

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра радиотехники и систем управления

АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители: А. А. Григорьев, И. В. Филатов

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 621.396.6

Р е ц е н з е н т

Кандидат технических наук *А. Л. Ларин*

Активные фильтры: методические указания к лабораторной работе по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы* / сост. А. А. Григорьев, И. В. Филатов – М. : МФТИ, 2016. – 36 с.

Цель работы состоит в том, чтобы, ознакомившись с принципами синтеза фильтров по заданным требованиям к частотной характеристике, изучить схемотехнические приемы их реализации активными RC-цепями и приобрести практические навыки расчета, реализации и исследования схем фильтров или их элементов. Исследования проводятся как моделированием в программе Micro-Cap, так и в реальном физическом эксперименте. Для расчета параметров фильтров привлекаются средства программного пакета Matlab.

УДК 621.396.6

- © Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2016
- © Григорьев А. А., Филатов И. В.,
составление, 2016

Содержание

1. Предмет исследования	4
2. Синтез фильтров	4
2.1. Фильтры Баттервортса	7
2.2. Фильтры Чебышева	8
2.3. Эллиптические фильтры	10
2.4. Преобразование созвездий	13
3. Реализация фильтров	13
4. Петли обратной связи	15
5. Задание	16
5.1. Звенья первого порядка	16
5.2. Активные звенья с двойным Т-мостом	19
5.3. Исследование созвездий	22
5.4. Звенья Саллена-Ки	25
5.5. Звенья с двойной обратной связью	27
5.6. Полосовое звено на сдвоенном усилителе	31
5.7. Звенья эллиптических фильтров	33

1. Предмет исследования

Пассивная RLC-цепь становится активной, как только в нее добавляются усилители K . Присутствие усилителей отменяет выполнение закона сохранения энергии – мощность на входе активной цепи может не совпадать с суммой мощностей на ее компонентах. Это расширяет схемотехнические возможности, позволяя строить нетривиальные петли обратной связи.

В классе пассивных RC-цепей, в которых внутренние перетоки реактивной энергии между компонентами отсутствуют, реализуемы только апериодические передаточные функции с вещественными полюсами. Переход к активным RC-цепям снимает это ограничение. Любые рациональные передаточные функции становятся реализуемыми.

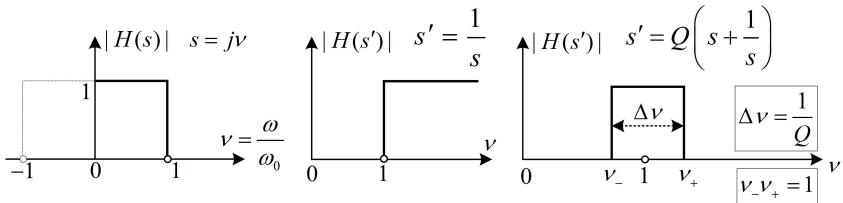
Основная область применения активных RC-цепей связана с реализацией активных фильтров, повторяющих классические RLC-решения без использования индуктивностей. Овладение теорией и практикой активных фильтров требует определенного понимания общих вопросов синтеза фильтров и их реализации.

Цель данной работы состоит в том, чтобы уяснить основные подходы к синтезу фильтров с заданными частотными характеристиками, познакомится со схемотехническими приемами их реализации активными RC-цепями и приобрести практический опыт конструирования и исследования активных фильтров или их элементов.

2. Синтез фильтров

В общей постановке задача синтеза фильтра состоит в том, чтобы указать явный вид передаточной функции по заданным требованиям к частотной характеристике. Эта функция должна представлять реализуемую систему – быть рациональной функцией частоты с вещественными коэффициентами.

Центральной для теории фильтров является каноническая задача синтеза фильтра нижних частот с прямоугольной частотной характеристикой, равной единице на интервале $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} \in [0, 1]$ (от нуля до частоты среза ω_0) и нулю вне этого интервала, рис. 1а.



