ ,  $u_0^- = \frac{2}{7}R^{5/2}$ ,  $k = 1$ .

**18.45.** Доказать, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара  $r < R$  определяется формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho},$$

где  $u$  — интеграл Пуассона для шара, т. е.

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0^-(R, \theta_1, \varphi_1) \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

где  $\gamma$  — угол между радиусами-векторами точек  $(\rho, \theta, \varphi)$  и  $(R, \theta_1, \varphi_1)$  и  $u_0^- = \left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right|_{r=R} = u|_{\rho=R}$ .

**Указание.** Доказать, что если  $u(\rho, \theta, \varphi)$ ,  $u(0) = 0$ , — гармоническая функция в области, содержащей начало координат, то и функция  $U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^\pi u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$  является гармонической. Далее воспользоваться условием разрешимости задачи, т. е.  $\int_{r=R} u_0^- dS = 0$ .

**18.46.** Доказать, что решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара  $r < R$  определяется формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = R \int_{-\infty}^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho},$$

где  $u(\rho, \theta, \varphi)$  — решение внешней задачи Дирихле для шара, т. е.

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0^+(R, \theta_1, \varphi_1) \frac{\rho^2 - R^2}{(\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1;$$

$$u_0^+ = \left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right|_{r=R} = u|_{\rho=R}.$$

**Указание.** См. указание к задаче 18.45.

**18.47.** Решить внутреннюю и внешнюю задачи Неймана для шара  $r < R$  при  $u_0^- = u_0^+ = a = \text{const.}$

**18.48.** С помощью поверхностных потенциалов решить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа для полупространства  $x_2 > 0$ .

**18.49.** Найти  $u(x_1, x_2, x_3)$  — плотность диффундирующего вещества при стационарном процессе при условии, что источники

вещества отсутствуют и коэффициент диффузии  $D = \text{const}$  для следующих областей  $G$  и граничных условий  $u|_S$ :

- 1)  $x_3 > 0, u|_{x_3=0} = u_0 = \text{const};$
- 2)  $x_3 > 0, u|_{x_3=0} = \begin{cases} -1, & x_1 < 0, \\ +1, & x_1 > 0; \end{cases}$
- 3)  $x_2, x_3 > 0, -\infty < x_2 < \infty, u|_S = u_0 = \text{const}.$

Краевые задачи для уравнений Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = -f(x)$  и  $\Delta u - k^2 u = -f(x)$  в пространстве ставятся так же, как и для уравнения Пуассона. При этом решения внешних задач на бесконечности должны удовлетворять условию излучения (см. формулу (VIII)) для уравнения  $\Delta u + k^2 u = -f(x)$  и обращаться в нуль для  $\Delta u - k^2 u = -f(x)$ .

**18.50.** Решить задачу Дирихле для уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$  внутри и вне сферы  $|x| = R$  при условии  $u|_{|x|=R} = a$ .

**18.51.** Решить задачу Неймана для уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$  внутри и вне сферы  $|x| = R$  при условии  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{|x|=R} = a$ .

**18.52.** Решить задачу

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad u|_{|x|=R} = u_0^-(x)$$

внутри сферы  $|x| = R$  для следующих  $f$  и  $u_0^-(x)$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}, u_0^- = 0, k = R = 1;$
- 2)  $f = 1, u_0^- = \sqrt{2} e^{i(1-\pi/4)} \sin 1 - 1, k = R = 1.$

**18.53.** Решить задачу Дирихле для уравнения  $\Delta u - k^2 u = 0$  внутри и вне сферы  $|x| = R$  при условии  $u|_{|x|=R} = a$ .

**18.54.** Решить задачу Дирихле для уравнения  $\Delta u - k^2 u = 0$  внутри и вне сферы  $|x| = R$  при условии  $u|_{|x|=R} = a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ .

**18.55.** Решить задачу Неймана для уравнения  $\Delta u - k^2 u = 0$  внутри и вне сферы  $|x| = R$  при условии  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{|x|=R} = a$ .

**18.56.** Решить задачу

$$\Delta u - k^2 u = -f(x), \quad u|_{|x|=R} = u_0^-(x)$$

внутри сферы  $|x| = R$  для следующих  $f$  и  $u_0^-(x)$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}, u_0^- = 0, k = R = 1;$
- 2)  $f = 1, u_0^- = 1 - 2e^{-1} \operatorname{sh} 1, k = R = 1.$

**18.57.** Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация  $u_0$ .

## Ответы к § 18

**18.3.** Решение. В силу формулы (VII) из § 8 и определения простого слоя из § 6

$$\begin{aligned} \left( V_3^{(0)}, \varphi \right) &= \left( \frac{1}{|\xi|} \cdot \mu(y) \delta_S(y), \eta(y) \varphi(\xi + y) \right) = \\ &= \left( \frac{1}{|\xi|}, (\mu(y) \delta_S(y), \eta(y) \varphi(\xi + y)) \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|} \left( \int_S \mu(y) \varphi(\xi + y) dS_y \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_S \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

- 18.5.** 1) В силу формулы (V):  $4\pi R$ ,  $|x| \leq R$ ;  $4\pi \frac{R^2}{|x|}$ ,  $|x| \geq R$ ;  
 3)  $-2\pi \ln R$ ,  $|x| \leq R$ ;  $-2\pi \ln |x|$ ,  $|x| \geq R$ .

**18.6.** Указание. Воспользоваться формулой (III) и ввести сферические координаты.

- 1)  $\frac{4\pi}{|x|} \int_0^R \rho(r) r^2 dr$ ,  $|x| \leq R$ ;  $\frac{4\pi}{|x|} \int_0^{|x|} \rho(r) r^2 dr + \int_{|x|}^R \rho(r) r dr$ ,  $|x| \geq R$ ;
- 2)  $\frac{4\pi R^3 \rho_0}{3|x|}$ ,  $|x| \geq R$ ;  $2\pi R^2 \rho_0 - \frac{2}{3}\pi|x|^2 \rho_0$ ,  $|x| \leq R$ ;
- 3)  $\frac{\pi R^4}{|x|}$ ,  $|x| \geq R$ ;  $\frac{\pi}{3}(4R^3 - |x|^3)$ ,  $|x| \leq R$ ;
- 4)  $\frac{4\pi R^5}{5|x|}$ ,  $|x| \geq R$ ;  $\pi \left( R^4 - \frac{|x|^4}{5} \right)$ ,  $|x| \leq R$ ;
- 5)  $\frac{8\pi R^{7/2}}{7|x|}$ ,  $|x| \geq R$ ;  $\frac{8\pi}{35}(7R^{5/2} - 2|x|^{5/2})$ ,  $|x| \leq R$ ;
- 6)  $\frac{4\pi}{|x|} [2 - e^{-R}(2 + 2R + R^2)]$ ,  $|x| \geq R$ ;  
 $4\pi \left[ \frac{2(1 - e^{-|x|})}{|x|} - e^{-R}(1 + R) - e^{-|x|} \right]$ ,  $|x| \leq R$ ;
- 7)  $\frac{4\pi}{|x|}(R - \operatorname{arctg} R)$ ,  $|x| \geq R$ ;  $4\pi \left( 1 - \frac{\operatorname{arctg}|x|}{|x|} + \ln \sqrt{\frac{1 + R^2}{1 + |x|^2}} \right)$ ,  
 $|x| \leq R$ ;

8)  $\frac{4\pi}{|x|}(2 - R^2)\cos R - 2(1 - R \sin R), |x| \geq R;$   
 $4\pi \left( \frac{2}{|x|}(\cos |x| - 1) + \sin |x| + \sin R - R \cos R \right), |x| \leq R;$

9)  $\frac{4\pi}{|x|}(2R \cos R + (R^2 - 2) \sin R), |x| \geq R;$   
 $4\pi \left( \cos |x| - \frac{2 \sin |x|}{|x|} + R \sin R + \cos R \right), |x| \leq R;$

10)  $\frac{2\pi R^3}{9|x|}(12 \ln 2 - 5), |x| \geq R;$   
 $\frac{\pi}{3} \left[ \left( \frac{2R^3}{|x|} + 3R^2 - |x|^2 \right) \ln \left( 1 + \frac{|x|}{R} \right)^2 + \frac{5}{3}|x|^2 + 2|x|(R - 3) - R^2 \right],$   
 $|x| \leq R.$

**18.7.** 1)  $2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho_0, |x| \leq R_1; \quad 2\pi R_2^2\rho_0 - \frac{2}{3}\pi\rho_0 \left( |x|^2 + \frac{2R_1^3}{|x|} \right),$

$R_1 \leq |x| \leq R_2; \quad \frac{4\pi\rho_0}{3|x|}(R_2^3 - R_1^3), |x| \geq R_2;$

2)  $4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) dr, |x| \leq R_1; \quad \frac{4\pi}{|x|} \int_{R_1}^{|x|} \rho(r)r^2 dr + 4\pi \int_{|x|}^{R_2} \rho(r)r dr, R_1 \leq |x| \leq R_2;$   
 $\frac{4\pi}{|x|} \int_{R_1}^{R_2} \rho(r)r^2 dr, |x| \geq R_2.$

**18.8.** 1)  $\frac{4}{15}\pi R^4 C \left( \frac{R}{r} + \frac{2}{7} \frac{R^3}{r^3} \right), r \geq R; \quad 2\pi C \left( \frac{R^4}{6} + \frac{2}{15} R^2 r^2 - \frac{9}{70} r^4 \right),$

$r \leq R, C$  — коэффициент пропорциональности;

2)  $\frac{\pi R^4}{3r^2}, r \geq R; \quad \frac{4}{3}\pi Rr - \pi r^2, r \leq R; \quad 3) 0;$

4)  $\frac{2R^3}{3r} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi, r \geq R; \quad \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi, r \leq R.$

**18.9.**  $\pi \left[ (H - x_3) \sqrt{R^2 + (H - x_3)^2} + x_3 \sqrt{R^2 + x_3^2} + H^2 - 2Hx_3 + R^2 \ln \left( H - x_3 + \sqrt{R^2 + (H - x_3)^2} \right) - R^2 \ln \left( -x_3 + \sqrt{R^2 + x_3^2} \right) \right].$

**18.10.** 1)  $\int_0^R \int_0^{2\pi} \rho(r_1) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)}} r_1 dr_1 d\varphi_1;$

2)  $-\pi R^2 \rho_0 \ln r, r \geq R; \quad -\pi \rho_0 \left( R^2 \ln R - \frac{R^2 - r^2}{2} \right), r \leq R.$

Решение. Пусть  $r \geq R$ . Тогда  $V_2(r, \varphi) =$

$$= \rho_0 \int_0^R r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} \left[ \ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - 2\frac{r_1}{r} \cos(\varphi_1 - \varphi)}} \right] d\varphi_1 = -\pi\rho_0 R^2 \ln r,$$

так как

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln[1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(\varphi_1 - \varphi)] d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\lambda \frac{2\lambda - 2 \cos(\varphi_1 - \varphi)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(\varphi_1 - \varphi)} d\lambda \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\lambda -\frac{2}{\lambda} \operatorname{Re} \frac{\lambda e^{i(\varphi_1 - \varphi)}}{1 - \lambda e^{i(\varphi_1 - \varphi)}} d\lambda \right] d\varphi = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \cos n(\varphi_1 - \varphi) \right] d\varphi_1 = 0, \text{ где } \lambda = \frac{r_1}{r} < 1; \end{aligned}$$

- 3)  $-\frac{2}{3}\pi R^2 \ln r, r \geq R; \frac{2\pi}{9}[R^3(1 - 3 \ln R) - r^3], r \leq R;$
- 4)  $-\frac{\pi}{2}R^4 \ln r, r \geq R; \frac{\pi}{8}[R^4(1 - 4 \ln R) - r^4], r \leq R;$
- 5)  $-2\pi[1 - (1 + R)e^{-R}] \ln r, r \geq R;$   
 $-2\pi \left[ e^{-r} - e^{-R} + \ln r - (1 + R)e^{-R} \ln R + \int_r^R \frac{e^{-r_1}}{r_1} dr_1 \right], r \leq R;$
- 6)  $-2\pi \ln r \ln \sqrt{1 + R^2}, r \geq R;$   
 $-2\pi \left[ \ln R \ln \sqrt{1 + R^2} - \frac{1}{2} \int_r^R \frac{\ln(1 + r_1^2)}{r_1} dr_1 \right], r \leq R;$
- 7)  $-\frac{4}{5}\pi R^{5/2} \ln r, r \geq R; -\frac{4}{5}\pi \left[ R^{5/2} \ln R + \frac{2}{5}(r^{5/2} - R^{5/2}) \right], r \leq R;$
- 8)  $2\pi(R \cos R - \sin R) \ln r, r \geq R;$   
 $2\pi \left[ R \ln R \cos R - \ln R \sin R + \sin r - \sin R + \int_r^R \frac{\sin r_1}{r_1} dr_1 \right], r \leq R;$
- 9)  $2\pi(1 - R \sin R - \cos R) \ln r, r \geq R;$   
 $2\pi \left[ \ln r - \ln R(R \sin R + \cos R) + \cos r - \cos R + \int_r^R \frac{\cos r_1}{r_1} dr_1 \right], r \leq R;$
- 10)  $\frac{rR^3 \sin \varphi}{3r}, r \geq R; \pi \left( rR - \frac{2r^2}{3} \right) \sin \varphi, r \leq R;$
- 11)  $\frac{rR^3 \cos \varphi}{2r}, r \geq R; \pi \left( rR - \frac{2r^2}{3} \cos \varphi \right), r \leq R;$

$$12) -\frac{\pi R^2}{2} \ln r \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi, r \geq R; \left( \frac{R^2 - r^2}{4} - \frac{R^2}{2} \ln R \right) \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi, r \leq R.$$

**18.11.** Указание. См. решение задачи 18.10, 2).

$$1) \pi \rho_0 (R_1^2 - R_2^2) \ln r, r \geq R_2; \quad \pi \rho_0 \left( R_1^2 \ln r - R_2^2 \ln R_2 + \frac{R_2^2 - r^2}{2} \right), \\ R_1 \leq r \leq R_2; \quad \pi \rho_0 \left( R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \right), r \leq R_1;$$

$$2) -2\pi \ln r \int_{R_1}^{R_2} \rho(x) dx, r \geq R_2; \quad -2\pi \left( \ln r \int_{R_1}^r \rho(x) x dx + \int_r^{R_2} \rho(x) x \ln x dx \right), \\ R_1 \leq r \leq R_2; \quad -2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho(x) x \ln x dx, r \leq R_1.$$

$$\mathbf{18.16.} \frac{4\pi\mu_0 R^2}{|x|}, |x| \geq R; \quad 4\pi\mu_0 R, |x| \leq R.$$

Указание. Воспользоваться формулой (V).

$$\mathbf{18.17.} 1) \frac{4\pi R^2 C}{3r} \left( 1 + \frac{2R^2}{5r^2} \right), r \geq R; \quad \frac{4}{3}\pi R C \left( 1 + \frac{2r^2}{5R^2} \right), r \leq R,$$

$C$  — коэффициент пропорциональности;

$$2) \frac{\pi R}{r} \left( r + R - \frac{(r-R)^2}{2\sqrt{rR}} \ln \frac{\sqrt{r} + \sqrt{R}}{\sqrt{r} - \sqrt{R}} \right), r \geq R; \\ \frac{\pi R}{r} \left( r + R - \frac{(r-R)^2}{2\sqrt{rR}} \ln \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}} \right), r \leq R;$$

$$3) \frac{2R^2}{r} (e^\pi - 1), r \geq R; \quad 2R(e^\pi - 1), r \leq R.$$

$$\mathbf{18.18.} 1) 2\pi\mu_0 \left( \sqrt{x_3^2 + R^2} - x_3 \right);$$

$$2) \pi R \sqrt{x_3^2 + R^2} - \pi x_3^2 \ln \frac{R + \sqrt{x_3^2 + R^2}}{|x_3|};$$

$$3) \frac{4\pi}{3} \left[ x_3^2 + \left( \frac{R^2}{2} - x_3^2 \right) \sqrt{x_3^2 + R^2} \right];$$

$$4) \left( \sqrt{x_3^2 + R^2} - |x_3| \right) \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi.$$

$$\mathbf{18.19.} 1) 2\pi R \mu_0 \ln \frac{H - x_3 + \sqrt{R^2 + (H - x_3)^2}}{\sqrt{R^2 + x_3^2} - x_3};$$

$$2) R \left[ \ln(H - x_3 + \sqrt{R^2 + (H-x_3)^2}) - \ln(\sqrt{R^2 + x_3^2} - x_3) \right]_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi.$$

**18.20.** 0,  $|x| > R$ ;  $-4\pi\nu_0$ ,  $|x| < R$ ;  $-2\pi\nu_0$ ,  $|x| = R$ .

Указание. Воспользоваться формулой (V).

$$18.21. 1) \frac{4\pi R^2}{3r^2}, r > R; -\frac{8\pi r}{3R}, r < R; -\frac{2\pi}{3}, r = R;$$

$$2) \frac{\pi}{2r} \left[ R - 3r + (R + 3r) \left( \sqrt{\frac{r}{R}} - \sqrt{\frac{R}{r}} \right) \ln \frac{\sqrt{r} + \sqrt{R}}{\sqrt{r} - \sqrt{R}} \right], r > R;$$

$$\frac{\pi}{2r} \left[ R - 3r + (R + 3r) \left( \sqrt{\frac{r}{R}} - \sqrt{\frac{R}{r}} \right) \ln \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}} \right], r < R;$$

$$3) 0, r > R; -4(e^\pi - 1), r < R; -2(e^\pi - 1), r = R;$$

$$4) 0, r > R; -2 \int_0^{2\pi} \nu(\varphi) d\varphi, r < R; - \int_0^{2\pi} \nu(\varphi) d\varphi, r = R;$$

$$5) \frac{16\pi R^5}{15r^3}, r > R; -\frac{4\pi R^2}{3} \left( 1 + \frac{6r^2}{5R^2} \right), r < R; -2\pi, r = R.$$

$$18.22. 1) 2\pi\nu_0 x_3 \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} - \frac{1}{|x_3|} \right), x_3 \neq 0;$$

$$2) -2\pi x + \int_0^R \frac{\nu(r)r dr}{(x_3^2 + r^2)^{3/2}}, x_3 \neq 0;$$

$$3) x_3 \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} - \frac{1}{|x_3|} \right) \int_0^{2\pi} \nu(\varphi) d\varphi, x_3 \neq 0;$$

$$4) \pi x_3 \left( \frac{\pi + 2R}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} - \frac{\pi}{|x_3|} - 2 \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + x_3^2}}{|x_3|} \right), x_3 \neq 0.$$

**18.23.** 1)  $-2\pi R\mu_0 \ln R$ ,  $r \leq R$ ;  $-2\pi R\mu_0 \ln r$ ,  $r \geq R$ ;

$$2) -2\pi \ln 2 + \frac{\pi}{8} r^2 \cos 2\varphi, r \leq 2; -2\pi \ln r + \frac{2\pi}{r^2} \cos 2\varphi, r \geq R.$$

**18.24.** 1) 0,  $r > R$ ;  $-\pi\nu_0$ ,  $r = R$ ;  $-2\pi\nu_0$ ,  $r < R$ ;

$$2) V_2^{(0)}(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{r^2 - R^2}{2Rr} \left[ -\pi \sin \varphi + \frac{R^2 + r^2}{r^2 - R^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{r-R} 2 \operatorname{ctg} \varphi \right) \right], & r > R, \\ \frac{r^2 - R^2}{2Rr} \left[ -\pi \sin \varphi + \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} 2 \operatorname{ctg} \varphi \right) \right], & r < R, \\ 0, & r = R. \end{cases}$$

- 18.25.** 1)  $\mu_0 \left[ 2a - y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} - \frac{a+x}{2} \ln ((a+x)^2 + y^2) - \right. \\ \left. - \frac{a-x}{2} \ln ((a-x)^2 + y^2) \right];$
- 2)  $\mu_0 \left[ \frac{a+x}{2} \ln ((a+x)^2 + y^2) - \frac{a-x}{2} \ln ((a-x)^2 + y^2) - \right. \\ \left. - x \ln (x^2 + y^2) + \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{2x(a^2 - x^2)}{y(x^2 + y^2 - a^2)} \right];$
- 3)  $\frac{a^2 - x^2 + y^2}{4} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} - xy \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$

- 18.26.** 1)  $-\nu_0 \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right], y \neq 0; \quad 0 \text{ при } y = 0;$   
 $\lim V_2^{(1)} = \mp \nu_0 \pi \text{ при } y \rightarrow \pm 0, -a < x < a;$
- 2)  $-\nu_0 \left[ 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \right], y \neq 0; \quad 0 \text{ при } y = 0;$   
 $\lim V_2^{(1)} = \mp \nu_0 \pi \text{ при } y \rightarrow \pm 0, 0 < x < a; \quad \lim V_2^{(1)} = \pm \nu_0 \pi \text{ при } y \rightarrow \pm 0, -a < x < 0;$
- 3)  $-x \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right] + \frac{y}{2} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}, y \neq 0;$   
 $0 \text{ при } y = 0; \quad \lim V_2^{(1)}(x, y) = \mp x \pi \text{ при } y \rightarrow \pm 0, -a < x < 0;$
- 4)  $(y^2 - x^2) \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right] + xy \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}, y \neq 0;$   
 $0 \text{ при } y = 0; \quad \lim V_2^{(1)}(x, y) = \mp x^2 \pi \text{ при } y \rightarrow \pm 0, -a < x < 0.$

- 18.28.** 1)  $\frac{4\pi}{k|x|} e^{ik|x|} \int_0^R r \rho(r) \sin kr dr, \quad |x| \geq R;$   
 $\frac{4\pi}{k|x|} \left( e^{ik|x|} \int_0^{|x|} r \rho(r) \sin kr dr + \sin k|x| \int_0^R r \rho(r) e^{ikr} dr \right), \quad |x| \leq R;$
- 2)  $\frac{4\pi \rho_0}{k^2|x|} e^{ik|x|} \left( -R \cos kr + \frac{\sin kR}{k} \right), \quad |x| \geq R;$   
 $\frac{4\pi \rho_0}{k^2|x|} \left( \sin k|x| \left( -iR + \frac{1}{k} \right) e^{ikR} - |x| \right), \quad |x| \leq R;$
- 3)  $\frac{4\pi \rho_0}{k|x|} e^{ik|x|} \left\{ -\frac{Re^{-R}}{k^2+1} (\sin k + k \cos k) + \frac{1}{(1+k^2)^2} [2k(1 - e^{-R} \cos k) - \right. \\ \left. - (1 - k^2)e^{-R} \sin k] \right\}, \quad |x| \geq R;$   
 $-\frac{2\pi \rho_0 i}{|x|} (e^{-1} \cos(1 - |x|) - 2e^{-1} \sin(1 - |x|) + ie^{i|x|} -$   
 $- \sqrt{5} e^{i(|x|+1+i+\operatorname{arctg} 2)}), \quad |x| \leq 1, k = R = 1.$

**18.29.**  $\frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}e^{ik|x|}\left(R_1 \cos kR_1 - R_2 \cos kR_2 + \frac{\sin kR_2 - \sin kR_1}{k}\right), |x| \geq R_2;$

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|} \sin k|x| \left( -iR_2 e^{ikR_2} + iR_1 e^{ikR_1} + \frac{1}{k}(e^{ikR_2} - e^{ikR_1}) \right), |x| \leq R_1; \\ & \frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|} \left[ e^{ik|x|} \left( R_1 \cos kR_1 - |x| \cos k|x| - \frac{\sin kR_1}{k} + i|x| \sin k|x| \right) + \right. \\ & \left. + e^{ikR_2} \left( \frac{\sin k|x|}{k} - iR_2 \sin k|x| \right) \right], R_1 \leq |x| \geq R_2. \end{aligned}$$

**18.30.** 1)  $\frac{4\pi R\rho_0}{k|x|}e^{ik|x|} \sin kR, |x| \geq R; \quad \frac{4\pi R\mu_0}{k|x|}e^{ikR} \sin k|x|, |x| \leq R;$

2)  $\begin{aligned} & \frac{4\pi\nu_0}{R}e^{ik|x|} \left( R \cos kR - \frac{1}{k} \sin kR \right), |x| \geq R; \\ & \frac{4\pi\nu_0}{R}e^{ikR} \left( iR \sin k|x| - \frac{1}{k} \sin k|x| \right), |x| < R; \\ & \frac{4\pi\nu_0}{R}e^{ikR} \left( \frac{iR}{2} \sin kR + \frac{R}{2} \cos kR - \frac{1}{k} \sin kR \right), |x| = R. \end{aligned}$

**18.31.** 1)  $\frac{4\pi e^{-k|x|}}{k|x|} \int_0^R r\rho(r) \operatorname{sh} kr dr, |x| \geq R;$

$$\frac{4\pi}{k|x|} \left( e^{-k|x|} \int_0^{|x|} r\rho(r) \operatorname{sh} kr dr + \operatorname{sh} k|x| \int_{|x|}^R r\rho(r) e^{-kr} dr \right), |x| \leq R;$$

2)  $\begin{aligned} & \frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|}e^{-k|x|} \left( R \operatorname{ch} kR - \frac{1}{k} \operatorname{sh} kR \right), |x| \geq R; \\ & \frac{4\pi\rho_0}{k^2|x|} \left[ |x| - \left( R + \frac{1}{k} \right) e^{-kR} \operatorname{sh} k|x| \right], |x| \leq R; \end{aligned}$

3)  $\frac{4\pi}{k|x|} \left[ \frac{R}{k^2-1} e^{-(R+k|x|)} (k \operatorname{ch} kR + \operatorname{sh} kR) + \frac{\operatorname{sh} R}{(k+1)^2} e^{-k(R+|x|)} \right],$   
 $|x| \geq R, k \neq -1.$

**18.32.** 1)  $\frac{4\pi R\mu_0}{k|x|}e^{-k|x|} \operatorname{sh} kR, |x| \geq R;$

$$\frac{4\pi R\mu_0}{k|x|}e^{-kR} \operatorname{sh} k|x|, |x| \leq R;$$

2)  $\begin{aligned} & \frac{4\pi\nu_0}{|x|}e^{-k|x|} \left( R \operatorname{ch} kR - \frac{1}{k} \operatorname{sh} kR \right), |x| > R; \\ & \frac{4\pi\nu_0}{2R}e^{-kR} \left[ R \operatorname{ch} kR - \left( R + \frac{2}{k} \right) \operatorname{sh} kR \right], |x| = R; \\ & -\frac{4\pi\nu_0}{|x|}e^{-kR} \left( R + \frac{1}{k} \right) \operatorname{sh} k|x|, |x| < R. \end{aligned}$

**18.35.** Указание. Воспользоваться формулами (I), (IX<sub>1</sub>) и (IV) из § 18.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R} \int_{|y|=R} u_0^-(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^2} dS_y, \quad |x| < R; \\ \frac{1}{2\pi R} \int_{|y|=R} u_0^+(y) \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^2} dS_y, \quad |x| > R. \end{aligned}$$

**18.36.** Указание. Воспользоваться задачей 18.35.

- 1)  $u_0, r \leq R; \quad u_0, r \geq R;$
- 2)  $\frac{r}{R} \sin \varphi, \quad r \leq R; \quad \frac{R}{r} \sin \varphi, \quad r \geq R;$
- 3)  $\frac{r}{R} \cos \varphi, \quad r \leq R; \quad \frac{R}{r} \cos \varphi, \quad r \geq R;$
- 4)  $\frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Rr \cos \varphi}{R^2 - r^2} \right), \quad r \leq R; \quad \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Rr \cos \varphi}{r^2 - R^2} \right), \quad r \geq R.$

**18.37.** 1) Решение. Задача  $\Delta u(x) = -\frac{f_0}{k}, |x| < R, u|_{|x|=R} = u_0^- = 0$ , где  $x = (x_1, x_2)$  и  $k$  — коэффициент теплопроводности, подстановкой  $u = v + V_2$ , где

$$V_2(x) = \frac{1}{2\pi k} \int_{|y| \leq R} f_0 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2,$$

сводится к задаче  $\Delta u(x) = 0, |x| < R; \nu|_{|x|=R} = (u - V_2)|_{|x|=R}$ . В силу задачи 18.11, 2) имеем

$$V_2(r, \varphi) = \frac{f_0}{2k} \left( \frac{R^2 - r^2}{2} - R^2 \ln R \right),$$

где  $(r, \varphi)$  — полярные координаты точки  $x$ . Тогда из формулы задачи 18.35 следует  $V(r, \varphi) = \frac{f_0}{2k} R^2 \ln R$ . Итак,  $u(r, \varphi) = v + V_2 = \frac{f_0}{4k} (R^2 - r^2)$ ;

- 2)  $\frac{R^3 - r^3}{9k}; \quad 3) a + \frac{R^4 - r^4}{16k};$
- 4)  $\frac{r}{R} \sin \varphi + \frac{1}{k} \left( e^{-R} - e^{-r} + \ln R - \ln r - \int_r^R \frac{e^{-\rho}}{\rho} d\rho \right);$
- 5)  $\frac{r}{R} \cos \varphi + \frac{1}{k} \left( \sin r - \sin R + \int_r^R \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho \right);$
- 6)  $\frac{r}{R} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \left( \frac{rR}{2k} - \frac{r^2}{3k} \right) \sin \varphi;$
- 7)  $\frac{r}{R} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \left( \frac{rR}{2k} - \frac{r^2}{3k} \right) \cos \varphi.$

**18.38.** Указание. Решение искать в виде потенциала простого слоя (см. формулу (VI)). Затем воспользоваться формулой (II) и условием разрешимости задачи  $\int_{r=R} u_1^-(y) dS_y = 0$ .

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y|=R} u_1^-(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y + \text{const}, \quad |x| \leq R, \quad x = (x_1, x_2);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y|=R} u_1^+(y) \ln |x-y| dS_y + \text{const}, \quad |x| \geq R.$$

**18.39.** Указание. Воспользоваться формулами задачи 18.38.

- 1) Неразрешимо, так как  $\int_{r=R} u_1 dS \neq 0$ ;
- 2)  $r \sin \varphi + \text{const}$ ,  $r < R$ ;  $-\frac{R^2}{r} \sin \varphi + \text{const}$ ,  $r > R$ ;
- 3)  $r \cos \varphi + \text{const}$ ,  $r < R$ ;  $-\frac{R^2}{r} \cos \varphi + \text{const}$ ,  $r > R$ .

**18.40.** Указание. Задача  $\Delta u = -\frac{f}{k}$ ,  $r \leq R$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=R} = u_1^-$  подстановкой  $u = v + V_2$  (см. решение задачи 18.37) сводится к краевой задаче  $\Delta v = 0$ ,  $r < R$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=R} = \frac{\partial(u - V_2)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=R}$ .

- 1)  $\frac{f_0}{2k} \left( \frac{R^2 - r^2}{2} - R^2 \ln R \right) + \text{const}$ ;
- 2)  $\frac{1}{9} (R^3 - r^3 - 3R^2 \ln R) + \text{const}$ ;
- 3)  $\ln R \ln \sqrt{1+R^2} - \frac{1}{2} \int_r^R \frac{\ln(1+\rho^2)}{\rho} d\rho + \text{const}$ ;
- 4)  $\left( r + \frac{2}{3}rR - \frac{r^2}{3} \right) \sin \varphi + \text{const}$ ;
- 5)  $\left( r + \frac{2}{3}rR - \frac{r^2}{3} \right) \cos \varphi + \text{const}$ .

**18.41.** 1)  $\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$ ;

2)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi$ .

**18.42.** 1)  $\frac{2v_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right]$ ;

1)  $\frac{v_0}{2\pi} \left( \pi + \frac{\sin \varphi_0}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)$  при  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi_0$ ;

$\frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(y^2 - x^2) \sin \varphi_0 + 2xy \cos \varphi_0}{(y^2 - x^2) \cos \varphi_0 - 2xy \sin \varphi_0} = \frac{v_0}{\pi} F(x, y, \varphi_0)$  при  $\frac{y}{x} < \operatorname{tg} \varphi_0$ ;

$\frac{v_0}{\pi} (\pi + F(x, y, \varphi_0))$  при  $\frac{y}{x} > \operatorname{tg} \varphi_0$ .

$$\mathbf{18.43.} \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0^-(y) dS_y, \quad |x| < R;$$

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} u_0^+(y) dS_y, \quad |x| > R.$$

**18.44.** См. указания к задаче 18.37 и результаты задачи 18.6.

$$1) \frac{f_0}{6k}(R^2 - r^2); \quad 2) a + \frac{R^3 - r^3}{12k}; \quad 3) 9.$$

**18.47.** Указание. Воспользоваться результатами задачи 18.45 и 18.46.

$$-\frac{R^2 a}{r}, \quad r > R; \quad \text{в области } r < R \text{ задача неразрешима.}$$

$$\mathbf{18.48.} \frac{x_3}{2\pi} \int_{y_3=0} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3} dS_y; \quad \frac{1}{2\pi} \int_{y_3=0} \frac{u_1(y)}{|x-y|} dS_y.$$

$$\mathbf{18.49.} 1) u_0; \quad 2) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}; \quad 3) \frac{u_0}{\pi} \left( \frac{r}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} + \operatorname{arctg} \frac{x_3}{x_2} \right).$$

$$\mathbf{18.50.} \frac{aR \sin k|x|}{|x| \sin kR}, \quad |x| \leq R; \quad \frac{aR e^{ik|x|}}{|x| e^{ikR}}, \quad |x| \geq R.$$

Указание. Решения задач ищем в виде потенциалов двойного слоя

$$u(x) = V^{(1)}(x) = \int_{r=R} \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y. \quad (*)$$

Искомая плотность находится из интегральных уравнений

$$u|_{r=R} = V_{\pm}^{(1)}(x) =$$

$$= \mp 2\pi \nu(x) + \int_{r=R} \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y = a, \quad x \in \{r = R\}.$$

Имеем  $\nu(x) = \frac{akR}{4\pi(kR + i)\sin kR}$  для внутренней задачи и  $\nu(x) = \frac{ae^{ikR}}{4\pi \left( \cos kR - \frac{1}{kR} \sin kR \right)}$  для внешней.

**18.51.** Указание. Решение искать в виде потенциала простого слоя.

$$\frac{aR^2}{|x|} \frac{\sin k|x|}{(kR \cos kR - \sin kR)}, \quad |x| \leq R; \quad \frac{aR^2}{|x|} \frac{e^{ik|x|}}{ikR - 1}, \quad |x| \geq R.$$

**18.52.** См. указания к задаче 18.37 и результаты задачи 18.28, 2).

$$1) \frac{f_0}{|x|} \left( \frac{\sin |x|}{\sin 1} - |x| \right); \quad 2) \sqrt{2} e^{i(1-\pi/4)} \frac{\sin |x|}{|x|} - 1.$$

**18.53.** См. указания к задаче 18.50.

$$\frac{aR}{|x|} \frac{\operatorname{sh} k|x|}{(\operatorname{sh} kR)}, \quad |x| \leq R; \quad \frac{aR}{|x|} \frac{e^{-ik|x|}}{e^{-kR}}, \quad |x| \geq R.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{18.54.} \quad & a \left( \frac{R}{|x|} \right)^2 \frac{k|x| \operatorname{ch} k|x| - \operatorname{sh} k|x|}{kR \operatorname{ch} kR - \operatorname{sh} kR} \cos \theta, \quad |x| \leq R; \\ & a \left( \frac{R}{|x|} \right)^3 \frac{k|x| + 1}{kR + 1} \cdot \frac{\operatorname{ch} k|x| - \operatorname{sh} k|x|}{\operatorname{ch} kR - \operatorname{sh} kR} \cos \theta, \quad |x| \geq R. \end{aligned}$$

$$\mathbf{18.55.} \quad \frac{aR^2}{|x|} \frac{\operatorname{sh} k|x|}{kR \operatorname{ch} kR - \operatorname{sh} kR}, \quad |x| \leq R; \quad -\frac{aR^2}{|x|} \frac{e^{k(R-|x|)}}{1+kR}, \quad |x| \geq R.$$

$$\mathbf{18.56.} \quad 1) \ f_0 \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} |x|}{|x| \operatorname{sh} 1} \right); \quad 2) \ 1 - 2e^{-1} \frac{\operatorname{sh} |x|}{|x|}.$$

**18.57.**  $u(x, y) = u_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}$ . Указание:  $u$  есть решение задачи  $\Delta u - k^2 u = 0$ ,  $r < R$ ,  $u|_{r=R} = u_0$ .

## § 19. Обобщенные решения краевых задач

Пусть в ограниченной области  $Q \subset \mathbb{R}^n$  задается уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f, \quad x \in Q, \tag{I}$$

а на гладкой границе  $\Gamma = \partial Q$  — одно из граничных условий

$$u|_{\Gamma} = g_1(x) \tag{II}$$

или

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u \right) \right|_{\Gamma} = g_2(x), \tag{III}$$

где  $\sigma(x) = C(\Gamma)$ .

Функция  $u(x) \in H^1(Q)$  называется *обобщенным решением задачи (I), (II)*, если ее след на  $\Gamma$  равен  $g_1(x)$  и она при всех  $v(x) \in \dot{H}^1(Q)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) dx = \int_Q fv dx; \tag{IV}$$

при этом считаем, что  $f(x) \in L_2(Q)$ , а  $g_1(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$ .

Функция  $u(x) \in H^1(Q)$  называется обобщенным решением задачи (I), (III) (при этом считаем, что  $f(x) \in L_2(Q)$ ),

$g_2(x) \in L_2(\Gamma)$ , если при всех  $v(x) \in H^1(Q)$  имеет место интегральное тождество

$$\int_Q (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx + \int_{\Gamma} \sigma uv dS = \int_Q fv dx + \int_{\Gamma} g_2 v dS. \quad (\text{V})$$

Если функции  $f$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $\sigma$  достаточно гладкие (например, непрерывно дифференцируемые), то обобщенные решения являются классическими решениями соответствующих задач.

Важную роль при исследовании обобщенных решений краевых задач играет следующая теорема.

**Теорема 1** (Рисса). *Пусть на гильбертовом пространстве  $H$  задан линейный ограниченный функционал  $l(u)$ . Существует единственный элемент  $h \in H$  такой, что  $l(u) = (h, u)$  (здесь через  $(h, u)$  обозначается скалярное произведение в  $H$  элементов  $h$ ,  $u$ ).*

**19.1.** Пусть  $u(x)$  — классическое решение задачи (I), (II). Показать, что если  $u \in C^1(\overline{Q})$ , то  $u(x)$  является обобщенным решением задачи (I), (II).

**19.2.** Пусть  $u(x)$  — классическое решение задачи (I), (III). Показать, что если  $u \in C^1(\overline{Q})$ , то  $u(x)$  является обобщенным решением задачи (I), (III).

**19.3.** Показать, что если  $u(x)$  — обобщенное решение задачи (I), (II) и  $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ , то  $u(x)$  является классическим решением этой задачи.

**19.4.** Показать, что если  $u(x)$  — обобщенное решение задачи (I), (III) и  $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ , то  $u(x)$  является классическим решением этой задачи.

**19.5.** Доказать единственность обобщенного решения задачи (I), (II).

**19.6.** Показать, что если функция  $g_1$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$  (в частности,  $g_1 \in C^1(\Gamma)$ ), то обобщенное решение задачи (I), (II) существует.

**19.7.** Пусть в области  $Q$  задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x), \quad (\text{VI})$$

где  $p \in C^1(\overline{Q})$ ,  $\min p(x) = p_0 > 0$ ,  $q \in C(\overline{Q})$ ,  $f \in L_2(Q)$ . Принадлежащая пространству  $H^1(Q)$  функция  $u(x)$  называется обобщен-

ным решением задачи (VI), (II), если при всех  $v(x) \in \mathring{H}^1(Q)$  она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv) dx = \int_Q fv dx$$

и след ее на  $\Gamma$  равен  $g_1$ . Доказать, что принадлежащее  $H^1(Q)$  классическое решение задачи (VI), (II) является обобщенным.

**19.8.** Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (VI), (II) при  $q \geq 0$ .

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.106.

**19.9.** Пусть в области  $Q$  задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( p_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x)u = f(x), \quad (\text{VII})$$

где вещественные функции  $p_{ij} \in C^1(\overline{Q})$ ,  $p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) и для всех  $x \in \overline{Q}$  и любых вещественных  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  справедливо неравенство  $\sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma_0 |\xi|^2$  с постоянной  $\gamma_0 > 0$ ,  $q \in C(\overline{Q})$ ,  $f \in L_2(Q)$ . Принадлежащая пространству  $H^1(Q)$  функция  $u(x)$  называется обобщенным решением задачи (VII), (II), если при всех  $v(x) \in \mathring{H}^1(Q)$  она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + quv \right) dx = \int_Q fv dx$$

и ее след на  $\Gamma$  равен  $g_1$ . Доказать, что принадлежащее  $H^1(Q)$  классическое решение задачи (VII), (II) является обобщенным.

**19.10.** Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (VII), (II), если  $q \geq 0$ .

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.112.

**19.11.** Обобщенным решением задачи (VI), (III) называется принадлежащая  $H^1(Q)$  функция  $u(x)$ , удовлетворяющая при всех  $v(x) \in H^1(Q)$  интегральному тождеству

$$\int_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv) dx + \int_T p \sigma u v ds = \int_Q fv dx + \int_T pg_2 v ds.$$

Доказать, что принадлежащее  $C^1(Q)$  классическое решение задачи (VI), (III) является обобщенным.

**19.12.** Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (VI), (III) в предположении, что  $f \in L_2(Q)$ ,  $g_2 \in L_2(\Gamma)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  на  $\Gamma$ ,  $q(x) \geq 0$  в  $Q$ , причем либо  $\sigma(x) \neq 0$ , либо  $q(x) \neq 0$ .

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.117.

**19.13.** Пусть  $\tilde{L}_2(Q)$  и  $\tilde{H}^1(Q)$  — подпространства пространств  $L_2(Q)$  и  $H^1(Q)$ , состоящие из тех функций из  $L_2(Q)$  и  $H^1(Q)$  соответственно, для которых  $\int_Q f dx = 0$ . Доказать, что при  $g_2(x) \equiv 0$ ,  $\sigma(x) \equiv 0$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $f \in \tilde{L}_2(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (VI), (III), принадлежащее  $\tilde{H}^1(Q)$ .

Указание. Воспользоваться результатом задачи 4.121.

Пусть  $p \in C(\bar{Q})$ ,  $q \in C(Q)$ ,  $\sigma \in C(\Gamma)$ ,  $\min p(x) = p_0 > 0$ ,  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $q(x) \geq 0$  и или  $q(x) \neq 0$ , или  $\sigma(x) \neq 0$ . Тогда (см. задачи 4.105 и 4.113) в  $\mathring{H}^1(Q)$  и  $H^1(Q)$  можно ввести скалярные произведения, эквивалентные обычным, следующими способами:

$$(f, g)_{\mathring{H}^1} = \int_Q [p(x)(\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) + q(x)fg] dx, \quad (*)$$

$$(f, g)_{H^1} = \int_Q [p(x)(\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) + qfg] dx + \int_{\Gamma} p\sigma fg dS. \quad (**)$$

Функция  $u \in \mathring{H}^1(Q)$ , на которой функционал

$$E(v) = \|v\|_{\mathring{H}^1}^2 - 2(f, v)_{L_2},$$

рассматриваемый для  $v \in \mathring{H}^1(Q)$ , достигает своего минимального значения, есть обобщенное решение задачи (VI), (II) при  $g_1 \equiv 0$ , если норма порождается скалярным произведением (\*).

Функция  $u \in H^1(Q)$ , на которой функционал

$$E(v) = \|v\|_{H^1}^2 - 2(f, v)_{L_2},$$

рассматриваемый для  $v \in H^1(Q)$ , достигает своего минимального значения, есть обобщенное решение задачи (VII), (III) при  $g_2 = 0$ , если норма  $\|v\|_{H^1}$  порождается скалярным произведением (\*\*).

Обозначим через  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots$  расположенные в порядке неубывания собственные значения, а через  $u_1, \dots, u_m, \dots$  — соответствующие собственные функции задачи

$$-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = \lambda u, \quad x \in Q, \quad u|_{\Gamma} = 0.$$

Аналогично, через  $\mu_1, \dots, \mu_m, \dots$  и  $v_1, \dots, v_m, \dots$  обозначим собственные значения и соответствующие собственные функции задачи

$$-\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + q(x)u = \mu u, \quad x \in Q, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Тогда

$$\inf_{f \in \dot{H}^1(Q)} \frac{\|f\|_{\dot{H}^1(Q)}^2}{\|f\|_{L_2(Q)}^2} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \inf_{f \in H^1(Q)} \frac{\|f\|_{H^1(Q)}^2}{\|f\|_{L_2(Q)}^2} = \mu_1,$$

а функции  $u_1(x) \in \dot{H}^1(Q)$  и  $v_1(x) \in H^1(Q)$ , на которых эти точные нижние грани достигаются

$$\frac{\|u_1\|_{\dot{H}^1(Q)}^2}{\|u_1\|_{L_2(Q)}^2} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \frac{\|v_1\|_{H^1(Q)}^2}{\|v_1\|_{L_2(Q)}^2} = \mu_1,$$

являются соответствующими собственными функциями.

Далее, при любом  $m \geq 1$

$$\inf_{\substack{f \in \dot{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0}} \frac{\|f\|_{\dot{H}^1(Q)}^2}{\|f\|_{L_2(Q)}^2} = \lambda_{m+1}$$

и

$$\inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0}} \frac{\|f\|_{H^1(Q)}^2}{\|f\|_{L_2(Q)}^2} = \mu_{m+1}, \quad i = 1, \dots, m,$$

а функции  $u_m(x) \in \dot{H}^1(Q)$ ,  $(u_m, u_i)_{L_2(Q)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , и  $v_m(x) \in H^1(Q)$ ,  $(v_m, v_i)_{L_2(Q)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , на которых эти точные нижние грани достигаются

$$\frac{\|u_m\|_{\dot{H}^1(Q)}^2}{\|u_m\|_{L_2(Q)}^2} = \lambda_m \quad \text{и} \quad \frac{\|v_m\|_{H^1(Q)}^2}{\|v_m\|_{L_2(Q)}^2} = \mu_m,$$

являются соответствующими собственными функциями.

**19.14.** Рассмотрим при  $f \in L_2(Q)$  функционал

$$E_1(v) = \int_Q (\operatorname{grad} v)^2 dx - 2 \int_Q fv dx$$

на множестве функций  $v \in H^1(Q)$ , для которых  $v|_{\Gamma} = g_1$ , где функция  $g_1(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции

из  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $E_1(v)$  достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (I), (II).

**19.15.** Рассмотрим при  $f \in L_2(Q)$ ,  $p \in C(\bar{Q})$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $\min p(x) = p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  функционал

$$E_1(v) = \int_Q p |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_Q q(x) v^2 dx - 2 \int_Q f v dx$$

на множестве функций  $v \in H^1(Q)$ , для которых  $v|_{\Gamma} = g_1$ , где функция  $g_1(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $E_1(v)$  достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (VI), (II).

**19.16.** Пусть  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $q, f$  — функции, введенные в задаче 19.9. Рассмотрим функционал

$$E_2(v) = \int_Q \left[ \sum_{i,j=1}^n p_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \right] dx + \int_Q q v^2 dx - 2 \int_Q f v dx$$

на множестве функций  $v \in H^1(Q)$ , для которых  $v|_{\Gamma} = g_1$ , где функция  $g_1(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $E_2(v)$  достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (VII), (II).

**19.17.** Рассмотрим при  $f \in L_2(Q)$ ,  $g(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $\sigma \in C(\Gamma)$ ,  $\sigma \geq 0$  на  $\Gamma$ ,  $\sigma(x) \neq 0$ , функционал

$$\tilde{E}_1(v) = \int_Q |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_{\Gamma} \sigma v^2 dS - 2 \int_Q f v dx - 2 \int_{\Gamma} g v dS, v \in H^1(Q).$$

Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $\tilde{E}_1(v)$  достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (I), (III).

**19.18.** Пусть  $f \in L_2(Q)$ ,  $g(x) \in L_2(\Gamma)$ ,  $p \in C(\bar{Q})$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $\sigma \in C(\Gamma)$ ,  $\min p(x) = p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  и или  $q(x) \neq 0$ , или  $\sigma(x) \neq 0$ . Рассмотрим на  $H^1(Q)$  функционал

$$\tilde{E}_2(v) = \int_Q p |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_Q q v^2 dx + \int_{\Gamma} \sigma p v^2 dS - 2 \int_Q f v dx - 2 \int_{\Gamma} p g v dS.$$

Показать, что функция  $u(x)$ , на которой этот функционал достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (VI), (III).

Указание. См. задачу 4.117.

**19.19.** Рассмотрим при  $f \in \tilde{L}_2(Q)$ ,  $\int_Q f dx = 0$ ,  $p \in C(\overline{Q})$ ,  $\min p(x) = p_0 > 0$ , функционал

$$E_1(v) = \int_Q p |\operatorname{grad} v|^2 dx - 2 \int_Q fv dx$$

на подпространстве  $\tilde{H}^1(Q)$  (определения множеств  $\tilde{L}_2(Q)$  и  $\tilde{H}^1(Q)$  см. в задаче 19.13; см. также задачи 4.118–4.120) пространства  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u \in \tilde{H}^1(Q)$ , на которой этот функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (VI), (III) (при  $g_2(x) \equiv 0$ ,  $\sigma(x) \equiv 0$ ,  $q(x) \equiv 0$ ).

Таким образом, из вышесказанного (см. задачи 19.1, 19.3, 19.5, 19.6, 19.14) имеем следующее.

Пусть  $Q$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , граница которой  $\partial Q \in C^1$ . Пусть функция  $f(x) \in C(\overline{Q})$ , а заданная на  $\partial Q$  функция  $g(x)$  такова, что множество  $C_g^1(\overline{Q}) = \{h(x) \in C^1(\overline{Q}) : h|_{\partial Q} = g\} \neq \emptyset$ . Тогда функционал

$$J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2f(x)u) dx, \quad u \in C_g^1(\overline{Q}),$$

ограничен снизу. Если  $\partial Q \in C^2$ , а функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Гельдера положительного порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , т. е. для нее существует постоянная  $C > 0$  такая, что для всех  $x$  и  $y$  из  $\overline{Q}$  имеет место неравенство  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ , то в  $C^2(\overline{Q}) \cap C_g^1(\overline{Q})$  существует функция  $u_0(x)$ , для которой

$$\inf_{u \in C_g^1(\overline{Q})} J(u) = J(u_0).$$

Эта функция является решением задачи Дирихле

$$\Delta u_0 = f(x), \quad x \in Q, \quad u_0|_{\partial Q} = g(x).$$

При решении задач очень полезны следующие соотношения:

- 1) Если  $u_0 = f(r, \varphi)$ , то  $|\nabla u_0|^2 = (f'_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f'_\varphi)^2$ ;
- 2) если  $u_0 = f(r)$ , то  $|\nabla u_0|^2 = [f'_r(r)]^2$ ;
- 3) если  $u_0 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ , то  $|\nabla u_0|^2 = A^2 + B^2 + C^2$ .

**Пример 1.** Доказать, что для всех функций  $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих граничному условию

$$u|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3,$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 - 24|x|u) dx \geqslant -\frac{8\pi}{7}.$$

△ Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 - 24|x|u) dx. \quad (1)$$

Воспользуемся тем, что  $\inf_{u \in C_g^1(\bar{Q})} J(u) = J(u_0)$ , где  $u_0(x)$  есть решение задачи Дирихле

$$\Delta u_0 = -12|x|, \quad |x| < 1, \quad (2)$$

$$u_0|_{|x|=1} = g(x) = x_1 - x_2 + x_3. \quad (3)$$

Здесь  $C_g^1(\bar{Q}) = \{h(x) \in C^1(|x| \leqslant 1), h|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3\}$ .

Введя сферические координаты ( $x_1 = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $x_2 = r \sin \varphi \times \sin \theta$ ,  $x_3 = r \cos \theta$ ), запишем задачу (2), (3) в виде

$$\Delta u_0 = -12r, \quad r < 1, \quad (2')$$

$$u_0|_{r=1} = \cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \sin \theta + \cos \theta \quad (3')$$

и найдем ее решение.

Уравнение (2') является неоднородным; найдем какое-нибудь частное решение уравнения (2'). Можно, например, искать его в виде

$$w(r, \varphi, \theta) = f(r).$$

Заметим, что если  $w(r, \varphi, \theta) = f(r)$ , то  $\Delta w = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$ . Поэтому частное решение  $w$  уравнения вида  $\Delta w = Ar^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , зависящее от  $r$ , можно искать в виде  $w = ar^{k+2}$ . В нашем случае  $k = 1$ ,  $w = f(r) = ar^3$  и из уравнения (2') следует, что

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = -12r,$$

где  $f(r) = ar^3$ . Тогда

$$6ar + \frac{2}{r} \cdot 3ar^2 = -12r,$$

откуда найдем  $a = -1$  и  $w(r, \varphi, \theta) = f(r) = -r^3$ .

Введем новую искомую функцию  $v$  такую, что

$$v(r, \varphi, \theta) = u_0(r, \varphi, \theta) - w(r, \varphi, \theta), \quad v = u_0 + r^3, \quad (4)$$

и запишем задачу (2'), (3') для функции  $v$ :

$$\Delta v = 0, \quad r < 1; \quad (5)$$

$$v|_{r=1} = \cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \sin \theta + \cos \theta + 1. \quad (6)$$

Ищем решение задачи (5), (6) в виде

$$v = A + Br \cos \theta + Cr \cos \varphi \sin \theta + Dr \sin \varphi \sin \theta. \quad (7)$$

Из равенств (7) и (6) находим  $A = B = C = 1$ ,  $D = -1$ . Следовательно, функция

$$v = 1 + r(\cos \theta + \cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \sin \theta)$$

есть решение задачи (5), (6), а функция (см. условие (7))

$$\begin{aligned} u_0 = -r^3 + 1 + r(\cos \theta + \cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \sin \theta) &= \\ &= -r^3 + 1 + x_3 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

есть решение задачи (2'), (3').

Так как  $J(u) \geq J(u_0)$  для  $u(x) \in C_g^1(\overline{Q})$ , то найдем  $J(u_0)$ :

$$J(u_0) = \int_{|x|<1} g(x) dx,$$

где

$$\begin{aligned} g(x) = |\nabla u_0|^2 - 24 \cdot |x| \cdot u_0 &= |\nabla u_0|^2 - 24r(-r^3 + 1 + x_3 + x_1 - x_2) = \\ &= |\nabla u_0|^2 - 24r(1 - r^3) - 24r(x_3 + x_1 - x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\nabla u_0|^2 &= |\nabla((1 - r^3) + (x_3 + x_1 - x_2))|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} ((1 - r^3) + (x_3 + x_1 - x_2)) \right]^2 = \\ &= (-3x_1 r + 1)^2 + (-3x_2 r - 1)^2 + (-3x_3 r + 1)^2 = \\ &= 9x_1^2 r^2 - 6x_1 r + 1 + 9x_2^2 r^2 + 6x_2 r + 1 + 9x_3^2 r^2 - 6x_3 r + 1 = \\ &= 9r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3 - 6r(x_1 - x_2 + x_3) = \\ &= 9r^4 + 3 - 6r(x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

(здесь учитываем, что  $\frac{\partial}{\partial x_j}(1 - r^3) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(r^3) = -3x_j r$ ,  $j = 1, 2, 3$ ). Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} g(x) &= 9r^4 + 3 - 6r(x_1 - x_2 + x_3) - 24r(1 - r^3) - 24(x_1 - x_2 + x_3) = \\ &= 33r^4 - 24r + 3 - 30r(x_1 - x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\int_{|x|<1} x_j dx = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и переходя к сферическим координатам, находим

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \int_{|x|<1} g(x) dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \cdot g(x) dr d\varphi d\theta = \\ &= 4\pi \int_0^1 (33r^6 - 24r^3 + 3r^2) dr = 4\pi \left( \frac{33}{7} - 6 + 1 \right) = -\frac{8\pi}{7}. \end{aligned}$$

Следовательно, требуемое неравенство доказано.  $\blacktriangle$

**Пример 2.** Доказать, что для всех функций  $u(x, y) \in C^1(\overline{Q})$ ,  $Q = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$ , для которых

$$u|_{\partial Q} = y^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}x,$$

справедливо неравенство

$$\int_Q u dx dy \leq \int_Q |\nabla u|^2 dx dy.$$

$\triangle$  Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 - u) dx dy, \quad u(x) \in C_g^1(\overline{Q}),$$

где  $g(x, y) = y^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}x$ , и найдем  $\inf_{u \in C_g^1(\overline{Q})} J(u) = J(u_0)$ , где  $u_0(x, y)$  есть решение задачи Дирихле

$$\Delta u_0 = -\frac{1}{2}, \quad (x, y) \in Q, \tag{1}$$

$$u_0|_{\partial Q} = y^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}x \tag{2}$$

(напомним, что  $C_g^1(\overline{Q}) = \{h(x, y) \in C^1 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ :  $h|_{x^2+y^2=4} = y^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}x\}.$ )

Введя полярные координаты ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ), запишем задачу (1), (2) в виде

$$\Delta u_0 = -\frac{1}{2}, \quad r < 2, \quad (1')$$

$$u_0|_{r=2} = 4 \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \quad (2')$$

и найдем ее решение.

Уравнение (1') является неоднородным, поэтому найдем какое-нибудь частное решение уравнение (1). Записав уравнение (1') в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2}, \quad (3)$$

будем искать его частное решение в виде  $w(r) = ar^2$ . Тогда из уравнения (3) найдем  $a = -\frac{1}{8}$ ,  $w(r) = -\frac{1}{8}r^2$ .

Введем новую искомую функцию  $u(r, \varphi)$  такую, что

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= u_0(r, \varphi) - w(r), \\ v(r, \varphi) &= u_0(r, \varphi) + \frac{1}{8}r^2, \end{aligned} \quad (4)$$

и запишем задачу (1'), (2') для функции  $v$ :

$$\Delta v = 0, \quad r < 2; \quad (5)$$

$$u_0|_{r=2} = 4 \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Разложив правую часть условия (6) в ряд Фурье по системе функций  $\{1, \cos k\varphi, \sin k\varphi, k = 1, 2, \dots\}$ , получим условие

$$v|_{r=2} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi - 2 \cos 2\varphi. \quad (7)$$

Ищем решение задачи (5), (6) в виде

$$v = A + Br \cos \varphi + Cr^2 \cos 2\varphi. \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) следует, что

$$A = \frac{5}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому функция

$$v = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}r \cos \varphi - \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi$$

есть решение задачи (5), (6), а функция (см. условие (4))

$$u_0 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}r \cos \varphi - \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi - \frac{1}{8}r^2$$

есть решение задачи (1), (2).

Вычислим  $J(u_0)$ .

Так как  $u_0 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}r \cos \varphi - \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi - \frac{1}{8}r^2 = f(r, \varphi)$ , то

$$\begin{aligned} |\nabla u_0|^2 &= [f'_r]^2 + \frac{1}{r^2}[f'_\varphi]^2 = \\ &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \varphi - r \cos 2\varphi - \frac{1}{4}r \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{4}r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi \right]^2 = \\ &= \left[ \frac{2}{16} \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 2\varphi + \frac{1}{16}r^2 - \frac{2\sqrt{2}}{4}r \cos \varphi \cos 2\varphi - \frac{2\sqrt{2}}{16}r \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{4}r^2 \cos 2\varphi \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{2}{16}r^2 \sin^2 \varphi + r^4 \sin^2 2\varphi - \frac{2\sqrt{2}}{4}r^3 \sin \varphi \sin 2\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{8} + r^2 + \frac{1}{16}r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r(\cos \varphi \cos 2\varphi + \sin \varphi \sin 2\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{8}r \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi = \frac{1}{8} + \frac{17}{16}r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{8}r \cos \varphi + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi = \\ &\quad = \frac{1}{8} + \frac{17}{16}r^2 - \frac{5\sqrt{2}}{8}r \cos \varphi + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} |\nabla u_0|^2 - u_0 &= \frac{1}{8} + \frac{17}{16}r^2 - \frac{5\sqrt{2}}{8}r \cos \varphi + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi - \frac{5}{2} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}r \cos \varphi + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{8}r^2 = \\ &= -\frac{19}{8} + \frac{19}{16}r^2 - \frac{7\sqrt{2}}{8}r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
 J(u_0) &= \int_Q (|\nabla u_0|^2 - u_0) dx dy = \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left( -\frac{19}{8} + \frac{19}{16}r^2 - \frac{7\sqrt{2}}{8}r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi \right) r dr d\varphi = \\
 &= 2\pi \int_0^2 \left( -\frac{19}{8}r + \frac{19}{16}r^3 \right) dr = 2\pi \left( -\frac{19}{8} \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{19}{16} \cdot \frac{2^4}{4} \right) dr = 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, требуемое неравенство доказано.  $\blacktriangle$

**Пример 3.** Найти минимум функционала

$$I(v) = \int_G \left[ |\operatorname{grad} v|^2 + \frac{4v}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right] dx_1 dx_2 \quad (1)$$

среди функций, принадлежащих классу  $\mathring{C}^1(G)$ , где  $G = \{1 < |x| < 3\}$ ,  $x = (x_1, x_2)$ .

$\Delta$  Известно, что существует функция  $v_0(x_1, x_2) \in \mathring{C}^1(G)$ , дающая минимум функционалу (1). Функция  $u_0(x)$  является решением краевой задачи

$$\Delta u = \frac{2}{r}, \quad u|_{|x|=1} = u|_{|x|=3} = 0;$$

записав лапласиан в полярных координатах, получим

$$(ru_r)' = 2, \quad u|_{|x|=1} = u|_{|x|=3} = 0. \quad (2)$$

Решением краевой задачи (2) является функция  $v_0 = 2(r - 1) - \frac{4}{\ln 3} \ln r$ . Так как  $v_0$  не зависит от  $\varphi$ , то

$$|\operatorname{grad} v_0|^2 = \left| \frac{\partial v_0}{\partial r} \right|^2 = \left( 2 - \frac{4}{\ln 3} \frac{1}{r} \right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 f(v_0) &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \left\{ \left( 2 - \frac{4}{\ln 3} \frac{1}{r} \right)^2 + \left[ 8(r - 1) - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right] \frac{1}{r} \right\} r dr d\varphi = \\
 &= 2\pi \int_1^3 \left( 4r - \frac{16}{\ln 3} + \frac{16}{\ln^2 3} \frac{1}{r} + 8r - 8 - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right) dr =
 \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_1^3 \left( 12r - \frac{16}{\ln 3} - 8 + \frac{16}{\ln^2 3} \frac{1}{r} - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right) dr = 32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right).$$

Итак, минимум функционала (1) равен  $32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right)$ . ▲

**19.20.** Найти функцию  $v_0$ , реализующую минимум функционала  $\int_0^1 (v'^2 + v^2) dx + 2 \int_0^1 v dx$  в классе  $\dot{H}^1(0, 1)$ .

**19.21.** Доказать, что для всех  $v \in C^1(0, 1)$  справедливо неравенство  $\int_0^1 (v'^2 + 2xv) dx + v^2(0) + v^2(1) \geq -\frac{41}{270}$ . Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции?

**19.22.** Доказать, что для всех  $v \in C^1(0, 1)$ ,  $v(1) = 0$ , имеет место неравенство  $\int_0^1 v dx \leq \frac{5}{24} + \frac{v^2(0)}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 v'^2 dx$ . Найти функцию из этого класса, для которой достигается равенство.

**19.23.** Найти  $\inf_{v \in \dot{H}^1(Q)} \left\{ \int_Q [(\operatorname{grad} v)^2 + 2 \sin x_1 \sin x_2 v] dx \right\}$ , где  $Q = \{0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$ .

**19.24.** Найти  $\inf_{v \in \dot{H}^1(|x| < 1)} \left\{ \int_{|x| < 1} [(\operatorname{grad} v)^2 + 2|x|^2 v] dx \right\}$ , где  $x = (x_1, x_2)$ .

**19.25.** Найти  $\inf_{v \in H^1(|x| < 1)} \int_{|x| < 1} |\operatorname{grad} v|^2 dx$ , где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ ,  $v|_{|x|=1} = \varphi(\pi - \varphi)(2\pi - \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

**19.26.** Найти  $\inf \int_{|x| < 1} |\operatorname{grad} v|^2 dx$  на множестве функций  $v \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ , удовлетворяющих условию  $v|_{|x|=1} = \varphi^2$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

**19.27.** Может ли заданная на окружности  $|x| = 1$ ,  $x_1 = \cos \varphi$ ,  $x_2 = \sin \varphi$ , функция  $\psi(\varphi)$  быть граничным значением какой-либо функции из  $H^1(|x| < 1)$ , если:

а)  $\psi(\varphi) = \operatorname{sign} \varphi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ;

б)  $\psi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^{2n} \varphi$ ;

в)  $\psi(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^4 \varphi}{n^5}$ .

**19.28.** Пусть  $Q$  — квадрат ( $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ ). Доказать, что для любой  $f \in \dot{H}^1(Q)$  имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx$$

и установить, что постоянная в неравенстве точная.

**19.29.** Пусть  $Q$  — куб ( $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1$ ). Доказать, что для любой функции  $f \in \dot{H}^1(Q)$  справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{3\pi^2} \|\operatorname{grad} f\|_{L_2}^2.$$

**19.30.** Пусть  $Q$  — кольцо ( $1 < |x| < 2$ ). Найти

$$\inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ f|_{|x|=1}=0}} \left\{ \int_{1 < |x| < 2} [(\operatorname{grad} f)^2 + 4f] dx + \int_{|x|=2} f^2 ds \right\}, \quad x = (x_1, x_2).$$

**19.31.** Пусть  $Q$  — квадрат ( $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ ). Найти функцию, дающую минимум функционалу

$$\inf_{v \in H^1} \left\{ \int_Q [(\operatorname{grad} v)^2 + 4 \sin x_1 \sin x_2 v] dx + \int_0^\pi \sin x_1 v(x_1, \pi) dx_1 \right\}$$

в классе функций  $v \in H^1(Q)$ ,  $v|_{x_1=0} = v|_{x_2=0} = v|_{x_1=\pi} = 0$ .

**19.32.** Пусть  $Q$  — круг ( $|x| < 1$ ),  $x = (x_1, x_2)$ . Доказать, что для любой функции  $u \in \dot{H}^1(Q)$  справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \|\operatorname{grad} u\|_{L_2}^2.$$

**19.33.** Доказать, что для всех функций  $u \in C^1(0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_1=1} = x_2, \quad u|_{x_2=1} = x_1,$$

справедливо неравенство

$$\iint_0^1 (\operatorname{grad} u)^2 dx_1 dx_2 \geq \frac{2}{3}.$$

Имеет ли место равенство для какой-нибудь из этих функций?

**19.34.** Доказать, что для всех функций  $u \in \dot{C}^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , имеет место неравенство

$$2 \int_{|x|<1} x_1 x_2 u(x) dx \leq \frac{\pi}{1152} + \int_{|x|<1} (\operatorname{grad} u)^2 dx.$$

**19.35.** Доказать, что для всех функций  $u \in \dot{C}^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , имеет место неравенство

$$2 \int_{|x|<1} [(\operatorname{grad} u)^2 + u] dx \geq -\frac{\pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**19.36.** Показать, что для всех функций  $v \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ , удовлетворяющих условию  $v|_{x_1=1} = \sin \varphi$ , где  $x = (x_1, x_2)$ , справедливо неравенство

$$\int_{|x|<1} [2|x|^2 v + (\operatorname{grad} v)^2] dx \geq \frac{63}{64}\pi.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**19.37.** Доказать, что для всех функций  $u \in C^1(0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= x_2 x_3, & u|_{x_2=0} &= x_1 x_3, & u|_{x_3=0} &= x_1 x_2, \\ u|_{x_1=1} &= x_2 + x_3 + x_2 x_3, & u|_{x_2=1} &= x_1 + x_3 + x_1 x_3, \\ u|_{x_3=1} &= x_1 + x_2 + x_1 x_2, \end{aligned}$$

справедливо неравенство

$$\iiint_0^1 |\operatorname{grad} u|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \geq \frac{7}{2}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**19.38.** Доказать, что для всех функций  $v \in C^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi \sin \theta$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi \sin \theta$ ,  $x_3 = |x| \cos \theta$ ,

удовлетворяющих условию  $v|_{|x|=1} = \cos \theta$ , справедливо неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} [2v + (\operatorname{grad} v)^2] dx \geq \frac{56}{45}\pi.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**19.39.** Пусть  $Q$  — квадрат  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ . Доказать, что для любой функции  $v \in \dot{H}^1(Q)$ , удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 v(x) dx = 0,$$

справедливо неравенство

$$\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{5\pi^2} \|\operatorname{grad} v\|_{L_2}^2.$$

**19.40.** Пусть  $Q$  — куб  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$ . Доказать, что для любой функции  $v \in \dot{H}^1(Q)$ , удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 v(x) dx = 0,$$

справедливо неравенство

$$\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{6\pi^2} \|\operatorname{grad} v\|_{L_2}^2.$$

**19.41.** Пусть  $Q$  — куб  $\{0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi, 0 < x_3 < \pi\}$ . Среди функций  $u \in H^1(Q)$ , принимающих граничные значения

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = u|_{x_3=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=\pi} = u|_{x_3=\pi} = 0,$$

найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u) = \int\limits_Q (\operatorname{grad} u)^2 dx + \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \sin x_1 \sin x_2 u(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2.$$

**19.42.** Пусть  $Q$  — шаровой слой  $\{1 < |x| < 2\}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Среди функций  $u \in H^1(Q)$ , принимающих граничные значения  $u|_{|x|=2} = 0$ , найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u) = \int\limits_Q [(\operatorname{grad} u)^2 + 2u] dx + \int\limits_{|x|=1} u^2 dS.$$

**19.43.** Среди функций из  $M = \{u(x) \in C^1(\overline{Q}): u|_{\partial Q} = 0\}$ , найти ту, которая дает минимум функционалу  $J(u)$ , если:

- 1)  $Q = \{x = (x_1, x_2): 1 < |x| < 2\}$ ,  $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|^3} \right) dx;$
- 2)  $Q = \{x = (x_1, x_2, x_3): |x| < 1\}$ ,  $J(u) = \int_Q (2|x|^2 u + |\nabla u|^2) dx;$
- 3)  $Q = \{x = (x_1, x_2, x_3): 1 < |x| < 2\}$ ,  
 $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + \frac{2u}{|x|^2} \right) dx;$
- 4)  $Q = \{x = (x_1, x_2): |x| < 1\}$ ,  
 $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + 2u \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) dx_1 dx_2;$
- 5)  $Q = \{x = (x_1, x_2): 1 < |x| < 2\}$ ,  $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + \frac{2u}{|x|} \right) dx;$
- 6)  $Q = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}$ ,  
 $J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u(2 + \pi x_1 - x_1^2) \sin x_2) dx_1 dx_2;$
- 7)  $Q = \{x = (x_1, x_2, x_3): |x| < 1\}$ ,  $J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u) dx;$
- 8)  $Q = \{x = (x_1, x_2, x_3): 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$ ,  
 $J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin 2\pi x_3) dx;$
- 9)  $Q = \{x = (x_1, x_2): |x| < 1\}$ ,  $J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 16x_1 u) dx.$

**19.44.** Пусть  $Q = \{(x, y): 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$ ,  $M = \{u \in C^1(\overline{Q}): u|_{\partial Q} = 0\}$ . Найти  $\inf_{u \in M} J(u)$ , если:

- 1)  $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} u \right) dx dy;$
- 2)  $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + \left( \frac{2}{x^2 + y^2} - 3 \right) \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} u \right) dx dy;$
- 3)  $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + \left( \frac{6}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 8 \right) u \right) dx dy;$
- 4)  $J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 - 2 \frac{2 + x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} u \right) dx dy.$

**19.45.** Пусть  $Q = \{x = (x, y): |x| < 1\}$ . Найти  $\inf_{u \in M} J(u)$ , где:

- 1)  $M = \left\{ u \in C^1(\overline{Q}): u|_{|x|=1} = \frac{1}{2} \right\}$ ,  $J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u) dx;$

$$2) \quad M = \left\{ u \in C^1(\overline{Q}) : u|_{|x|=1} = 0 \right\}, \quad J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 16x_1 u) dx.$$

**19.46.** Найти  $\inf_{u \in H} \int_{1 < |x| < 2} (|\nabla u|^2 + 8u) dx$ , где  $H = \{u(x) \in C^1(1 \leq |x| \leq 2), u|_{|x|=1} = 1, u|_{|x|=2} = 4 + \ln 2\}$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**19.47.** Найти  $\inf_{u \in H} \int_{|x| < 1} (|\nabla u|^2 + 16x_1 u) dx$ , где  $H = \{u(x) \in C^1(|x| \leq 1), u|_{|x|=1} = x_1\}$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**19.48.** Найти  $\inf_{u \in H} \int_{1 < |x| < 2} \left( |\nabla u|^2 + 6 \frac{x_2}{|x|} u \right) dx$ , где  $H = \{u(x) \in C^1(1 \leq |x| \leq 2), u|_{|x|=1} = x_2, u|_{|x|=2} = 2x_2\}$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**19.49.** Найти

$$\inf \iiint_G \left( |\nabla u|^2 + \frac{4u}{r^4} \right) dx dy dz$$

среди функций  $u(x, y, z) \in C^1(\overline{G})$ ,  $u|_{r=1/2} = 2$ ,  $u|_{r=1} = -1$ , где  $G = \{(x, y, z) : \frac{1}{2} < r < 1\}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

**19.50.** Найти

$$\sup \iint_G \left( 2u \cos r + \frac{2u}{r} \sin r - |\nabla u|^2 \right) dx dy$$

среди функций  $u(x, y) \in C^1(\overline{G})$ ,  $u|_{r=\pi} = 0$ ,  $u|_{r=2\pi} = 2$ , где  $G = \{(x, y) : \pi < r < 2\pi\}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ .

**19.51.** Найти  $\inf_{u \in M} J(u)$ , где  $M = \{u \in C^1(\overline{Q}) : u|_{\partial Q} = 0\}$ , если

$$Q = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}$$

$$J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 4u \sin x_1 \sin x_2) dx.$$

**19.52.** Пусть  $Q = \{x = (x_1, x_2) : 1 < |x| < 2\}$ . Найти  $\inf_{u \in M} J(u)$ , если  $M = \{u(x) \in C^1(\overline{Q}) : u|_{|x|=1} = 1, u|_{|x|=2} = 2\}$  и

$$J(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + 18u \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) dx.$$

**19.53.** Пусть  $Q = \{x = (x, y): x^2 + y^2 < 4\}$ . Найти  $\inf_{u \in M} J(u)$ , если  $M = \left\{ u(x, y) \in C^1(\overline{Q}): u|_{\partial Q} = \frac{x^2 - y^2}{4} \right\}$  и

$$J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 - 2u) dx dy.$$

**19.54.** Пусть  $Q = \{x = (x, y): 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ . Найти  $\inf_{u \in M} J(u)$ , если  $J(u) = \int_Q |\nabla u|^2 dx dy$ , а

$$M = \{u(x, y) \in C^1(\overline{Q}): u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = 0, u|_{y=\pi} = \sin x\}.$$

**19.55.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих граничному условию  $u|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3$ , имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} (|\nabla u|^2 - 24 \cdot |x| \cdot u) dx \geq -\frac{8}{7}\pi.$$

**19.56.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(1 \leq |x| \leq 2)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих граничным условиям  $u|_{|x|=1} = 0$ ,  $u|_{|x|=2} = 1$ , имеет место неравенство

$$\int_{1<|x|<2} \left( |\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|} \right) dx \geq -\frac{\pi}{3}.$$

**19.57.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(1 \leq |x| \leq e)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих граничным условиям  $u|_{|x|=1} = 0$ ,  $u|_{|x|=e} = -1$ , имеет место неравенство

$$\int_{1<|x|<e} \left( |\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|^2} \right) dx \geq 4x(e+1).$$

**19.58.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих граничному условию  $u|_{|x|=1} = 8x_2^2$ , имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx \geq 31\pi.$$

**19.59.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих граничному условию  $u|_{|x|=1} = \cos \theta$ , имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} (2u + |\nabla u|^2) dx \geq \pi.$$

**19.60.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= x_2 x_3, & u|_{x_1=1} &= x_2 + x_3 + x_2 x_3, \\ u|_{x_2=0} &= x_1 x_3, & u|_{x_2=1} &= x_1 + x_3 + x_1 x_3, \\ u|_{x_3=0} &= x_1 x_2, & u|_{x_3=1} &= x_1 + x_2 + x_1 x_2, \end{aligned}$$

имеет место неравенство

$$\iiint_0^1 |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \geq \frac{7}{2}.$$

**19.61.** Покажите, что для всех функций  $u(x) \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , удовлетворяющих граничному условию  $u|_{|x|=1} = 0$ , имеют место следующие соотношения:

- 1)  $\int_{|x|<1} (|\nabla u|^2 + 24(x_1^2 - x_2^2)u) dx \geq -\frac{\pi}{2};$
- 2)  $\int_{|x|<1} \left( |\nabla u|^2 + \frac{6x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} u \right) dx \geq -\frac{\pi}{4}.$

**19.62.** Пусть  $u(x) \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

- 1) Показать, что если  $u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ , то справедливо неравенство

$$\frac{14\pi}{15} + \int_{|x|<1} u dx \leq \frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

- 2) Показать, что если  $u|_{|x|=1} = x_1 x_2 + x_3^2$ , то справедливо неравенство

$$\frac{2\pi}{15} + \int_{|x|<1} u dx \leq \frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

- 3) Показать, что если  $u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3$ , то справедливо неравенство

$$\frac{4\pi}{45} + \int_{|x|<1} u \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 \, dx.$$

- 4) Показать, что если  $u|_{|x|=1} = x_1 + x_3^2$ , то справедливо неравенство

$$\frac{8\pi}{15} + \int_{|x|<1} u \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 \, dx.$$

**19.63.** Пусть  $Q = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < 1\}$ . Показать, что для всех функций  $u(x) \in C^1(\overline{Q})$ :

- 1) удовлетворяющих условиям  $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=0} = 0$ ,  $u|_{x_2=1} = \sin x_1$ , имеет место неравенство

$$\int_Q |\nabla u|^2 \, dx > \frac{\pi}{2};$$

- 2) удовлетворяющих условиям  $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=0} = 0$ ,  $u|_{x_2=1} = \sin 2x_1$ , имеет место неравенство

$$\int_Q |\nabla u|^2 \, dx > \pi.$$

**19.64.** Пусть  $Q = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < 1\}$ ,  $M = \{u \in C^1(\overline{Q}), u_{\partial Q} = 0\}$ . Найти функцию, реализующую:

- 1)  $\inf_{u \in M} \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u \sin x_1) \, dx_1 \, dx_2$ ;
- 2)  $\inf_{u \in M} \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u \sin 2x_1) \, dx_1 \, dx_2$ .

**19.65.** Пусть  $G = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$ . Найти все такие функции  $u \in C^1(\overline{G})$ , для которых:

- 1)  $u|_{\partial G} = x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}y$  и  $\iint_G |\nabla u|^2 \, dx \, dy > \iint_G u \, dx \, dy$ ;
- 2)  $u|_{\partial G} = \sqrt{2}x + \frac{y^2}{2}$  и  $\iint_G |\nabla u|^2 \, dx \, dy > 2 \iint_G u \, dx \, dy$ .

**19.66.** 1) Найти все  $\lambda$ , для которых справедливо неравенство

$$\iint_G (|\nabla u|^2 + 32 \sin x \cdot \sin y \cdot u) \, dx \, dy > 0$$

для любой функции  $u(x, y) \in C^1(\overline{G})$ ,  $u|_{\partial G} = \lambda$ , где  $G = \{(x, y): 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ .

2) Найти все  $\lambda$ , для которых справедливо неравенство

$$\iint_G (|\nabla u|^2 - 2x \sin y \cdot u) \, dx \, dy > 0$$

для любой функции  $u(x, y) \in C^1(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi) = C^1(\overline{G})$ , удовлетворяющей граничным условиям  $u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = \lambda$ ,  $u|_{x=1} = \lambda + \sin y$ .

3) Найти все  $\lambda$ , для которых среди функций  $u(x, y) \in C^1(\overline{G})$ ,  $u|_{\partial G} = \lambda$ , найдется такая, что

$$\iint_G (|\nabla u|^2 - 8 \cos x \cdot \cos y \cdot u) \, dx \, dy < 8\lambda,$$

где  $G = \left\{ (x, y): |x| < \frac{\pi}{2}, |y| < \frac{\pi}{2} \right\}$ .

## Ответы к § 19

**19.20.**  $-1 + \frac{2\sqrt{e}}{e+1} \operatorname{ch}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ .

**19.21.** Да, для функции  $\frac{x^2}{6} - \frac{2}{9}(x+1)$ .

**19.22.**  $-x^2 + \frac{x+1}{2}$ .

**19.23.**  $-\frac{\pi^2}{8}$ .

**19.24.**  $-\frac{\pi}{64}$ .

**19.25.**  $144\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5}$ .

**19.26.**  $16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ .

**19.27.** а) Нет; б) нет; в) да.

**19.30.**  $\frac{\pi}{2(1+\ln 4)}(51 - 94 \ln 2)$ .

**19.31.**  $-\sin x_1 \sin x_2 - 2 \frac{\sin x_1 \operatorname{ch} x_2}{\operatorname{sh} \pi}$ .

**19.33.** Да.

**19.35.** Да, для функции  $\frac{|x|^2 - 1}{12}$ .

**19.36.** Да, для функции  $r \sin \varphi + \frac{r^4 - 1}{16}$ .

**19.37.** Да, для функции  $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ .

**19.38.** Да, для функции  $r \cos \theta + \frac{r^2 - 1}{6}$ .

**19.41.**  $-\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch}(\sqrt{2} \pi)} \sin x_1 \sin x_2 \operatorname{sh}(\sqrt{2} x_3)$ .

**19.42.**  $\frac{|x|^2}{6} + \frac{5}{9|x|} - \frac{17}{18}$ .

**19.43.** 1)  $u_0(r, \varphi) = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} - \frac{1}{r}$ ; 2)  $u_0(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{20}(r^2 - 1)$ ;

3)  $u_0(r, \varphi, \theta) = \frac{2 \ln 2}{r} + \ln r - 2 \ln 2$ ; 4)  $u_0(r, \varphi) = \frac{r}{3}(r - 1) \sin \varphi$ ;

5)  $u_0(r, \varphi) = r - \frac{\ln r}{\ln 2} - 1$ ; 6)  $u_0(x_1, x_2) = x_1(x_1 - \pi) \sin x_2$ ;

7)  $u_0(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{6}(r^2 - 1)$ ;

8)  $u_0(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{6\pi^2} \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin 2\pi x_3$ ;

9)  $u_0(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = r(r^2 - 1) \cos \varphi$ .

**19.44.**  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = m$ , где:

1)  $m = \pi \left( \frac{2}{3} - \ln 2 \right)$ ;  $u_0(r, \varphi) = \left( \frac{r}{3} - 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{r} \right) \cos \varphi$ ;

2)  $m = \pi \left( \frac{9}{4} - 4 \ln 2 \right)$ ;  $u_0(r, \varphi) = (-r^2 + 3r - 2) \cos \varphi$ ;

3)  $m = -\pi$ ;  $u_0(r, \varphi) = -r^2 + 3r - 2$ ;

4)  $m = 2\pi(4 \ln 2 - 3)$ ;  $u_0(r, \varphi) = -r + 3 - \frac{2}{r}$ .

**19.45.** 1)  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = \frac{7}{8}\pi$ ,  $u_0(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{4}$ ;

2)  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = -\frac{5}{12}\pi$ ,  $u_0(r, \varphi) = r(r^2 - 1) \cos \varphi$ .