(a) фильтр нижних частот (b) фильтр верхних частот (c) полосовой фильтр

Рис. 1. Прямоугольные фильтры

Передаточную функцию $H(s)$, $s = j\nu$ фильтра нижних частот с прямоугольной частотной характеристикой удается преобразовать в передаточные функции фильтров других типов со столь же прямоугольными характеристиками рациональными заменами частоты, не нарушающими условие реализуемости. Так, замена s на $s' = \frac{1}{s}$, отображающая внутренность интервала $\nu \in (0, 1)$ на его внешность, переводит $H(s)$ в передаточную функцию $H(\frac{1}{s})$ прямоугольного фильтра верхних частот, рис. 1b. Замена же s на $s' = a(s) = Q\left(s + \frac{1}{s}\right)$ переводит $H(s)$ в передаточную функцию полосового фильтра, рис. 1c. Коэффициент передачи результирующего фильтра оказывается равным единице в полосе

$$-1 \leq \nu' = Q\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) \leq 1$$

с границами в точках $\nu_{\pm} = \sqrt{\xi^2 + 1} \pm \xi$, $\xi = \frac{1}{2Q}$, и нулю вне этой полосы. Ширина полосы составляет $2\xi = \frac{1}{Q}$, а центральная частота $\omega = \omega_0$ ($\nu = 1 = \nu_+ + \nu_-$) совпадает со средним геометрическим от граничных частот. Наконец, замена s на $s' = \frac{1}{a(s)}$ дает режекторный фильтр с нулевой передачей в заданной полосе.

При ближайшем рассмотрении оказывается, что идеальную прямоугольную частотную характеристику реализовать невозможно хотя бы потому, что импульсная реакция $h(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$ прямоугольного фильтра с полосой $\nu \in [-1, 1]$ не удовлетворяет принципу причинности. Требования к прямоугольности ослабляют «возведением стен», рис. 2, которые ограничивают неравномерность частотной характеристики в полосе пропускания (параметр ε), уровень затухания в полосе задержания (параметр ε_1) и ширину переходной зоны (параметр селективности η).

В этой постановке синтез требуется выбрать рациональную функцию $F(\nu)$ так, чтобы при заданных параметрах $\varepsilon, \eta, \eta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ график частотной характеристики

$$|H(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F^2(\nu)}}$$

уложился в зазоры между стенами. Иными словами, модуль $F(\nu)$ должен не превышать единицы в полосе пропускания $\nu < 1$, монотонно нарастать в переходной зоне $1 < \nu < \eta$, и превышать значение η_1 в полосе задержания $\nu > \eta$. Выбор конкретной функции $F(\nu)$ устанавливает соотношение обмена между селективностью η и затуханием η_1 : $|F(\eta)| = \eta_1$.

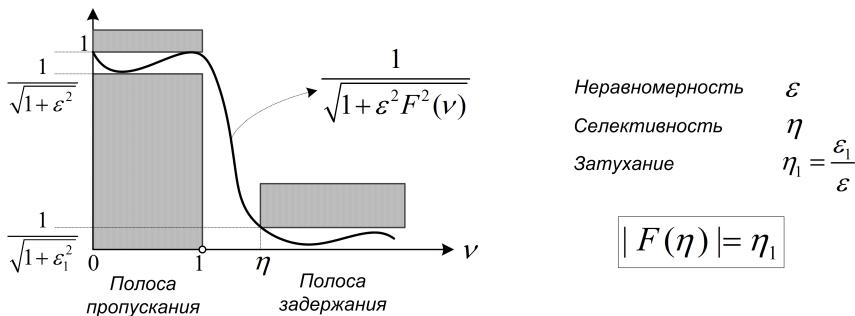


Рис. 2. Параметры частотной характеристики

При синтезе фильтров удобно вести речь о передаточной функции $H(s)H(-s)$, значения которой на мнимой оси $s = j\nu$ совпадают со значениями квадрата модуля $H(s)$:

$$H(j\nu)H(-j\nu) = H(j\nu)H((j\nu)^*) = H(j\nu)H^*(j\nu) = |H(j\nu)|^2.$$

Тогда задача синтеза сводится к тому, чтобы, выбрав подходящую рациональную функцию $F(\nu)$, найти нули и полюсы рациональной же функции

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F^2(\frac{s}{j})},$$

или, что то же самое, полюсы и нули функции $1 + \varepsilon^2 F^2(\frac{s}{j})$.

Функция $H(s)H(-s)$ замечательна тем, что конфигурация ее нулей и полюсов инвариантна как относительно сопряжений

$s \rightarrow s^*$, так и относительно отражений $s \rightarrow -s$, то есть полностью определяется расположением нулей и полюсов в левом верхнем квадранте s -плоскости. Искомые нули и полюсы $H(s)$ можно отобрать, просто отбросив все нули и полюсы в $H(s)H(-s)$, лежащие в правой s -полуплоскости.

Три известные варианты выбора $F(\nu)$ ведут к трем основным классам фильтров.

2.1. Фильтры Баттерворт

Фильтры Баттервортса порядка n получаются при выборе

$$F_n(\nu) = \nu^n.$$

Параметр неравномерности ϵ для этих фильтров теряет смысл, поскольку его задание оказывается эквивалентным изменению частоты среза: $\epsilon\nu^n = \epsilon(\frac{\omega}{\omega_0})^n = (\frac{\omega}{\omega'_0})^n$; $\omega'_0 = \epsilon^{-\frac{1}{n}}\omega_0$. Поэтому всегда принимают $\epsilon = 1$. В итоге получаются частотные характеристики вида

$$|H_n(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \nu^{2n}}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

плавно спадающие от 1 в нуле до уровня $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq -3$ dB на границе полосы пропускания, при $\nu = 1$.

При $n \rightarrow \infty$ частотная характеристика фильтра Баттервортса неограниченно приближается к прямоугольнику, поскольку

$$\frac{1}{1 + \nu^{2n}} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{при } \nu < 1, \\ 0 & \text{при } \nu > 1. \end{cases}$$

Соотношение затухание/селективность для этих фильтров принимает вид: $\eta_1 = \eta^n$. При фиксированной селективности $\eta > 1$ затухание на границе полосы задержания растет экспоненциально по n как $e^{n \ln \eta}$. При фиксированном затухании η_1 граница полосы задержания приближается к единице по закону $\eta = e^{\frac{\ln \eta_1}{n}}$.

Полюсы функции $H(s)H(-s)$ для фильтра Баттервортса элементарно находятся из уравнения

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = -1 = e^{j\pi} e^{j2\pi k}$$

и имеют вид

$$s_k = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{2n}} e^{j\frac{k\pi}{n}}; k = [0, 2n - 1].$$

Это система из $2n$ точек, равномерно распределенных по единичной окружности с шагом $\frac{\pi}{n}$. В левой s -полуплоскости лежат полюсы с номерами $k = [0, n - 1]$. При четных $n = 2m$ имеется m пар сопряженных полюсов, при нечетных $n = 2m + 1$ присутствует один дополнительный полюс на вещественной оси.

2.2. Фильтры Чебышева

К фильтрам этого типа приводит выбор в качестве функций $F(\nu)$ полиномов Чебышева $P_n(\nu)$ порядка n :

$$F_n(\nu) = P_n(\nu).$$

Полином Чебышева степени n

$$P_n(\nu) = \cos(n \arccos(\nu))$$

строится на базе гармонической функции косинус, продолжение которой в комплексную плоскость $z = x + jy$ имеет вид:

$$\cos z = \cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y.$$

Определение полиномов можно записать в следующей параметрической форме:

$$P_n(\nu) = \cos(nw); \quad \nu = \cos(w).$$

На интервале $\nu = [-1, 1]$ вариация аргумента nw составляет $n\pi$, так что полином $P_n(\nu)$ совершает на нем $n/2$ полных осцилляций, принимая значения из диапазона $[-1, +1]$.