**19.46.**  $\min = 2\pi(45 + 17 \ln 2)$ ;  $u_0(r, \varphi) = r^2 + \ln r$ .

**19.47.**  $\min = \frac{13\pi}{6}$ ;  $u_0(r, \varphi) = r^3 \cos \varphi$ .

**19.48.**  $\min = \frac{165}{4}\pi; \quad u_0(r, \varphi) = r^2 \sin \varphi.$

**19.49.**  $\min = \frac{128}{3}\pi; \quad u_0(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} - 2.$

**19.50.**  $\sup = \frac{3}{2}\pi^3; \quad u_0(r, \varphi) = 1 + \cos r.$

**19.51.**  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = -\frac{\pi^2}{2}, \quad u_0(x_1, x_2) = -\sin x_1 \sin x_2.$

**19.52.**  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = \pi \left( \frac{5117}{9} - \frac{102}{\ln 2} - \frac{16 \ln 2}{3} \right),$

$$u_0(r, \varphi) = r^3 - \frac{6 \ln r}{\ln 2}.$$

**19.53.**  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = 0, \quad u_0(r, \varphi) = 1 - \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}r^2 \cos 2\varphi.$

**19.54.**  $\inf_{u \in M} J(u) = J(u_0) = \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \pi, \quad u_0(x, y) = \frac{\sin x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} \pi}.$

**19.55.**  $u_0(x) = 1 - |x|^3 + x_1 - x_2 + x_3, \quad J(u_0) = -\frac{8\pi}{7}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$

**19.56.**  $u_0(x) = -\frac{|x|}{2} - \frac{3}{|x|} + \frac{7}{2}, \quad J(u_0) = -\frac{\pi}{3}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$

**19.57.**  $u_0(x) = -\ln |x|, \quad J(u_0) = 4\pi(e+1), \quad x = (x_1, x_2).$

**19.58.**  $u_0(x) = 4 + 4r^2 \cos 2\varphi = 4(1 + x_1^2 - x_2^2),$   
 $J(u_0) = 31\pi, \quad x = (x_1, x_2).$

**19.59.**  $u_0(x) = \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) + x_3,$

$$J(u_0) = \frac{56}{45}\pi > \pi, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

**19.60.**  $u_0(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad J(u_0) = \frac{7}{2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$

**19.61.** 1)  $u_0(r, \varphi) = r^2(r-1) \cos 2\varphi, \quad J(u_0) = -\frac{\pi}{2};$

2)  $u_0(r, \varphi) = (r^2 - r) \sin \varphi, \quad J(u_0) = -\frac{\pi}{4}.$

**19.62.** 1)  $u_0(x) = \frac{1}{2} + x_1 + x_3^2 - \frac{1}{2}|x|^2,$

$$\frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{|x|<1} u_0 dx = \frac{8\pi}{15};$$

2)  $u_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x|^2 - 2x_3^2,$

$$\frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{|x|<1} u_0 dx = \frac{14\pi}{15};$$

3)  $u_0(x) = x_1 x_2 + x_3^2 + \frac{1}{2}(1 - |x|^2), \quad \frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{|x|<1} u_0 dx = \frac{2\pi}{15};$

4)  $u_0(x) = \frac{5}{6} - x_3 - x_3^2 + \frac{1}{6}|x|^2, \quad \frac{1}{2} \int_{|x|<1} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{|x|<1} u_0 dx = \frac{4\pi}{45}.$

- 19.63.** 1)  $u_0(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \frac{\operatorname{sh} x_2}{\operatorname{sh} 1}$ ,  $\int_Q |\nabla u_0|^2 dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} 1 > \frac{\pi}{2}$ ;
- 2)  $u_0(x_1, x_2) = \sin(2x_1) \frac{\operatorname{sh} 2x_2}{\operatorname{sh} 2}$ ,  $\int_Q |\nabla u_0|^2 dx = \pi \operatorname{cth} 2 > \pi$ .

- 19.64.** 1)  $u_0(x_1, x_2) = \sin x_1 \left( \operatorname{ch} x_2 + \frac{1 - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x_2 - 1 \right)$ ;
- 2)  $u_0(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \sin(2x_1) \left( \operatorname{ch} 2x_2 + \frac{1 - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2} \operatorname{sh} 2x_2 - 1 \right)$ .

- 19.65.** 1) Все функции  $u \in C^1(\overline{G})$ , удовлетворяющие условию  $u|_{\partial G} = x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}y$ , кроме функции  $u_0 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}r \sin \varphi + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi - \frac{r^2}{8} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}y + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{8}y^2$ .
- 2) Все функции  $u \in C^1(\overline{G})$ , удовлетворяющие условию  $u|_{\partial G} = \sqrt{2}x + \frac{1}{2}y$ , кроме функции  $u_0 = 2 + \sqrt{2}r \cos \varphi - \frac{1}{4}r^2(\cos 2\varphi + 1) = 2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2}x^2$ .

- 19.66.** 1)  $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ ; 2)  $\lambda < \frac{\pi}{6}$ ; 3)  $\lambda > -\frac{\pi^2}{20}$ .

## Г л а в а 6

### СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

#### § 20. Метод Фурье решения смешанных задач

Обозначим через  $Q_T = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T\}$  цилиндр в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , где  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ , граница которой  $\partial\Omega \in C^2$ , а  $T > 0$ .

Функция  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in Q_T$ , называется (классическим) *решением первой смешанной задачи для волнового уравнения*

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (\text{I})$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (\text{II})$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega; \quad (\text{III})$$

$$u|_{\partial\Omega} = \chi(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \quad (\text{IV})$$

если  $u(x, t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$  и удовлетворяет условиям (I), (II), (III), (IV).

Часто вместо граничного условия (IV) рассматривается граничное условие вида

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma(x)u \right) \right|_{\partial\Omega} = \chi(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \quad (\text{V})$$

в котором  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней по отношению к области  $\Omega$  нормали к поверхности  $\partial\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$ , а заданная на  $\partial\Omega$  функция  $\sigma(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ , непрерывна и неотрицательна,  $\sigma(x) \in C(\partial\Omega)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ ; условие неотрицательности коэффициента  $\sigma(x)$  есть физическое условие упругого закрепления границы. В случае когда  $\sigma(x) \equiv 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ , задача (I), (II), (III), (V) называется *второй смешанной задачей для уравнения (I)*.

Если граница области  $\Omega$  состоит из нескольких гладких кусков, то на каждом из этих кусков может задаваться одно из условий: либо типа (IV), либо типа (V).

Аналогичные смешанные задачи рассматриваются и для уравнения теплопроводности.

Функция  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  называется решением *первой смешанной задачи*

$$\frac{1}{a^2}u_t - \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (\text{VI})$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (\text{VII})$$

$$u|_{\partial\Omega} = \chi(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \quad (\text{VIII})$$

если она удовлетворяет условиям (VI), (VII), (VIII).

Функция  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ , удовлетворяющая условиям (VI), (VII), (V), называется *решением второй* (при  $\sigma(x) \equiv 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ ) или *третьей* (если  $\sigma(x) \neq 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ ) *смешанной задачи для уравнения (V)*.

Для каждой из сформулированных смешанных задач как в гиперболическом, так и в параболическом случаях имеет место теорема единственности, т. е. каждая из этих задач не может иметь более одного решения.

При достаточной гладкости заданных функций ( $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\chi(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\sigma(x)$ ) и выполнении условий их согласования (а также гладкости границы области  $\Omega$ ) решения каждой из перечисленных смешанных задач существуют.

Проиллюстрируем способ решения смешанных задач на примере волнового уравнения. В случае когда граничное условие рассматриваемой задачи однородное (т. е. в формулах (IV) или (V) функция  $\chi(x, t) \equiv 0$ ), для решения задачи можно применить метод Фурье, суть которого заключается в следующем.

Прежде всего, следует изучить соответствующую спектральную задачу, которая в случае одного пространственного переменного ( $n = 1$ ) часто называется задачей Штурма–Лиувилля.

Для первой смешанной задачи (I), (II), (III) эта задача состоит в нахождении чисел  $\lambda$  (собственных значений), при которых краевая задача

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{IX})$$

имеет нетривиальное (не равное тождественно нулевой функции) решение  $v(x)$  — собственную функцию, соответствующую собственному значению  $\lambda$ . Для случая смешанной задачи (I), (II), (III), (V) спектральная задача состоит в нахождении собствен-

ных чисел  $\lambda$ , то есть тех чисел  $\lambda$ , при которых краевая задача

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega, \\ \left( \frac{\partial v}{\partial n} + \sigma(x)v \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{X})$$

имеет нетривиальное решение  $v(x)$  — собственную функцию, соответствующую собственному значению  $\lambda$ .

Собственные функции  $v(x)$  как в задаче (IX), так и в задачах (X), можно считать вещественномнозначными.

Совокупность всех собственных значений задачи (IX) (или (X)) составляет спектр соответствующей задачи. Спектр каждой из задач (и (IX), и (X)) состоит из счетного числа вещественных неотрицательных чисел

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p \leq \dots, \quad \lambda_p \rightarrow \infty \quad \text{при } p \rightarrow \infty;$$

при этом собственное значение  $\lambda_k$  в этой последовательности встречается столько (конечное число) раз, сколько линейно независимых собственных функций отвечает этому собственному значению; это число есть размерность соответствующего собственного подпространства рассматриваемого оператора и называется кратностью собственного значения  $\lambda_k$ .

Соответствующая последовательности  $\{\lambda_p\}$  последовательность собственных функций  $\{v_p(x)\}$  образует ортогональный базис пространства  $L_2(\Omega)$  (со скалярным произведением

$$(g, h)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} g(x)h(x) dx;$$

все функции считаем вещественномнозначными).

Эта же система собственных функций является ортогональным базисом в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$  в случае задачи (X), а в случае задачи (IX) — в подпространстве  $\dot{H}^1(\Omega)$  этого пространства, состоящего из всех функций пространства  $H^1(\Omega)$ , след которых на границе  $\partial\Omega$  равен нулю. Напомним (см., например, [8, 17]), что скалярное произведение в  $H^1(\Omega)$  определяется равенством

$$(g, h)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} [(\nabla g, \nabla h) + gh] dx, \quad (\nabla g = (g_{x_1}, \dots, g_{x_n})).$$

Заметим, что самим С. Л. Соболевым пространства  $H^1(\Omega)$  и  $\dot{H}^1(\Omega)$  были обозначены через  $W_2^1(\Omega)$  и  $\dot{W}_2^1(\Omega)$  соответственно.

Поскольку в рассматриваемых случаях все собственные значения вещественны и неотрицательны, то часто спектральный параметр задачи обозначают не через  $\lambda$ , а через  $\lambda^2$ ; в этом случае собственными значениями задачи являются соответствующие значения  $\lambda^2$ .

Формальная схема метода Фурье состоит в следующем. Представим рядами Фурье по соответствующим (пронормированным в  $L_2(\Omega)$ ) собственным функциям функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  и при каждом  $t \in [0, T]$  функцию  $f(x, t)$  (считая их принадлежащими  $L_2(\Omega)$  и соответственно  $L_2(\Omega)$  при каждом  $t \in [0, T]$ ):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), & \psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k v_k(x), \\ f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x),\end{aligned}$$

где  $\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(\Omega)}$ ,  $\psi_k = (\psi, v_k)_{L_2(\Omega)}$ ,  $f_k(t) = \int_{\Omega} f(x, t) v_k(x) dx$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Решения задачи (I), (II), (III), (IV) или задачи (I), (II), (III), (V) (напомним, что условия (IV) или (V) считаются однородными) также ищем в виде ряда Фурье по этой системе

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x),$$

коэффициенты Фурье  $T_k(t)$  в котором являются решениями задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} T_k''(t) + \lambda_k T_k(t) &= f_k(t), & t \in [0, T], \\ T_k(0) &= \varphi_k, \\ T'_k(0) &= \psi_k, & k = 1, 2, \dots.\end{aligned}$$

Решение  $u(x, t)$  задач (VI), (VII), (VIII) или (VI), (VII), (V) для уравнения теплопроводности при том же однородном ( $\chi(x, t) \equiv 0$ ) граничном условии ищется в том же виде, только коэффициенты  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  являются решениями задач Коши

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} T'_k(t) + \lambda_k T_k(t) &= f_k(t), & t \in [0, T], \\ T_k(0) &= \varphi_k, & k = 1, 2, \dots.\end{aligned}$$

Случай, когда граничное условие (IV) (или (V)) для волнового уравнения или соответствующее граничное условие для уравнения теплопроводности не является однородным, сводится к рассматриваемому с помощью замены искомой функции  $u(x, t)$  на функцию  $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - g(x, t)$ , где  $g(x, t)$  — достаточно гладкая в  $\overline{Q}_T$  функция, удовлетворяющая соответствующему неоднородному граничному условию.

**В случае одного пространственного переменного ( $n = 1$ )** приведенные выше утверждения выглядят следующим образом. Пусть  $\Omega = (A, B)$  — конечный интервал оси  $Ox$ , а область  $Q_T = \{(x, t): A < x < B, 0 < t < T\}$  — прямоугольник высоты  $T > 0$  с основанием  $\Omega = (A, B)$ . Граница области  $\Omega$  в этом случае состоит из двух точек  $x = A$  и  $x = B$ ; в каждой из этих точек (на соответствующей стороне прямоугольника  $Q_T$ ) задается одно из граничных условий типа (IV) или типа (V).

Типичная смешанная задача в гиперболическом случае выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (\text{XI})$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad A < x < B, \quad (\text{XII})$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad A < x < B, \quad (\text{XIII})$$

$$u|_{x=A} = \chi_A(t), \quad 0 < t < T, \quad (\text{XIV})$$

$$(u_x + \sigma_B u)|_{x=B} = \chi_B(t), \quad 0 < t < T, \quad (\text{XV})$$

где число  $\sigma_B \geqslant 0$ . Вместо условий (XIV) и (XV) могут быть, например, условия

$$(u_x - \sigma_A u)|_{x=A} = \chi_A(t), \quad 0 < t < T, \quad (\text{XIV}')$$

$$u|_{x=B} = \chi_B(t), \quad 0 < t < T, \quad (\text{XV}')$$

где число  $\sigma_A \geqslant 0$ .

Аналогично обстоит дело и со смешанными задачами для одномерного уравнения теплопроводности.

Спектральную задачу **при  $n > 1$**  рассмотрим только в двумерном случае ( $n > 2$ ), причем область  $\Omega$  будем считать либо квадратом (прямоугольником), либо кругом.

В обоих случаях воспользуемся методом разделения переменных.

Рассмотрим сначала случай квадрата (прямоугольника) в  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ .

Решение  $u(x, y)$  задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u, \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}; \\ u|_{x=0} &= (u_x + \sigma u)|_{x=1} = 0, \quad 0 < y < 1, \\ u_y|_{y=0} &= u|_{y=1} = 0, \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (\text{XVI})$$

где постоянная  $\sigma \geq 0$  (мы взяли, например, такое распределение граничных условий на сторонах квадрата) будем искать в виде произведения  $X(x) \cdot Y(y)$ . Для функций  $X(x)$  и  $Y(y)$  получаем одномерные спектральные задачи

$$\begin{aligned} X'' &= -\alpha^2 X, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad X(0) = X'(1) + \sigma X(1) = 0, \quad (\text{XVI}') \\ Y'' &= -\beta^2 Y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad Y'(0) = Y(1) = 0, \quad (\text{XVI}'') \end{aligned}$$

$$\lambda = \alpha^2 + \beta^2.$$

Пусть последовательности

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2, \dots \text{ и } \beta_1^2, \beta_2^2, \dots, \beta_n^2, \dots$$

составляют спектры задач (XVI') и (XVI''), а ортогональные в  $L_2(0, 1)$  системы функций

$$X_1(x), \dots, X_n(x), \dots \quad Y_1(y), \dots, Y_n(y), \dots$$

— соответствующие системы собственных функций.

Функции

$$u_{nk}(x, y) = X_n(x)Y_n(y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad n, k = 1, 2, \dots$$

образуют полную ортогональную в  $L_2(0 < x < 1, 0 < y < 1)$  систему собственных функций задачи (XVI), отвечающих соответствующей системе собственных функций

$$\lambda_{nk} = \alpha_n^2 + \beta_k^2, \quad n, k = 1, 2, \dots$$

В случае когда  $\Omega$  есть круг  $O_R^0$  радиуса  $R$  с центром в начале координат, задача (IX) (ее удобно переписать в полярных координатах:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) имеет вид

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = -\lambda v, & r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v|_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (\text{XVII})$$

Считая, что  $v(r, \varphi) = Z(r) \cdot \Phi(\varphi)$ , после разделения переменных для функций  $Z(r)$  и  $\Phi(\varphi)$  получим задачи

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (\text{XVIII})$$

$$r^2 Z''(r) + rZ'(r) + (\lambda r^2 - \mu^2)Z(r) = 0, \quad Z(R) = 0, \quad (\text{XIX})$$

в которых  $\mu$  — постоянная. Из (XVIII) следует, что

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_m = m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ \Phi(\varphi) &= \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \quad \text{при } m = 1, 2, \dots, \\ \Phi(\varphi) &= \Phi_0(\varphi) = A_0 \quad \text{при } m = 0,\end{aligned}$$

где  $A_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , и  $B_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (XIX) при  $\mu = \mu_m = m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , имеет вид

$$Z_m(r) = C_m J_m(\sqrt{\lambda} r) + D_m N_m(\sqrt{\lambda} r), \quad (\text{XX})$$

где  $C_m$  и  $D_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , — произвольные постоянные, а  $J_m(\xi)$  и  $N_m(\xi)$  — цилиндрические функции Бесселя и Неймана (см. [4]), но в интересующем нас случае, когда  $r \in [0, R]$ ,

$$Z_m(r) = C_m J_m(\sqrt{\lambda} r), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

поскольку  $|N_m(\sqrt{\lambda} r)| \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ .

Если учесть граничное условие в (XIX), то

$$Z_m(r) = Z_{m,k}(r) = C_{m,k} \cdot J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r\right), \quad k, m = 1, 2, \dots,$$

где  $\mu_k^{(m)}$  —  $k$ -й положительный нуль функции  $J_m(\xi)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ .

Таким образом, функция  $A_0 \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r\right)$  есть нетривиальное решение задачи (XVII) при  $\lambda = \lambda_k^{(0)} = \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2$  для всех  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а функции  $(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \cdot J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r\right)$  при любых постоянных  $A_m$  и  $B_b$  являются решениями задачи (XVII) при

$$\lambda = \lambda_k^{(m)} = \left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}\right)^2, \quad k, m = 1, 2, \dots.$$

Весь спектр задачи (XVIII) состоит из собственных значений

$$\lambda = \lambda_k^{(m)} = \left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}\right)^2, \quad k, m = 1, 2, \dots. \quad (\text{XXI})$$

Каждое собственное значение  $\lambda_k^{(0)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , однократное, а соответствующая ему собственная функция

$$J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (\text{XXII})$$

Каждое собственное значение  $\lambda_k^{(m)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , при  $m \geq 1$  двукратно, соответствующие ему линейно независимые собственные функции есть

$$J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right) \cos m\varphi \quad \text{и} \quad J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right) \sin m\varphi. \quad (\text{XXII}')$$

Система функций (XXII) и (XXII') образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве  $L_2(Q_R^0)$ . Это означает, что для любой функции

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = f(r, \varphi) \in L_2(Q_R^0)$$

имеет место сходящееся в  $L_2(Q_R^0)$  разложение в ряд Фурье

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(r, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right) + \\ &+ \sum_{\substack{m=1, \\ k=1}}^{\infty} (A_{mk} \cos m\varphi + B_{mk} \sin m\varphi) J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right), \end{aligned} \quad (\text{XXIII})$$

в котором коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned} A_{0k} &= \frac{\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right) d\varphi}{2\pi \int_0^R r \left(J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right)\right)^2 dr}, \quad k \geq 1, \\ A_{mk} &= \frac{\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right) \cos m\varphi d\varphi}{\pi \int_0^R r \left(J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)\right)^2 dr}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

$$B_{mk} = \frac{\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_m \left( \frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \sin m\varphi d\varphi}{\pi \int_0^R r \left( J_m \left( \frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \right)^2 dr}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 1.$$

Напомним, что скалярное произведение в  $L_2(Q_R^0)$  имеет вид

$$(f, g)_{L_2(Q_R^0)} = \iint_{Q_R^0} f(x, y) g(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r, \varphi) g(r, \varphi) r dr.$$

При каждом  $m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , система функций

$$J_m \left( \frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве  $\tilde{L}_2(0, R)$ , скалярное произведение в котором определяется формулой

$$(f, g)_{\tilde{L}_2(0, R)} = \int_0^R r f(r) g(r) dr.$$

Это означает, что для любой функции  $f(r) \in \tilde{L}_2(0, R)$  при любом целом  $m \geq 0$  имеет место сходящееся в  $\tilde{L}_2(0, R)$  разложение в ряд Фурье

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(m)} J_m \left( \frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right), \quad (\text{XXIV})$$

коэффициенты Фурье в котором

$$C_k^{(m)} = \frac{\int_0^R r f(r) J_m \left( \frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) dr}{\int_0^R r \left( J_m \left( \frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \right)^2 dr}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

**З а м е ч а н и е.** При решении задач, связанных с функциями Бесселя, используется равенство

$$\Delta \left( J_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} r \right) \right) = - \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} \right)^2 J_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{R} r \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

В качестве примера одномерной спектральной задачи рассмотрим следующую задачу:

$$-u''(x) = \lambda^2 u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (\text{XXV})$$

$$u(0) = 0, \quad (\text{XXVI})$$

$$u'(1) + u(1) = 0. \quad (\text{XXVII})$$

Если  $\lambda = 0$ , то  $u(x) = C_1 + C_2 x$ . При выполнении условий (XXVI) и (XXVII) получаем

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 + C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $C_1 = C_2 = 0$ ,  $u(x) \equiv 0$ , т. е.  $\lambda^2 = 0$  не является собственным значением задачи.

Пусть  $\lambda \neq 0$ . Тогда любое решение уравнения (XXV) определяется формулой

$$u(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Используя условия (XXVI) и (XXVII), получаем

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ \lambda C_2 \cos \lambda + C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

Это означает, что  $\lambda^2$  является собственным значением задачи тогда и только тогда, когда  $\lambda$  — ненулевой корень уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = -\lambda, \quad (\text{XXVIII})$$

т. е. числа  $\lambda_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и только эти числа являются собственными значениями задачи. Здесь  $\lambda_k$  —  $k$ -й положительный корень уравнения (XXVIII). Соответствующие собственные функции при этом имеют вид

$$u_k(x) = \sin \lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots.$$

**Пример 1.** Найдем решение следующей задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} + u - xt + 2 \cos x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2}t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Δ 1. Поскольку условия (3) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию  $g(x, t)$ , удовлетворяющую этим условиям. В данной задаче можно взять, например,  $g(x, t) = xt$ .

2. Рассмотрим новую искомую функцию  $u(x, t)$ :

$$v(x, t) = u(x, t) - g(x, t),$$

$$v(x, t) = u(x, t) - xt \quad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции  $v(x, t)$ :

$$v_{tt} = v_{xx} + v + 2 \cos x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad (6)$$

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Решение задачи (5), (6), (7) будем искать в виде

$$v(x, t) = \sum_k T_k(t) v_k(x),$$

где  $v_k(x)$  — собственные функции следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} v''(x) = -\lambda^2 v(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ v'(0) = 0; \\ v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

3. Решим задачу (8). Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда  $v(x) = C_1 x + C_2$ ,  $v'(0) = C_1 = 0$ ,  $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = 0$ . Таким образом,  $v(x) \equiv 0$  и, следовательно,  $\lambda^2 = 0$  не является собственным числом задачи (8).

Пусть  $\lambda \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \\ v'(x) &= -\lambda C_1 \sin \lambda x + \lambda C_2 \cos \lambda x. \end{aligned}$$

Из условия  $v'(0) = 0$  следует, что  $\lambda C_2 = 0$ , откуда  $C_2 = 0$ , так как  $\lambda \neq 0$ . Поэтому  $v(x) = C_1 \cos \lambda x$ .

Из условия  $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  получаем  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0$ . Отсюда  $\frac{\pi}{2}\lambda_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda_k = 1 + 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $v_k(x) = \cos \lambda_k x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Оставляя среди найденной системы функций  $\{v_k(x)\}$  только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашей задаче оператор Штурма–Лиувилля имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2 = (1 + 2k)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$v_k = \cos \lambda_k x, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (10)$$

4. Таким образом, решение задачи (5), (6), (7) представляется в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) v_k(x), \quad (11)$$

где функции  $v_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , определены формулами (10), а функции  $T_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , найдем, подставляя в уравнение (5) функцию  $v(x, t)$ , определяемую (формально написанным) рядом (11), и используя условия (6).

Для этого представим правые части уравнения (5) и условия (6) рядом Фурье по системе (11). Получим

$$2 \cos x = 2v_0(x), \quad (12)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(x), \quad \text{где} \quad (13)$$

$$a_k = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) v_k(x) dx}{\int_0^{\pi/2} v_k^2(x) dx} = \frac{4}{\pi \lambda_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (14)$$

5. Заменяя в уравнении (5) функцию  $v(x, t)$  рядом (11), а также используя равенство (12) и равенство  $v''_k(x) = -\lambda_k^2 v_k(x)$ , получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) v_k(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 T_k(t) v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) v_k(x) + 2v_0(x). \quad (15)$$

Используя условия (6) и равенство (13), из формулы (11) находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) v_k(x) = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} T'_k(0) v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(x). \quad (16)$$

Из равенств (15) и (16) получаем следующие задачи Коши для функций  $T_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{cases} T_k''(t) + (\lambda_k^2 - 1)T_k(t) = 0, \\ T_k(0) = 0, \quad T'_k(0) = a_k, \quad \text{если } k = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} T_0''(t) + (\lambda_0^2 - 1)T_0(t) = 2, \\ T_0(0) = 0, \quad T'_0(0) = a_0. \end{cases} \quad (18)$$

Решим задачу (17). Полагая

$$\mu_k^2 = \lambda_k^2 - 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

получим

$$T_k(t) = \frac{a_k}{\mu_k} \sin \mu_k t, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (20)$$

Решим задачу (18). Учитывая, что  $\lambda_0^2 - 1 = 0$  и  $a_0 = \frac{4}{\pi}$ , получаем

$$T_0(t) = t^2 + \frac{4}{\pi}t. \quad (21)$$

Таким образом, из (10), (11), (20), (21) следует, что функция

$$v(x, t) = \left( t^2 + \frac{4}{\pi}t \right) \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k} \sin \mu_k t \cdot \cos \lambda_k x,$$

где  $\lambda_k$ ,  $a_k$  и  $\mu_k$  определены формулами (9), (14) и (19) соответственно, есть решение задачи (5), (6), (7). Отсюда, используя равенство (4), заключаем, что функция

$$u(x, t) = xt + v(x, t) = xt + \left( t^2 + \frac{1}{\pi}t \right) \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k} \sin \mu_k t \cdot \cos \lambda_k x$$

есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

**Пример 2.** Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} 2u_{tt} &= 20u_{xx} + 13u - 5e^{-2t} + x(x^2 - 4\pi^2) \sin 4t, \\ t > 0, \quad 0 < x < 2\pi; \end{aligned} \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 3 \sin \frac{x}{2} + 1, \quad u_t|_{t=0} = -2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi; \quad (2)$$

$$u|_{x=\pi} = u|_{x=2\pi} = e^{-2t}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

△ 1. Найдем какую-нибудь функцию  $g(x, t)$ , удовлетворяющую условиям (3). В данном случае можно взять, например,

$$g(x, t) = e^{-2t}.$$

2. Введем новую искомую функцию  $v(x, t)$ :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - g(x, t), \\ v(x, t) &= u(x, t) - e^{-2t}, \end{aligned} \quad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции  $v(x, t)$ :

$$2v_{tt} = 20v_{xx} + 13v + x(x^2 - 4\pi^2) \sin 4t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2\pi; \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = 3 \sin \frac{x}{2}, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi; \quad (6)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=2\pi} = 0, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Решение задачи (5), (6), (7) будем искать в виде

$$v(x, t) = \sum_k T_k(t) v_k(x),$$

где функции  $v_k(x)$  — собственные функции следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} v''(x) = -\lambda^2 v(x), & 0 < x < 2\pi; \\ v(0) = 0, \\ v(2\pi) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

3. Решая задачу (8), найдем следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$v_k(x) = \sin \frac{kx}{2}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

4. Таким образом, решение задачи (5), (6), (7) будем искать в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{kx}{2}, \quad (11)$$

где функции  $T_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , найдем из уравнения (5), используя формулу (11) и условия (6).

Для этого разложим правые части уравнения (5) и условий (8) в ряды Фурье по системе  $\{v_k(x)\}$ :

$$\begin{aligned} 3 \sin \frac{x}{2} &= 2v_1(x), \\ x(x^2 - 4\pi^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$a_k = \frac{\int_0^{2\pi} x(x^2 - 4\pi^2) v_k(x) dx}{\int_0^{2\pi} v_k^2(x) dx} = \frac{96}{k^3} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

и, следовательно,

$$x(x^2 - 4\pi^2) = \sin 4t \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x). \quad (14)$$

5. Заменяя в уравнении (5) функцию  $v(x, t)$  рядом (11) и учитывая равенство (14), получаем

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) v_k(x) &= -20 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 T_k(t) v_k(x) + \\ &+ 13 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x) + \sin 4t \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (11), (12) и (6) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) v_k(x) = 3v_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) v_k(x) = 0. \quad (16)$$

Из равенства (15) получаем следующее уравнение для функций  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$2T_k''(t) + (20\lambda_k^2 - 13)T_k(t) = a_k \sin 4t, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или

$$T_k''(t) + \frac{5k^2 - 13}{2} T_k(t) = \frac{a_k}{2} \sin 4t, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (17)$$

Обозначим

$$a_k = \frac{5k^2 - 13}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

и заметим, что  $\alpha_3 = 16$  (т. е. случай при  $k = 3$ ), получаем из (17) и (16) следующие задачи Коши для функций  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{cases} T_k''(t) + \alpha_k T_k(t) = \frac{a_k}{2} \sin 4t; \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad \text{если } k = 2, 4, 5, 6, \dots; \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} T_1''(t) - 4T_1(t) = -48 \sin 4t; \\ T_1(0) = 3, \quad T_1'(0) = 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} T_3''(t) + 16T_3(t) = -\frac{16}{9} \sin 4t; \\ T_3(0) = 0, \quad T_3'(0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решая задачу (19), находим

$$T_k(t) = \frac{a_k}{2(\alpha_k - 16)} \left( \sin 4t - \frac{4}{\sqrt{\alpha_k}} \sin \sqrt{\alpha_k} t \right), \quad k = 2, 4, 5, \dots,$$

или

$$T_k(t) = \frac{a_k}{5(k^2 - 9)} \left( \sin 4t - \frac{4}{\sqrt{\alpha_k}} \sin \sqrt{\alpha_k} t \right), \quad k = 2, 4, 5, \dots \quad (22)$$

Решая задачи (20) и (21), получаем, что

$$T_1(t) = \frac{12}{5} \sin 4t + 3 \operatorname{ch} 2t - \frac{24}{5} \operatorname{sh} 2t \quad (23)$$

и

$$T_3(t) = \frac{1}{18} (4t \cos 4t - \sin 4t) \quad (24)$$

соответственно.

Таким образом, из (11), (22), (23), (24) следует, что функция

$$v(x, t) = \left( \frac{12}{5} \sin 4t + 3 \operatorname{ch} 2t - \frac{24}{5} \operatorname{sh} 2t \right) \sin \frac{x}{2} + \\ + \frac{1}{18} (4t \cos 4t - \sin 4t) \sin \frac{3x}{2} + \\ + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq 3}}^{\infty} \frac{a_k}{5(k^2 - 9)} \left( \sin 4t - \frac{4}{\sqrt{\alpha_k}} \sin \sqrt{\alpha_k} t \right) \sin \frac{kx}{2},$$

где  $a_k$  и  $\alpha_k$  определены формулами (13) и (18) соответственно, есть решение задачи (5), (6), (7). Тогда из (4) заключаем, что функция

$$u(x, t) = v(x, t) + e^{-2t},$$

где функция  $v(x, t)$  определена выше, есть решение задачи (1), (2), (3).  $\blacktriangle$

**Пример 3.** Найдем решение следующей задачи:

$$u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x} \sin 3x, \quad (1) \\ t > 0, \quad 0 < x < \pi;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

$\Delta$  Найдем какую-нибудь функцию, удовлетворяющую условиям (3). В данном случае можно взять, например,

$$g(x, t) = xt.$$

Введем новую искомую функцию  $v(x, t)$ :

$$v(x, t) = u(x, t) - g(x, t), \\ v(x, t) = u(x, t) - xt, \quad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции  $v(x, t)$ :

$$v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x - e^{-x} \sin 3x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi; \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad (6)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Решение задачи (5), (6), (7) будем искать в виде

$$v(x, t) = \sum_k T_k(t) v_k(x),$$

где функции  $v_k(x)$  — собственные функции следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} v''(x) + 2v(x) = -\lambda^2 v(x), & 0 < x < 2\pi; \\ v(0) = 0, \\ v(\pi) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решая задачу (8), получаем следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2 = k^2 + 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$v_k(x) = e^{-x} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

Таким образом, решение задачи (5), (6), (7) будем искать в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e^{-x} \sin kx, \quad (11)$$

где функции  $T_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , найдем, используя равенство (11), уравнение (5) и условие (6).

Заметив, что  $e^{-x} \sin 3x = v_3(x)$ , и используя равенство  $v_k''(x) + 2v_k'(x) = -\lambda_k^2 v_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) v_k(x) - 7 \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) v_k(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \lambda_k^2 v_k(x) - v_3(x), \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) v_k(x) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) v_k(x) = 0. \quad (13)$$

Из соотношений (12) и (13) получаем следующие задачи для функций  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{cases} T_3''(t) - 7T_3'(t) = -\lambda_3^2 T_3(t) - 1, \\ T_3(0) = 0, \quad T_3'(0) = 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} T_k''(t) - 7T_k'(t) = -\lambda_k^2 T_k(t), \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \quad k = 1, 2, 4, \dots. \end{cases} \quad (15)$$

Решая задачу (14), получаем

$$T_k(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{10}. \quad (16)$$

Решением задачи (15) является функция

$$T_k(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, 4, \dots . \quad (17)$$

Таким образом, из (11), (15), (17) следует, что функция

$$v(x, t) = T_3(t)v_3(t) = \left( \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{10} \right) e^{-x} \sin 3x$$

есть решение задачи (5), (6), (7). Поэтому из равенства (4) заключаем, что функция

$$u(x, t) = xt + \left( \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{10} \right) e^{-x} \sin 3x$$

есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

**Пример 4.** Найдем решение следующей задачи:

$$u_{tt} - u_{xx} = 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1; \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2)$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

△ Подберем сначала такую функцию  $g$ , чтобы она удовлетворяла граничным условиям (3). Пусть, например,  $g = xt$ . Тогда  $g_{tt} - g_{xx} = 0$ ,  $g|_{t=0} = 0$ ,  $g_t|_{t=0} = x$ . Следовательно, функция

$$v(x, t) = u(x, t) - xt \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} - v_{xx} = 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

и нулевым начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения  $v_{tt} - v_{xx} = 0$  при условиях (6), (7), положим

$v(x, t) = X(x)T(t)$ . Приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Решая эту задачу, находим ее собственные значения  $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x. \quad (8)$$

Решение задачи (5), (6), (7) ищем в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x, \quad (9)$$

где

$$T_n(0) = 0, \quad T'_n(0) = 0. \quad (10)$$

Подставляя  $v(x, t)$  из (9) в (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t)) \sin \lambda_n x = 2t. \quad (11)$$

Для нахождения функций  $T_n(t)$  разложим единицу в ряд Фурье по системе функций (8) на интервале  $(0, 1)$ :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x. \quad (12)$$

Так как

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad a_n = \int_0^1 \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n}$$

и из (11) и (12) получаем

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n}. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} + A \sin \lambda_n t + B \cos \lambda_n t.$$

Используя условие (10), получаем  $B = 0$ ,  $A = -\frac{4}{\lambda_n^4}$ . Подставляя

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} - \frac{4t}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n t$$

в формулу (9) и используя (4), находим искомое решение задачи (1), (2), (3):

$$u = xt + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} (\lambda_n t - \sin \lambda_n t) \sin \lambda_n x,$$

где  $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . ▲

**Пример 5.** Найдем решение следующей задачи:

$$u_t - u_{xx} = t(x+1), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1; \quad (1)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2)$$

и граничных условиях

$$u_x|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t^2, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

△ Функция  $g = xt^2$  удовлетворяет краевым условиям (3), уравнению  $g_t - g_{xx} = 2xt$ . Поэтому функция

$$v = u - xt^2 \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению

$$v_t - v_{xx} = (1-x)t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

и условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения  $v_t - v_{xx} = 0$  при условиях (6), положим  $v(x, t) = X(x)T(t)$ . Получим задачу Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

собственными значениями которой являются числа  $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а собственными функциями — функции

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x. \quad (7)$$

Решение задачи (5), (6) ищем в виде

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \lambda_n x. \quad (8)$$

Подставляя  $v(x, t)$  из (8) в уравнение (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t)) \cos \lambda_n x = (1-x)t. \quad (9)$$

Разложим функцию  $(1-x)$  в ряд Фурье по системе функций (7) на интервале  $(0, 1)$ :

$$1-x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x. \quad (10)$$

Так как

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-x) \cos \lambda_n x \, dx = \frac{2}{\lambda_n^2},$$

то из (9) и (10) находим

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{2t}{\lambda_n^2}. \quad (11)$$

Решением уравнения (11) при условии  $T_n(0) = 0$  является функция

$$T_n(t) = 2\lambda_n^{-6} (e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1). \quad (12)$$

Из (4), (8) и (12) находим решение задачи (1), (2), (3):

$$u = xt^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^6} (e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1) \cos \lambda_n x,$$

где  $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, \dots$

▲

В примерах 6 и 7  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

**Пример 6.** Решить смешанную задачу

$$u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t} \cdot f(r) \sin \varphi, \quad t > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \quad (13)$$

$$u|_{t=0} = 3J_1 \left( \frac{\mu_1^{(1)}}{3} r \right) \sin \varphi, \quad r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (14)$$

$$u|_{r=3} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t > 0, \quad (15)$$

где функция  $f(r) \in C^1[0, 3]$ ,  $f(3) = 0$ ,  $\mu_1^{(1)}$  — положительный нуль функции Бесселя  $J_1(\xi)$ .

△ Так как условие (15) является однородным, то ищем решение задачи (13), (14), (15) в виде ряда (XXIII) с зависящими от  $t$

коэффициентами  $A_{mk}(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m \geq 0$ ,  $B_{mk}(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m \geq 1$ .

Заметив, что правые части уравнения (13) и условия (14) имеют вид  $e^{-2t}f(r)\sin\varphi$  и  $3J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}\right)\sin\varphi$  соответственно, из ортогональности системы собственных функций задачи (XVII) заключаем, что в ряде (XXIII) следует положить коэффициенты  $A_{mk}(t) \equiv 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, m \geq 0$ , и коэффициенты  $B_{mk}(t) \equiv 0$  при всех  $k = 1, 2, \dots, m \neq 1$ , т. е. следует искать решение задачи в виде однократного ряда, имеющего после переобозначения  $B_{1k}(t) = T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , вид

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right). \quad (16)$$

Разложим функцию  $f(r)$  в ряд Фурье (XXIV) по системе функций  $J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right), \quad (17)$$

где

$$a_k = \frac{\int_0^3 f(r) J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) r dr}{\int_0^3 \left(J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right)\right)^2 r dr}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (18)$$

Найдем функции  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из уравнения (13), используя равенство (16) и условие (14).

Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(t) \sin \varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) &= \\ &= 9 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left( -\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}\right)^2 \right) \sin \varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) - \end{aligned} \quad (19)$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) + e^{-2t} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right); \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) = 3J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \sin \varphi. \quad (20)$$

Здесь использовано равенство (17), а также равенство (см. (§ 20))

$$\Delta \left( \sin \varphi J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} r \right) \right) = - \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} \right)^2 \sin \varphi J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} r \right), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Из соотношений (19) и (20) получаем

$$T'_k(t) = - \left[ 9 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} \right)^2 + 2 \right] T_k(t) + a_k e^{-2t}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (21)$$

$$T_1(0) = 3, \quad (22)$$

$$T_k(0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots. \quad (10')$$

Обозначим

$$\gamma_k = 9 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} \right)^2 + 2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

и решим задачу (21), (10'). Заметив, что  $\gamma_k > 2$  для всех  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , получаем, что

$$T_k(t) = \frac{a_k}{\gamma_k - 2} (e^{-2t} - e^{-\gamma_k t}), \quad k = 2, 3, \dots. \quad (24)$$

Решая задачу (21), (22), находим

$$T_1(t) = \left( \left( 3 - \frac{a_1}{\gamma_1 - 2} \right) e^{-\gamma_1 t} + \frac{a_1}{\gamma_1 - 2} e^{-2t} \right). \quad (25)$$

Из равенств (16), (24), (25) следует, что функция

$$u(r, \varphi, t) = \left( \left( 3 - \frac{a_1}{\gamma_1 - 2} \right) e^{-\gamma_1 t} + \frac{a_1}{\gamma_1 - 2} e^{-2t} \right) \sin \varphi J_1 \left( \frac{\mu_1^{(1)}}{3} r \right) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma_k - 2} (e^{-2t} - e^{-\gamma_k t}) \sin \varphi \cdot J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} r \right),$$

где  $a_k$  и  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определены формулами (18) и (23) соответственно, есть решение задачи (13), (14), (15).  $\blacktriangle$

**Пример 7.** Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = \Delta u + 2xy, \quad t > 0, \quad r < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = x^2 + y^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (2)$$

$$u|_{r=1} = 1, \quad t > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3)$$

Δ Так как условие (3) является неоднородным, то подберем какую-нибудь функцию  $g = g(x, y, t)$ , удовлетворяющую условию (3). В данном случае можно взять, например,  $g(x, y, t) = 1$ .