Подстановка $\alpha = \arccos \nu$ в тригонометрическое тождество

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha$$

дает рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(\nu) = 2\nu P_n(\nu) - P_{n-1}(\nu),$$

которое позволяет выписать ряд чебышевских полиномов явно:

$$\begin{aligned}
 P_0(\nu) &= \cos(0 \arccos \nu) = 1, \\
 P_1(\nu) &= \cos(1 \arccos \nu) = \nu, \\
 P_2(\nu) &= 2\nu P_1(\nu) - P_0(\nu) = 2\nu^2 - 1, \\
 P_3(\nu) &= 2\nu P_2(\nu) - P_1(\nu) = 4\nu^3 - 3\nu, \\
 P_4(\nu) &= 2\nu P_3(\nu) - P_2(\nu) = 8\nu^4 - 8\nu^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что коэффициент при старшей степени ν в полиноме $P_n(\nu)$ составляет 2^{n-1} и растет экспоненциально по n . Полиномы Чебышева отличают быстрый рост модуля вне интервала $[-1, +1]$.

Для фильтра Чебышева порядка n полюсы $H(s)H(-s)$ находятся как корни уравнения

$$1 + \varepsilon^2 P_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 0; \quad \Rightarrow \quad P_n\left(\frac{s}{j}\right) = \cos n \arccos\left(\frac{s}{j}\right) = \pm \frac{j}{\epsilon}.$$

Положим $\arccos\left(\frac{s}{j}\right) = u - jv$ или $s = j \cos(u - jv)$. Получим:

$$\cos n(u - jv) = \cos nu \operatorname{ch} nv + j \sin nu \operatorname{sh} nv = \pm \frac{j}{\epsilon}.$$

Отсюда следует, что $\cos nu = 0$, то есть $u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k$. В этих точках $\sin nu_k = (-1)^k$. Поэтому $\operatorname{sh} nv = \pm 1/\varepsilon$, то есть $v = \pm \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{-1}(1/\varepsilon)$. Тогда

$$s_k = j \cos(u_k - jv) = -\operatorname{sh} v \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right) + j \operatorname{ch} v \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right).$$

При $k = [0, n - 1]$ получаем набор из n полюсов передаточной функции $H(s)$ фильтра Чебышева порядка n . От фильтра Баттерворт картина отличается тем, что полюсы распределены не по окружности единичного радиуса, а по эллипсу с малой осью длиной $2 \operatorname{sh} v$ вдоль вещественной оси и большой осью длиной $2 \operatorname{ch} v$ – вдоль мнимой. Эксцентриситет эллипса определяется параметром ε неравномерности в полосе пропускания: $v = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{-1}(1/\varepsilon)$. Типовой уровень неравномерности 3 dB получается при $\varepsilon = 1$ ($v \simeq \frac{0.88}{n}$).

Соотношение затухание/селективность для фильтров Чебышева принимает вид: $\eta_1 = P_n(\eta) = \operatorname{ch} nw$, $\eta = \operatorname{ch} w$. При достаточно больших η , когда $\operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2} \simeq \frac{e^w}{2}$, получается $w \simeq \ln 2\eta$, $\eta_1 \simeq \frac{1}{2}e^{n \ln 2\eta}$. Таким образом, при сопоставимых затуханиях η_1 фильтры Чебышева выигрывают у фильтров Баттервортса по селективности η более чем вдвое.

2.3. Эллиптические фильтры

К этим фильтрам приводит выбор

$$F_n(\nu) = R_n(\nu),$$

где $R_n(\nu)$ – рациональная эллиптическая функция порядка n .

Подобно тому как чебышевские полиномы берут начало от гармонической функции, рациональные эллиптические функции происходят от эллиптических функций Якоби, связанных с движением точки по эллипсу, рис. 3.