Введем новую искомую функцию  $v(x, y, t)$  такую, что

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= u(x, y, t) - g(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= u(x, y, t) - 1, \end{aligned} \quad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции  $v(x, y, t)$ :

$$v_{tt} = \Delta v + r^2 \sin 2\varphi, \quad t > 0, \quad r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = r^2 - 1, \quad v_t|_{t=0} = 0; \quad (6)$$

$$v|_{r=1} = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7)$$

Из вида функций  $r^2 \sin 2\varphi$  и  $r^2 - 1$ , стоящих в правых частях равенств (5) и (6), следует, что решение этой задачи стоит искать в виде двойного ряда (XXIII), в котором коэффициенты  $A_{mk}(t) \equiv 0$  для  $m = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$ , и  $B_{mk}(t) \equiv 0$  для  $m \neq 2, k = 1, 2, \dots$ , т. е. в виде суммы двух однократных рядов:

$$v(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r). \quad (8)$$

Разложим функцию  $r^2$  в ряд Фурье по системе функций  $J_2(\mu_k^{(2)} r)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а функцию  $(r^2 - 1)$  — по системе функций  $J_0(\mu_k^{(0)} r)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Получим

$$r^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_2(\mu_k^{(2)} r), \quad (9)$$

где

$$b_k = \frac{\int_0^1 r^2 J_2(\mu_k^{(2)} r) r dr}{\int_0^1 (J_2(\mu_k^{(2)} r))^2 r dr}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (10)$$

$$r^2 - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k^{(0)} r), \quad (11)$$

где

$$C_k = \frac{\int_0^1 (r^2 - 1) J_0(\mu_k^{(0)} r) r dr}{\int_0^1 (J_0(\mu_k^{(0)} r))^2 r dr}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (12)$$

Найдем функции  $T_k(t)$  и  $H_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из уравнения (5), используя равенство (8) и условия (6).

Из (9) и (11) и равенств

$$\begin{aligned} \Delta(\sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r)) &= -(\mu_k^{(2)})^2 \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta(J_0(\mu_k^{(0)} r)) &= -(\mu_k^{(0)})^2 J_0(\mu_k^{(0)} r), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k''(t) J_0(\mu_k^{(0)} r) &= \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) (\mu_k^{(0)})^2 \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t) (\mu_k^{(0)})^2 J_0(\mu_k^{(0)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r); \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(0) J_0(\mu_k^{(0)} r) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k^{(0)} r); \quad (14) \end{aligned}$$

$$v_t|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k'(0) J_0(\mu_k^{(0)} r) = 0. \quad (15)$$

Из равенств (13), (14), (15) получаем

$$T_k''(t) = -(\mu_k^{(2)})^2 T_k(t) + b_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (16)$$

$$H_k''(t) = -(\mu_k^{(0)})^2 H_k(t), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (17)$$

$$T_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

$$H_k(0) = C_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (19)$$

$$T'_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (20)$$

$$H'_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (21)$$

Решая задачу (16), (18), (20), получаем

$$T_k(t) = \frac{b_k}{\left(\mu_k^{(2)}\right)^2} (1 - \cos \mu_k^{(2)} t), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (22)$$

Решая задачу (17), (19), (21), получаем

$$H_k(t) = c_k \cos \mu_k^{(0)} t, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (23)$$

Из равенств (8), (22), (23) следует, что функция

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\left(\mu_k^{(2)}\right)^2} (1 - \cos \mu_k^{(2)} t) \sin 2\varphi J_2(\mu_k^{(2)} r) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \mu_k^{(0)} t J_0(\mu_k^{(0)} r), \end{aligned}$$

где  $b_k$  и  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  определены формулами (10) и (12) соответственно, есть решение задачи (5), (6) и (7).

Следовательно, функция  $u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi, t) + 1$ , где функция  $v(r, \varphi, t)$  определена выше, есть решение задачи (1), (2), (3).  $\blacktriangle$

**Пример 8.** Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} u + e^{-t} J_2(\mu_1^{(2)} x), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1; \quad (2)$$

$$|u(0, t)| < +\infty, \quad u|_{r=1} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

где  $\mu_1^{(2)}$  — положительный нуль функции Бесселя  $J_2(\xi)$ .

$\triangle$  Ищем решение задачи (1), (2), (3) в виде

$$u(x, t) = \sum_k T_k(t) u_k(x),$$

где  $u_k(x)$  — собственные функции следующей задачи:

$$\begin{cases} L(u(x)) = -\lambda^2 u(x), & 0 < x < 1, \\ |u(0)| < +\infty, \\ u(1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{где } L(u(x)) = u''(x) + \frac{1}{x} u(x) - \frac{4}{x^2} u(x).$$

Решим задачу (4). Преобразовывая уравнение, получаем

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (\lambda^2 x^2 - 4)u(x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (5)$$

Это есть уравнение (XIX) при  $\mu^2 = 4$ . Значит, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u(x) = C_1 J_2(\lambda x) + C_2 N_2(\lambda x).$$

Так как  $|u(0)| < +\infty$ , то  $u(x) = C_1 J_2(\lambda x)$ . Учитывая условие  $u(1) = 0$ , получаем, что  $J_2(\lambda) = 0$ . Отсюда имеем, что  $\lambda = \mu_k^{(2)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\mu_k^{(2)}$  —  $k$ -й положительный нуль функции  $J_2(\xi)$ .

Следовательно, собственные функции и собственные значения задачи (4) это:

$$\begin{aligned} u_k(x) &= J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \lambda_k &= \mu_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) u_k(x), \quad (7)$$

где функции  $u_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определены формулами (6), а функции  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , найдем, подставляя в уравнение (1) функцию  $u(x, t)$ , определяемую рядом (7), и используя условие (2).

Заметив, что правая часть уравнения (1)  $e^{-t} \cdot J_1\left(\mu_1^{(2)} x\right) = e^{-t} \cdot u_1(x)$ , получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) L(u_k(x)) + e^{-t} \cdot u_1(x).$$

Отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) u_k(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 T_k(t) u_k(x) + e^{-t} \cdot u_1(x). \quad (8)$$

Используя условия (2), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) u_k(x) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) u_k(x) = 0. \quad (9)$$

Из равенств (8) и (9) получаем следующие задачи Коши для функций  $T_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = 0, \\ T_k(0) = T'_k(0) = 0, \quad \text{если } k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\begin{cases} T_1''(t) + \lambda_1^2 T_1(t) = e^{-t}, \\ T_1(0) = T'_1(0) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решая задачу (10), получаем

$$T_k(t) = 0, \quad k = 2, 3, \dots . \quad (12)$$

Решая задачу (11), получаем (учитывая, что  $\lambda_1 = \mu_1^{(2)}$ ), что

$$T_k(t) = \frac{1}{1 + (\mu_1^{(2)})^2} \left[ e^{-t} - \cos(\mu_1^{(2)} t) + \frac{1}{\mu_1^{(2)}} \sin(\mu_1^{(2)} t) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, из (7), (6), (12) и (13) следует, что функция

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{1}{1 + (\mu_1^{(2)})^2} \left[ e^{-t} - \cos(\mu_1^{(2)} t) + \frac{1}{\mu_1^{(2)}} \sin(\mu_1^{(2)} t) \right] \cdot J_2(\mu_1^{(2)} x) \end{aligned}$$

есть решение задачи (1), (2) и (3). ▲

**20.1.** Решить задачу о колебании струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение  $u_0$  имеет форму:

- 1) синусоиды  $u_0(x) = A \sin \frac{\pi n x}{l}$  ( $n$  целое);
- 2) параболы, осью симметрии которой служит прямая  $x = \frac{l}{2}$ , а вершиной — точка  $M\left(\frac{l}{2}, h\right)$ ;
- 3) ломаной  $OAB$ , где  $O(0, 0)$ ,  $A(c, h)$ ,  $B(l, 0)$ ,  $0 < c < l$ . Рассмотреть случай  $c = \frac{l}{2}$ .

**20.2.** Решить задачу о колебании струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое ( $u_0 = 0$ ), а начальная скорость  $u_1$  задается формулой:

- 1)  $u_1(x) = v_0 = \text{const}$ ,  $x \in [0, l]$ ;
- 2)  $u_1(x) = \begin{cases} v_0, & \text{если } x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & \text{если } x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$  где  $0 \leq \alpha < \beta \leq l$ ;

$$3) u_1(x) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi(x - x_0)}{2\alpha}, & \text{если } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \\ 0, & \text{если } x \notin [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \end{cases}$$

где  $0 \leq x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \leq l$ .

**20.3.** Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев:

- 1) один конец стержня ( $x = 0$ ) жестко закреплен, а другой конец ( $x = l$ ) свободен;
- 2) оба конца стержня свободны;
- 3) один конец стержня ( $x = l$ ) закреплен упруго, а другой конец ( $x = 0$ ) свободен.

**20.4.** Найти продольные колебания стержня, если один его конец ( $x = 0$ ) жестко закреплен, а к другому концу ( $x = l$ ) приложена сила  $P$  (в момент времени  $t = 0$  сила перестает действовать).

**20.5.** Найти силу тока  $i(x, t)$  в проводе длины  $l$ , по которому течет переменный ток, если утечка тока отсутствует и омическим сопротивлением можно пренебречь. Предполагается, что начальный ток в проводе (при  $t = 0$ ) равен нулю, а начальное напряжение задается формулой  $v|_{t=0} = E_0 \sin \frac{\pi x}{2l}$ . Левый конец провода ( $x = 0$ ) изолирован, а правый конец ( $x = l$ ) заземлен.

**20.6.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + 2b$  ( $b = \text{const}$ ,  $0 < x < l$ );  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$  ( $0 < x < \pi$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ .

**20.7.** Решить задачу о колебаниях однородной струны ( $0 < x < l$ ), закрепленной на концах  $x = 0$  и  $x = l$  под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью  $\rho(x, t) = A\rho \sin \omega t$ ,  $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Начальные условия — нулевые.

**20.8.** Решить задачу о продольных колебаниях стержня, подвешенного за конец  $x = 0$  (конец  $x = l$  свободен), совершаемых под влиянием силы тяжести.

**20.9.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{xx} = u_{tt}$ ,  $0 < x < l$ ;  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = t$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_{xx} = u_{tt}$ ,  $0 < x < 1$ ;  $u|_{x=0} = t + 1$ ,  $u|_{x=1} = t^2 + 2$ ,  $u|_{t=0} = x + 1$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**20.10.** Решить задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на одном конце ( $x = 0$ ) и подверженной на другом конце ( $x = l$ ) действию возмущающей силы, которая вызывает смещение, равное  $A \sin \omega t$ , где  $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). В момент времени  $t = 0$  смещения и скорости равны нулю.

**20.11.** Пусть стержень длиной  $l$ , конец которого  $x = 0$  жестко закреплен, находится в состоянии покоя. В момент  $t = 0$  к его свободному концу  $x = l$  приложена сила  $Q = \text{const}$ , действующая вдоль стержня. Найти смещение  $u(x, t)$  стержня.

**20.12.** Решить задачу о продольных колебаниях однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила  $Q = A \sin \omega t$ , направление которой совпадает с осью стержня  $\left(\omega \neq \frac{a\pi(2k+1)}{2l}, k = 0, 1, 2, \dots\right)$ .

**20.13.** Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны длиной  $l$ , закрепленной на концах и колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Начальные условия нулевые.

**20.14.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} - 4u$  ( $0 < x < 1$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 - x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$  ( $0 < x < \pi$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \pi x - x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 3)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx}$  ( $0 < x < \pi$ );  $u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 4)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$  ( $0 < x < 1$ );  $u|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=1} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 1 - x$ ;
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + u$  ( $0 < x < 2$ );  $u|_{x=0} = 2t$ ,  $u|_{x=2} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + u$  ( $0 < x < l$ );  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=1} = t$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = \frac{\pi}{l}$ .

**20.15.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + u$  ( $0 < x < \pi$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \sin 2x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1$  ( $0 < x < 1$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ;  
 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ .

**20.16.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x$  ( $0 < x < \pi/2$ );  
 $u_x|_{x=0} = 2t$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \pi t$ ;  $u|_{t=0} = \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = 2x$ ;

- 2)  $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x)$  ( $0 < x < \pi/2$ );  
 $u|_{x=0} = 3$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + t$ ;  $u|_{t=0} = 3$ ,  $u_t|_{t=0} = x + \sin x$ ;
- 3)  $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2}$  ( $0 < x < \pi$ );  
 $u_x|_{x=0} = t + 1$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi(t + 1)$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = x$ ;
- 4)  $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x} \sin 3x$  ( $0 < x < \pi$ );  
 $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi t$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 5)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1 - 4t) + \cos 3x$  ( $0 < x < \pi/2$ );  
 $u_x|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi t}{2}$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x$  ( $0 < x < \pi$ );  
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 7)  $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x \cos x$  ( $0 < x < \pi/2$ );  
 $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 8)  $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t$  ( $0 < x < \pi$ );  
 $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi t$ ;  $u|_{t=0} = e^{-x} \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ .

**20.17.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x - \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u_x|_{x=0} = \sin t$ ,  $u|_{x=\pi/2} = 0$ ,  $t > 0$ ;
- 2)  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = \cos t$ ,  $t > 0$ ;
- 3)  $u_{tt} - u_{xx} = (2x - x^2) \cos t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x + 1$ ,  $0 < x < 1$ ;  
 $u|_{x=0} = t$ ,  $u_x|_{x=1} = t$ ,  $t > 0$ ;
- 4)  $u_{tt} - 4u_{xx} = (1 - x^2) \sin t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ,  $0 < x < 1$ ;  
 $u_x|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=1} = t$ ,  $t > 0$ ;
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + x^2 - \pi x$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = -1$ ,  $0 < x < \pi$ ;  
 $u|_{x=0} = -t$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi - t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \cos 2t$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u_x|_{x=0} = \cos 2t$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cos 2t$ ,  $t \geq 0$ ;

- 7)  $u_{tt} = u_{xx} + \pi x \cos t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0;$
- 8)  $u_{tt} = u_{xx} + 25\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 5t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos 5x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0;$
- 9)  $u_{tt} = u_{xx} + \pi \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0;$
- 10)  $u_{tt} = u_{xx} + u - xt + 2 \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2}t, \quad t \geq 0;$
- 11)  $u_{tt} = u_{xx} + u + \sin x - \frac{\pi}{2}xt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2}t, \quad t \geq 0;$
- 12)  $u_{tt} + 2u = u_{xx} + 2 \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t \geq 0;$
- 13)  $u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1+x) - \frac{3}{4} \sin \frac{x}{6}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi(1+x) + \sin \frac{x}{6}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 3\pi;$   
 $u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=3\pi} = \pi, \quad t \geq 0;$
- 14)  $u_{tt} = 4u_{xx} + \sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 1 - x, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi} = t(1 - \pi), \quad t > 0;$
- 15)  $u_{tt} = 9u_{xx} + 18x \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 2x + 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 2t, \quad t > 0;$
- 16)  $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{2} - 2 \sin t \sin 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 7 + x^2, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \quad t \geq 0;$

- 17)  $u_{tt} = 3u_{xx} + 3u - 3tx - 6t + 9\pi \sin t \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2 + x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\pi} = 2t + \pi t, \quad t \geq 0;$
- 18)  $u_{tt} = u_{xx} + 5u - 5tx - 5t + 9\pi e^{-t} \sin 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 1 + x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\pi/2} = t, \quad t \geq 0;$
- 19)  $u_{tt} = u_{xx} + 39\pi e^{-t} \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2x, \quad u_t|_{t=0} = 1 - \cos 5x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 2, \quad u|_{x=\pi/2} = \pi + t;$
- 20)  $4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4} \cos \frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x - \frac{3}{5} \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0;$
- 21)  $u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1+x) - \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi(1+x) - \frac{4}{5} \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 3\pi;$   
 $u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=3\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$

**20.18.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x - 3\pi, \quad 0 \leq x \leq 3\pi;$   
 $u_x|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=3\pi} = 0, \quad t \geq 0;$
- 2)  $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin x + 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\pi/2} = \cos t, \quad t \geq 0;$
- 3)  $u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{2} \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u|_{x=0} = \cos t, \quad u_x|_{x=\pi} = 0, \quad t > 0;$
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 < x < 1;$   
 $u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t + t^2, \quad t > 0;$
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + (\pi x - x^2 - 9) \sin 3t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 3, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u|_{x=0} = \sin 3t, \quad u|_{x=\pi} = \sin 3t, \quad t \geq 0;$
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} - 2 \cos 3t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t, \quad t \geq 0;$

- 7)  $u_{tt} + 9u - u_{xx} = 9x^2 - 2 + 10 \cos 5t \cos 4x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = \frac{2}{\pi}x - 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t > 0;$
- 8)  $u_{tt} - 4u_{xx} = 2x + 4 \cos 2t \cdot \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = (\pi - x) \left( \frac{\pi}{2}x + 1 \right), \quad u_t|_{t=0} = 4 \sin 2x, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u|_{x=0} = \pi, \quad u|_{x=\pi} = \pi t^2, \quad t > 0;$
- 9)  $u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + e^t, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin 2\pi x + x - 1, \quad u_t|_{t=0} = x - 1, \quad 0 < x < 2;$   
 $u|_{x=0} = -e^t, \quad u|_{x=2} = e^t, \quad t > 0;$
- 10)  $u_{tt} - 4u_t = u_{xx} - 2t - 4x^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{1}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x^2 - x, \quad 0 < x < 1;$   
 $u_x|_{x=0} = -t, \quad u_x|_{x=1} = t, \quad t > 0;$
- 11)  $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 < x < 1;$   
 $u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t + t^2, \quad t > 0;$
- 12)  $u_{tt} = u_{xx} + 1 + \frac{6t}{x}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x + \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u|_{x=0} = t^3, \quad u_x|_{x=\pi} = 1, \quad t > 0;$
- 13)  $u_{tt} = u_{xx} + 2u + 18\pi x e^{-t}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin 3x - 36 \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0;$
- 14)  $u_{tt} = 16u_{xx} + 5u - 9\pi(x - 2\pi) \cos 2t, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos \frac{3x}{4} - 18 \cos \frac{x}{4}, \quad u_t|_{t=0} = 2 \cos \frac{x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2\pi} = 0, \quad t \geq 0;$
- 15)  $u_{tt} = u_{xx} + 10u - 9\pi \left( x - \frac{\pi}{2} \right) e^{-3t}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \cos 3x, \quad u_t|_{t=0} = 3 \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0;$
- 16)  $u_{tt} = 16u_{xx} + 2u + 9\pi x e^{-t}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin \frac{x}{4}, \quad u_t|_{t=0} = 2 \sin \frac{3x}{4} - 72 \sin \frac{x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2\pi} = 0, \quad t \geq 0;$
- 17)  $u_{tt} = u_{xx} + \pi x \cos t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0;$

- 18)  $u_{tt} = u_{xx} + 25\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 5t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos 5x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0;$
- 19)  $u_{tt} = u_{xx} + \pi \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0;$
- 20)  $u_{tt} = u_{xx} + 9\pi x \sin 6t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin 6x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0.$

**20.19.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = 6u_{xx} + 15u - 15xt + 9x^2(\pi - x) \sin 9t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x - 3 \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \geq 0;$
- 2)  $u_{tt} + 6u_t = 2u_{xx} - 5xe^{-t} + (2x - \pi)^2 e^{-4t}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = -x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = e^{-t}, \quad u_x|_{x=\pi/2} = e^{-t}, \quad t \geq 0;$
- 3)  $2u_{tt} = 20u_{xx} + 13u - 5e^{-2t} + x(x^2 - 4\pi^2) \sin 4t,$   
 $0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 3 \sin \frac{x}{2} + 1, \quad u_t|_{t=0} = -2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$   
 $u|_{x=0} = e^{-2t}, \quad u_x|_{x=2\pi} = e^{-2t}, \quad t \geq 0;$
- 4)  $u_{tt} + 10u_t = u_{xx} + 20x^2 - 4t + 12x(\pi - 2x)e^{-8t},$   
 $0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/4} = \pi t, \quad t \geq 0;$
- 5)  $u_{tt} - u_{xx} - 5u = -\frac{10xt}{\pi} + \pi e^{-t} x \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin 4x, \quad u_t|_{t=0} = \frac{2x}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = t, \quad t \geq 0;$
- 6)  $u_{tt} - u_{xx} - 13u = x(2 - 13t^2) + 9e^{-2t} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2,$   
 $0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = -\frac{\pi^2}{27}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{2\pi^2}{27}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3};$   
 $u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi/3} = t^2, \quad t \geq 0;$

- 7)  $u_{tt} - u_{xx} - 2u = 12x(1-t^2) + 3\pi e^{-t} \sin 2x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0;$   
 $u|_{t=0} = -\frac{3}{5} \cos 3x, \quad u_t|_{t=0} = \frac{3}{5} \cos 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 6t^2, \quad u|_{x=\pi/2} = 3\pi t^2, \quad t \geq 0;$
- 8)  $u_{tt} - 2u_{xx} - 3u = (2x+1)(2-3t^2) + 6\pi e^{-t} \sin 2x,$   
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{3}{5} \sin 3x, \quad u_t|_{t=0} = -\frac{3}{5} \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 2t^2, \quad t \geq 0;$
- 9)  $u_t = 4u_{xx} + 9u - 27\pi x(x-2\pi) - \frac{9}{2\pi}(x+2\pi),$   
 $0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 1 + \sin x + \frac{x}{2\pi}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$   
 $u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=2\pi} = 2, \quad t \geq 0;$
- 10)  $u_t = u_{xx} + 4u - 12t(x-2\pi)^2 + 2x(t-2t^2), \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi^2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$   
 $u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=2\pi} = t^2, \quad t \geq 0;$
- 11)  $u_{tt} = 4u_{xx} + u + \pi(x^2 - \pi^2) + \pi - x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{4}{27} \cos \frac{3x}{2} + x - \pi, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = t, \quad t \geq 0;$
- 12)  $u_{tt} = u_{xx} + 9u + \pi x(x-\pi) - 9\pi x - 9, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin x + \pi x - 1, \quad u_t|_{t=0} = 2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=\pi/2} = \pi, \quad t \geq 0.$

**20.20.** Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембранны ( $0 < x < p, 0 < y < p$ ), закрепленный вдоль контура, если  $u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ .

**20.21.** Решить следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi;$$

$$u_x|_{x=0} = y|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 5 \sin 3x \sin 4y, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q.$$

**20.22.** Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембранны ( $0 < x < p, 0 < y < q$ ), закрепленный вдоль контура, если  $u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ .

**20.23.** Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленный по краю, в следующих случаях:

- 1) начальное отклонение определяется равенством

$$u|_{x=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где  $\mu_n$  — положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ; начальная скорость равна нулю;

- 2) начальное отклонение и начальная скорость зависят только от  $r$ , т. е.  $u|_{t=0} = f(r)$ ,  $u_t|_{t=0} = F(r)$ ;
- 3) Начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю.

**20.24.** Решить следующие смешанные задачи (задачи рассматриваются в областях  $\{(r, \varphi, t): r < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t > 0\}$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ; функции  $f(r)$  и  $g(r)$  предполагаются гладкими функциями на  $[0, R]$ ;  $\mu_k^{(j)}$  —  $k$ -й по порядку положительный нуль функции Бесселя  $J_j(\xi)$ :  $J_j(\mu_k^{(j)}) = 0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ):

$$1) 4u_{tt} = \Delta u + tf(r), \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < \frac{1}{2};$$

$$u|_{r=1/2} = 0, \quad t > 0;$$

$$2) u_{tt} = \Delta u + f(r), \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < \frac{1}{2};$$

$$u|_{r=1/2} = 0, \quad t > 0;$$

$$3) u_{tt} = \Delta u + J_2\left(\mu_4^{(2)}r\right) \cos 2\varphi \cos\left(\mu_4^{(2)}t\right), \quad r < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = f(r) \sin \varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_4^{(2)}r\right) \cos 2\varphi, \quad r < 1;$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad t > 0;$$

$$4) 4u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin^2 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = g(r) \cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0\left(\mu_3^{(0)}r\right), \quad r < 1;$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad t > 0;$$

$$5) u_{tt} = 4\Delta u + f(r)(4 + \sin 3\varphi) \cos \varphi, \quad r < 2, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{2}\right) \sin 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = f(r) \sin 4\varphi, \quad r < 2;$$

$$u|_{r=2} = 0, \quad t > 0;$$

$$6) 4u_{tt} = \Delta u + f(r) \cos^2 3\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= J_0\left(\frac{\mu_4^{(0)} r}{2}\right), \quad u_t|_{t=0} = g(r) \sin 3\varphi, \quad r < 2; \\ u|_{r=2} &= 0, \quad t > 0; \end{aligned}$$

$$7) u_{tt} = 4\Delta u + f(r)(2 + \sin \varphi) \sin \varphi, \quad r < 1, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(r), \quad u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} r\right) \cos 2\varphi, \quad r < 1; \\ u|_{r=1} &= 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

**20.25.** Решить следующие смешанные задачи (задачи рассматриваются в области  $\{(r, \varphi, t): r < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t > 0\}$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ; функции  $f(r)$  и  $g(r)$  предполагаются гладкими функциями на  $[0, R]$ ,  $f(R) = g(R) = 0$ ;  $\mu_k^{(j)}$  —  $k$ -й по порядку положительный нуль функции Бесселя  $J_j(\xi)$ :  $J_j(\mu_k^{(j)}) = 0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ):

$$1) 9u_{tt} = \Delta u + f(r) \cos 4\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= J_0\left(\mu_4^{(0)} r\right), \quad u_t|_{t=0} = g(r) \cos 4\varphi, \quad r \leq 1; \\ u|_{r=1} &= 0, \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

$$2) u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin 4\varphi, \quad r < \frac{1}{4}, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= J_4\left(4\mu_4^{(4)} r\right) \cos 4\varphi, \quad u_t|_{t=0} = g(r) \sin 4\varphi, \quad r \leq \frac{1}{4}; \\ u|_{r=1/4} &= 0, \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

$$3) u_{tt} = 16\Delta u + f(r) \cos 6\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= g(r) \cos 6\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2}\right), \quad r \leq 2; \\ u|_{r=2} &= 0, \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

$$4) 4u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin 3\varphi, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= g(r) \sin 3\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_3\left(2\mu_5^{(3)} r\right) \sin 3\varphi, \quad r \leq \frac{1}{2}; \\ u|_{r=1/2} &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

**20.26.** Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x + f(t) J_0(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0,$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ , если:

$$1) f(t) = t^2 + 1; \quad 2) f(t) = \sin t + \cos t.$$

**20.27.** Найти решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x} u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = g(t), \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

если:

- 1)  $g(t) = \sin^2 t, \quad u_0(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} \right), \quad u_1(x) = 0;$
- 2)  $g(t) = \cos 2t, \quad u_0(x) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}, \quad u_1(x) = 0;$
- 3)  $g(t) = t - 1, \quad u_0(x) = J_0(\mu_1 x) - 1, \quad \text{где } \mu_1 \text{ — положительный корень уравнения } J_0(\mu) = 0, \quad u_1(x) = 1.$

**20.28.** Найти решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + f(t) &= u_{xx} + \frac{1}{x} u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = g(t), \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

если:

- 1)  $f(t) = \cos t, \quad g(t) = 0, \quad u_0(x) = 1 - \frac{J_0(x)}{J_0(1)}, \quad u_1(x) = 0;$
- 2)  $f(t) = \sin 3t, \quad g(t) = 1, \quad u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)} \right);$
- 3)  $f(t) = -2 \cos 2t, \quad g(t) = 0, \quad u_1(x) = 0,$   
 $u_0(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1 \right) + J_0(\mu_1 x), \quad \text{где } \mu_1 \text{ — положительный корень уравнения } J_0(\mu) = 0.$

**20.29.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = \cos 2t + \sin 3t, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= \frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

**20.30.** Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной по краю, если ее колебания вызваны равномерно распределенным давлением  $p = p_0 \sin \omega t$ , приложенным к одной стороне мембранны. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления и что  $\omega \neq \frac{a\mu_n}{R}$ , где  $\mu_n$

( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$  (нет резонанса).

**20.31.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0}| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

если:

- 1)  $u_0(x) = J_1(\mu_k x) + J_1(\mu_m x)$ ,  $u_1(x) = 0$ ;
- 2)  $u_0(x) = J_1(\mu_k x)$ ,  $u_1(x) = J_1(\mu_m x)$ .

Здесь  $\mu_k$  и  $\mu_m$  — два различных положительных корня уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

**20.32.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + e^t J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0}| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

**20.33.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0}| &< \infty, \quad u|_{x=1} = \sin 2t \cos t, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \frac{3}{2} \frac{J_1(3x)}{J_1(3)}, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

**20.34.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0}| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

если:

- 1)  $u_0(x) = u_1(x) = J_2(\mu_k x)$ ;
- 2)  $u_0(x) = \frac{1}{2}J_2(\mu_k x)$ ,  $u_1(x) = \frac{3}{2}J_2(\mu_k x)$ .

Здесь  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ .

**20.35.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{4u}{x^2} + f(t) J_2(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_1$  — положительный корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ , если:

- 1)  $f(t) = t$ ; 2)  $f(t) = \cos t$ .

**20.36.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{9u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = J_3(\mu_1 x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_1$  — положительный корень уравнения  $J_3(\mu) = 0$ , если:

- 1)  $u_0(x) = t$ ; 2)  $u_0(x) = J_3(\mu_1 x)$ .

**20.37.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{9u}{x^2} + f(t) J_3(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_3(\mu) = 0$ , если:

- 1)  $f(x) = e^{-t}$ ; 2)  $f(t) = t - t^2$ .

**20.38.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} (xu_x)_x &= u_{tt}, \quad 0 < x < \frac{1}{4}, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1/4} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= J_0(2\mu_1 \sqrt{x}), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

где  $\mu_1$  — положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

**20.39.** Тяжелая однородная нить длиной  $l$ , подвешенная за один из своих концов ( $x = l$ ), выводится из положения равновесия и отпускается без начальной скорости. Изучить колебания нити, которые она совершает под действием силы тяжести; предполагается, что среда не оказывает сопротивления.

**20.40.** Тяжелая однородная нить длиной  $l$ , подвешенная верхним концом ( $x = l$ ) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти отклонение  $u(x, t)$  нити от положения равновесия.

**20.41.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} (xu_x)_x &= u_{tt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u_x|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

**20.42.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= xu_{xx} + u_x + f(t)J_0(\mu_1 \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_1$  — положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ , если:

- 1)  $f(t) = t$ ; 2)  $f(t) = \sin t$ .

**20.43.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ .

**20.44.** Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= xu_{xx} + u_x - \frac{9u}{4x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_3(\mu_1 \sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\mu_1$  — положительный корень уравнения  $J_3(\mu) = 0$ .

В задачах 20.45–20.49  $\mu_k^{(m)}$  —  $k$ -й положительный нуль функции Бесселя  $J_m(\xi)$ :  $J_m(\mu_k^{(m)}) = 0$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

**20.45.** Решить смешанные задачи:

$$\begin{aligned} 1) \quad u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + tJ_1\left(\mu_1^{(1)}x\right) + J_1\left(\mu_2^{(1)}x\right), \\ &0 < x < 1, \quad t > 0; \\ &u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1; \\ &|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0; \end{aligned}$$

- 2)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + \cos t J_1(\mu_1^{(1)}x) + \sin t J_1(\mu_2^{(1)}x),$   
 $0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{1}{(\mu_1^{(1)})^2 - 1} \cdot J_1(\mu_1^{(1)}x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 3)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + t J_1(\mu_1^{(1)}x) + J_1(\mu_2^{(1)}x),$   
 $0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + \sin t J_1(\mu_1^{(1)}x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_1(\mu_1^{(1)}x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + t^2 J_1(\mu_5^{(1)}x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0.$

**20.46.** Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + \frac{1}{x}u_x + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0,$$

если:

- 1)  $f(x, t) = (t^2 + 1)J_0(\mu_2^{(0)}x);$   
 2)  $f(x, t) = \cos 2t \cdot J_0(\mu_2^{(0)}x);$   
 3)  $f(x, t) = (\sin t + \cos t)J_0(\mu_2^{(0)}x).$

**20.47.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4}{x^2}u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_2(\mu_1^{(2)}x) + J_2(\mu_2^{(2)}x),$   
 $u_t|_{t=0} = \mu_1^{(2)}J_2(\mu_1^{(2)}x) + \mu_2^{(2)}J_2(\mu_2^{(2)}x), \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$

- 2)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9}{x^2}u + t^2 J_3(\mu_2^{(3)}x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_3(\mu_3^{(3)}x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 3)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{25}{x^2}u - \cos t \cdot J_5(\mu_2^{(5)}x), \quad 0 < x < 1,$   
 $t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_5(\mu_5^{(5)}x), \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{36}{x^2}u - \sin t \cdot J_6(\mu_3^{(6)}x), \quad 0 < x < 1, \quad t >$   
 $> 0;$   
 $u|_{t=0} = J_6(\mu_6^{(1)}x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{16}{x^2}u, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 3;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=3} = 0, \quad t > 0, \text{ где } f(x) \in C[0, 3];$
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{25}{x^2}u, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x), \quad 0 < x < 4;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=4} = 0, \quad t > 0, \text{ где } f(x) \in C[0, 4].$

**20.48.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = (xu_x)'_x + (\mu_1^{(0)})^2 \cdot J_1(\mu_1^{(0)}\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \mu_2^{(0)}J_0(\mu_2^{(0)}\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 2)  $u_{tt} = (xu_x)'_x - \frac{4}{x}u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_4(\mu_1^{(4)}\sqrt{x}), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$
- 3)  $u_{tt} = (xu_x)'_x - \frac{1}{4x}u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_1(\mu_4^{(1)}\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0.$

**20.49.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} - 2\mu_3^{(0)}u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + (\mu_3^{(0)})^2 \cdot t \cdot J_0(\mu_3^{(0)}x),$   
 $0 < x < 1, \quad t > 0;$

$$\begin{aligned}
 u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = -J_0\left(\mu_3^{(0)}x\right), \quad 0 < x < 1; \\
 |u(0, t)| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0; \\
 2) \quad u_{tt} + 2\mu_3^{(2)}u_t &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4}{x^2}u + t \cdot J_2\left(\mu_3^{(2)}x\right), \\
 0 < x < 1, \quad t > 0; \\
 u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1; \\
 |u(0, t)| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0; \\
 3) \quad u_{tt} + \frac{5}{4}\mu_2^{(0)}u_t &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0; \\
 u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 3J_0\left(\frac{1}{2}\mu_2^{(0)}x\right), \quad 0 < x < 2; \\
 |u(0, t)| &< \infty, \quad u|_{x=2} = 0, \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

**20.50.** Дан тонкий однородный стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если:

- 1) концы стержня  $x = 0$  и  $x = l$  поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ; рассмотреть случаи:  
а)  $u_0(x) = A = \text{const}$ , б)\*  $u_0(x) = Ax(l - x)$ ,  $A = \text{const}$ ;
- 2) конец  $x = 0$  поддерживается при нулевой температуре, а на конце  $x = l$  происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;
- 3) на обоих концах стержня ( $x = 0$  и  $x = l$ ) происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;
- 4) концы стержня ( $x = 0$  и  $x = l$ ) теплоизолированы, а начальная температура  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ ;
- 5) концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{l}{2} < x < l; \end{cases}$$

изучить поведение  $u(x, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ;

- 6) концы стержня теплоизолированы, а

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l - x), & \text{если } \frac{l}{2} < x < l, \end{cases}$$

где  $u_0 = \text{const}$ ; найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .

**20.51.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0;$
- 2)  $u_t + u = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 1, \quad 0 < x < l; \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0;$
- 3)  $u_t = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 - \pi x, \quad 0 < x < \pi; \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi}, \quad t \geq 0.$

**20.52.** Дан тонкий однородный стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если:

- 1) концы стержня поддерживаются при постоянных температурах  $u|_{x=0} = u_1, u|_{x=l} = u_2$ , а начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ ; найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ ;
- 2) концы стержня имеют постоянную температуру  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1$ , а начальная температура задается формулой

$$u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l - x),$$

где  $A = \text{const}$ ; найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ ;

- 3) левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре  $u|_{x=l} = u_2$ , начальная температура равна  $u|_{t=0} = \frac{A}{l}x$ , где  $A = \text{const}$ ;
- 4) левый конец стержня поддерживается при заданной постоянной температуре  $u|_{x=0} = u_1$ , а на правый конец подается извне заданный постоянный тепловой поток; начальная температура стержня  $u|_{t=0} = u_0(x)$ .

**20.53.** Дан тонкий однородный стержень длины  $l$ , с боковой поверхности которого происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, имеющую нулевую температуру; левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре  $u|_{x=0} = u_1$ . Определить температуру  $u(x, t)$  стержня, если:

- 1) правый конец стержня  $x = l$  поддерживается при температуре  $u|_{x=0} = u_2 = \text{const}$ , а начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;
- 2) на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю; а начальная температура равна нулю.

**20.54.** Найти распределение температуры в стержне  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце  $x = l$  поддерживается температура, равная нулю,

а на левом конце температура равна  $u|_{x=0} = At$ , где  $A = \text{const}$ . Начальная температура стержня равна нулю.

**20.55.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
- 2)  $u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$
- 3)  $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = e^x \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1;$
- 4)  $u_t = u_{xx} + u - x + 2 \sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$
- 5)  $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2 \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$
- 6)  $u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{x=0} = 1+t, \quad u|_{x=\pi} = 1+t, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

**20.56.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2 \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi} = t^2, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos 2x, \quad 0 < x < \pi;$
- 2)  $u_t - u_{xx} - 9u = 4 \sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 + 2, \quad 0 < x < \pi;$
- 3)  $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2 \cos x \cos 2x,$   
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi/2} = t^2 + \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$
- 4)  $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x,$   
 $0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad 0 < x < \pi;$

5)  $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x} \cos^2 \pi x, \quad 0 < x < 1,$   
 $t > 0;$   
 $u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 2t, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$

**20.57.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = e^{-t/4}, \quad t > 0;$
- 2)  $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi e^{-t}, \quad t > 0;$
- 3)  $u_t - u_{xx} = -2t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 5, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \quad t > 0;$
- 4)  $u_t - u_{xx} = -2e^t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 + 3, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = \pi e^t, \quad t > 0;$
- 5)  $u_t = u_{xx} + 1 + x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\pi/2} = \pi, \quad t > 0;$
- 6)  $u_t = u_{xx} + 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad t > 0;$
- 7)  $u_t = u_{xx} + x^2, \quad 0 < x < \frac{1}{4}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 - x, \quad 0 < x < \frac{1}{4};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1/4} = \frac{t}{2}, \quad t > 0;$
- 8)  $u_t = 16u_{xx} + 4x^2 + 2x, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \cos(\pi x), \quad 0 < x < \frac{1}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=1/2} = 2t, \quad t > 0;$
- 9)  $u_t = u_{xx} + \pi^2 u + t(x-1) + x(1-\pi^2 t) + \frac{8}{9\pi^2} t \cos \frac{3\pi x}{2},$   
 $0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$   
 $u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = t, \quad t > 0;$

- 10)  $u_t = 4u_{xx} + 2u + tx - 2(x+1) - \frac{16}{\pi^2}t \sin \frac{\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 1 + x + 2 \sin \frac{3\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2;$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2} = 1, \quad t > 0;$
- 11)  $u_t = 4u_{xx} + 3u - (1 + \sin x)e^{2t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x + 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u|_{x=0} = e^{2t}, \quad u_x|_{x=\pi} = e^{3t}, \quad t > 0;$
- 12)  $u_t = u_{xx} + 5u - 8x^2e^t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}e^t, \quad t > 0;$
- 13)  $u_t = u_{xx} + u + e^{x-8t} + x(2-t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = -x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3};$   
 $u_x|_{x=0} = t-1, \quad u_x|_{x=\pi/3} = t-1, \quad t > 0;$
- 14)  $u_t = 8u_{xx} + u + (\pi^2 - x - x^2)e^{-t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = \operatorname{ch} t, \quad u|_{x=\pi} = \pi \operatorname{ch} t, \quad t \geq 0;$
- 15)  $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{x^2}{4} + \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = \frac{1}{4}\pi e^{-4t}, \quad t \geq 0;$
- 16)  $u_t = 8u_{xx} - x^2e^{-2t}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi x + \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$   
 $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2\pi} = 2\pi^2 e^{-2t}, \quad t \geq 0;$
- 17)  $u_t = u_{xx} - u + x(2+t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad t > 0;$
- 18)  $u_t = u_{xx} - u + xt(t+2) + \frac{5}{\pi} \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 < x < \pi;$   
 $u_x|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=\pi} = \pi t^2, \quad t > 0;$
- 19)  $u_t = u_{xx} - \pi e^{-t}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$   
 $u_x|_{x=0} = 2e^{-t}, \quad u|_{x=\pi/2} = \pi e^{-t}, \quad t \geq 0;$

- 20)  $u_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 3x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = 3e^{-t}$ ,  $t \geq 0$ ;
- 21)  $u_t - u_{xx} = e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t)$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \pi x - \sin x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u|_{x=0} = te^{-9t}$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = \pi$ ,  $t > 0$ ;
- 22)  $u_t - u_{xx} = e^{-t} \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}x - t \right)$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2x + \frac{1}{36} \cos 3x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u_x|_{x=0} = 2$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \pi + te^{-t}$ ,  $t > 0$ ;
- 23)  $u_t = u_{xx} - (1+x)\sin t - \sin(t+x)$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1 + x + \cos x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u_x|_{x=0} = \cos x$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cos t$ ,  $t > 0$ ;
- 24)  $u_t = u_{xx} + (1+x)\cos t - \cos(t-x)$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \sin x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 $u|_{x=0} = \sin t$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = \sin t$ ,  $t > 0$ ;
- 25)  $u_t = u_{xx} - u + \frac{t(x^2 - 2)}{2\pi}$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \cos x$ ,  $0 < x < \pi$ ;  
 $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi} = t$ ,  $t > 0$ ;
- 26)  $u_t = u_{xx} + u - 1$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2} + 1$ ,  $0 < x < \pi$ ;  
 $u_x|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=\pi} = 1$ ,  $t > 0$ ;
- 27)  $6u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 3u - 3(3x + t - 2) - 15\pi e^{-t} \sin 6x$ ,  
 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 5 \cos 3x + 3x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ;  
 $u_x|_{x=0} = 3$ ,  $u|_{x=\pi/6} = \frac{1}{2}(\pi + 2t)$ ,  $t \geq 0$ ;
- 28)  $7u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2u - 2(x+t) + 7 + 21\pi e^{-t} \sin 4x$ ,  
 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x - 7 \cos 2x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ;  
 $u_x|_{x=0} = 1$ ,  $u|_{x=\pi/4} = \frac{1}{4}(\pi + 3t)$ ,  $t \geq 0$ ;

$$29) \quad 4u_t = 16u_{xx} + 5u - \pi(5xt - 4x + 5) + 2\pi e^{-t} \sin x,$$

$$0 < x < 2\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \frac{4}{15} \sin \frac{x}{4} + \pi, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

$$u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=2\pi} = \pi t, \quad t \geq 0;$$

$$30) \quad 5u_t = 9u_{xx} + 4u - \pi(4x + 4t - 5) + \frac{5\pi}{12} e^{-t} \sin 2x,$$

$$0 < x < \frac{3\pi}{2}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi x - \frac{1}{28} \sin \frac{x}{3}, \quad 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$u|_{x=0} = \pi t, \quad u_x|_{x=3\pi/2} = \pi, \quad t \geq 0.$$

**20.58.** Дан однородный шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. Определить температуру внутри шара, если:

- 1) внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т. е.  $u|_{t=0} = u_0(r)$ ;
- 2) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а  $u|_{t=0} = u_0(r)$ ;
- 3) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей температуру  $u_1 = \text{const}$ , а  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ ;
- 4) внутрь шара, начиная с момента  $t = 0$ , через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности  $q = \text{const}$ , а начальная температура  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ .

Указание. Задача о распространении тепла в однородном шаре радиуса  $R$  с центром в начале координат в случае, когда температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки от центра шара, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(r).$$

Если на поверхности шара происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, то граничное условие имеет вид

$$(u_r + hu)|_{r=R} = 0.$$

Полагая  $v = ru$ , получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \\ v|_{r=0} &= 0, \quad \left[ v_r + \left( h - \frac{1}{R} \right) v \right]_{r=R} = 0, \\ v|_{t=0} &= ru_0(r).\end{aligned}$$

**20.59.** Данна тонкая квадратная пластиинка ( $0 < x < l$ ,  $0 < y < l$ ), для которой известно начальное распределение температуры  $u|_{t=0} = u_0(x, y)$ . Боковые стороны  $x = 0$  и  $x = l$  и стороны оснований  $y = 0$ ,  $y = l$  во все время наблюдения удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластиинки в момент времени  $t > 0$ .

**20.60.** Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса  $R$ . Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени  $t$ , если:

- 1) на поверхности цилиндра поддерживается все время нулевая температура, а температура внутри цилиндра в начальный момент равна  $u|_{t=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ , где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ;
- 2) поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре  $u_0$ , а начальная температура внутри цилиндра равна нулю;
- 3) с поверхности цилиндра происходит лучеиспускание в окружающую среду, температура которой равна нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0(r)$ .

**20.61.** Решить следующие смешанные задачи (задачи рассматриваются в области  $\{(r, \varphi, t): r < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t > 0\}$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ; функции  $f(r)$  — гладкая на  $[0, R]$  функция,  $f(R) = 0$ ;  $\mu_k^{(m)}$  —  $k$ -й по порядку положительный нуль функции Бесселя  $J_m(\xi)$ :  $J_m(\mu_k^{(m)}) = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ):

- 1)  $u_t = 16\Delta u + 16e^t f(r)$ ,  $r < 4$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $r < 4$ ;  $u|_{r=4} = 0$ ,  $t > 0$ ;
- 2)  $u_t = \Delta u + t^2 f(r)$ ,  $r < 1$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $r < 4$ ;  $u|_{r=1} = 0$ ,  $t > 0$ ;
- 3)  $u_t = \frac{1}{4}\Delta u - u + tf(r) \cos 2\varphi$ ,  $r < 1$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} r\right) \sin \varphi$ ,  $r < 1$ ;  $u|_{r=1} = 0$ ,  $t > 0$ ;

- 4)  $u_t = \frac{1}{9}\Delta u - 2u + e^{-t}f(r)\sin 3\varphi, \quad r < 4, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{4}r\right)\sin 2\varphi, \quad r < 4; \quad u|_{r=4} = 0, \quad t > 0;$
- 5)  $u_t = \Delta u + J_1(r)\sin \varphi, \quad r < \mu_1^{(1)}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_1(r)\cos 2\varphi, \quad r \leq \mu_1^{(1)}; \quad u|_{r=4} = 0, \quad t \geq 0;$
- 6)  $u_t = 4\Delta u - tJ_3(r)\cos 3\varphi, \quad r < \mu_1^{(3)}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{1}{16}J_3(r)\cos 3\varphi + J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(3)}}r\right)\sin 2\varphi, \quad r \leq \mu_1^{(3)};$   
 $u|_{r=\mu_1^{(3)}} = 0, \quad t \geq 0;$
- 7)  $u_t = \Delta u + J_1(r)\cos 2\varphi, \quad r < \mu_1^{(1)}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_1(r)\sin \varphi, \quad r \leq \mu_1^{(1)}; \quad u|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0, \quad t \geq 0;$
- 8)  $u_t = 9\Delta u - tJ_2(r)\sin 2\varphi + J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}}r\right)\cos 4\varphi, \quad r < \mu_1^{(2)}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \frac{1}{81}J_2(r)\sin 2\varphi, \quad r \leq \mu_1^{(1)}; \quad u|_{r=\mu_1^{(2)}} = 0, \quad t \geq 0;$
- 9)  $u_t = 2\Delta u + J_1\left(2\mu_5^{(1)}r\right)\cos \varphi \cos t, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r)(4\cos \varphi - 3), \quad r < \frac{1}{2}; \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad t > 0;$
- 10)  $u_t = 4\Delta u + J_2\left(\mu_3^{(2)}r\right)\sin 2\varphi \sin 2t, \quad r < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r)(3\sin 2\varphi - 4), \quad r < 1; \quad u|_{r=1} = 0, \quad t > 0;$
- 11)  $u_t = 4\Delta u - u + J_2\left(\mu_3^{(2)}r\right)\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r)(2\cos 2\varphi - 3), \quad r < 1; \quad u|_{r=1} = 0, \quad t > 0;$
- 12)  $u_t = 9\Delta u - 2u + f(r)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad r < 2, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi + 2J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}r\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad r < 2;$   
 $u|_{r=2} = 0, \quad t > 0;$
- 13)  $u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{1}{4}\mu_2^{(3)}r\right)\cos 3\varphi + f(r)\sin 2\varphi, \quad r < 4, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi, \quad r < 4; \quad u|_{r=4} = 0, \quad t > 0;$
- 14)  $u_t = 3\Delta u - 2u + f(r)\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 3\varphi\right), \quad r < 3, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{3}r\right)\sin 3\varphi, \quad r < 3; \quad u|_{r=3} = 0, \quad t > 0;$

- 15)  $u_t = 9\Delta u - 2u + J_2 \left( \frac{\mu_3^{(2)}}{2} r \right), \quad r < 2, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r) \cos \left( 2\varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad r \leq 2; \quad u|_{r=2} = 0, \quad t \geq 0;$
- 16)  $u_t = 4\Delta u - u + e^{-t} f(r) \sin \left( 3\varphi + \frac{\pi}{6} \right), \quad r < 5, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_3 \left( \frac{\mu_2^{(3)}}{5} r \right) \sin 3\varphi, \quad r \leq 5; \quad u|_{r=5} = 0, \quad t > 0;$
- 17)  $u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t} J_1 \left( \frac{\mu_3^{(1)}}{2} r \right) \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad r < 2, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = f(r) \sin \varphi, \quad r \leq 2; \quad u|_{r=2} = 0, \quad t \geq 0;$
- 18)  $u_t = 4\Delta u - 2u + f(r) \sin 5\varphi, \quad r < 3, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_5 \left( \frac{\mu_1^{(5)}}{3} r \right) \sin \left( 5\varphi - \frac{\pi}{3} \right), \quad r \leq 3; \quad u|_{r=3} = 0, \quad t > 0;$
- 19)  $4u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r) \cos \varphi, \quad r < 6, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 5J_3 \left( \frac{1}{6}\mu_1^{(3)} r \right) \cos 3\varphi, \quad r < 6; \quad u|_{r=6} = 0, \quad t > 0;$
- 20)  $u_t = \Delta u - 3u + e^{2t} f(r) \cos 4\varphi, \quad r < 5, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 3J_3 \left( \frac{1}{5}\mu_3^{(3)} r \right) \cos 3\varphi, \quad r < 5; \quad u|_{r=5} = 0, \quad t > 0.$

**20.62.** Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{1}{x^2} u + f(t) J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

если:

$$1) \quad f(t) = \sin t; \quad 2)^* \quad f(t) = e^{-t},$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

**20.63.** Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + t J_0(\mu_1 r), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0;$$

$$|u|_{r=0} < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 < r < 1,$$

где  $\mu_1$  — положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

**20.64.** Решить следующие смешанные задачи:

$$1) \quad u_t = x u_{xx} + u_x - \frac{1}{4x} u + t J_1(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ ,  
 $0 < x < 1$ ;

- 2)  $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{9}{4x}u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = J_3(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1,$   
 где  $\mu_k$  — положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

В задачах 20.65–20.67  $\mu_k^{(m)}$  —  $k$ -й положительный нуль функции Бесселя  $J_m(\xi)$ :  $J_m\left(\mu_k^{(m)}\right) = 0, m = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$ .

**20.65.** Решить следующие смешанные задачи:

1)  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$

$u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1$ , где:

a)  $f(x, t) = \operatorname{ch}\left(\mu_2^{(1)} t\right) \cdot J_1\left(\mu_2^{(1)} x\right);$

б)  $f(x, t) = \operatorname{sh}\left(\mu_2^{(1)} t\right) \cdot J_1\left(\mu_2^{(1)} x\right).$

2)  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4}{x^2}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$

$u|_{t=0} = u_0(x), \quad 0 < x < 1$ , где:

a)  $f(x, t) = \left(\left(\mu_1^{(2)}\right)^2 - 1\right) e^{-t} \cdot J_2\left(\mu_1^{(2)} x\right),$

$u_0(x) = J_2\left(\mu_2^{(2)} x\right);$

б)  $f(x, t) = 2 \operatorname{ch}\left(\left(\mu_3^{(2)}\right)^2 t\right) \cdot J_2\left(\mu_3^{(2)} x\right),$

$u_0(x) = \left(\mu_5^{(2)}\right)^2 J_2\left(\mu_5^{(2)} x\right);$

в)  $f(x, t) = (2 - t) J_2\left(\mu_4^{(2)} x\right), \quad u_0(x) = 0;$

3)  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9}{x^2}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$

$u|_{t=0} = u_0(x), \quad 0 < x < 1$ , где:

a)  $f(x, t) = \left(\mu_1^{(3)}\right)^2 (t^2 - 1) J_3\left(\mu_1^{(3)} x\right), \quad u_0(x) = J_3\left(\mu_1^{(3)} x\right);$

б)  $f(x, t) = t J_3\left(\mu_1^{(3)} x\right), \quad u_0(x) = J_3\left(\mu_2^{(3)} x\right).$

$$4) u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{16}{x^2} u + \left( \left( \mu_1^{(4)} \right)^2 t + 2 \right) J_2 \left( \mu_1^{(4)} x \right),$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 4J_4 \left( \mu_2^{(4)} x \right), \quad 0 < x < 1.$$

**20.66.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = xu_{xx} + u_x + \cos t \cdot J_0 \left( \mu_3^{(0)} \sqrt{x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1;$
- 2)  $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{4}{x} u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_4 \left( \mu_1^{(4)} \sqrt{x} \right) + J_4 \left( \mu_2^{(4)} \sqrt{x} \right), \quad 0 < x < 1;$
- 3)  $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{1}{x} u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = J_2 \left( \mu_3^{(2)} \sqrt{x} \right), \quad 0 < x < 1;$
- 4)  $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{1}{4x} u + J_1 \left( \mu_1^{(1)} \sqrt{x} \right) + e^{-t} J_1 \left( \mu_2^{(1)} \sqrt{x} \right),$   
 $0 < x < 1, \quad t > 0;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$

**20.67.** Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{4}{x^2} u + e^t \cdot f(x), \quad 0 < x < 3, \quad t > 0;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=3} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 3, \text{ где } f(x) \in C[0, 3];$
- 2)  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{9}{x^2} + e^{2t} \cdot f(x), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$   
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u|_{x=2} = 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 2, \text{ где } f(x) \in C[0, 2].$

## Ответы к § 20

- 20.1.** 1)  $A \sin \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n a t}{l};$
- 2)  $\frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{l}.$
- Указание:  $u_0(x) = \frac{4h}{l^2} x(l-x);$

$$3) \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi at}{l};$$

$$\frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l} \quad \left(\text{при } c = \frac{l}{2}\right).$$

Указание:  $u_0(x) = \frac{4h}{c}$  при  $0 \leq x \leq c$ ,  $u_0(x) = \frac{h(l-x)}{l-c}$  при  $c \leq x \leq l$ .

$$20.2. 1) \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi at}{l};$$

$$2) \frac{2lv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi\alpha}{l} - \cos \frac{k\pi\beta}{l}}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l};$$

$$3) \frac{8A\alpha}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k\alpha}{l} \sin \frac{\pi kx_0}{l}}{k \left(1 - \left(\frac{2\alpha k}{l}\right)^2\right)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l}.$$

$$20.3. 1) \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx,$$

$$b_k = \frac{4}{\pi a(2k+1)} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx.$$

Указание:  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ ;

$$2) \frac{1}{l} \int_0^l [u_0(\xi) + tu_1(\xi)] d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right] \cos \frac{k\pi x}{l},$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, b_k = \frac{2}{\pi ak} \int_0^l u_1(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Указание:  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ ;

3)  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n at + b_n \sin \lambda_n at) \cos \lambda_n x$ , где  $\lambda_n$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) — собственные значения, а  $X_n(x) = \cos \lambda_n x$  — собственные функции краевой задачи:  $X''(x) + \lambda^2 X = 0$ ,  $X'(0) = 0$ ,  $X'(l) + hX(l) = 0$  ( $\lambda_n$  — положительные корни уравнения  $\tan \lambda l = h/\lambda$ ),

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l u_0(x) \cos \lambda_n x \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\|X_n\|^2 a \lambda_n} \int_0^l u_1(x) \cos \lambda_n x \, dx,$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)} \right].$$

Указание:  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=l} = -hu|_{x=l}$ ,  $h = \frac{k}{E\sigma}$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — площадь поперечного сечения стержня,  $k$  — коэффициент, характеризующий жесткость крепления,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ .

**20.4.**  $u(x, t) = \frac{8Pl}{E\sigma\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l}}{(2k+1)^2}$ , где  $\sigma$  — площадь поперечного сечения стержня,  $E$  — модуль Юнга.

Указание:  $u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = \frac{Px}{E\sigma}$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**20.5.**  $i(x, t) = -E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi at}{2l}$ ,  $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Указание. Сила тока  $i(x, t)$  удовлетворяет уравнению  $LCi_{tt} = i_{xx}$ , где  $L$  — самоиндукция,  $C$  — емкость, отнесенная к единице длины провода. Начальные условия имеют вид  $i|_{t=0} = 0$ ,  $i_t|_{t=0} = -\frac{E_0\pi}{2lL} \cos \frac{\pi x}{2l}$ , а граничные условия таковы:  $i_x|_{x=0} = 0$ ,  $i|_{x=l} = 0$ .

**20.6.** 1)  $bx(l-x) + \frac{4l^2b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l}}{k^2}$ .

Указание. Решение можно искать в виде  $u = v + w$ , где функция  $w = bx(l-x)$  удовлетворяет неоднородному уравнению и нулевым граничным условиям, а функция  $v$  удовлетворяет однородному уравнению, нулевым граничным и следующим начальным условиям:  $v|_{t=0} = bx(x-l)$ ,  $v_t|_{t=0} = 0$ ;

2)  $\frac{2}{\pi} t \sin t \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k\pi(1-k^2)} (\cos t - \cos kt) \sin kx$ .

**20.7.**  $\frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1) \sin \omega t - \frac{lw}{a\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi at}{l}}{(2k+1)^2(\mu_k^2 - \omega^2)} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}$ , где  $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi a}{l}$ .

**20.8.**  $u(x, t) = \frac{gx(2l - x)}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^3}.$

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести, при следующих условиях:  $u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ . Решение этой задачи можно искать в виде  $u = v + w$ , где  $v = Ax^2 + Bx + C$  ( $A, B, C$  выбрать так, чтобы функция удовлетворяла неоднородному уравнению и заданным граничным условиям).

**20.9.** 1)  $\frac{xt}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2l}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l};$   
 2)  $t + 1 + x(t^3 - t + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{(k\pi)^2} \left[ \frac{6(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2} - 1 \right] \sin \pi kt + \frac{(-1)^k 12t}{\pi^3 k^3} \right\} \sin \pi kx.$

**20.10.**  $A \frac{\sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega t}{a}} \sin \omega t + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}}{\omega^2 - (k\pi a/l)^2}.$

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  при нулевых начальных и следующих граничных условиях:  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = A \sin \omega t$ . Решение этой задачи можно искать в виде  $u = v + w$ , где  $v = X(x) \sin \omega t$ . Функцию  $v$  подобрать так, чтобы она удовлетворяла уравнению и заданным граничным условиям.

**20.11.**  $u(x, t) = \frac{Q}{E\sigma} x - \frac{8Ql}{\pi^2 E\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \times \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$  где  $E$  — модуль упругости,  $\sigma$  — площадь поперечного сечения стержня.

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  при нулевых начальных и следующих граничных условиях:  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=l} = \frac{Q}{E\sigma}$ . Положить  $u = v + w$ , где  $v = Ax$  ( $A$  выбрать так, чтобы функция  $v$  удовлетворяла заданным граничным условиям).

**20.12.**  $u(x, t) = \frac{Aa}{E\sigma\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\cos \frac{\omega l}{a}} + \frac{2Aa\omega}{E\sigma l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2l}{(2k+1)\pi} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x}{\omega^2 - \left( \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \right)^2} \sin a \frac{(2k+1)\pi t}{2l}.$

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  при нулевых начальных и следующих граничных условиях:  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = \frac{A}{E\sigma} \sin \omega t$ . Решение этой задачи можно искать в виде  $u = v + w$ , где  $v = f(x) \sin \omega t$ ;  $f(x)$  выбрать так, чтобы функция  $v$  удовлетворяла уравнению и заданным граничным условиям.

**20.13.**  $u(x, t) = e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) \sin \frac{k\pi x}{l}$ , где

$$\mu_k = \sqrt{\frac{a^2 \pi^2 k^2}{l^2} - \alpha^2},$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx, \quad b_k = \frac{\alpha}{\mu_k} a_k + \frac{2}{l \mu_k} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения  $u_{tt} + 2\alpha u_t = a^2 u_{xx}$  ( $\alpha > 0$  мало) при следующих условиях:  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ .

$$\text{20.14. 1)} -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3} \cos \left( \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 + 4} t \right);$$

$$2) -\frac{8e^{-t}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \left[ \cos(2k+1)t + \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)t \right] \sin(2k+1)x;$$

$$3) 8e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[ (-1)^k - \frac{2}{\pi(2k+1)} \right] \sin \frac{2k+1}{2} t \cos \frac{2k+1}{2} x;$$

$$4) t(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t/2} \frac{1}{(k\pi)^3} \left( 2 \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - 2 \right) \sin \pi kx,$$

$$\lambda_k = \sqrt{(k\pi)^2 - \frac{1}{4}};$$

$$5) (2-x)t + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4t}{k\pi\lambda_k^2} - \frac{k\pi}{\lambda_k^3} \sin \lambda_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{2}, \quad \lambda_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 - 1};$$

$$6) \frac{xt}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi\lambda_k^2} \left( t - \frac{\sin \lambda_k t}{\lambda_k} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \lambda_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - 1}.$$

$$\text{20.15. 1)} \sin 2x \cos 2t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k^3} (1 - \cos kt) \sin kx;$$

$$2) -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[ -1 + e^{-t/2} \left( \cos \mu_k t + \frac{1}{2\mu_k} \sin \mu_k t \right) \right] \sin(2k+1)\pi x, \quad \text{где}$$

$$c_k = \frac{4}{(2k+1)^3 \pi^3}, \quad \mu_k = \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - \frac{1}{4}}.$$

Указание. Искать решение в виде ряда  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \times \sin k\pi x$ .

Замечание к 2). Можно искать решение в виде суммы  $u = v + w$ , где функция  $v = \frac{1}{2}x(1-x)$  удовлетворяет уравнению и заданным граничным условиям. Тогда

$$u(x, t) = \frac{x(1-x)}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \cos \mu_k t + \frac{1}{2\mu_k} \sin \mu_k t \right) e^{-t/2} \sin(2k+1)\pi x.$$

- 20.16.** 1)  $2xt + (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}) \cos x$ ;
- 2)  $3 + x(1 + t^2) + (5te^t - 8e^t + 4t + 8) \sin x$ ;
- 3)  $x(t+1) + \left(\frac{1}{5}e^{5t/2} - e^{t/2} + \frac{4}{5}\right) \cos \frac{3}{2}x$ ;
- 4)  $xt + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{15}e^{5t}\right) e^{-x} \sin 3x$ ;
- 5)  $xt + (1 - e^{-t} + te^{-t}) \cos 3x$ ;
- 6)  $\frac{1}{8}(e^{2t} + e^{-2t}) - \frac{1}{4} - \frac{t^2}{2} \cos 2x$ ;
- 7)  $\frac{1}{9} \sin x (\operatorname{ch} 3t - 1) + \sin 3x (\operatorname{ch} t - 1)$ ;
- 8)  $xt + (2e^t - e^{2t})e^{-x} \sin x$ .

**20.17.** 1)  $u(x, t) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin t + \frac{2}{\pi}(t \cos t - \sin t) \cos x +$   
 $+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + n)(2n+1)^2} \left(\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} - \sin t\right) \cos(2n+1)x$ ,  
 где  $x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot X_n$ ,  $\alpha_n = \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$ ,  $X_n(x) = \cos(2n+1)x$ ,  
 $n = 0, 1, \dots$ ;

- 2)  $u(x, t) = x \cos t + \frac{2}{\pi} t \sin t \sin x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)x}{\pi(n^2 + n)(2n+1)^2} (\cos t - \cos(2n+1)t)$ ,  
 где  $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X_n$ ,  $\alpha_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}$ ,  $X_n(x) = \cos(2n+1)x$ ,  
 $n = 0, 1, \dots$ ;
- 3)  $u(x, t) = t + xt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \left(\cos t - \cos \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) t\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) x}{\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^3 \left[\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 - 1\right]}$ ;

- 4)  $u(x, t) = xt +$   
 $+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32(-1)^n [(\pi + 2n\pi) \sin t - \sin(\pi + 2n\pi)t]}{(\pi + 2n\pi)^4 [(\pi + 2n\pi)^2 - 1]} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x$ ;
- 5)  $u(x, t) = x - t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (1 - \cos nt) \sin nx$ ,  
 где  $a_n = \frac{4[(-1)^n - 1]}{\pi n^3}$ ;
- 6)  $u(x, t) = x \cos 2t +$   
 $+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n-1)(2n+3)} (\cos 2t - \cos(2n+1)t) \cos(2n+1)x$ ,  
 где  $a_n = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$ ;

$$7) u(x, t) = (\sin t + 2t \sin t) \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a_n}{1 - \lambda_n^2} (\cos \lambda_n t - \cos t) \sin \lambda_n x,$$

где  $\lambda_n = 1 + 2n$ ,  $a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x$ ;

$$8) u(x, t) = \left( \cos 5t - \frac{2}{25} \sin 5t + \frac{2}{5} t \cos 5t \right) \cos 5x +$$

$$+ \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 2}}^{\infty} \frac{25\pi a_n}{\lambda_n^2 - 25} \left( \sin 5t - \frac{5}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \right) \cos \lambda_n x,$$

где  $\lambda_n = 1 + 2n$ ,  $a_n = -\frac{4}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$ ;

$$9) u(x, t) = \left( \cos 2t - \frac{1}{2} t \sin 2t \right) \cos 2x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a_n}{\lambda_n^2 - 4} (\cos 2t - \cos \lambda_n t) \cos \lambda_n x,$$

где  $\lambda_n = 2 + 4n$ ,  $a_n = -\frac{8}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$ ;

$$10) u(x, t) = xt + \left( t^2 + \frac{4t}{\pi} \right) \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + 1)\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \cos(2n + 1)x,$$

где  $\lambda_n = (2n + 1)^2 - 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\frac{\pi}{2} - x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n + 1)x}{(2n + 1)^2}$ ;

$$11) u(x, t) = \frac{\pi xt}{2} + \left( \frac{4t}{\pi} + \frac{t^2}{2} \right) \sin x +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + 2n)^2 \sqrt{n(n + 1)}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \sin(2n + 1)x,$$

где  $\lambda_n = (2n + 1)^2 - 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;

$$12) u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{(n^2 + 2)n^2} (1 - \cos(\sqrt{n^2 + 2} t)) \cos nx;$$

$$13) u(x, t) = \pi(x + 1) + \left( \frac{16\sqrt{3}}{\pi} \operatorname{sh} \frac{t\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \sin \frac{x}{6} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^n}{\pi \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \sqrt{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - 1}} \sin \left( \sqrt{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - 1} t \right) \cdot \sin \frac{2n+1}{6} x;$$

$$14) u(x, t) = t - xt + \frac{\pi}{2} \cos 2t \sin x + \frac{1}{36} (1 - \cos 6t) \sin 3x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-16)n}{\pi(4n^2 - 1)^2} \cos 4nt \sin 2nx;$$

$$15) u(x, t) = t + 2xt + \sin x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n + 2)(2n + 1)^2} (1 - \cos((3 + 6n)t)) \sin(2n + 1)x;$$

16)  $u(x, t) = tx^2 + 1 + 7t +$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8a_{2n+1}}{(2n+1)^2 - 4} \left( \frac{2}{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2} t - \sin t \right) \cos(2n+1)x,$$

где  $\sin 2x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ ,  $a_k = 0$  при  $k = 2n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $a_{2n+1} = \frac{-8}{\pi((2n+1)^2 - 4)}$ ;

17)  $u(x, t) = t(x+2) + 24(t - \sin t) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9\pi a_n}{n^2 + 1} \left( \sin t - \frac{1}{\gamma_n} \sin \gamma_n t \right) \sin t,$

$$\text{где } \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, a_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 8n}{(4n^2 - 1)\pi}, \gamma_n^2 = 3(n^2 - 1);$$

18)  $u(x, t) = t(x+1) + 8 \left( \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t - e^{-t} \right) \sin x +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\pi a_n}{\gamma_n^2 + 1} \left( e^{-t} - \cos \gamma_n t + \frac{1}{\gamma_n} \sin \gamma_n t \right) \sin(2n+1)x,$$

где  $\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2n+1)x$ ,  $a_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 8}{\pi(2n-1)(2n+3)}$ ,

$$\gamma_n^2 = (2n+1)^2 - 5 = 4n^2 + 4n - 4;$$

19)  $u(x, t) = t + 2x + (e^{-t} - \cos 5t) \cos 5x +$

$$+ \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 2}}^{\infty} \frac{8\pi a_n}{(2n+1)^2 + 1} \left( e^{-t} - \cos((2n+1)t) + \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} \right) \cos(2n+1)x,$$

где  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n+1)x$ ,  $a_0 = \frac{2}{\pi}$ ,

$$a_n = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{\pi n(n+1)} \quad (n \neq 0);$$

20)  $u(x, t) = x + \frac{32}{\pi\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}t}{4} \cos \frac{x}{2} + \left[ \frac{32}{9\pi\sqrt{5}} \sin \frac{\sqrt{5}t}{4} - \frac{3}{5} \right] \cos \frac{3x}{2} +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\gamma_n} \sin(\gamma_n t) \cos \frac{(2n+1)x}{2},$$

где  $\gamma_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4} - 1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

21)  $u(x, t) = \pi(1+x) + \frac{48}{\pi\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}t}{2} \sin \frac{x}{6} -$

$$- \left( \frac{16}{3\pi\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{5}t}{2} x + \frac{4}{5} \right) \sin \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\gamma_n} \sin \gamma_n t \sin \frac{(2k+1)x}{6},$$

где  $\gamma_n = \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4} - 1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

- 20.18.** 1)  $u(x, t) = (x - 3\pi) \sin t +$   
 $+ \left( \cos t - \frac{4}{3\pi} (\sin t - t \cos t) \right) \cos \frac{x}{2} +$   
 $+ \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{54}{\pi (2n+1)^2 (n+2)(n-1)} \left( \frac{3}{2n+1} \sin \left( \frac{2n+1}{3} t \right) - \sin t \right) \times$   
 $\times \cos \left( \frac{2n+1}{6} x \right);$
- 2)  $u(x, t) = t + x \cos t + \left( 1 + \frac{2}{\pi} t \right) \sin t \sin x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi (2n+1)^2 n(n+1)} (\cos t - \cos(2n+1)t) \sin(2n+1)x;$
- 3)  $u(x, t) = \cos t + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos t - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x;$
- 4)  $u(x, t) = xt + t^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(1+\pi^2 n^2)} \left( t - \frac{\sin(\sqrt{1+\pi^2 n^2} t)}{\sqrt{1+\pi^2 n^2}} \right) \sin \pi nx;$
- 5)  $u(x, t) = \sin 3t + \frac{\alpha_3}{18} (\sin 3t - 3t \cos 3t) -$   
 $- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{a_n}{n(n^3-3)} (3 \sin nt - n \sin 3t) \sin nx,$   
 где  $x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sin nx, \alpha_n = \frac{1}{\pi n^3} (1 - (-1)^n), n = 1, 2, \dots;$
- 6)  $u(x, t) = x^2 \cos 3t + \frac{a_0}{9} (1 - \cos 3t) + \frac{a_3}{6} t \sin 3t \cos 3x +$   
 $+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2 - 9} (\cos 3t - \cos nt) \cos nx, \text{ где } 9x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nx,$   
 $a_n = (-1)^n \frac{36}{n^2} (n \in \mathbb{N}), a_0 = 3\pi^2;$
- 7)  $u(x, t) = x^2 + t \sin 5t \cdot \cos 4x +$   
 $+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 4}}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{\sin(\sqrt{n^2+9} t)}{\sqrt{n^2+9}} \cos nx;$
- 8)  $u(x, t) = \pi - x + xt^2 + (4 \cos 2t + t \sin 2t) \sin x + \sin 4t \cdot \sin 2x +$   
 $+ \sum_{n=3}^{\infty} 2 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \cos 2nt \cdot \sin nx;$
- 9)  $u(x, t) = (x - 1)e^t + e^t \left( \cos(\sqrt{4\pi^2-1} t) - \frac{\sin(\sqrt{4\pi^2-1} t)}{\sqrt{4\pi^2-1}} \right) \cos 2\pi x +$   
 $+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi n \mu_n^2} \cdot e^t \cdot (\cos \mu_n t - 1) \sin \lambda_n x,$   
 где  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \lambda_k x, \lambda_n = \frac{\pi n}{2}, \mu_n^2 = \lambda_n^2 - 1, k = 1, 2, \dots;$

10)  $u(x, t) = (x^2 - x)t + \frac{t}{2} + \frac{5}{8} - \frac{1}{8}e^{4t} -$   
 $- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\lambda_n^4} \cdot e^{2t} \cdot \left( \cos(\sqrt{\lambda_n^2 - 4}t) - 1 - \frac{2 \sin(\sqrt{\lambda_n^2 - 4}t)}{\sqrt{\lambda_n^2 - 4}} \right) \cos \lambda_n x,$   
 где  $-4x = -2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\lambda_k^4} \cos \lambda_k x, \lambda_k = \pi(1 + 2k), k = 0, 1, \dots;$

11)  $u(x, t) = xt + t^2 +$   
 $+ \left( \cos(\sqrt{1 + 9\pi^2}t) + 2 \frac{\sin(\sqrt{1 + 9\pi^2}t) - t\sqrt{1 + 9\pi^2}}{3\pi(1 + 3\pi^2)^{3/2}} \right) \sin 3\pi x +$   
 $+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\lambda_n \cdot \mu_n^2} \left( \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n t - t \right) \sin \lambda_n x,$   
 где  $\lambda_n = \pi n, \mu_n^2 = \lambda_n^2 + 1, k = 1, 2, \dots;$

12)  $u(x, t) = x + t^3 + \left[ \left( 1 - \frac{16}{\pi} \right) \cos \frac{t}{2} + \frac{16}{\pi} \right] \sin \frac{x}{2} +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi \lambda_n^3} (1 - \cos \lambda_n t) \sin \lambda_n x, \text{ где } \lambda_n = \frac{1+2n}{2}, n = 1, 2, \dots;$

13)  $u(x, t) = -36te^{-t} \sin x + (\cos \sqrt{7}t - e^{-t}) \sin 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{18\pi\alpha_n}{\mu_n^2 + 1} \left( -\cos \mu_n t + \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n t + e^{-t} \right) \sin \lambda_n x,$   
 где  $x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k x, \alpha_k = \frac{4(-1)^k}{\pi \lambda_k^2}, \lambda_k = 1 + 2k, k = 0, 1, \dots;$

14)  $u(x, t) = (\operatorname{sh} 2t - 18 \cos 2t) \cos \frac{x}{4} + (\cos 2t + 4t \sin 2t) \cos \frac{3x}{4} +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9\pi\alpha_n}{\mu_n^2 - 4} (\cos \mu_n t - \cos 2t) \cos \lambda_n x,$   
 где  $x - 2\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k x, \alpha_k = \frac{-1}{\pi \lambda_k^2}, k = 0, 1, \dots,$   
 $\lambda_k = \frac{1}{4}(1 + 2k), k = 0, 1, \dots, \mu_k^2 = (1 + 2k)^2 - 5, k = 1, 2, \dots;$

15)  $u(x, t) = (3 \operatorname{sh} 3t - 6te^{-3t}) \cos x + \left( \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) \cos 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9\pi\alpha_n}{9 + \mu_n^2} \left( \cos \mu_n t - \frac{3}{\mu_n} \sin \mu_n t - e^{-3t} \right) \cos \lambda_n x,$   
 где  $x - \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k x, \alpha_k = \frac{-4}{\pi \lambda_k^2}, k = 0, 1, \dots, \lambda_k = 1 + 2k,$   
 $k = 0, 1, \dots, \mu_k^2 = \lambda_k^2 - 10, k = 2, 3, \dots;$

16)  $u(x, t) = (\operatorname{ch} t - 72te^{-t}) \sin \frac{x}{4} + (2 \cos \sqrt{7}t - 2e^{-t}) \sin \frac{3x}{4} +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9\pi\alpha_n}{\mu_n^2 + 1} \left( -\cos \mu_n t + \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n t + e^{-t} \right) \sin \lambda_n x,$

где  $x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k x$ ,  $\alpha_k = \frac{(-1)^k}{\pi \lambda_k^2}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{4}(1 + 2k)$ ,  
 $k = 0, 1, \dots$ ,  $\mu_k^2 = (1 + 2k)^2 - 2$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;

17)  $u(x, t) = (\sin t + 2t \sin t) \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \alpha_n}{1 - \lambda_n^2} (\cos \lambda_n t - \cos t) \sin \lambda_n x$ ,  
 где  $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \lambda_n x$ ,  $\alpha_n = \frac{4(-1)^n}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_n = 1 + 2n$ ,  
 $n = 0, 1, \dots$ ;

18)  $u(x, t) = \left( \cos 5t - \frac{2}{25} \sin 5t + \frac{2}{5} t \cos 5t \right) \cos 5x +$   
 $+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{25\pi \alpha_n}{\lambda_n^2 - 25} \left( \sin 5t - \frac{5}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \right) \cos \lambda_n x$ ,  
 где  $x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \lambda_n x$ ,  $\alpha_n = \frac{-4}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_n = 1 + 2n$ ,  
 $n = 0, 1, \dots$ ;

19)  $u(x, t) = \left( \cos 2t - \frac{1}{2} t \sin 2t \right) \cos 2x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \alpha_n}{\lambda_n^2 - 4} (\cos 2t - \cos \lambda_n t) \cos \lambda_n x$ ,  
 где  $x - \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \lambda_n x$ ,  $\alpha_n = \frac{-8}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_n = 2(1 + 2n)$ ,  
 $n = 0, 1, \dots$ ;

20)  $u(x, t) = \left( \frac{5}{36} \sin 6t + \frac{1}{6} t \cos 6t \right) \sin 6x +$   
 $+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9\pi \alpha_n}{\lambda_n^2 - 36} \left( \sin 6t - \frac{6}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \right) \sin \lambda_n x$ ,  
 где  $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \lambda_n x$ ,  $\alpha_n = \frac{(-1)^n \cdot 8}{\pi \lambda_n^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_n = 2(1 + 2n)$ ,  
 $n = 0, 1, \dots$ .

**20.19.** 1)  $u(x, t) = xt + \left( 2 \operatorname{ch} 3t + \frac{1}{5} \operatorname{sh} 3t - \frac{2}{5} \sin 9t \right) \sin x +$   
 $+ \frac{1}{96} (9t \cos 9t - \sin 9t) \sin 4x + \sum_{\substack{n=2 \\ n \neq 4}}^{\infty} \frac{\alpha_n}{6(n^2 - 16)} \left( \sin 9t - \frac{9}{\alpha_n} \sin \alpha_n t \right) \sin nx$ ,  
 где  $\alpha_n = \sqrt{6n^2 - 15}$ ,  $9x^2(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$ ,  
 $\alpha_n = \frac{36}{n^3} [2(-1)^{n+1} - 1]$ ;

2)  $u(x, t) = xe^{-t} + \frac{\pi^2}{72}(1 + 2e^{-6t} - 3e^{-4t}) + (e^{-2t} - e^{-4t} - 2te^{-4t}) \cos 2x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-3t}}{2n^2(n^2 - 1)} \left( e^{-t} - \cos \alpha_n t + \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n t \right) \cos 2nx,$   
где  $\alpha_n = \sqrt{8n^2 - 9}$ ,  $(2x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos 2nx$ ;

3)  $u(x, t) = e^{-2t} + \left( \frac{12}{5} \sin 4t + 3 \operatorname{ch} 2t - \frac{24}{5} \operatorname{sh} 2t \right) \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{18} (4t \cos 4t - \sin 4t) \sin \frac{3x}{2} + \sum_{\substack{n=2, \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{\alpha_n}{5(n^2 - 9)} \left( \sin 4t - \frac{4}{\alpha_n} \sin \alpha_n t \right) \sin \frac{nx}{2},$   
где  $\alpha_n = \sqrt{\frac{5n^2 - 13}{2}}$ ,  $x(x^2 - 4\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{nx}{2}$ ,  $\alpha_n = \frac{96}{n^3} [(-1)^n]$ ;

4)  $u(x, t) = 2x^2t + \frac{\pi^2}{80}(1 + 4e^{-10t} - 5e^{-8t}) + \frac{1}{6}(6te^{-8t} - e^{-2t} + e^{-8t}) \cos x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3e^{-5t}}{8n^2(n^2 - 1)} \left( \cos \alpha_n t - e^{-3t} - \frac{3}{\alpha_n} \sin \alpha_n t \right) \cos 4nx,$   
где  $\alpha_n = \sqrt{16n^2 - 25}$ ,  $12x(\pi - 2x) = \pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2} \cos 4nx$ ;

5)  $u(x, t) = \frac{2xt}{\pi} + (te^{-t} - \operatorname{sh} t) \sin 2x + \cos \sqrt{11}t \sin 4x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \alpha_{2n+1}}{16n(n+1)} \left( e^{-t} - \cos \omega_n t + \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right) \sin 2(2n+1)x,$   
где  $\alpha_{2n+1} = \frac{-2}{\pi(2n+1)^3}$ ,  $x \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin 2nx$ ,  
 $\omega_n = \sqrt{16n^2 + 16n - 1}$ ;

6)  $u(x, t) = xt^2 - \frac{\pi^2}{27}e^{-2t} + \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t - te^{-2t} \right) \cos 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2 - 1} \left( e^{-2t} - \cos \omega_n t + \frac{2 \sin \omega_n t}{\omega_n} \right) \cos 3nx,$   
где  $\alpha_n = \frac{4}{9n^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha_0 = \frac{\pi^2}{27}$ ,  $\left( x - \frac{\pi}{3} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos 3nx$ ,  $\omega_n = \sqrt{9n^2 - 13}$ ;

7)  $u(x, t) = 6xt^2 + 4(\operatorname{sh} t - te^{-t}) \cos x - \frac{3}{5}e^{-t} \cos 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3\pi \alpha_n}{4n(n+1)} \left( e^{-t} - \cos \omega_n t + \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right) \cos(2n+1)x,$   
где  $\alpha_n = \frac{8}{\pi(3+2n)(1-2n)}$ ,  $\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(2n+1)x$ ,  
 $\omega_n = \sqrt{4n^2 + 4n - 1}$ ;

$$8) u(x, t) = (2x + 1)t^2 + 8(\sinh t - te^{-t}) \sin x + \frac{3}{5}e^{-t} \sin 3x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3\pi\alpha_n}{4n(n+1)} \left( e^{-t} - \cos \omega_n t + \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right) \sin(2n+1)x,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{8(-1)^n}{\pi(3+2n)(1-2n)}, \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2n+1)x, \\ \omega_n = \sqrt{8n^2 + 8n - 1};$$

$$9) u(x, t) = \frac{1}{2\pi}(x + 2\pi) + e^{5t} \sin x + 32t \sin \frac{3x}{2} -$$

$$- \sum_{\substack{n=2p+1, \\ p=0,2,3,\dots}}^{\infty} \frac{27\pi\alpha_n}{4\lambda_n^2 - 9} (1 - e^{(9-4\lambda_n^2)t}) \sin \lambda_n x,$$

$$\text{где } \alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 2p, \\ -\frac{4}{\pi\lambda_n^3}, & n = 2p+1, \end{cases} x(x-2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{nx}{2}, \lambda_n = \frac{n}{2}, \\ n = 1, 2, \dots;$$

$$10) u(x, t) = xt^2 + \pi^2(4t+1) - 6t^2 \cos 2x -$$

$$- \sum_{n \neq 0,4}^{\infty} \frac{12\alpha_n}{\lambda_n^2 - 4} [e^{(4-\lambda_n^2)t} + (\lambda_n^2 - 4)t - 1] \cos \lambda_n x,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{4}{\lambda_n^2}, n = 1, 2, \dots, a_0 = \frac{4\pi^2}{3}, (x-2\pi)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \lambda_n x, \\ \lambda_n = \frac{n}{2}, n = 0, 1, \dots;$$

$$11) u(x, t) = x + t - \pi - 16t^2 \cos \frac{x}{2} + \frac{4}{27} \cos \frac{3x}{2} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi\alpha_n}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n t) \cos \lambda_n x,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi\lambda_n^3}, x^2 - \pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \lambda_n x,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} + n, n = 0, 1, \dots, \mu_n^2 = 4\lambda_n^2 - 1;$$

$$12) u(x, t) = \pi x + 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{8}t) + 1 \right) \sin x - \frac{4}{27}t^2 \sin 3x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi\alpha_n}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n t) \sin \lambda_n x,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{-8}{\pi\lambda_n^3}, x(x-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \lambda_n x,$$

$$\lambda_n = 1 + 2n, n = 0, 1, \dots, \mu_n^2 = \lambda_n^2 - 9.$$

**20.20.**  $A \cos \frac{a\pi\sqrt{2}}{p} t \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}.$

**20.21.**  $3 \cos(\sqrt{5} t) \sin x \sin 2y + \sin 5t \sin 3x \sin 4y.$

**20.22.**  $\frac{16Ap^2q^2}{\pi^6} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{p} \sin \frac{(2l+1)\pi y}{q}}{(2k+1)^2(2l+1)^2} \cos \pi a \mu_{k,l} t,$   
 где  $\mu_{k,l} = \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{p^2} + \frac{(2l+1)^2}{q^2}}.$

**20.23.** 1)  $A \cos \frac{a \mu_n t}{R} J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right);$   
 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + b_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right),$  где

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r f(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right) dr,$$

$$b_n = \frac{2}{a \mu_n R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r F(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right) dr$$

( $\mu_n$  — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ );

3)  $u(r, t) = 8A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{a \mu_n t}{R},$   
 где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

Ука з а н и е. Задача приводится к решению уравнения  $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$  при условиях  $u|_{r=R} = 0, |u|_{r=0} < \infty; u|_{t=0} = A \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ ,  $A = \text{const}$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ . При вычислении коэффициентов ряда (\*) воспользоваться следующими формулами:  
 $\int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x)$ ,  $\int_0^x \xi^3 J_0(\xi) d\xi = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$ .

**20.24.** 1)  $u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{4(\mu_k^{(0)})^3} \left[ \mu_k^{(0)} t - \sin \left( \mu_k^{(0)} t \right) \right] J_0 \left( 2\mu_k^{(0)} r \right),$

$$\text{где } b_k = \frac{\int_0^{1/2} r f(r) J_0(2\mu_k^{(0)} r) dr}{\int_0^{1/2} r \left( J_0(2\mu_k^{(0)} r) \right)^2 dr}, k = 1, 2, \dots;$$

$$2) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2(\mu_k^{(0)})^2} \sin^2 \left( \mu_k^{(0)} t \right) \cdot J_0 \left( 2\mu_k^{(0)} r \right),$$

$$\int_0^{1/2} r f(r) J_0(2\mu_k^{(0)} r) dr$$

где  $b_k = \frac{0}{\int_0^{1/2} r \left( J_0(2\mu_k^{(0)} r) \right)^2 dr}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

$$3) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left( \mu_k^{(1)} t \right) \cdot J_1 \left( \mu_k^{(1)} r \right) \sin \varphi +$$

$$+ \frac{2+t}{2\mu_1^{(2)}} \sin \left( \mu_4^{(2)} t \right) J_2 \left( \mu_4^{(2)} r \right) \cos 2\varphi,$$

$$\int_0^1 r f(r) J_1(\mu_k^{(1)} r) dr$$

где  $a_k = \frac{0}{\int_0^1 r \left( J_1(\mu_k^{(1)} r) \right)^2 dr}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

$$4) \quad u(r, \varphi, t) =$$

$$= \left[ \frac{2}{\mu_3^{(0)}} \sin \left( \frac{1}{2} \mu_3^{(0)} t \right) + \frac{a_{03}}{2(\mu_3^{(0)})^2} \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{2} \mu_3^{(0)} t \right) \right) \right] J_0 \left( \mu_3^{(0)} r \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{\infty} \frac{a_{0k}}{2(\mu_k^{(0)})^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{1}{2} \mu_k^{(0)} t \right) \right] J_0 \left( \mu_k^{(0)} r \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos \left( \frac{1}{2} \mu_k^{(2)} t \right) J_2 \left( \mu_k^{(2)} r \right) \cos 2\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{4k}}{2(\mu_k^{(4)})^2} \left[ \cos \left( \frac{1}{2} \mu_k^{(4)} t \right) - 1 \right] J_4 \left( \mu_k^{(4)} r \right) \cos 4\varphi,$$

$$\int_0^1 r F_m(r) J_m(\mu_k^{(m)} r) dr$$

где  $a_{mk} = \frac{0}{\int_0^1 r \left( J_m(\mu_k^{(m)} r) \right)^2 dr}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, 2, 4, \dots$ ,

$F_m(r) = f(r)$ , если  $m = 0, 4$ ,  $F_m(r) = g(r)$ , если  $m = 2$ ;

$$5) \quad u(r, \varphi, t) =$$

$$= \left[ \cos \left( \mu_4^{(2)} t \right) + \frac{a_{24}}{2(\mu_4^{(2)})^2} \left( 1 - \cos(\mu_4^{(2)} t) \right) \right] J_2 \left( \frac{1}{2} \mu_4^{(2)} r \right) \sin 2\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a_{1k}}{(\mu_k^{(1)})^2} \left[ 1 - \cos \left( \mu_k^{(1)} t \right) \right] J_1 \left( \frac{1}{2} \mu_k^{(1)} r \right) \cos \varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2(\mu_k^{(2)})^2} \left[ 1 - \cos(\mu_k^{(2)} t) \right] J_2\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(2)} r\right) \sin 2\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{4k}}{\mu_k^{(4)}} \left[ \sin(\mu_k^{(4)} t) - \frac{1 - \cos(\mu_k^{(4)} t)}{2\mu_k^{(4)}} \right] J_4\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(4)} r\right) \sin 4\varphi,$$

$$\text{где } a_{mk} = \frac{\int_0^2 r f(r) J_m\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(m)} r\right) dr}{\int_0^2 r \left(J_m\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(m)} r\right)\right)^2 dr}, \quad k = 1, 2, \dots, m = 1, 2, 4, \dots;$$

$$6) \quad u(r, \varphi, t) = \\ = \left[ \cos\left(\frac{1}{4}\mu_4^{(0)} t\right) + \frac{2a_{04}}{(\mu_4^{(0)})^2} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{4}\mu_4^{(0)} t\right)\right) \right] J_0\left(\frac{1}{2}\mu_4^{(0)} r\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_{0k}}{(\mu_k^{(0)})^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{1}{4}\mu_4^{(0)} t\right) \right] J_0\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(0)} r\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a_{3k}}{\mu_k^{(3)}} \sin\left(\frac{1}{4}\mu_k^{(0)} t\right) J_3\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(3)} r\right) \sin 3\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_{6k}}{(\mu_k^{(6)})^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{1}{4}\mu_k^{(6)} t\right) \right] J_6\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(6)} r\right) \cos 6\varphi,$$

$$\text{где } a_{mk} = \frac{\int_0^2 r F_m(r) J_m\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(m)} r\right) dr}{\int_0^2 r \left(J_m\left(\frac{1}{2}\mu_k^{(m)} r\right)\right)^2 dr}, \quad k = 1, 2, \dots, m = 0, 3, 6, \dots,$$

$F_m(r) = g(r)$ , если  $m = 3$ ,  $F_m(r) = f(r)$ , если  $m = 0, 6$ ;

$$7) \quad u(r, \varphi, t) = \left[ \frac{\sin(2\mu_1^{(2)} t)}{2\mu_1^{(2)}} - \frac{a_{21} (\cos(2\mu_1^{(2)} t) - 1)}{8(\mu_1^{(2)})^2} \right] J_2\left(\mu_1^{(2)} r\right) \cos 2\varphi + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{2k}}{8(\mu_k^{(2)})^2} \left[ \cos(2\mu_k^{(2)} t) - 1 \right] J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right) \cos 2\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{1k}}{2(\mu_k^{(1)})^2} \left[ 1 - \cos(2\mu_k^{(1)} t) \right] J_1\left(\mu_k^{(1)} r\right) \sin \varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} a_{0k} \left[ \cos(2\mu_k^{(0)} t) - \frac{1 - \cos(2\mu_k^{(0)} t)}{8(\mu_k^{(0)})^2} \right] J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right),$$

$$\text{где } a_{mk} = \frac{\int_0^1 r f(r) J_m(\mu_k^{(m)} r) dr}{\int_0^1 r (J_m(\mu_k^{(m)} r))^2 dr}, \quad k = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots.$$

- 20.25.** 1)  $u = \cos\left(\frac{1}{3}\mu_4^{(0)}t\right) J_0\left(\mu_4^{(0)}r\right) +$   
 $+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{3b_j}{\mu_j^{(4)}} \sin\left(\frac{1}{3}\mu_j^{(4)}t\right) + \frac{a_j}{(\mu_j^{(4)})^2} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{3}\mu_j^{(4)}t\right)\right) \right] J_4\left(\mu_j^{(4)}r\right) \cos 4\varphi,$   
 $f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_4\left(\mu_j^{(4)}r\right), \quad g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_4\left(\mu_j^{(4)}r\right);$
- 2)  $u = \cos\left(4\mu_4^{(4)}t\right) J_4\left(4\mu_4^{(4)}r\right) \cos 4\varphi +$   
 $+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{a_j}{(4\mu_j^{(4)})^2} \left(1 - \cos\left(4\mu_j^{(4)}t\right)\right) + \frac{b_j}{4\mu_j^{(4)}} \sin\left(4\mu_j^{(4)}t\right) \right] \times$   
 $\times J_4\left(4\mu_j^{(4)}r\right) \sin 4\varphi,$   
 $f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_4\left(4\mu_j^{(4)}r\right), \quad g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_4\left(4\mu_j^{(4)}r\right);$
- 3)  $u = \frac{\sin(2\mu_3^{(0)}t)}{2\mu_3^{(0)}} J_0\left(\frac{1}{2}\mu_3^{(0)}r\right) +$   
 $+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left(b_j - \frac{a_j}{(2\mu_j^{(6)})^2}\right) \cos\left(2\mu_j^{(6)}t\right) + \frac{a_j}{(2\mu_j^{(6)})^2} \right] J_6\left(\frac{1}{2}\mu_j^{(6)}r\right) \cos 6\varphi,$   
 $f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_6\left(\frac{1}{2}\mu_j^{(6)}r\right), \quad g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_6\left(\frac{1}{2}\mu_j^{(6)}r\right);$
- 4)  $u = \frac{\sin(\mu_5^{(3)}t)}{\mu_5^{(3)}} J_3\left(2\mu_5^{(3)}r\right) \sin 3\varphi +$   
 $+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{a_j}{4(\mu_j^{(3)})^2} + \left(b_j - \frac{a_j}{4(\mu_j^{(3)})^2}\right) \cos\left(\mu_j^{(3)}t\right) \right] J_3\left(2\mu_j^{(3)}r\right) \sin 3\varphi,$   
 $f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_3\left(2\mu_j^{(3)}r\right), \quad g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_3\left(2\mu_j^{(3)}r\right).$

**20.26.** 1)  $u(x, t) = [\mu_k^{-4}(2 - \mu_k^2) \cos \mu_k t + \mu_k^{-2} t^2 + \mu_k^{-4}(\mu_k^2 - 2)] J_0(\mu_k x).$

Указание. Решение можно искать в виде  $u = v + w$ , где  $v = (at^2 + c) J_0(\mu_k x)$  — частное решение неоднородного уравнения,  $w$  — решение однородного уравнения,  $w|_{t=0} = -v|_{t=0}$ ,  $w_t|_{t=0} = -v_t|_{t=0}$ ;

2)  $u(x, t) = (\mu_k^2 - 1)^{-1} (\cos t + \sin t - \cos \mu_k t - \mu_k^{-1} \sin \mu_k t) J_0(\mu_k x).$

**Указание.** Решение можно искать в виде  $u = v + w$ , где  $v = (a \sin t + b \cos t)J_0(\mu_k x)$  — частное решение неоднородного уравнения,  $w = (A \cos \mu_k t + B \sin \mu_k t)J_0(\mu_k x)$  — решение однородного уравнения,  $w|_{t=0} = -v|_{t=0}$ ,  $w_t|_{t=0} = -v_t|_{t=0}$ .

**20.27.** 1)  $\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} \cos 2t \right]$ ; 2)  $\frac{J_0(2x)}{J_0(2)} \cos 2t$ ;

3)  $t - 1 + J_0(\mu_1 x) \cos \mu_1 t$ .

**20.28.** 1)  $\left[ 1 - \frac{J_0(x)}{J_0(1)} \right] \cos t$ ; 2)  $1 + \frac{1}{9} \sin 3t \left[ 1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)} \right]$ ;

3)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1 \right] \cos 2t + J_0(\mu_1 x) \cos \mu_1 t$ .

**20.29.**  $\frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})} \cos 2t + \frac{J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})} \sin 3t$ .

**20.30.**  $\frac{p_0}{\omega^2 \rho} \left[ \frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)} - 1 \right] \sin \omega t + \frac{2p_0 \omega R^3}{a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin \frac{\alpha \mu_n t}{R}}{\mu_n^2 (\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2) J_1(\mu_n)}$ ,

где  $\rho$  — поверхностная плотность мембраны.

**Указание.** Задача сводится к решению уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} u_{tt} &= u_{rr} + r^{-1} u_r + \rho^{-1} \sin \omega t, \quad 0 < r < R, \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=R} = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

**20.31.** 1)  $J_1(\mu_k x) \cos \mu_k t + J_1(\mu_m x) \cos \mu_m t$ ;

2)  $J_1(\mu_k x) \cos \mu_k t + \mu_m^{-1} J_1(\mu_m x) \sin \mu_m t$ .

**20.32.**  $(1 + \mu_k^2)^{-1} (e^t - \cos \mu_k t - \mu_k^{-1} \sin \mu_k t) J_1(\mu_k x)$ .

**20.33.**  $\frac{1}{2J_1(1)} J_1(x) \sin t + \frac{1}{2J_1(3)} J_1(3x) \sin 3x$ .

**20.34.** 1)  $(\cos \mu_k t + \mu_k^{-1} \sin \mu_k t) J_2(\mu_k x)$ ;

2)  $\left( \frac{1}{2} \cos \mu_k t + \frac{3}{2} \mu_k^{-1} \sin \mu_k t \right) J_2(\mu_k x)$ .

**20.35.** 1)  $(\mu_1^{-2} t - \mu_1^{-3} \sin \mu_1 t) J_2(\mu_1 x)$ ;

2)  $(\mu_1^2 - 1)^{-1} (\cos t - \cos \mu_1 t) J_2(\mu_1 x)$ .

**20.36.** 1)  $\mu_1^{-1} J_3(\mu_1 x) \sin \mu_1 t$ ; 2)  $(\cos \mu_1 t + \mu_1^{-1} \sin \mu_1 t) J_3(\mu_1 x)$ .

**20.37.** 1)  $[\mu_k(1 + \mu_k^2)]^{-1} (\sin \mu_k t - \mu_k \cos \mu_k t + \mu_k e^{-t}) J_3(\mu_k x)$ ;

2)  $\mu_k^{-2} (2\mu_k^{-2} + t - t^2 - \mu_k^{-1} \sin \mu_k t - 2\mu_k^{-2} \cos \mu_k t) J_3(\mu_k x)$ .

**20.38.**  $J_0(2\mu_1\sqrt{x}) \cos \mu_1 t$ .

Указание. Полагая  $u = X(x)T(t)$ , получить уравнения

$$X'' + \frac{X'}{x} + \frac{\lambda^2}{x} X = 0, \quad T'' + \lambda^2 T = 0. \quad (*)$$

Уравнение (\*) подстановкой  $\eta = 2\lambda\sqrt{x}$  свести к уравнению Бесселя

$$X''(\eta) + \frac{1}{\eta} X'(\eta) + X(\eta) = 0,$$

имеющему общее решение  $X(\eta) = aJ_0(\eta) + bY_0(\eta)$ .

**20.39.**  $\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_0(\mu_n \sqrt{\pi/l})}{J_1^2(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}}$ ,

где  $A_n = \int_0^l u_0(x) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx$ ,  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

Указание. Задача приводится к решению уравнения  $u_{xx} = a^2(xu_x)_x$ ,  $0 < x < l$ ,  $a = \sqrt{g}$ , при условиях  $|u|_{x=0} < \infty$ ,  $u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**20.40.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right)$ , где

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}, \quad A_n = \frac{1}{l J_1^2(\mu_n)} \int_0^l u_0(x) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{a\lambda_n l J_1^2(\lambda_n)} \int_0^l u_1(x) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

Указание. Задача приводится к решению уравнения  $u_{tt} = a^2(xu_x)_x + \omega^2 u$ ,  $0 < x < l$ ,  $a = \sqrt{g}$ , при условиях  $|u|_{x=0} < \infty$ ,  $u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ .

**20.41.**  $\frac{2}{\mu_k} J_0(\mu_k \sqrt{x}) \sin \frac{\mu_k}{2} t$ .

**20.42.** 1)  $\left(4\mu_1^{-2}t - 8\mu_1^{-3} \sin \frac{\mu_1}{2} t\right) J_0(\mu_1 \sqrt{x})$ ;

2)  $4(\mu_1^2 - 4)^{-1} \left(\sin t - 2\mu_1^{-1} \sin \frac{\mu_1}{2} t\right) J_0(\mu_1 \sqrt{x})$ .

**20.43.**  $\frac{2}{\mu_k} J_2(\mu_k \sqrt{x}) \sin \frac{\mu_k}{2} t$ .

**20.44.**  $\frac{2}{\mu_1} J_3(\mu_1 \sqrt{x}) \sin \frac{\mu_1}{2} t$ .

- 20.45.** 1)  $u(x, t) = \frac{1}{(\mu_1^{(1)})^2} \left( t - \frac{\sin(\mu_1^{(1)} t)}{\mu_1^{(1)}} \right) J_1 \left( \mu_1^{(1)} x \right) + \frac{1}{(\mu_2^{(1)})^2} \left( t - \cos(\mu_2^{(1)} t) \right) J_1 \left( \mu_2^{(1)} x \right);$
- 2)  $u(x, t) = \frac{\cos t}{(\mu_1^{(1)})^2 - 1} J_1 \left( \mu_1^{(1)} x \right) + \frac{1}{(\mu_2^{(1)})^2 - 1} \left( \sin t - \frac{\sin(\mu_2^{(1)} t)}{\mu_2^{(1)}} \right) J_1 \left( \mu_2^{(1)} x \right);$
- 3)  $u(x, t) = \left[ \cos \mu t - \frac{\sin \mu t}{\mu(\mu^2 - 1)} + \frac{\sin t}{\mu^2 - 1} \right] J_1(\mu x), \quad \text{где } \mu = \mu_1^{(1)};$
- 4)  $u(x, t) = \left( \frac{2}{\mu^4} \cos \mu t + \frac{t^2}{\mu^2} - \frac{2}{\mu^2} \right) J_1(\mu x), \quad \text{где } \mu = \mu_5^{(1)}.$

**20.46.** 1)  $u(x, t) = \left[ (1 - \cos \mu t) \left( 1 - \frac{2}{\mu^2} \right) + t^2 \right] \frac{J_0(\mu x)}{\mu^2},$

где  $\mu = \mu_2^{(0)}$ ;

- 2)  $u(x, t) = \frac{1}{4 - \mu^2} (\cos \mu t - \cos 2t) J_0(\mu x), \quad \text{где } \mu = \mu_2^{(0)};$
- 3)  $u(x, t) = \frac{1}{\mu^2 - 1} \left[ \cos t - \cos \mu t + \sin t - \frac{1}{\mu} \sin \mu t \right] J_0(\mu x),$   
где  $\mu = \mu_2^{(0)}$ .

- 20.47.** 1)  $u(x, t) = \left( \cos(\mu_1^{(2)} t) + \sin(\mu_1^{(2)} t) \right) J_2 \left( \mu_1^{(2)} x \right) + \left( \cos(\mu_2^{(2)} t) + \sin(\mu_2^{(2)} t) \right) J_2 \left( \mu_2^{(2)} x \right);$
- 2)  $u(x, t) = \left[ \frac{2}{(\mu_2^{(3)})^4} (\cos(\mu_2^{(3)} t) - 1) + \frac{t^2}{(\mu_2^{(3)})^2} \right] J_3 \left( \mu_2^{(3)} x \right) + \cos(\mu_3^{(3)} t) J_3 \left( \mu_3^{(3)} x \right);$
- 3)  $u(x, t) = \frac{1}{(\mu_2^{(5)})^2 - 1} \left( \cos(\mu_2^{(5)} t) - \cos t \right) J_5 \left( \mu_2^{(5)} x \right) + \frac{\sin(\mu_5^{(5)} t)}{\mu_5^{(5)}} J_5 \left( \mu_5^{(5)} x \right);$
- 4)  $u(x, t) = \frac{1}{(\mu_3^{(6)})^2 - 1} \left( \frac{\sin(\mu_3^{(6)} t)}{\mu_3^6} - \sin t \right) J_6 \left( \mu_3^{(6)} x \right) + \cos(\mu_6^{(6)} t) J_6 \left( \mu_6^{(6)} x \right);$

$$5) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left( \frac{1}{3} \mu_k^{(4)} t \right) J_4 \left( \frac{1}{3} \mu_k^{(4)} x \right),$$

$$\int_0^3 x f(x) J_4 \left( \frac{1}{3} \mu_k^{(4)} x \right) dx$$

$$\text{где } a_k = \frac{\int_0^3 x \left( J_4 \left( \frac{1}{3} \mu_k^{(4)} x \right) \right)^2 dx}{\int_0^3 x \left( J_4 \left( \frac{1}{3} \mu_k^{(4)} x \right) \right)^2 dx}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$6) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a_k}{\mu_k^{(5)}} \sin \left( \frac{1}{4} \mu_k^{(5)} t \right) J_5 \left( \frac{1}{4} \mu_k^{(5)} x \right),$$

$$\int_0^4 x f(x) J_5 \left( \frac{1}{4} \mu_k^{(5)} x \right) dx$$

$$\text{где } a_k = \frac{\int_0^4 x \left( J_5 \left( \frac{1}{4} \mu_k^{(5)} x \right) \right)^2 dx}{\int_0^4 x \left( J_5 \left( \frac{1}{4} \mu_k^{(5)} x \right) \right)^2 dx}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

$$\mathbf{20.48.} \quad 1) \quad u(x, t) = 4 \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{2} \mu_1^{(0)} t \right) \right) J_0 \left( \mu_1^{(0)} \sqrt{x} \right) +$$

$$+ 2 \sin \left( \frac{1}{2} \mu_2^{(0)} t \right) J_0 \left( \mu_2^{(0)} \sqrt{x} \right);$$

$$2) \quad u(x, t) = \cos \left( \frac{1}{2} \mu_1^{(4)} t \right) J_4 \left( \mu_1^{(4)} \sqrt{x} \right);$$

$$3) \quad u(x, t) = \frac{2}{\mu_4^{(1)}} \sin \left( \frac{1}{2} \mu_4^{(1)} t \right) J_1 \left( \mu_4^{(1)} \sqrt{x} \right).$$

$$\mathbf{20.49.} \quad 1) \quad u(x, t) = \frac{2}{\mu_3^{(0)}} \left( 1 + \frac{1}{2} \mu_3^{(0)} t - e^{-\mu_3^{(0)} t} \right) J_0 \left( \mu_3^{(0)} \sqrt{x} \right);$$

$$2) \quad u(x, t) = \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{2}{\mu} e^{-\mu t} + t e^{-\mu t} + t - \frac{2}{\mu} \right) J_2(\mu), \quad \text{где } \mu = \mu_3^{(2)};$$

$$3) \quad u(x, t) = \frac{4}{\mu} \left( e^{-\frac{\mu}{4} t} - e^{-\mu t} \right) J_0 \left( \frac{1}{2} \mu x \right), \quad \text{где } \mu = \mu_2^{(0)}.$$

$$\mathbf{20.50.} \quad 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left\{ - \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx;$$

если  $u_0(x) = A = \text{const}$ , то

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp \left\{ - \left( \frac{(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l};$$

если  $u_0(x) = Ax(x - 1)$ , то

$$u(x, t) = \frac{8At^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \exp \left\{ - \left( \frac{(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l};$$

$$2) \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sigma^2 + \mu_n^2}{\sigma(\sigma+1) + \mu_n^2} \exp \left\{ - \left( \frac{\mu_n a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

где  $a_n = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} dx$ ,  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\sigma}$ ,  $\sigma = hl > 0$ .

Указание. Границные условия имеют вид  $u|_{x=0} = 0$ ,  $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$ ;

$$3) \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp \left\{ - \left( \frac{\mu_n a}{l} \right)^2 t \right\} \frac{\mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + \sigma \sin \frac{\mu_n x}{l}}{\sigma(\sigma+2) + \mu_n^2},$$

где  $b_n = \int_0^l u_0(x) \left( \mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + \sigma \sin \frac{\mu_n x}{l} \right) dx$ ;

$\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{\mu} \right), \quad \sigma = hl, \quad u_0(x) = u|_{t=0}.$$

Указание. Границные условия имеют вид  $(u_x - hu)|_{x=0} = (u_x + hu)|_{x=l} = 0$ ;

4)  $u_0$ . Указание. Границные условия имеют вид  $u_x|_{x=0} = (u_x + hu)|_{x=l} = 0$ ;

$$5) \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp \left\{ - \left( \frac{(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{u_0}{2};$$

$$6) \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp \left\{ - \left( \frac{2(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \cos \frac{2(2k+1)\pi x}{l},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{u_0}{2}.$$

$$\mathbf{20.51.} 1) \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \exp \left\{ - \left( \frac{2n+1}{2}\pi \right)^2 t \right\} \cos \frac{2n+1}{2}\pi x;$$

$$2) \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{(2n+1)}{2}\pi \right)^2 + 1 \right] t \right\} \sin \frac{(2n+1)}{2}\pi x;$$

$$3) -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \{-(2n+1)^2 t\} \sin(2n+1)x.$$

- 20.52.** 1)  $u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{(u_0 - u_1)(1 - (-1)^n) +$
- $+ (-1)^n(u_2 - u_0)\} \exp \left\{ - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{\pi n x}{l},$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l};$
- 2)  $u_1 + \frac{8At^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left\{ - \left( \frac{(2n+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} -$ 
 $- 4u_1 \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ - \left( \frac{(2n+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l},$ 
 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_1;$ 

3)  $u_2 + \frac{4(A-u_2)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp \left\{ - \left( \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} -$ 
 $- \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left\{ - \left( \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l};$ 

4)  $\frac{qx}{k} + u_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n - \frac{4}{\pi^2} \frac{(2n+1)\pi u_1 + lq/k}{(2n+1)^2} \right] \times$ 
 $\times \exp \left\{ - \left( \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$ 

где  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx.$

Указание. Границные условия имеют вид  $u|_{x=0} = u_1$ ,  $ku_x|_{x=l} = q$ .

- 20.53.** 1)  $\frac{u_2 \operatorname{sh} \frac{h}{a} x - u_1 \operatorname{sh} \frac{h}{a} (x-l)}{\operatorname{sh} \frac{h}{a} l} +$
- $+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi n}{l} \frac{(-1)^n u_2 - u_1}{\lambda_n^2} + a_n \right) \cdot \exp \{-(a\lambda_n)^2 t\} \sin \frac{\pi n x}{l},$
- где  $\lambda_n^2 = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 + \left( \frac{h}{a} \right)^2$ ,  $a_n = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} - h^2 u \quad (*)$$

при граничных условиях  $u|_{x=0} = u_1$ ,  $u|_{x=l} = u_2$  и начальном условии  $u|_{t=0} = u_0(x)$ . Решение этой задачи искать в виде  $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$ , где  $v$  — решение уравнения  $a^2 v'(x) - h^2 v = 0$ , удовлетворяющее заданным граничным условиям, а  $w(x, t)$  — решение урав-

нения  $(*)$  при нулевых граничных условиях и начальном условии  $u|_{t=0} = u_0(x) - v(x)$ ;

$$2) u_1 \frac{h \operatorname{ch} \frac{h}{a}(l-x) + h_1 a \operatorname{sh} \frac{h}{a}(l-x)}{h \operatorname{ch} \frac{hl}{a} + h_1 a \operatorname{sh} \frac{hl}{a}} - \\ - 2u_1 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(\mu_n^2 + h_1^2)}{(a^2 \mu_n^2 + h^2)} \frac{\exp\{-(a^2 \mu_n^2 + h^2)t\}}{l(\mu_n^2 + h_1^2) + h_1} \sin \mu_n x,$$

где  $\mu_n$  — положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} l\mu = -\frac{\mu}{h_1}$ .

**Указание.** Граничные условия имеют вид  $u|_{x=0} = u_1$ ,  $(u_x + h_1 u)|_{x=l} = 0$ . Решение искать в виде  $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$ , где  $v$  — решение уравнения  $a^2 v''(x) - h^2 v = 0$ , удовлетворяющее краевым условиям  $v|_{x=0} = u_0(x)$ ,  $(v_x + h_1 v)|_{x=l} = 0$ , а  $w(x, t)$  — решение уравнения  $(*)$  (см. задачу 20.53, 1)) при условиях  $w|_{x=0} = 0$ ,  $(w_x + hw)|_{x=l} = 0$ ,  $w|_{t=0} = -v(x)$ .

$$\mathbf{20.54.} At \frac{l-x}{l} - \frac{2Al^2}{\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ 1 - \exp \left( - \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right) \right\} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

$$\mathbf{20.55.} 1) x - l + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{(2n+1)^2} \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l};$$

$$2) t \cos x + \frac{1}{8}(e^{-8t} - 1) \cos 3x; \quad 3) xt + \sin \pi x e^{x-t-\pi^2 t};$$

$$4) x + t \sin x + \frac{1}{8}(1 - e^{-8t}) \sin 3x; \quad 5) tx^2 + \frac{1}{4}(e^{4t} - 1) + t \cos 2x;$$

$$6) t + 1 + (1 - e^{-t})e^x \sin x + e^{x-4t} \sin 2x.$$

$$\mathbf{20.56.} 1) xt^2 + e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t} \cos 2x;$$

$$2) x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t) \cos 3x;$$

$$3) x + t^2 + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1) \cos x + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \cos 3x;$$

$$4) tx^2 + x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2 - 6} (1 - e^{-6(2k-1)^2 t}) \sin(2k-1)x, \\ C_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-3} \right);$$

$$5) t(x+1) + e^{-2x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{k^2 \pi^2 + 4} (1 - e^{-(k^2 \pi^2 + 4)t}) \sin k\pi x, \\ C_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2m, \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{2m-1} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m-3} \right), & \text{если } k = 2m-1. \end{cases}$$

$$\mathbf{20.57.} \quad 1) \quad u(x, t) = xe^{-t/4} + \frac{2}{\pi} te^{-t/4} \sin \frac{x}{2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{-t/4} - e^{-(n+1/2)^2 t})}{2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 (n^2 + n)} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

$$\text{где } x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X_n, \alpha_n = \frac{2(-1)^n}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^2};$$

$$2) \quad u(x, t) = x^2 e^{-t} + \left(\frac{\pi^2}{3} + 2\right) (2 - e^{-t}) - 4e^{-t} \cos x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(-1)^n (e^{-t} - e^{-n^2 t})}{n^2 (n^2 - 1)} \cos nx,$$

$$\text{где } x^2 + 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X_n, \alpha_n = \begin{cases} 2 + \frac{\pi^2}{3}, & n = 0, \\ \frac{4(-1)^n}{n^2}, & n \geq 1; \end{cases}$$

$$3) \quad u(x, t) = x^2 t - \frac{\pi^2 t}{3} + 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^4} (e^{-n^2 t} - 1) \cos nx;$$

$$4) \quad u(x, t) = x^2 e^t + \frac{\pi^2}{12} (1 - e^t) + 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 (1 + 4n^2)} (e^{-4n^2 t} - e^t) \cos nx;$$

$$5) \quad u(x, t) = \pi x + t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(2n+1)^2} (1 - e^{-(2n+1)^2 t}) \sin(2n+1)x,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{4(-1)^n}{\pi (2n+1)^2};$$

$$6) \quad u(x, t) = xt + \frac{\pi}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} (1 - e^{-n^2 t}) \cos nx,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{2 \cdot [(-1)^n - 1]}{\pi n^2};$$

$$7) \quad u(x, t) = x^2 t + t^2 - \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} e^{-16\pi^2 n^2 t} \cos 4\pi nx;$$

$$8) \quad u(x, t) = 2xt + t + \left[ \left(2 + \frac{2}{\pi^5}\right) e^{-16\pi^2 t} - \frac{2}{\pi^5} \right] \cos \pi x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^5 (2n+1)^5} (1 - e^{-16\pi^2 (2n+1)^2 t}) \cos(2n+1)\pi x;$$

$$9) \quad u(x, t) = xt + \left\{ \left[1 - \frac{128}{9\pi^6}\right] e^{3\pi^2 t/4} - \frac{32}{3\pi^4} \left[1 + \frac{4}{3\pi^2}\right] \right\} \cos \frac{\pi x}{2} -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma_k^2} (e^{-\gamma_k t} - 1 + \gamma_k t) \cos \frac{\pi(2k+1)x}{2},$$

$$\text{где } \gamma_k = \pi^2 \left( \frac{(2k+1)^2}{4} \right), k = 0, 1, 2, \dots;$$

- 10)  $u(x, t) = 1 + x + \left\{ \left[ 2 + \frac{a_1}{\gamma_1^6} \right] e^{-\gamma_1 t} + \frac{a_1}{\gamma_1^2} [\gamma_1 t - 1] \right\} \sin \frac{3\pi x}{4} +$   
 $+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma_k^2} (e^{-\gamma_k t} - 1 + \gamma_k t) \sin \frac{\pi(2k+1)x}{4},$   
 $\gamma_k = \pi^2 \frac{(2k+1)^2}{4}, k = 0, 1, 2, \dots;$
- 11)  $u(x, t) = e^{2t} + xe^{3t} - \frac{8}{3\pi} te^{2t} \sin \frac{x}{2} +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+n)(2n-1)(2n+3)} \left( e^{2t} - e^{(2-4n^2-4n)t} \right) \sin \left( \frac{1}{2} + n \right) x;$
- 12)  $u(x, t) = \pi x e^t + \frac{16}{\pi} t e^t \sin 2x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^t - e^{(5-4(2n-1)^2)t}}{\pi(2n-1)^3(n^2-n)} \sin(4n-2)x;$
- 13)  $u(x, t) = xt - x + \frac{1 - e^{\pi/3}}{3\pi} (e^{-8t} - e^t) - \frac{3(e^{\pi/3} + 1)}{5\pi} te^{-8t} \cos 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(e^{\pi/3}(-1)^n - 1) \cos 3nx}{3\pi(n^2-1)(9n^2+1)} \left( e^{-8t} - e^{(1-9n^2)t} \right);$
- 14)  $u(x, t) = x \operatorname{ch} t + \frac{32}{\pi} t e^{-t} \cos \frac{x}{2} -$   
 $- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n (e^{-t} - e^{-(8n^2+8n+1)t})}{\pi(n^2+n)(2n+1)^3} \cos \left( \frac{1}{2} + n \right) x;$
- 15)  $u(x, t) = \frac{1}{4} x^2 e^{-4t} + \left[ \frac{5}{8} + \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \right) e^{-4t} \right] +$   
 $+ \left( \frac{1}{2} - t \right) e^{-4t} \cos 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2(n^2-1)} \left( e^{-4t} - e^{-4n^2t} \right) \cos 2nx;$
- 16)  $u(x, t) = \pi x e^{-2t} + \left( 1 + \frac{32}{\pi} t \right) e^{-2t} \sin \frac{x}{2} +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8[1 - (-1)^n]}{\pi n^3(n^2-1)} \left( e^{-2t} - e^{-2n^2t} \right) \sin \frac{n}{2} x;$
- 17)  $u(x, t) = xt + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{1 + n^2} \left( \frac{1}{n^2} + e^{-(1+n^2)t} \right) \cos nx;$
- 18)  $u(x, t) = xt^2 + \frac{4}{\pi} \left( 1 + e^{-\frac{5}{4}t} \right) \cos \frac{x}{2} +$   
 $+ \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left( - \left( 1 + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) t \right) \cos nx;$
- 19)  $u(x, t) = 2xe^{-t} + \alpha_0 t e^{-t} \cos x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4n(n+1)} \left( e^{-t} - e^{-(2n+1)^2t} \right) \cos(2n+1)x,$   
 $2x - \pi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 \cos(2n+1)x, \quad \alpha_n = \frac{-8}{\pi(2n+1)^2}, n = 0, 1, \dots;$

- 20)  $u(x, t) = 3xe^{-t} + \alpha_0 te^{-t} \sin x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4n(n+1)} (e^{-t} - e^{-(2n+1)^2 t}) \sin(2n+1)x,$   
 $3x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2n+1)x, \alpha_n = \frac{12(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}, n = 0, 1, \dots;$
- 21)  $u(x, t) = \pi x + (t - \sin x)e^{-9t} - \frac{8}{9}te^{-9t} \sin 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2(n-1)(n+2)} (e^{-9t} - e^{-(2n+1)^2 t}) \sin(2n+1)x;$
- 22)  $u(x, t) = 2x + te^{-t} + 2te^{-t} + 2te^{-t} \cos x + \frac{1}{36}e^{-t} \cos 3x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)(2n+1)^2} (e^{-t} - e^{-(2n+1)^2 t}) \cos(2n+1)x;$
- 23)  $u(x, t) = (x+1) \cos t + \left[ \frac{\pi+2}{2\pi} (e^{-t} - \sin t) + \frac{\pi-2}{2\pi} \cos t \right] \cos x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \lambda_n^2}{1+\lambda_n^4} \left( e^{-\lambda_n^2 t} - \cos t - \frac{\sin t}{\lambda_n^2} \right) \cos \lambda_n x,$   
 где  $\lambda_n = 1 + 2n, \alpha_{2n} = -\alpha_{2n+1} = \frac{2}{\pi \lambda_n}, n = 0, 1, \dots$   
 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \lambda_n x;$
- 24)  $u(x, t) = (x+1) \sin t + \left[ \frac{\pi+2}{2\pi} (e^{-t} - \sin t) - \frac{\pi-2}{2\pi} \cos t \right] \sin x +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \lambda_n^2}{1+\lambda_n^4} \left( e^{-\lambda_n^2 t} - \cos t - \frac{\sin t}{\lambda_n^2} \right) \sin \lambda_n x,$   
 где  $\lambda_n = 1 + 2n, \alpha_{2n} = \alpha_{2n+1} = \frac{2}{\pi \lambda_n}, n = 0, 1, \dots$   
 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \lambda_n x;$
- 25)  $u(x, t) = \frac{x^2 t}{2\pi} + \frac{\pi}{6} (e^{-t} - 1) + \left[ \left( 1 + \frac{1}{\pi^2} e^{-2t} + \frac{1}{\pi^2} \right) \right] \cos x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n^2(n^2+1)} (e^{-t(n^2+1)} - 1) \cos nx;$
- 26)  $u(x, t) = (x-\pi)t + 1 + [(1-b_0)e^{3t/4} + a_0 t + b_0] \cos \frac{x}{2} +$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n t + b_n - b_n e^{-(\lambda_n^2 - 1)t}) \cos \lambda_n x, \text{ где } \lambda_n = \frac{1+2n}{2},$   
 $a_n = \frac{8}{\pi(2n+1)^2(1-\lambda_n^2)}, \quad b_n = \frac{8\lambda_n^2}{\pi(2n+1)^2(\lambda_n^2-1)^2}, n = 0, 1, \dots;$
- 27)  $u(x, t) = 3x + t + 5e^{-t} \cos 3x + 4te^{-t} \cos 9x +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{\gamma_n - 1} (e^{-t} - e^{-\gamma_n t}) \cos 3(2n+1)x,$   
 где  $b_n = \frac{20}{(2n+3)(2n-1)}, \gamma_n = \frac{(2n+1)^2 - 3}{6}, n = 2, 3, \dots;$

$$28) \quad u(x, t) = x + t - 7e^{-t} \cos 2x - \frac{24}{5}te^{-t} \cos 6x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{\gamma_n - 1} (e^{-t} - e^{-\gamma_n t}) \cos 2(2n+1)x,$$

$$\text{где } b_n = \frac{-24}{(2n+3)(2n-1)}, \gamma_n = \frac{(2n+1)^2 - 2}{7}, n = 2, 3, \dots;$$

$$29) \quad u(x, t) = \pi + \pi tx + \frac{4}{15}e^{-t} \sin \frac{x}{4} + \frac{8}{7}te^{-t} \sin \frac{3x}{4} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{\gamma_n - 1} (e^{-t} - e^{-\gamma_n t}) \sin(2n+1) \frac{x}{4},$$

$$\text{где } b_n = \frac{8(-1)^n}{(2n+5)(2n-3)}, \gamma_n = \frac{(2n+1)^2 - 5}{4}, n = 2, 3, \dots;$$

$$30) \quad u(x, t) = \pi(x+t) - \frac{1}{28}e^{-t} \sin \frac{x}{3} - \frac{2}{27}te^{-t} \sin x + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{\gamma_n - 1} (e^{-t} - e^{-\gamma_n t}) \sin(2n+1) \frac{x}{3},$$

$$\text{где } b_n = \frac{2(-1)^n}{(5-2n)(7+2n)}, \gamma_n = \frac{(2n+1)^2 - 4}{5}, n = 2, 3, \dots.$$

**20.58.** 1)  $\frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\pi na/R)^2 t} \sin \frac{\pi nr}{R}$ ,  $a_n = \int_0^R r u_0(r) \sin \frac{\pi na}{R} dx$ ;

2)  $\frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sigma^2 + \mu_n^2}{\sigma(\sigma+1) + \mu_n^2} e^{-(a\mu_n/R)^2 t} \sin \frac{\mu_n r}{R}$ ,  
 $a_n = \int_0^R r u_0(r) \sin \frac{\mu_n a}{R} dx$ ,  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) — положительные  
корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\sigma}$ ,  $\sigma = hR - 1$  ( $\sigma > -1$ );

3)  $u_1 + 2(u_1 - u_0) \frac{hR^2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-(a\mu_n/R)^2 t} \sin \frac{\mu_n r}{R}$ ,  
 $a_n = \frac{\sqrt{\mu_n^2 + \sigma^2}}{\mu_n(\mu_n^2 + \sigma(\sigma+1))}$ ,  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) — положительные корни  
уравнения  $\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\sigma}$ ,  $\sigma = hR - 1$  ( $\sigma > -1$ ),  $h$  — коэффициент  
теплообмена в краевом условии  $[u_r + h(u - u_1)]|_{r=R} = 0$ ;

4)  $u_0 + \frac{q}{k} \left( \frac{3a^2}{R} t + \frac{5r^2 - 3R^2}{10R} - \frac{2R^2}{r} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(a\mu_n/R)^2 t}}{\mu_n^2 \cos \mu_n} \sin \frac{\mu_n r}{R}$ ,  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = \mu$ .

**Указание.** Задача приводится к решению уравнения  $u_t = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$  при граничных условиях  $|u|_{r=0} < \infty$ ,  $u_r|_{r=R} = \frac{q}{k}$ .

**20.59.**  $\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk} e^{-(a\pi/l)^2(j^2+k^2)t} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{l},$   
 $a_{jk} = \frac{4}{l^2} \int_0^1 \int u_0(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{l} dx dy.$

Указание. Применить метод разделения переменных для уравнения  $u_t = a^2 \Delta u$  при условиях  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x, y)$ .

- 20.60.** 1)  $Ae^{-(a\mu_n/R)^2 t} J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right);$   
2)  $u_0 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r/R)}{\mu_n J_0(\mu_n)} e^{-(a\mu_n/R)^2 t} \right]$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ;  
3)  $\frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \mu_n^2}{\mu_n^2 + h^2 R^2} e^{-(a\mu_n/R)^2 t} J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right),$   
 $a_n = \frac{1}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^R r u_0(r) J_0 \left( \frac{\mu_n r}{R} \right) dr$ , где  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения  $\mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0$ .

Указание. Границные условия имеют вид  $|u|_{r=0} < \infty$ ,  $(u_r + hu)|_{r=R} = 0$ .

**20.61.** 1)  $u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16b_k}{(\mu_k^{(0)})^2 + 1} \left( e^t - e^{-(\mu_k^{(0)})^2 t} \right) J_0 \left( \frac{\mu_k^{(0)}}{4} r \right),$

где  $b_k = \frac{\int_0^4 f(r^2) J_0 \left( \frac{\mu_k^{(0)}}{4} r \right) r dr}{\int_0^4 J_0^2 \left( \frac{\mu_k^{(0)}}{4} r \right) r dr};$

2)  $u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\mu_k^{(0)})^6} \left( 2 - 2 \left( \mu_k^{(0)} \right)^2 t + \left( \mu_k^{(0)} \right)^4 t^2 - 2e^{-(\mu_k^{(0)})^2 t} \right) J_0 \left( \mu_k^{(0)} r \right),$   
 $\int_0^1 f(r^2) J_0 \left( \mu_k^{(0)} r \right) r dr$   
где  $b_k = \frac{0}{\int_0^1 J_0^2 \left( \mu_k^{(0)} r \right) r dr};$

3)  $u(r, \varphi, t) = \exp \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_2^{(1)}}{2} \right)^2 + 1 \right) t \right\} J_1 \left( \mu_2^{(1)} r \right) \sin \varphi +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\mu_n^{(2)}\right) + 1} \left[ t - \frac{1 + \exp\{-\left[\left(\frac{1}{2}\mu_n^{(2)}\right)^2 + 1\right]t\}}{\left(\frac{1}{2}\mu_n^{(2)}\right) + 1} \right] \times \\ \times J_2\left(\mu_n^{(2)}r\right) \cos 2\varphi, \text{ где } a_n = \frac{\int_0^1 r f(r) J_2\left(\mu_n^{(2)}r\right) dr}{\int_0^1 r J_2^2\left(\mu_n^{(2)}r\right) dr}, n = 1, 2, \dots;$$

$$4) u(r, \varphi, t) = 2 \exp \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_3^{(2)}}{12} \right)^2 + 2 \right) t \right\} J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}r}{4}\right) \sin 2\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(\frac{\mu_n^{(3)}}{12}\right)^2 + 2} \left( e^{-t} - \exp \left( \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_n^{(2)}}{12} \right)^2 + 2 \right) t \right\} \right) \right) \times \\ \times J_3\left(\frac{\mu_n^{(3)}r}{4}\right) \sin 3\varphi, \text{ где } b_n = \frac{\int_0^4 r f(r) J_3\left(\frac{\mu_n^{(3)}r}{4}\right) r dr}{\int_0^4 J_3^2\left(\frac{\mu_n^{(3)}r}{4}\right) r dr};$$

$$5) u(r, \varphi, t) = (1 - e^{-t}) J_1(r) \sin \varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp \left( - \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}} \right)^2 t \right) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}r}{\mu_1^{(1)}}\right) \cos 2\varphi, \\ \text{где } b_k = \frac{\int_0^{\mu_1^{(1)}} r J_1(r) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}r}{\mu_1^{(1)}}\right) r dr}{\frac{1}{2} \left(\mu_1^{(1)}\right)^2 \left(J_2'\left(\mu_k^{(2)}\right)\right)^2}, k = 1, 2, \dots;$$

$$6) u(r, \varphi, t) = -\frac{1}{4} \left( t - \frac{1}{4} \right) J_3(r) \cos 3\varphi + \\ + \exp \left( - 4 \left( \frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(3)}} \right)^2 t \right) J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{\mu_1^{(3)}}\right) \sin 2\varphi;$$

$$7) u(r, \varphi, t) = e^{-t} J_1(r) \sin \varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2} \left( 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}} \right)^2 t \right\} \right) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}r}{\mu_1^{(1)}}\right) \cos 2\varphi,$$

$$\text{где } b_k = \frac{\int_0^{\mu_1^{(1)}} r J_1(r) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}} r\right) r dr}{\frac{1}{2} \left(\mu_1^{(1)}\right)^2 \left(J_2'\left(\mu_k^{(2)}\right)\right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$8) \quad u(r, \varphi, t) = \left(\frac{1}{81} - \frac{r}{9}\right) J_2(r) \sin 2\varphi + \\ + \left(\frac{\mu_1^{(2)}}{3\mu_1^{(4)}}\right)^2 \left(1 - \exp\left\{-9\left(\frac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}}\right)^2 t\right\}\right) J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}} r\right) \cos 4\varphi;$$

$$9) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} 4a_k^{(1)} e^{-8(\mu_k^{(1)})^2 t} J_1\left(2\mu_k^{(1)} r\right) \cos \varphi - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_k^{(0)} e^{-8(\mu_k^{(0)})^2 t} J_0\left(2\mu_k^{(0)} r\right) + \\ + \frac{8(\mu_5^{(1)})^2 (\cos t - e^{-8(\mu_5^{(1)})^2 t}) + \sin t}{64(\mu_5^{(1)})^4 + 1} J_1\left(2\mu_5^{(1)} r\right) \cos \varphi, \\ \int_0^{1/2} f(r) J_m\left(2\mu_k^{(m)} r\right) r dr$$

$$\text{где } a_k^{(m)} = \frac{\int_0^{1/2} J_m^2\left(2\mu_k^{(m)} r\right) r dr}{\int_0^{1/2} J_m^2\left(2\mu_k^{(m)} r\right) r dr}, \quad m = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots;$$

$$10) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} 3a_k^{(2)} e^{-4(\mu_k^{(2)})^2 t} J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right) \sin 2\varphi - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} 4a_k^{(0)} e^{-4(\mu_k^{(0)})^2 t} J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right) + \\ + \frac{2(\mu_3^{(2)})^2 \sin 2t - \cos 2t + e^{-9(\mu_3^{(2)})^2 t}}{2(4(\mu_3^{(2)})^2 + 1)} J_2\left(\mu_3^{(2)} r\right) \sin 2\varphi, \\ \int_0^1 f(r) J_m\left(\mu_k^{(m)} r\right) r dr$$

$$\text{где } a_k^{(m)} = \frac{\int_0^1 J_m^2\left(\mu_k^{(m)} r\right) r dr}{\int_0^1 J_m^2\left(\mu_k^{(m)} r\right) r dr}, \quad m = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots;$$

$$11) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3} r\right) \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{3} r\right) \sin 3\varphi,$$

$$\text{где } T_k(t) = \frac{a_k}{3\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}\right)^2 + 2} \left(1 - \exp\left\{-\left(3\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}\right)^2 - 2\right)t\right\}\right), \quad k \neq 3,$$

$$Q_k(t) = \frac{b_k}{3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{3} \right)^2 + 2} \left( 1 - \exp \left\{ - \left( 3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{3} \right)^2 + 2 \right) t \right\} \right) + \\ + 2 \exp \left\{ - \left( 3 \left( \frac{\mu_1^{(1)}}{3} \right)^2 + 2 \right) t \right\}, \\ f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{3} r \right), \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{3} r \right), \\ \int_0^1 f(r) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{3} r \right) r dr \quad \int_0^1 f(r) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{3} r \right) r dr \\ \text{где } a_k = \frac{0}{\int_0^1 J_2^2 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} r \right) r dr}, \quad b_k = \frac{0}{\int_0^1 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{3} r \right) r dr};$$

$$12) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_2 \left( \mu_k^{(2)} r \right) \cos 2\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) J_0 \left( \mu_k^{(0)} r \right),$$

$$\text{где } T_k(t) = 2a_k \exp \left\{ - \left( 4 \left( \mu_k^{(3)} \right)^2 + 1 \right) t \right\}, \quad k \neq 3,$$

$$T_3(t) = \frac{1 - \exp \left\{ - \left( 4 \left( \mu_3^{(2)} \right)^2 + 1 \right) t \right\}}{4(\mu_3^{(2)})^2 + 1} +$$

$$+ 2a_1 \exp \left\{ - \left( 4 \left( \mu_3^{(3)} \right)^2 + 1 \right) t \right\},$$

$$Q_k(t) = -3b_k \exp \left\{ - \left( 4 \left( \mu_k^{(0)} \right)^2 + 1 \right) t \right\},$$

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2 \left( \mu_k^{(2)} r \right), \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0 \left( \mu_k^{(0)} r \right),$$

$$\int_0^1 f(r) J_2 \left( \mu_k^{(2)} r \right) r dr \quad \int_0^1 f(r) J_0 \left( \mu_k^{(0)} r \right) r dr \\ \text{где } a_k = \frac{0}{\int_0^1 J_2^2 \left( \mu_k^{(2)} r \right) r dr}, \quad b_k = \frac{0}{\int_0^1 J_0^2 \left( \mu_k^{(0)} r \right) r dr};$$

$$13) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{6} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} r \right) \cos 3\varphi,$$

$$\text{где } T_k(t) = \frac{a_k}{9 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} \right)^2 + 2} \left( 1 - \exp \left\{ - \left( 9 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} \right)^2 + 2 \right) t \right\} \right), \quad k \neq 3,$$

$$\begin{aligned}
T_3(t) &= \frac{a_3 \left[ 1 - \exp \left\{ - \left( 9 \left( \frac{\mu_3^{(1)}}{2} \right)^2 + 2 \right) t \right\} \right]}{9 \left( \frac{\mu_3^{(1)}}{2} \right)^2 + 2} + \\
&+ 2 \exp \left\{ - \left( 9 \left( \frac{\mu_3^{(1)}}{2} \right)^2 + 2 \right) t \right\}, \\
Q_k(t) &= b_k \exp \left\{ - \left( 9 \left( \mu_1^{(3)} \right)^2 + 2 \right) t \right\}, \\
f(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right), \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} r \right), \\
&\int_0^2 f(r) J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) r dr & \int_0^2 f(r) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} r \right) r dr \\
\text{где } a_k &= \frac{\int_0^2 J_1^2 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) r dr}{\int_0^2 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} r \right) r dr}, \quad b_k = \frac{\int_0^2 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} r \right) r dr}{\int_0^2 J_1^2 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) r dr};
\end{aligned}$$

$$14) \quad u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right) \cos 3\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} r \right) \sin 2\varphi,$$

$$\text{где } T_k(t) = a_k \exp \left\{ - \left( 5 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} \right)^2 + 3 \right) t \right\}, \quad k \neq 2,$$

$$T_2(t) = \frac{1 - \exp \left\{ - \left( 5 \left( \frac{\mu_1^{(3)}}{4} \right)^2 + 3 \right) t \right\}}{5 \left( \frac{\mu_3^{(3)}}{4} \right)^2 + 3} +$$

$$+ a_3 \exp \left\{ - \left( 5 \left( \frac{\mu_1^{(3)}}{2} \right)^2 + 1 \right) t \right\},$$

$$Q_k(t) = \frac{b_k \left[ 1 - \exp \left\{ - \left( 5 \left( \frac{\mu_4^{(2)}}{4} \right)^2 + 3 \right) t \right\} \right]}{5 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} \right)^2 + 3},$$

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right), \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right),$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 f(r) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right) r dr & \int_0^4 f(r) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} r \right) r dr \\
\text{где } a_k &= \frac{\int_0^4 J_2^2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right) r dr}{\int_0^4 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right) r dr}, \quad b_k = \frac{\int_0^4 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} r \right) r dr}{\int_0^4 J_2^2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} r \right) r dr};
\end{aligned}$$

$$15) \quad u(r, \varphi, t) = T(t) J_2 \left( \frac{\mu_3^{(2)}}{2} r \right) \cos 2\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{2} r \right) \cos (2\varphi + \frac{\pi}{4}),$$

где  $T(t) = \frac{1}{b_3} (1 - e^{-b_3 t})$ ,  $T_k(t) = a_k e^{-b_k t}$ ,  $b_k = 2 + \left( \frac{3\mu_k^{(2)}}{2} \right)^2$ ,

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{2} r \right), \quad a_k = \frac{\int_0^2 f(r) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{2} r \right) r dr}{\int_0^2 J_2^2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{2} r \right) r dr};$$

$$16) \quad u(r, \varphi, t) = T(t) J_3 \left( \frac{\mu_2^{(3)}}{5} r \right) \sin 3\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{5} r \right) \sin (3\varphi + \frac{\pi}{6}),$$

где  $T(t) = e^{-b_2 t}$ ,  $T_k(t) = \frac{a_k}{b_k - 1} (e^{-t} - e^{-b_k t})$ ,

$$b_k = 1 + \left( \frac{2\mu_k^{(3)}}{5} \right)^2, \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{5} r \right), \quad a_k = \frac{\int_0^5 f(r) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{5} r \right) r dr}{\int_0^5 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{5} r \right) r dr};$$

$$17) \quad u(r, \varphi, t) = T(t) J_1 \left( \frac{\mu_3^{(3)}}{2} r \right) \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) \sin \varphi,$$

где  $T(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-b_3 t}}{b_3 - 2}$ ,  $T_k(t) = a_k e^{-b_k t}$ ,

$$b_k = 2 + \left( \frac{3\mu_k^{(1)}}{2} \right)^2, \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right), \quad a_k = \frac{\int_0^2 f(r) J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) r dr}{\int_0^2 J_1^2 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{2} r \right) r dr};$$

$$18) \quad u(r, \varphi, t) = T(t) J_5 \left( \frac{\mu_1^{(5)}}{3} r \right) \sin \left( 5\varphi - \frac{\pi}{3} \right) +$$

$+ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_5 \left( \frac{\mu_k^{(5)}}{3} r \right) \sin 5\varphi$ , где  $T(t) = e^{-b_2 t}$ ,  $T_k(t) = \frac{a_k}{b_k} (1 - e^{-b_k t})$ ,

$$b_k = 2 + \left( \frac{2\mu_k^{(5)}}{3} \right)^2, \quad f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_5 \left( \frac{\mu_k^{(5)}}{3} r \right), \quad a_k = \frac{\int_0^3 f(r) J_5 \left( \frac{\mu_k^{(5)}}{3} r \right) r dr}{\int_0^3 J_5^2 \left( \frac{\mu_k^{(5)}}{3} r \right) r dr};$$

$$\begin{aligned}
19) \quad & u(r, \varphi, t) = 5 \exp \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_1^{(3)}}{12} \right)^2 + 2 \right) t \right\} J_3 \left( \frac{\mu_1^{(5)}}{6} r \right) \cos 3\varphi + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\left( \frac{\mu_k^{(1)}}{12} \right)^2 + 2} \left[ t - \frac{1 + \exp \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{12} \right)^2 + 2 \right) t \right\}}{\left( \frac{\mu_k^{(1)}}{12} \right)^2 + 2} \right] \times \\
& \times J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{6} r \right) \cos \varphi, \text{ где } a_k = \frac{\int_0^6 f(r) J_1 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{6} r \right) r dr}{\int_0^6 J_1^2 \left( \frac{\mu_k^{(1)}}{6} r \right) r dr}, n = 1, 2, \dots; \\
20) \quad & u(r, \varphi, t) = 3 \exp \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_1^{(3)}}{5} \right)^2 + 3 \right) t \right\} J_3 \left( \frac{\mu_1^{(3)}}{5} r \right) \cos 3\varphi + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\left( \frac{\mu_k^{(4)}}{5} \right)^2 + 3} \left[ e^{2t} - \exp \left\{ - \left( \left( \frac{\mu_k^{(4)}}{5} \right)^2 + 3 \right) t \right\} \right] \times \\
& \times J_4 \left( \frac{\mu_k^{(4)}}{5} r \right) \cos 4\varphi, \text{ где } f_k = \frac{\int_0^5 f(r) J_4 \left( \frac{\mu_k^{(4)}}{5} r \right) r dr}{\int_0^5 J_4^2 \left( \frac{\mu_k^{(4)}}{5} r \right) r dr}, n = 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{20.62.} \quad 1) \frac{e^{-\mu_k^2 t} + \mu_k^2 \sin t - \cos t}{1 + \mu_k^4} J_1(\mu_k x); \quad 2) \frac{e^{-t} - e^{-\mu_k^2 t}}{\mu_k^2 - 1} J_1(\mu_k x).$$

$$\mathbf{20.63.} \quad \left[ \mu_1^{-2} t + \mu_1^{-4} (e^{-\mu_1^2 t} - 1) \right] J_0(\mu_1 r).$$

$$\mathbf{20.64.} \quad 1) \left( 16\mu_k^{-4} \cdot e^{-\frac{1}{4}\mu_k^2 t} + 4\mu_k^{-2} t - 16\mu_k^{-4} \right) J_1(\mu_k \sqrt{x});$$

$$2) \quad e^{-\frac{1}{4}\mu_k^2 t} J_3(\mu_k \sqrt{x}).$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{20.65.} \quad & u(x, t) = \frac{1}{(\mu_1^{(4)})^2} \left[ \left( \mu_1^{(4)} \right)^2 t + 1 - e^{-(\mu_1^{(4)})^2 t} \right] J_4 \left( \mu_1^{(4)} x \right) + \\
& + 4e^{-(\mu_2^{(4)})^2 t} J_4 \left( \mu_2^{(4)} x \right).
\end{aligned}$$

$$\mathbf{20.66.} \quad 1) \quad u(x, t) = \frac{4}{16 + \mu^4} \left( \cos t - e^{-\frac{\mu^2}{4} t} + 4 \sin t \right) J_0(\mu \sqrt{x}), \text{ где } \mu = \mu_3^{(0)};$$

$$2) \quad u(x, t) = e^{-\left( \frac{\mu_1^{(4)}}{2} \right)^2 t} J_4(\mu_1^{(4)} \sqrt{x}) + e^{-\left( \frac{\mu_2^{(4)}}{2} \right)^2 t} J_4(\mu_2^{(4)} \sqrt{x});$$

$$3) \quad u(x, t) = e^{-\frac{1}{4}\mu^2 t} J_2(\mu \sqrt{x}), \text{ где } \mu = \mu_3^{(2)};$$

$$4) u(x, t) = \frac{4}{(\mu_1^{(1)})^2} \left( 1 - e^{-\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{2}\right)^2 t} \right) J_1 \left( \mu_1^{(1)} \sqrt{x} \right) + \\ + \frac{4}{4 - (\mu_2^{(1)})^2} \left( e^{-\left(\frac{\mu_2^{(1)}}{2}\right)^2 t} - e^{-t} \right) J_1 \left( \mu_2^{(1)} \sqrt{x} \right).$$

$$20.67. 1) u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9a_k}{\left(\mu_k^{(2)}\right)^2 + 9} \left[ e^t - e^{-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{3}\right)^2 t} \right] J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{3} x \right),$$

$$\text{где } a_k = \frac{\int_0^3 f(x) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{3} x \right) x dx}{\int_0^3 J_2^2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{3} x \right) x dx}, k = 1, 2, \dots;$$

$$2) u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a_k}{\left(\mu_k^{(3)}\right)^2 + 8} \left[ e^{2t} - e^{-\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2}\right)^2 t} \right] J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} x \right),$$

$$\text{где } a_k = \frac{\int_0^2 f(x) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} x \right) x dx}{\int_0^2 J_3^2 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{2} x \right) x dx}, k = 1, 2, \dots.$$

## § 21. Другие методы

### Смешанная задача для полубесконечной струны

Простейшей после задачи Коши краевой задачей для одномерного волнового уравнения является смешанная задача на полуоси (задача для полубесконечной струны):

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (I)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x > 0; \quad (II)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0; \quad (III)$$

$$u|_{x=0} = \chi(t), \quad t > 0. \quad (IV)$$

Для существования классического решения (из  $C^2(x \geq 0, t \geq 0)$ ) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

гладкости

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\in C^2(x \geq 0), \quad \psi(x) \in C^1(x \geq 0), \\ \chi(t) &\in C^2(t \geq 0), \quad f(x, t) \in C(x \geq 0, t \geq 0),\end{aligned}$$

и условия согласования

$$\varphi(0) = \chi(0), \quad \psi(0) = \chi'(0), \quad \frac{1}{a^2}\chi''(0) - \varphi''(0) = f(0, 0).$$

Границное условие (IV) жесткого закрепления конца струны часто заменяется условием его пружинного закрепления:

$$(u_x - \sigma u)|_{x=0} = \chi(t), \quad t > 0, \quad (\text{IV}')$$

где  $\sigma \geq 0$ ; условие неотрицательности коэффициента  $\sigma$  — чисто физическое условие; при  $\sigma = 0$  условие (IV') — условие свободного конца.

В этом случае условия согласования выглядят так:

$$\varphi'(0) - \sigma\varphi(0) = \chi(0), \quad \psi'(0) - \sigma\psi(0) = \chi'(0).$$

Классические решения задачи (1)–(IV) и задачи (1)–(III), (IV') единственны.

Наряду с классическими решениями указанных задач, рассматривают и обобщенные решения этих задач.

Не напоминая здесь определения обобщенного решения, скажем лишь, что принадлежащая  $C^1(x \geq 0, t \geq 0)$  функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая начальным и граничным условиям (II), (III), (IV) или (II), (III), (IV'), и при любой финитной в  $\{(x, t): x \geq 0, t \geq 0\}$  функции  $g(x, t) \in C^2(x \geq 0, t \geq 0)$ , удовлетворяющая равенству

$$\iint_{x \geq 0, t \geq 0} u(x, t) \left[ \frac{1}{a^2} g_{tt}(x, t) - g_{xx}(x, t) \right] dx dt = \iint_{x \geq 0, t \geq 0} f(x, t) g(x, t) dx dt$$

( $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) в смысле обобщенных функций), является обобщенным решением задачи (1), (II), (III), (IV) или задачи (1), (II), (III), (IV'). Обобщенное решение каждой из этих задач единственно. Существование обобщенных решений, естественно, устанавливается при меньших ограничениях на функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\chi(x)$ , и в частности, на условия их согласования.

Найдем решения следующих задач.

### Пример 1.

$$u_{tt} = 9u_{xx} + 90 \cos(2x + 9t), \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 8 \cos 3x - 5 \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0; \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2 \sin 9t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

△ 1. Так как уравнение является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение этого уравнения.

В нашем случае ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$w(x, t) = A \cos(2x + 9t). \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получаем

$$-81A \cos(2x + 9t) = -36A \cos(2x + 9t) + 90 \cos(2x + 9t), \quad A = -2.$$

Таким образом, функция  $w(x, t) = -2 \cos(2x + 9t)$  есть частное решение уравнения (1).

2. Введем новую искомую функцию  $v(x, t)$  такую, что

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - w(x, t), \\ v(x, t) &= u(x, t) + 2 \cos(2x + 9t), \end{aligned}$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции  $v(x, t)$ :

$$v_{tt} = 9v_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = 8 \cos 3x - 3 \cos 2x, \quad v_t|_{t=0} = -18 \sin 2x, \quad x \geq 0; \quad (6)$$

$$v_x|_{x=0} = 18t - 6 \sin 9t, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Общим решением волнового уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

является функция

$$v(x, t) = f(x + at) + g(x - at),$$

где  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  — любые функции класса  $C^2$ .

В нашем случае общее решение уравнения (5) запишется в виде

$$v(x, t) = f(x + 3t) + g(x - 3t). \quad (8)$$

3. Из условий (8) следует, что

$$v|_{t=0} = f(x) + g(x) = 8 \cos 3x - 3 \cos 2x, \quad x \geq 0; \quad (9')$$

$$v|_{t=0} = 3f'(x) - 3g'(x) = -18 \sin 2x, \quad x \geq 0. \quad (9'')$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (9') по  $x$ , получаем

$$f'(x) + g'(x) = -24 \sin 3x + 6 \sin 2x, \quad x \geq 0; \quad (9''')$$

$$f'(x) - g'(x) = -3 \sin 2x, \quad x \geq 0. \quad (9''''')$$

Сложив уравнения (9'') и (9'''), находим

$$f'(x) = -12 \sin 3x, \quad x \geq 0; \quad (10)$$

$$f(x) = 4 \cos 3x + C, \quad x \geq 0; \quad (11)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Подставляя  $f(x)$  из равенства (11) в равенство (9'), получаем

$$\begin{aligned} g(x) &= 8 \cos 3x - 3 \cos 2x - f(x), \quad x \geq 0, \\ g(x) &= 4 \cos 3x - 3 \cos 2x - C, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что решение задачи в области  $\{(x, t) : x + 3t \geq 0, x - 3t \geq 0\}$  имеет вид

$$v(x, t) = 4 \cos 3(x + 3t) + 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t). \quad (13)$$

4. Из условия (7) и равенства (8) имеем

$$v_x|_{x=0} = f'(3t) + g'(-3t) = 18t - 6 \sin 9t, \quad t > 0.$$

Положив  $q = 3t$ , получим

$$f'(q) + g'(-q) = 6q - 6 \sin 3q, \quad q \geq 0.$$

Воспользовавшись соотношением (10), находим

$$\begin{aligned} -12 \sin 3q + g'(-q) &= 6q - 6 \sin 3q, \quad q \geq 0; \\ g'(-q) &= 6q + 6 \sin 3q, \quad q \geq 0. \end{aligned}$$

Положив  $p = -q$ , имеем

$$g'(p) = -6p - 6 \sin 3p, \quad p \leq 0.$$

Следовательно,

$$g(p) = -3p^2 + 2 \cos 3p + C_1, \quad p \leq 0, \quad (14)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная.

5. Найдем зависимость постоянной  $C_1$  из формулы (12) и постоянной  $C$  из формулы (14), осуществив «склейку» по непрерывности функции  $g(x)$  в нуле:

$$4 - 3 - C = g(0) = 2 + C_1.$$

Отсюда следует, что

$$C_1 = -1 - C.$$

Подставляя найденное значение  $C_1$  в формулу (14), получаем

$$g(p) = -3p^2 + 2 \cos 3p - 1 - C, \quad p \leq 0. \quad (15)$$

Из (11) и (15) следует, что решение задачи в области  $\{(x, t): x + 3t \geq 0, x - 3t \leq 0\}$  имеет вид

$$v(x, t) = 4 \cos 3(x + 3t) - 3(x - 3t)^2 + 2 \cos 3(x - 3t) - 1. \quad (16)$$

Из (13) и (16) следует, что решением задачи (5), (6), (7) является функция

$$\begin{aligned} v(x, t) = & 4 \cos 3(x + 3t) + \\ & + \begin{cases} 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t), & x - 3t \geq 0; \\ 2 \cos 3(x - 3t) - 3(x - 3t)^2 - 1, & x - 3t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$u(x, t) = v(x, t) - 2 \cos(2x + 9t),$$

где функция  $v(x, t)$  определена выше, будет решением задачи (1), (2), (3).  $\blacktriangle$

**Пример 2.** Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt \quad (1)$$

в области  $x > 0, t > 0$ , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0; \\ u|_{x=0} &= t^3, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид  $u(x, t) = f(x + 2t) + g(x - 2t) + xt^3$ . Из условий (2) получаем

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^3, \quad x \geq 0, \\ f'(x) - g'(x) &= 0, \quad x \geq 0, \\ f(2t) + g(-2t) &= t^3, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из первых двух уравнений этой системы находим  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - C$ ,  $x \geq 0$ . Подставляя найденную функцию  $f(x)$  в третье уравнение системы (3), получаем  $g(x) = \frac{3}{8}x^3 - C$ ,  $x \leq 0$ . Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2t)^3 + \frac{1}{2}(x - 2t)^3 + xt^3, & x \geq 2t, \\ \frac{1}{2}(x + 2t)^3 + \frac{3}{8}(x - 2t)^3 + xt^3, & x < 2t. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

**Пример 3.** Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 2 \quad (1)$$

в области  $x > 0, t > 0$ , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= x + x^3, & u_t|_{t=0} &= -9x^2, & x > 0; \\ (u - u_x)|_{x=0} &= t^2 - 1, & t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

△ Общее решение уравнения (1) имеет вид  $u(x, t) = f(x + 3t) + g(x - 3t) + t^2$ . Из условий (2) получаем

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x + x^3, & x \geq 0, \\ 3f'(x) - 3g'(x) &= -9x^2, & x \geq 0, \\ f(3t) + g(-3t) - f'(3t) - g'(-3t) &= -1, & t \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из первых двух уравнений этой системы находим  $f(x) = \frac{1}{2}x + C$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x + x^3 - C, x \geq 0$ . Подставляя найденную функцию  $f(x)$  в третье уравнение системы (3), получаем  $g'(x) - g(x) = C + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ , откуда  $g(x) = C_1 e^x + \frac{1}{2}x - C, x \leq 0$ . Из условия непрерывности функции  $g(x)$  при  $x = 0$  находим  $C_1 = 0$ , т. е.  $g(x) = \frac{1}{2}x - C, x \leq 0$ . Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} (x - 3t)^2 + x + t^2, & x \geq 3t, \\ x + t^2, & x < 3t. \end{cases}$$

▲

**21.1.** Доказать, что задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & t > 0, & x > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, & u_t|_{t=0} &= 0, & u|_{x=0} &= g(t) \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ g\left(t - \frac{x}{a}\right), & x < at, \end{cases}$$

если  $g \in C^2(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ .

**21.2.** Доказать, что задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & t > 0, & x > 0; \\ u|_{t=0} &= u_0(x), & u_t|_{t=0} &= u_1(x), & u|_{x=0} &= 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \frac{u_0(x + at) - u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, & x < at, \end{cases}$$

если  $u_0 \in C^2(x \geq 0)$ ,  $u_1 \in C^1(x \geq 0)$ ,  $u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0$ . Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера, если функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  продолжить нечетным образом для  $x < 0$ .

**21.3.** Доказать, что задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g(t) \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ -a \int_0^{t-x/a} g(\tau) d\tau, & x < at, \end{cases}$$

если  $g \in C^1(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

**21.4.** Доказать, что задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u_x|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \frac{u_0(x + at) + u_0(at - x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \int_0^{at-x} u_1(\xi) d\xi \right], & x < at, \end{cases}$$

если  $u_0 \in C^2(x \geq 0)$ ,  $u_1 \in C^1(x \geq 0)$ ,  $u'_0(0) = u'_1(0) = 0$ . Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера, если функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  продолжить четным образом для  $x < 0$ .

**21.5.** Доказать, что задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad u|_{x=l} = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \tilde{g} \left( t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a} \right) - \tilde{g} \left( t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)l}{a} \right) \right], \\ \tilde{g}(t) &= \begin{cases} g(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

если  $g \in C^2(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ .

**21.6.** Доказать, что задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}(x + at) + \tilde{u}_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi,$$

где функции  $\tilde{u}_0(x)$ ,  $\tilde{u}_1(x)$  — нечетные,  $2\pi$ -периодические и совпадающие с функциями  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  при  $0 \leq x \leq l$ , если  $u_0 \in C^2[0, l]$ ,  $u_1 \in C^1[0, l]$ ,  $u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0$ .

В задачах 21.7–21.23 требуется доказать, что существует единственное решение поставленной задачи; найти это решение.

**21.7.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(u_x - \beta u)|_{x=0} = g(t)$ ;  
 $g \in C^1(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

**21.8.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(u_x - \beta u)|_{x=0} = 0$ ;  
 $u_0 \in C^2(x \geq 0)$ ,  $u'_0(0) - \beta u_0(0) = 0$ .

**21.9.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $0 < x < l$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=0} = g(t)$ ,  $u_x|_{x=l} = 0$ ;  
 $g \in C^1(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

**21.10.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $0 < x < l$ ;  
 $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ ,  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=l} = 0$ ;  
 $u_0 \in C^2([0, l])$ ,  $u_1 \in C^1([0, l])$ ,  $u'_0(0) = u'_1(0) = u'_0(l) = u'_1(l) = 0$ .

**21.11.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $0 < x < l$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{x=0} = g(x)$ ,  $u_x|_{x=l} = 0$ ;  
 $g \in C^2(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ .

**21.12.**  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $0 < x < l$ ;  
 $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=l} = 0$ ;  
 $u_0 \in C^2([0, l])$ ,  $u_1 \in C^1([0, l])$ ,  $u_0(0) = u''_0(0) = u_1(0) = u'_0(l) = u'_1(l) = 0$ .

**21.13.**  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ,  $u|_{x=0} = t^2$ .

**21.14.**  $u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \frac{1}{6}x^4$ ,  $u_t|_{t=0} = 2 \sin x$ ,  $u|_{x=0} = 4t^4$ .

**21.15.**  $9u_{tt} = u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 27x^3$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{x=0} = t^3$ .

**21.16.**  $u_{tt} = u_{xx} + 2$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x + \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = 1$ ,  $u_x|_{x=0} = 1$ .

**21.17.**  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = 1$ ,  $u_x|_{x=0} = \cos t$ .

**21.18.**  $u_{tt} = 9u_{xx} + e^t$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1 + x$ ,  $u_t|_{t=0} = 4 - 3 \cos \frac{x}{3}$ ,  $u_x|_{x=0} = 2 - \cos t$ .

**21.19.**  $u_{tt} = 3u_{xx} + 2(1 - 6r^2)e^{-2x}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ,  $(u_x - 2u)|_{x=0} = -2 + t - 4t^2$ .

**21.20.**  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(u_x + u)|_{x=0} = 1 - \cos t$ .

**21.21.**  $u_{tt} = u_{xx} + 4$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1 - x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(u_x - u)|_{x=0} = \frac{3}{2}t^2$ .

**21.22.**  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(u_t - u)|_{x=0} = 2t - t^2$ .

**21.23.** 1)  $u_{tt} = u_{xx} - 6$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $(u_t + 2u_x)|_{x=0} = -4t$ ;  
2)  $u_{tt} = 4u_{xx} + 2$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2 - x$ ,  $u_t|_{t=0} = 2$ ,  $(u_t + 3u_x)|_{x=0} = 3t - e^t$ .

**21.24.** Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = t \sin t, \quad t \geq 0;$
- 2)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 2 \sin x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = te^t, \quad t \geq 0;$
- 3)  $u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 4x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = (t + 1) \cos t, \quad t \geq 0;$
- 4)  $u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = -3 \cos x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = (t + 1)e^{t/2}, \quad t \geq 0;$
- 5)  $u_{tt} = 4u_{xx} + x \sin t, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2x^2, \quad u_t|_{t=0} = 8 - x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = \sin^2 t - \sin t, \quad t \geq 0;$
- 6)  $u_{tt} = 9u_{xx} + 5x \cos t, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 - 4x, \quad u_t|_{t=0} = 9, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = \cos^2 t - 5 \cos t, \quad t \geq 0;$
- 7)  $4u_{tt} = u_{xx} + 7t \cos x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 4x^2, \quad u_t|_{t=0} = \cos 2x + 7 \cos x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 2t^2, \quad t \geq 0;$
- 8)  $9u_{tt} = u_{xx} + 6t \sin x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = e^{3x}, \quad u_t|_{t=0} = 9x^2 + 6 \sin x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 3 + 6t, \quad t \geq 0;$
- 9)  $u_{tt} = 16u_{xx} + 32e^{4t} \sin x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = -\sin x, \quad u_t|_{t=0} = 4 \sin x + 8 \cos x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = e^{4t} - \cos 4t - 1, \quad t \geq 0;$
- 10)  $u_{tt} = 4u_{xx} - 8e^x \cos 2t, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \cos x + e^x, \quad u_t|_{t=0} = -4 \sin x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = \cos 2t - 4t, \quad t \geq 0;$
- 11)  $u_{tt} = 25u_{xx} - 50e^{5t} \cos x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 10 \sin x - 5 \cos x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 15t - \sin 5t, \quad t \geq 0;$
- 12)  $u_{tt} = 9u_{xx} - 18e^x \sin 3t, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 3e^x + 6 \cos x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 2 \cos 3t + 3t, \quad t \geq 0.$

**21.25.** Решить задачи:

- 1)  $4u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2e^{2x} - 2x, \quad u_t|_{t=0} = -1, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 2e^t - 2t, \quad t > 0;$
- 2)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = -4, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 2t - \operatorname{sh} 2t, \quad t > 0;$
- 3)  $9u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 6x, \quad u_t|_{t=0} = 4e^{-3x} + 2, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 6e^{-t} - 6t, \quad t > 0;$
- 4)  $u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2x, \quad u_t|_{t=0} = 12x, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 2 \sin 3t + 6t + 2, \quad t > 0;$
- 5)  $16u_{tt} = u_{xx} + 24e^{2x-t}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 4x, \quad u_t|_{t=0} = 2e^{2x} - 1, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 4e^{-t} + 8t, \quad t > 0;$
- 6)  $u_{tt} = 9u_{xx} + 90 \cos(2x + 9t), \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 8 \cos 3x - 5 \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 18t - 2 \sin 9t, \quad t > 0;$
- 7)  $9u_{tt} = u_{xx} + 54e^{3x-2t}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 6x, \quad u_t|_{t=0} = -2, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 6e^{-2t} + 12t, \quad t \geq 0;$
- 8)  $u_{tt} = 4u_{xx} + 60 \cos(3x + 4t), \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 5 \cos 3x + 2 \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 4t - \sin 4t, \quad t \geq 0;$
- 9)  $u_{tt} = u_{xx} + te^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x + e^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = t - 1 + e^{-t}, \quad t > 0;$
- 10)  $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - xe^{-t}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 1 + x, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = e^t, \quad t > 0;$
- 11)  $u_{tt} = 4(u_{xx} - 2), \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x^2 - x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = -\frac{1}{(1-2t)^2}, \quad t > 0;$
- 12)  $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - 1, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 4x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0;$   
 $u_x|_{x=0} = 2(t - 1 + e^{-t}), \quad t > 0;$

13)  $9u_{tt} = u_{xx} - 1, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \frac{x^2}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{4}{3}t - \operatorname{sh} \frac{t}{3}, \quad t > 0;$$

14)  $u_{tt} = 9(u_{xx} - 1), \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = 3t - \sin 3t, \quad t > 0.$$

**21.26.** Решить задачи:

1)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin t \cos x, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = 2 - 2 \cos x, \quad u_t|_{t=0} = -\frac{1}{2} \cos x, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = t^2, \quad t > 0;$$

2)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin x \cos t, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \sin^2 x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{t}{2} \sin t - t^2, \quad t > 0;$$

3)  $4u_{tt} = u_{xx} - e^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = e^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = -2t - t, \quad t > 0;$$

4)  $9u_{tt} = u_{xx} + 12x, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \frac{2}{1+x}, \quad u_t|_{t=0} = -\frac{4}{3}, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = -2, \quad t > 0;$$

5)  $u_{tt} = 4u_{xx} + \sin^2 t, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \frac{9}{8}, \quad u_t|_{t=0} = 2x, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = 2t, \quad t > 0;$$

6)  $u_{tt} = 9u_{xx} + \cos^2 t, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \frac{7}{8}, \quad u_t|_{t=0} = 3x, \quad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{5}{2}t, \quad t > 0.$$

**21.27.** Решить задачи:

1)  $u_{tt} = 9u_{xx} + 2xt, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 20x, \quad x > 0;$$

$$(u - u_x)|_{x=0} = 18t^2 - 2 \operatorname{sh} t, \quad t > 0;$$

2)  $u_{tt} = 0,04u_{xx} + t \cos 5x, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \sin 5x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x > 0;$$

$$(10u + u_x)|_{x=0} = 5, \quad t > 0;$$

- 3)  $u_{tt} = 4u_{xx} - 3xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 3x^2, \quad u_t|_{t=0} = x - 6, \quad x > 0;$   
 $(u + u_x)|_{x=0} = 8t^2 + 3(1 - e^t), \quad t > 0;$
- 4)  $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} + t \sin 2x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 14x - \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 3, \quad x > 0;$   
 $(4u - u_x)|_{x=0} = 2t - 18, \quad t > 0;$
- 5)  $u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x \geq 0;$   
 $(u_x - 2u)|_{x=0} = 4 - 4t, \quad t \geq 0;$
- 6)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = e^{2x} - 4, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$   
 $(u_x - 2u)|_{x=0} = 8t^2 + 8, \quad t \geq 0;$
- 7)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 4 \sin x - 4, \quad x \geq 0;$   
 $(u + u_x)|_{x=0} = 4t^2, \quad t \geq 0;$
- 8)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = \cos x - 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2 \sin x + 2, \quad x \geq 0;$   
 $(u_x - u)|_{x=0} = t^2 - 3, \quad t \geq 0;$
- 9)  $u_{tt} = u_{xx} - 2e^x \cos x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 3e^x - x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2x, \quad x \geq 0;$   
 $(u + u_x)|_{x=0} = 2e^t + 4 \cos t, \quad t \geq 0;$
- 10)  $u_{tt} = 4u_{xx} - 12 \cos(x + 4t), \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = x + \cos x + \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 2 \cos x - 2 - 4 \sin x, \quad x \geq 0;$   
 $(u - u_x)|_{x=0} = \cos 4t + \sin 4t - 2 \cos 2t, \quad t \geq 0;$
- 11)  $u_{tt} = 9u_{xx} + 18e^{-3t} \sin x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2x^2 + 2 \sin x + \cos x, \quad u_t|_{t=0} = -3 \cos x, \quad x \geq 0;$   
 $(2u + u_x)|_{x=0} = 4e^t + 18t^2 + 6t, \quad t \geq 0;$
- 12)  $u_{tt} = 16u_{xx} - 16te^x, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2e^x + x - 2, \quad u_t|_{t=0} = e^x - 4, \quad x \geq 0;$   
 $(u - 2u_x)|_{x=0} = -\cos 4t + 2 \sin 4t - e^{4t} - 9t - 4, \quad t \geq 0.$

**21.28.** Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2x - \cos x, \quad u_t|_{t=0} = -2 - 2 \sin x, \quad x > 0;$   
 $(u_x - u)|_{x=0} = 3, \quad t > 0;$
- 2)  $4u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 2 \sin x - 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2 - \cos x, \quad x > 0;$   
 $(u - u_x)|_{x=0} = \frac{1}{8}t^2 + t, \quad t > 0;$

- 3)  $u_{tt} = u_{xx} + 3 \sin(x + 2t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x - \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = e^x - 2 \cos x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u_x - u)|_{x=0} = \sin 2t + \cos t - \cos 2t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + 3 \sin(2x + t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \cos x + \sin 2x$ ,  $u_t|_{t=0} = 1 + \cos 2x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u_x - u)|_{x=0} = -1 - 2 \sin t + 2 \cos t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 5)  $u_{tt} = 4u_{xx} + 3 \cos(x + t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1 + \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u_x - u)|_{x=0} = 2t - 1 - \sin t - \cos t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 6)  $4u_{tt} = u_{xx} - 3 \sin(x + t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \sin x + \sin 2x$ ,  $u_t|_{t=0} = 2 + \cos x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u_x - 2u)|_{x=0} = 2 - 4t - 2 \sin t + \cos t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 7)  $u_{tt} = 9u_{xx}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = 3$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u - 3u_x)|_{x=0} = -3e^{-t} \cos 3t$ ,  $t > 0$ ;
- 8)  $u_{tt} = 4u_{xx}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = -4x$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u - 2u_x)|_{x=0} = 4e^{-t} \sin 2t$ ,  $t > 0$ ;
- 9)  $u_{tt} = 16u_{xx}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2x$ ,  $u_t|_{t=0} = 4x$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u_x + u)|_{x=0} = 4t^2 + 6t + 1$ ,  $t > 0$ ;
- 10)  $u_{tt} = 9u_{xx}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2x$ ,  $u_t|_{t=0} = 6x$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u_x + u)|_{x=0} = \frac{9}{2}t^2 + 6t - 2$ ,  $t > 0$ ;
- 11)  $u_{tt} = u_{xx} - x \sin t$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = \cos x + x$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u_x - u)|_{x=0} = \cos t + 3t^2 + t^3$ ,  $t > 0$ ;
- 12)  $u_{tt} = u_{xx} + (x + 1)e^{-t}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1 + x + e^{-x}$ ,  $u_t|_{t=0} = -1 - x - e^{-x}$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u_x + u)|_{x=0} = 2 - 2t$ ,  $t > 0$ ;
- 13)  $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - te^{2x}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2 + e^{2x}$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u_x + 2u)|_{x=0} = 8$ ,  $t > 0$ ;
- 14)  $u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2 + x$ ,  $u_t|_{t=0} = -4x$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u_x - u)|_{x=0} = \cos t - 4t$ ,  $t > 0$ ;
- 15)  $u_{tt} = u_{xx} + 2$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 2$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = t^2 + (1 + t) \sin t + t \cos t$ ,  $t \geq 0$ ;

- 16)  $u_{tt} = u_{xx} - te^{-x}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2 \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = 2t + \sin t - \cos t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 17)  $u_{tt} = u_{xx} - 6t - 6$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 2x^3$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u_x + u)|_{x=0} = (t - 1) \sin t + t \cos t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 18)  $u_{tt} = u_{xx} + xe^t$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 1 + x$ ,  $u_t|_{t=0} = 4 - 5x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u_x + 2u)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2$ ,  $t \geq 0$ .

**21.29.** Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} - (1 + t) \cos x$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = 1 + \sin x - \cos x$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u + u_x)|_{x=0} = 1 + t$ ,  $t > 0$ ;
- 2)  $u_{tt} = 4u_{xx} + 16t \sin x$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 4 \sin x - 4$ ,  $x > 0$ ;  
 $(u + u_x)|_{x=0} = 2t^2$ ,  $t > 0$ ;
- 3)  $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 12x$ ,  $u_t|_{t=0} = -3$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = 3e-t - 15$ ,  $t \geq 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + 9 \sin(2x + t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = xe^x + \sin x + 3 \sin 2x$ ,  
 $u_t|_{t=0} = -(1 + x)e^x + \cos x + 3 \cos 2x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = t - 1 + t^2 + 4 \sin t - 7 \cos t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 5)  $4u_{tt} = u_{xx} + 150e^{x-2t}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 8xe^x$ ,  $u_t|_{t=0} = -9e^x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = 2t - t^2 - 4e^{t/2} - 4$ ,  $t \geq 0$ ;
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} - 3 \cos(x - 2t)$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = x \ln(1 + x^2) + x \operatorname{ch} x + \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = \frac{2x^2}{1+x^2} +$   
 $+ \ln(1 + x^2) - x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + 2 \sin x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = (t - 1) \ln(1 + t^2) - \frac{2t^2}{1+t^2} - t - 1 + \cos 2t -$   
 $- \sin 2t$ ,  $t \geq 0$ ;
- 7)  $9u_{tt} = u_{xx} + t \sin \frac{x}{3} + x \sin \frac{t}{3}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \sin 2x$ ,  
 $u_t|_{t=0} = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x + 9 \sin \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \cos 2x$ ,  $x \geq 0$ ;  
 $(u - u_x)|_{x=0} = -2 - 3t + \sin \frac{t}{3}$ ,  $t \geq 0$ ;

- 8)  $4u_{tt} = u_{xx} + 20tx^3 + 20xt^3, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = -1 + 3x^2 + \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = -x - x^5 + \sin 2x, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = t + \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{t+2} + e^{-t/2}, \quad t \geq 0;$
- 9)  $u_{tt} = 9u_{xx} + 9t \cos 3x - 9x \cos 3t, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = 3 + 5x + 4x^2 + \sin 2x + \cos 2x,$   
 $u_t|_{t=0} = -6 - 24x + 6 \sin 2x - 6 \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x, \quad x \geq 0;$   
 $(u - u_x)|_{x=0} = -2 + \frac{1}{9}t - \cos 3t, \quad t \geq 0;$
- 10)  $u_{tt} = 4u_{xx} - 12tx^2 + 12xt^2, \quad x > 0, \quad t > 0;$   
 $u|_{t=0} = -1 + x^2 + \ln(1+x) + e^{-x},$   
 $u_t|_{t=0} = 4x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{1+x} + 2e^{-x}, \quad x \geq 0;$   
 $u_x|_{x=0} = -4t + t^4 + 2 \sin 4t, \quad t \geq 0.$

**21.30.** Найти наибольшую область, в которой поставленная задача имеет единственное решение, и найти это решение:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx};$   
 $u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2;$   
 $u|_{x=0} = t^3, \quad 0 \leq t \leq 2;$
- 2)  $u_{tt} = u_{xx};$   
 $u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 4;$   
 $u|_{t=3x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$

**21.31.** Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{|x|=1} = g(t)$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 + at, \\ \frac{1}{|x|} g\left(t + \frac{1 - |x|}{a}\right), & 1 < |x| < 1 + at, \end{cases}$$

если  $g \in C^2(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ . Показать, что если  $g(t)$  — финитная функция, то  $u(x, t) = 0$  для любого фиксированного  $x$ ,  $|x| \geq 1$ , при достаточно больших  $t$ . В случае когда  $g(t) \neq 0$  при  $0 < t < T$ ,  $g(t) = 0$  при  $t \geq T$ , найти момент времени  $t_x$ , в который через точку  $x$ ,  $|x| > 1$ , пройдет задний фронт волны.

**21.32.** Найти решение задачи

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \quad u_t|_{t=0} = \beta(|x|), \quad u|_{|x|=1} = 0,$$

где  $\alpha(r) \in C^2(r \geq 1)$ ,  $\beta(r) \in C^1(r \geq 1)$ ,  $\alpha(1) = 0$ ,  $\alpha''(1) + 2\alpha'(1) = 0$ ,  $\beta(1) = 0$ . Доказать, что если функции  $\alpha(r)$  и  $\beta(r)$  финитные, то  $u(x, t) = 0$  для любого фиксированного  $x$ ,  $|x| \geq 1$ , при достаточно больших  $t$ .

**21.33.** Найти решение задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{|x|=1} = g(t), \end{aligned}$$

где  $g \in C^1(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

Доказать, что если  $g(t)$  — финитная функция, то существует такая функция  $c(x)$ , что  $|u(x, t)| \leq c(x)e^{-t}$ , а для того, чтобы  $u(x, t) = 0$  для каждого фиксированного  $x$ ,  $|x| \geq 1$ , при достаточно больших  $t$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\int_0^\infty e^t g(t) dt = 0$ .

**21.34.** Найти решение задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} &= \alpha(|x|), \quad u_t|_{t=0} = \beta(|x|), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{|x|=1} = g(t), \end{aligned}$$

где  $\alpha \in C^2(r \geq 1)$ ,  $\beta \in C^1(r \geq 1)$ ,  $\alpha'(1) = \beta'(1) = 0$ .

Доказать, что если функции  $\alpha(r)$  и  $\beta(r)$  финитные, то существует такая функция  $c(x)$ , что  $|u(x, t)| \leq c(x)e^{-t}$ , а для того, чтобы  $u(x, t) = 0$  для каждого фиксированного  $x$ ,  $|x| \geq 1$ , при достаточно больших  $t$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\int_0^\infty r e^r [\alpha(r) - \beta(r)] dr = 0$ .

**21.35.** Решить задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad \left( k u + \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{|x|=1} \right) = g(t), \quad k = \text{const}. \end{aligned}$$

Решить задачи 21.36–21.42.

**21.36.**  $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u|_{x=0} = 0$ .

**21.37.**  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{x=0} = g(t)$ .

**21.38.**  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_x|_{x=0} = 0$ .

**21.39.**  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=0} = g(t)$ .

**21.40.**  $u_t = u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $(u - u_x)|_{x=0} = g(t)$ .

**21.41.**  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $(u_x - hu)|_{x=0} = 0$ ,  $h \geq 0$ .

**21.42.**  $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ ,  $t > 0$ ,  $x > 0$ ;  
 $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{x=0} = g(t)$ ,  $u_{xx}|_{x=0} = 0$ .

**21.43.** Решить задачу

$$u_t = \alpha^2(x) u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \neq 0,$$

где  $\alpha(x) = a$  при  $x < 0$ ,  $\alpha(x) = b$  при  $x > 0$ ;

$$u|_{t=0} = \theta(x), \quad u|_{x=-0} = u|_{x=+0}, \quad u_x|_{x=-0} = k u_x|_{x=+0}.$$

## Ответы к § 21

**21.7.** 0 при  $x \geq at$ ;  $-ae^{\beta(x-at)} \int_0^{t-x/a} e^{\alpha\beta\tau} g(\tau) d\tau$  при  $x < at$ .

**21.8.**  $\frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]$  при  $x \geq at$ ,

$\frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(at-x)] - \beta e^{\beta(x-at)} \int_0^{at-x} u_0(\xi) e^{\beta\xi} d\xi$  при  $x < at$ .

**21.9.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ f\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)l}{a}\right) \right]$ , где  $f(x) = 0$

при  $x \leq 0$ ,  $f(x) = -a \int_0^x g(\tau) d\tau$  при  $x > 0$ .

**21.10.**  $\frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi$ , где функции  $\tilde{u}_0(x)$ ,  $\tilde{u}_1(x)$  четные,  $2l$ -периодические и совпадающие с функциями  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  при  $0 \leq x \leq l$ .

**21.11.**  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \tilde{g}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2ln}{a}\right) + \tilde{g}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)l}{a}\right) \right]$ ,  $\tilde{g}(t) = 0$ ,  $t < 0$ ,  $\tilde{g}(x) = g(x)$ ,  $t \geq 0$ .

**21.12.**  $\frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi$ , где функции  $\tilde{u}_0(x)$ ,  $\tilde{u}_1(x)$  нечетные, совпадающие с функциями  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  при  $0 \leq x \leq l$ , а  $\tilde{u}_0(x-l)$ ,  $\tilde{u}_1(x-l)$  — четные функции.

**21.13.**  $x^2 + xt + t^2$ .

**21.14.**  $4t^4 + 4t^2x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \sin 2t \sin x$ .

**21.15.**  $9xt^2 + 27x^3$  при  $x \geq \frac{1}{3}t$ ;  $t^3 + 27tx^2$  при  $x < \frac{1}{3}t$ .

**21.16.**  $x + t + t^2 + \cos x \cos t$ .

**21.17.**  $x + t$  при  $x \geq t$ ;  $2t + \sin(x-t)$  при  $x < t$ .

**21.18.**  $x + 3t + e^t - 3 \sin t \cos \frac{x}{3}$  при  $x \geq 3t$ ,  $2x + e^t - 3 \cos t \sin \frac{x}{3}$  при  $x < 3t$ .

**21.19.**  $1 + xt + t^2 e^{-2x}$ .

**21.20.** 0 при  $x \geq t$ ;  $1 - \frac{1}{2}e^{t-x} - \frac{1}{2}[\sin(x-t) + \cos(x-t)]$  при  $x < t$ .

**21.21.**  $1 - x + 2t^2$  при  $x \geq t$ ;  $2t^2 - t - \frac{1}{2}(x-t)^2 + e^{t-x}$  при  $x < t$ .

**21.22.**  $x^2 + t^2$ .

**21.23.** 1)  $x^2 - 2t^2$ ;

2)  $2 + 2t - x + t^2$  при  $x \geq 2t$ ;  $xt - \frac{1}{4}x^2 + 2e^{t-x/2}$  при  $x < 2t$ .

**21.24.** 1)  $u(x, t) = \frac{5}{8}(x+2t)^2 +$

$$+ \begin{cases} \frac{3}{8}(x-2t)^2, & x \geq 2t \geq 0, \\ \frac{5}{8}(x-2t)^2 - (x-2t) \cos \frac{x-2t}{2} + 2 \sin \frac{x-2t}{2}, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

2)  $u(x, t) = \begin{cases} \cos(x-2t), & x \geq 2t \geq 0, \\ (x-2t+2)e^{t-x/2} - 1, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$

3)  $u(x, t) = \frac{x+t}{2} + (x+t)^2 +$

$$+ \begin{cases} \frac{x-t}{2} - (x-t)^2, & x \geq t \geq 0, \\ \frac{t-x}{2} + (x-t)^2 + (1-x+t) \sin(x-t) - \\ - \cos(x-t) + 1, & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

4)  $u(x, t) = \begin{cases} \sin(x-3t), & x \geq 3t \geq 0, \\ 2(x-3t+3)e^{\frac{1}{3}t-\frac{1}{6}x} - 6, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$

5)  $u(x, t) = -x \sin t + (x+2t)^2 + 2(x+2t) +$

$$+ \begin{cases} (x-2t)^2 - 2(x-2t), & x \geq 2t \geq 0, \\ (x-2t)^2 - \frac{3}{2}(x-2t) - \frac{1}{2} \sin(x-2t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

6)  $u(x, t) = -5x \cos t + \frac{1}{2}(x+2t)^2 + 2(x+3t) +$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{2}(x-3t)^2 - (x-3t), & x \geq 3t \geq 0, \\ \frac{1}{2}(x-3t)^2 - \frac{3}{2}(x-3t) + \frac{4}{3} \sin \frac{2(x-3t)}{3}, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$$

7)  $u(x, t) = 7tx \cos x + \frac{1}{2}(2x+t)^2 + \frac{1}{2} \sin(2x+t) +$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{2}(2x-t)^2 - \frac{1}{2} \sin(2x-t), & x \geq \frac{t}{2} \geq 0, \\ \frac{1}{2}(2x-t)^3 + \frac{1}{2}(2x-t)^2 + \frac{1}{2} \sin(2x-t), & 0 \leq x \leq \frac{t}{2}; \end{cases}$$

8)  $u(x, t) = 6t \sin x + \frac{1}{2}e^{2x+t} + \frac{1}{6}(3x+t)^3 +$   
 $+ \begin{cases} \frac{1}{2}e^{3x-t} - \frac{1}{6}(3x-t)^3, & x \geq \frac{t}{3} \geq 0, \\ 3x-t - \frac{1}{6}(3x-t)^3 + \frac{1}{2}e^{-(3x-t)}, & 0 \leq x \leq \frac{t}{3}; \end{cases}$

9)  $u(x, t) = e^{4t} \sin x - 2 \sin(x-4t) +$   
 $+ \begin{cases} 0, & x \geq 4t \geq 0, \\ \sin(x-4t) - (x-4t), & 0 \leq x \leq 4t; \end{cases}$

10)  $u(x, t) = e^x \cos 2t + 2 \cos(x+2t) +$   
 $+ \begin{cases} 0, & x \geq 2t \geq 0, \\ 2 \cos(x-2t) + (x-2t)^2 - 2, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$

11)  $u(x, t) = -e^{5t} \cos x + 2 \cos(x-5t) +$   
 $+ \begin{cases} 0, & x \geq 5t \geq 0, \\ -3 \cos(x-5t) - \frac{3}{2}(x-5t)^2 + 3, & 0 \leq x \leq 5t; \end{cases}$

12)  $u(x, t) = e^x \sin 3t + 2 \sin(x+3t) +$   
 $+ \begin{cases} 0, & x \geq 3t \geq 0, \\ -\cos(x-3t) - \frac{1}{2}(x-3t)^2 + 1, & 0 \leq x \leq 3t. \end{cases}$

**21.25.** 1)  $u(x, t) = \begin{cases} 2e^{2x} \operatorname{ch} t - 2x - t, & 0 \leq \frac{t}{2} \leq x, \\ \frac{1}{2}(2x-t)^2 - 2t + 1 + e^{2x+t}, & 0 \leq x \leq \frac{t}{2}; \end{cases}$

2)  $u(x, t) = \begin{cases} x^2 + 4t^2 - 4t, & 0 \leq 2t \leq x, \\ \operatorname{ch}(x-2t) + \frac{1}{2}(x+2t)^2 - 4t - 1, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$

3)  $u(x, t) = \begin{cases} 4e^{-3x} \operatorname{sh} t + 6x + 2t, & 0 \leq \frac{t}{3} \leq x, \\ (3x-t)^2 + 4t + 2 - 2e^{-(3x+t)}, & 0 \leq x \leq \frac{t}{3}; \end{cases}$

4)  $u(x, t) = (x+3t)^2 + (x+3t) +$   
 $+ \begin{cases} 2(x-3t) - (x-3t)^2, & 0 \leq 3t \leq x, \\ 2 \cos(x-3t) + (x-3t) - 2, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$

5)  $u(x, t) = 2e^{2x-t} + 3e^{2x+\frac{1}{2}t} + \begin{cases} 4x-t - 5e^{2x-\frac{1}{2}t}, & 0 \leq \frac{t}{4} \leq x, \\ 3e^{-2x+\frac{1}{2}t} - (4x-t)^2 - 8, & 0 \leq x \leq \frac{t}{4}; \end{cases}$

6)  $u(x, t) = -2 \cos(2x+9t) + 4 \cos(3x+9t) +$   
 $+ \begin{cases} 4 \cos(3x-9t) - 3 \cos(2x-6t), & 0 \leq 3t \leq x, \\ 2 \cos(3x-9t) - 3(x-3t)^2 - 1, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$

$$7) u(x, t) = 2e^{3x-2t} + e^{3x+t} + \begin{cases} 6x - 2t - 3e^{3x-t}, & 0 \leq \frac{t}{3} \leq x, \\ e^{t-3x} - 2(3x-t)^2 - 4, & 0 \leq x \leq \frac{t}{2}; \end{cases}$$

$$8) u(x, t) = 3\cos(3x+4t) + \cos(2x+4t) + \\ + \begin{cases} \cos(2x-4t) + 2\cos(3x-6t), & 0 \leq 2t \leq x, \\ 5\cos(2x-4t) - (x-2t)^2 - 2, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$9) u(x, t) = -te^{-x} + \begin{cases} x + t + e^{t-x}, & 0 \leq t \leq x, \\ 3t - x + e^{x-t}, & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$10) u(x, t) = -xe^{-t} + \begin{cases} 2x + t, & 0 \leq t \leq 2x, \\ 2t + \operatorname{sh}(2x-t), & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$11) u(x, t) = \begin{cases} x^2 - 4xt - x, & 0 \leq t \leq \frac{x}{2}, \\ \frac{1}{1+x-xt} - 1 - 2t - 4t^2, & 0 \leq \frac{x}{2} \leq t; \end{cases}$$

$$12) u(x, t) = \begin{cases} 4x^2 + \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 2x, \\ e^{2x-t} - 1 - 2x + t + 2x^2 + 2xt, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$13) u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + tx, & 0 \leq t \leq 3x, \\ \operatorname{ch}\left(x - \frac{t}{3}\right) - 1 + \frac{4}{3}xt - \frac{1}{18}t^2, & 0 \leq 3x \leq t; \end{cases}$$

$$14) u(x, t) = \begin{cases} x^2 + \frac{9}{2}t^2, & 0 \leq 3t \leq x, \\ 1 - \cos(x-3t) + \frac{1}{2}x^2 + 3tx, & 0 \leq x \leq 3t. \end{cases}$$

$$21.26. 1) u(x, t) = -\frac{t}{2} \cos x \cos t +$$

$$+ \begin{cases} 2 - \cos(x-t) - \cos(x+t), & x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{3}(x-t)^3 + 2 - \cos(x-t) - \cos(x+t), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$2) u(x, t) = \frac{t}{2} \sin t \sin x + \\ + \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos(2(x-t)) - \frac{1}{4} \cos(2(x+t)), & x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos(2(x-t)) - \frac{1}{4} \cos(2(x+t)) - \frac{1}{3}(x-t)^3, & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$3) u(x, t) = e^{-x} + \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}, & 2x \geq t \geq 0, \\ 2\left(x - \frac{1}{2}t\right)^2 + 2 - \frac{2+t}{\left(1+\frac{1}{2}t\right)^2 - x^2}, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$4) u(x, t) = \frac{2}{3}t^2x + \\ + \begin{cases} \frac{2(1+x)}{(1+x)^2 - \left(\frac{1}{3}t\right)^2} - \frac{4}{3}t, & 3x \geq t \geq 0, \\ \frac{2\left(1+\frac{1}{3}t\right)}{\left(1+\frac{1}{3}t\right)^2 - x^2} - 2\left(x - \frac{t}{3}\right)^3 - 2\left(x + \frac{t}{3}\right), & 0 \leq 3x \leq t; \end{cases}$$

$$5) u(x, t) = 1 + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2t + 2xt, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0;$$

$$6) u(x, t) = 1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \cos 2t + \frac{1}{4}(x + 3t)^2 - \\ - \begin{cases} \frac{1}{4}(x - 3t)^2, & x \geq 3t \geq 0, \\ \frac{1}{6}(x - 3t)^2, & 0 \leq x \leq 3t. \end{cases}$$

$$21.27. 1) u(x, t) = 2x \operatorname{sh} t + 2(x + 3t)^2 +$$

$$+ \begin{cases} -(x - 3t)^2, & 0 \leq 3t \leq x, \\ 4e^{x-3t} - 4(x - 3t) - 4, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$$

$$2) u(x, t) = t \cos 5x + \begin{cases} \sin(5x - t) + 2t, & 0 \leq t \leq 5x, \\ e^{-2(5x-t)} + 15x - t - 1, & 0 \leq 5x \leq t; \end{cases}$$

$$3) u(x, t) = -3xe^t + 2(x + 2t)^2 + \begin{cases} (x - 2t)^2 + 3(x - 2t), & 0 \leq 2t \leq x, \\ e^{2t-x} + 4(x - 2t) - 1, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$4) u(x, t) = t \sin 2x + \begin{cases} 14x + 3t - \cos(2x - t), & 0 \leq t \leq 2x, \\ 18x + t - e^{2(2x-t)}, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$5) u(x, t) = \sin 2(x + t) + (x + t) + \\ + \begin{cases} \sin 2(x - t) - x + t, & 0 \leq t \leq x, \\ e^{2(x-t)} - 2 - x + t + \cos 2(x - t), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$6) u(x, t) = e^{2(x+2t)} - 2 - \\ - \begin{cases} e^{2(x-2t)} - 2, & 0 \leq 2t \leq x, \\ \frac{3}{2}e^{2(x-2t)} - (x - 2t)^2 - (x - 2t) - \frac{5}{2}, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$7) u(x, t) = -\cos(x + 2t) - (x + 2t) + \\ + \begin{cases} \cos(x - 2t) + (x - 2t), & 0 \leq 2t \leq x, \\ -3e^{2t-x} + (x - 2t)^2 - 3(x - 2t) + 4 + \sin(x - 2t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$8) u(x, t) = -\frac{1}{2}(x + 2t) + \\ + \begin{cases} \cos(x - 2t) - \frac{3}{2}(x - 2t), & 0 \leq 2t \leq x, \\ -\frac{1}{2}e^{x-2t} - \frac{1}{4}(x - 2t)^2 - (x - 2t) + \frac{3}{2}, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$9) u(x, t) = e^x \cos t + e^{x+t} + \begin{cases} e^{x-t} - (x - t)^2, & x \geq t \geq 0, \\ \cos(x - t) + \sin(x - t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$10) u(x, t) = \cos(x + 4t) + \sin(x + 2t) + \begin{cases} x - 2t, & x \geq 2t \geq 0, \\ \sin(x - 2t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$11) u(x, t) = e^{-3t} \sin x + (x + 3t)^2 + \\ + \begin{cases} (x - 3t)^2 + \cos(x - 3t) + \sin(x - 3t), & x \geq 3t \geq 0, \\ e^{x-3t}, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$$

$$12) u(x, t) = te^x + e^{x+4t} + \begin{cases} e^{x-4t} + (x - 4t) - 2, & x \geq 4t \geq 0, \\ 2(x - 4t) - \cos(x - 4t), & 0 \leq x \leq 4t. \end{cases}$$

**21.28.** 1)  $u(x, t) = \frac{1}{2}x(x + 2t) +$   
 $+ \begin{cases} \frac{3}{2}(x - 2t) - \cos(x - 2t), & x \geq 2t \geq 0, \\ e^{x-2t} - 2 + \frac{1}{2}\cos(x - 3t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$

$$2) u(x, t) = \left(x + \frac{t}{2}\right) + \begin{cases} 2 \sin\left(x - \frac{t}{2}\right) - 3\left(x - \frac{t}{2}\right), & x \geq 2t \geq 0, \\ 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - e^{x-t/2}, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$3) u(x, t) = \frac{1}{2}(x + t + e^{x+t}) - \sin(x + 2t) + \\ + \begin{cases} \frac{1}{2}(x - t - e^{x-t}), & x \geq t \geq 0, \\ 1 - e^{x-t} + \frac{1}{2}(x - t + \sin(x - t) - \cos(x - t)), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$4) u(x, t) = \frac{1}{2}(x + t + \cos(x + t)) + \sin(2x + t) + \\ + \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos(x - t) - (x - t)), & x \geq t \geq 0, \\ 2 - e^{x-t} - \frac{1}{2}(\cos(x - t) - (x - t)), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$5) u(x, t) = \cos(x + t) - \frac{1}{2}\cos(x + 2t) + \\ + \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x - 2t) + 1, & x \geq 2t \geq 0, \\ 2 - \frac{1}{2}e^{x-2t} - \frac{1}{2}\sin(x - 2t) + (x - 2t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$6) \quad u(x, t) = \sin(x + t) + \frac{1}{2} \sin(2x + t) + (2x + t) + \\ + \begin{cases} \frac{1}{2}(2x - t) - (2x - t), & 2x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^{2x-t} + \frac{1}{2} \cos(2x - t) - (2x - t) - 1, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$7) \quad u(x, t) = \begin{cases} x + 3t, & x \geq 3t \geq 0, \\ e^{\frac{1}{3}x-t}(\sin(x - 3t) - 6) + 2(x + 3t), & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$$

$$8) \quad u(x, t) = \begin{cases} (x - 2t)^2, & x \geq 2t \geq 0, \\ 4e^{\frac{1}{2}x-t} \sin^2\left(\frac{x}{2} - t\right), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$9) \quad u(x, t) = \begin{cases} 2x + 4t, & x \geq 4t \geq 0, \\ x + 4t + \frac{1}{4}(x + 4t)^2, & 0 \leq x \leq 4t; \end{cases}$$

$$10) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(x + 3t)^2 + \begin{cases} 2x - \frac{1}{2}(x - 3t)^2, & x \geq 3t \geq 0, \\ x + 3t + 3(e^{3t-x} - 1), & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$$

$$11) \quad u(x, t) = x \sin t + \\ + \begin{cases} \sin(x + t), & x \geq t \geq 0, \\ \sin(x + t) + (x - t)^3, & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$12) \quad u(x, t) = (x + 1)e^{-t} + e^{-(x+t)} + \\ + \begin{cases} 0, & x \geq t \geq 0, \\ e^{-(x-t)} + e^{x-t} + 2(x - t), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$13) \quad u(x, t) = x \cos t + \begin{cases} (x - 2t)^2, & x \geq 2t \geq 0, \\ 2e^{x-2t} - 2 - 2(x - 2t), & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$14) \quad u(x, t) = te^{2x} + \begin{cases} e^{2x-t} + 2, & 2x \geq t \geq 0, \\ e^{-(2x-t)} + 2(2x - t) + 2, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$15) \quad u(x, t) = 2t - x^2 + (x + t)^2 + \begin{cases} (x - t)^2, & x \geq t \geq 0, \\ (x - t) \sin(x - t), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$16) \quad u(x, t) = te^{-x} + \sin(x + t) + \begin{cases} \sin(x - t), & x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2} \sin 2(x - t), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$17) \quad u(x, t) = -t^3 - 3t^2 + (x + t)^3 + \\ + \begin{cases} (x - t)^3, & x \geq t \geq 0, \\ \sin(x - t) - (x - t) \cos(x - t), & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$18) u(x, t) = xe^t + 2(x + t) - \frac{3}{2}(x + t)^2 + \\ + \begin{cases} 1 - 2(x - t) + \frac{3}{2}(x - t)^2, & x \geq t \geq 0, \\ (1 + t - x)e^{t-x}, & 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

**21.29.** 1)  $u(x, t) = -(1 + t) \cos x + \begin{cases} x + t + \cos(x - t), & x \geq t \geq 0, \\ 2t + 2 - e^{t-x}, & 0 \leq x \leq t, \end{cases}$

$$2) u(x, t) = 4t \sin x + \\ + \begin{cases} -4t, & x \geq 2t \geq 0, \\ -x - 2t + 1 + \frac{1}{2}(x - 2t)^2 - e^{-x+2t}, & 0 \leq x \leq 2t; \end{cases}$$

$$3) u(x, t) = 6e^{2x-t} + 3e^{\frac{1}{2}(4x+t)} + \\ + \begin{cases} 3(4x - t) - 9e^{\frac{1}{2}(4x-t)}, & 4x \geq t \geq 0, \\ 8e^{\frac{1}{4}(4x-t)} - 3e^{4x-t} + e^{-\frac{1}{2}(4x-t)} - 15, & 0 \leq 4x \leq t; \end{cases}$$

$$4) u(x, t) = 3 \sin(2x + t) + \sin(x + t) + \begin{cases} (x - t)e^{x-t}, & x \geq t \geq 0, \\ (x - t) + (x - t)^2, & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$5) u(x, t) = 10e^{x-2t} + 2(2x + t + 3)e^{2+t/2} + \\ + \begin{cases} 2(2x - t)e^{x-t/2} - 16e^{x-t/2}, & 2x \geq t \geq 0, \\ -16 - 6(2x - t) - (2x - t)^2, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$6) u(x, t) = \cos(x - 2t) + (x + t) \ln(1 + (x + t)^2) + \\ + \begin{cases} (x - t) \operatorname{ch}(x - t), & x \geq t \geq 0, \\ x - t, & 0 \leq x \leq t; \end{cases}$$

$$7) u(x, t) = 9t \sin \frac{x}{3} - x \sin \frac{t}{3} + x + \frac{t}{3} + \\ + \begin{cases} 3 + 2 \left( x - \frac{t}{3} \right) + \frac{3}{2} \left( x - \frac{t}{3} \right)^2 + \sin 2 \left( x - \frac{t}{3} \right), & 3x \geq t \geq 0, \\ x - \frac{t}{3} + 3e^{x-t/3}, & 0 \leq 3x \leq t; \end{cases}$$

$$8) u(x, t) = \frac{1}{4}xt^5 - x^5t + \left( x + \frac{t}{2} \right)^2 + \\ + \begin{cases} -1 + 2 \left( x - \frac{t}{2} \right)^2 + \cos(2x - t), & 2x \geq t \geq 0, \\ -1 + \ln \left( 1 - x + \frac{t}{2} \right) + e^{x-t/2}, & 0 \leq 2x \leq t; \end{cases}$$

$$9) u(x, t) = \frac{1}{9}t \cos 3x + x \cos 3t + x + 3t + \\ + \begin{cases} 3 + 3(x - 3t) + 4(x - 3t)^2 + \sin 2(x - 3t), & x \geq 3t \geq 0, \\ x - 3t + 4e^{x-3t}, & 0 \leq x \leq 3t; \end{cases}$$

$$10) \quad u(x, t) = \frac{1}{4}tx^4 + t^4x + (x + 2t)^2 + \\ + \begin{cases} -1 + e^{-(x-2t)} + \ln(1 + x - 2t), & x \geq 2t \geq 0, \\ -1 + 2(x - 2t)^2 + \cos 2(x - 2t), & 0 \leq x \leq 2t. \end{cases}$$

- 21.30.** 1)  $x^3 + 3xt^2$  при  $0 \leq x + t \leq 2$ ,  $0 \leq x - t \leq 2$ ,  $3x^2t + t^3$   
при  $0 \leq x + t \leq 2$ ,  $-2 \leq x - t \leq 0$ ;  
2)  $2x^3 + 6xt^2$  при  $0 \leq x + t \leq 4$ ,  $0 \leq x - t \leq 4$ ,  $(x + t)^3 + 8(x - t)^3$   
при  $0 \leq x + t \leq 4$ ,  $-2 \leq x - t \leq 0$ .

**21.31.**  $t_x = T + \frac{|x| - 1}{a}$ .

**21.32.**  $\frac{1}{2|x|} [(|x| + at)\alpha(|x| + at) + (|x| - at)\alpha(|x| - at)] +$

$$+ \frac{1}{2a|x|} \int_{|x|-at}^{|x|+at} \xi \beta(\xi) d\xi \text{ при } |x| \geq 1 + at; \\ \frac{1}{2|x|} [(|x| + at)\alpha(|x| + at) - (2 - |x| + at)\alpha(2 - |x| + at)] + \\ + \frac{1}{2a|x|} \int_{2-|x|+at}^{|x|+at} \xi \beta(\xi) d\xi \text{ при } 1 < |x| < 1 + at.$$

**21.33.** 0 при  $|x| \geq 1 + t$ ;

$$\frac{1}{|x|} e^{|x|-t-1} \int_0^{t+1-|x|} e^\tau g(\tau) d\tau \text{ при } 1 < |x| < 1 + t.$$

**21.34.**  $\frac{1}{2|x|} [(|x| + at)\alpha(|x| + t) + (|x| - t)\alpha(|x| - t)] +$

$$+ \frac{1}{2|x|} \int_{|x|-t}^{|x|+t} \xi \beta(\xi) d\xi \text{ при } |x| \geq 1 + t;$$

$$\frac{1}{2|x|} [(|x| + at)\alpha(|x| + t) + (2 - |x| + at)\alpha(2 - |x| + at)] +$$

$$+ \frac{1}{2|x|} \int_{2-|x|+t}^{|x|+t} \xi \beta(\xi) d\xi - \frac{1}{|x|} e^{|x|-t-2} \int_1^{2-|x|+t} \xi e^\xi [\alpha(\xi) - \beta(\xi)] d\xi$$

при  $1 < |x| < 1 + t$ .

**21.35.** 0 при  $|x| \geq 1 + t$ ;

$$\frac{1}{|x|} e^{(k+1)(|x|-t-1)} \int_0^{t+1-|x|} e^{(k+1)\tau} g(\tau) d\tau \text{ при } 1 < |x| < 1 + t.$$

**21.36.**  $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \exp \left( -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right) - \exp \left( -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right) \right\} d\xi +$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{1-\tau}} \left\{ \exp \left( -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right) - \exp \left( -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right) \right\} d\xi d\tau.$$

$$\mathbf{21.37.} \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\tau^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2\tau} \right\} d\tau.$$

$$\mathbf{21.38.} \frac{x}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \exp \left[ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} \right] + \exp \left[ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t} \right] \right\} d\xi.$$

$$\mathbf{21.39.} -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp \left[ -\frac{x^2}{4a^2\tau} \right] d\tau.$$

$$\mathbf{21.40.} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp \left[ -\frac{x^2}{4\tau} \right] d\tau + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^x \int_0^t g(t-\tau) e^\tau \int_{\frac{\sqrt{\tau}+x}{2\sqrt{\tau}}}^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha d\tau.$$

$$\mathbf{21.41.} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \exp \left[ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} \right] + \exp \left[ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t} \right] - \right. \\ \left. - 2h \int_0^\infty \exp \left( -\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t} - h\eta \right) d\eta \right\} d\xi.$$

$$\mathbf{21.42.} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left\{ \cos \left[ -\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{\pi}{4} \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[ -\frac{(x+\xi)^2}{4t} - \frac{\pi}{4} \right] \right\} d\xi + \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\tau^{3/2}} \cos \left( \frac{x^2}{4\tau} - \frac{\pi}{4} \right) d\tau.$$

$$\mathbf{21.43.} \frac{2ka}{(b+ka)\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/(2a\sqrt{t})}^\infty e^{-\xi^2} d\xi \text{ при } x < 0; \\ \frac{ka}{b+ka} \left\{ 1 + \frac{2b}{ka\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2b\sqrt{t})} e^{-\xi^2} d\xi \right\} \text{ при } x > 0.$$

## **Список литературы**

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974.
2. Беклемишев С. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Изд. 8-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
3. Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О., Кондратьев В. А., Радкевич Е. В., Розанова О. С., Чечкин Г. А., Шамаев А. С., Шапошникова Т. А. Сборник задач по уравнениям с частными производными. — М.: Бином, 2005.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е. — М.: Наука, 1085.
5. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
6. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
7. Ильин А. М. Уравнения математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
8. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1983.
9. Михайлов В. П. Лекции по уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
10. Никольский С. М. Курс математического анализа. Изд. 5-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
11. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Бином, 2005.
12. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961.
13. Петровский И. Г. Лекции по интегральным уравнениям. — М.: Наука, 1974.

14. Понtryгин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
15. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — М.-СПб.: ФИЗМАТЛИТ, Невский диалект, Лаборатория базовых знаний, 2000.
16. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
17. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
18. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1989.
19. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

14. Понtryгин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
15. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — М.-СПб.: ФИЗМАТЛИТ, Невский диалект, Лаборатория базовых знаний, 2000.
16. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
17. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
18. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1989.
19. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.