Если положение точки P на эллипсе с эксцентриситетом $a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$, $k \in [0, 1)$, задавать параметром $\nu = \int_O^P r(\theta) d\theta$, то y -координата этой точки определит эллиптический синус $y(\nu) = \operatorname{sn}(\nu, k)$, а ее x -координата – эллиптический косинус: $\frac{x(\nu)}{a} = \operatorname{cn}(\nu, k)$. Третья эллиптическая функция описывает зависимость от ν длины вектора r : $\operatorname{dn}(\nu) = \frac{r(\nu)}{a}$.

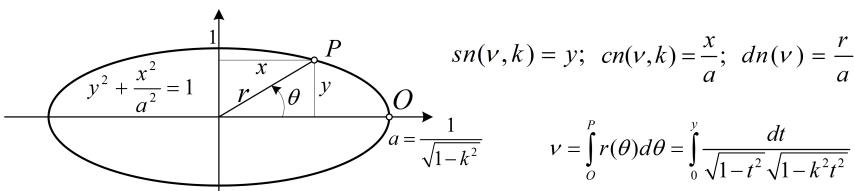


Рис. 3. Эллиптические функции

Поведение графиков всех трех основных эллиптических функций несложно представить себе, глядя на рисунок. При $k = 0$ ($a = 1$) эллипс становится кругом, функции sn , cn переходят в обычные синус и косинус от угла θ , а функция dn вырождается в тождественную единицу. Эллиптические функции периодичны с периодом $4K(k)$, где $K(k)$ – это значение полного

эллиптического интеграла

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} r(\theta) d\theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}.$$

При $k = 0$ получается $K(0) = \frac{\pi}{2}$, что как раз составляет четверть периода 2π гармонической функции.

Эллиптическая тригонометрия несколько сложнее обычной, что обусловлено присутствием третьей основной функции dn . Как и в обычной тригонометрии, вводятся обратные функции $ns(\nu) = \frac{1}{sn(\nu)}$, $nc(\nu) = \frac{1}{cn(\nu)}$, $nd(\nu) = \frac{1}{dn(\nu)}$ и всевозможные комбинированные функции типа $cd(\nu) = \frac{cn(\nu)}{dn(\nu)}$. Всего насчитывается 12 эллиптических функций – по числу вариантов выбора пары из четырех букв (s, c, d, n) .

Подобно полиному Чебышева, рациональная эллиптическая функция задается параметрически:

$$R_n(\nu) = cd(nK_1w, k_1), \quad \nu = cd(Kw, k),$$

где $K = K(k)$ и $K_1 = K(k_1)$ – значения полных эллиптических интегралов в точках k, k_1 , равные четверть-периодам эллиптических функций с параметрами k, k_1 .

Пара параметров k, k_1 должна удовлетворять так называемому уравнению степени (*degree equation*):

$$n \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} = \frac{K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)},$$

которое обеспечивает выполнение условия

$$R_n\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k_1}; \quad \left(R_n(\eta) = \eta_1\right).$$

Возможны альтернативные подходы к синтезу эллиптического фильтра заданного порядка n . Можно волевым образом задать затухание η_1 на границе полосы задержания и выбрать $k_1 = \frac{1}{\eta_1}$. Тогда решение уравнения степени определит значение k и, тем самым, параметр селективности $\eta = \frac{1}{k}$. А можно действовать иначе, волевым образом задав селективность $\eta = \frac{1}{k}$. Тогда решение k_1 уравнения степени даст величину затухания $\eta_1 = \frac{1}{k_1}$.

Оба варианта приведут к рациональной эллиптической функции $R_n(\nu)$, удовлетворяющей условию: $R_n(\eta) = \eta_1$.

Можно синтезировать фильтр по заданным селективности $\eta = \frac{1}{k}$ и затуханию $\eta_1 = \frac{1}{k_1}$. Тогда уравнение степени определит некоторое значение для порядка фильтра n , которое, скорее всего, окажется не целым. Нужно округлить его до ближайшего целого сверху, а затем уточнить значение одного из параметров k, k_1 по выбору, с тем, чтобы тройка n, k, k_1 удовлетворяла уравнению степени. Получится фильтр минимально возможного порядка с несколько лучшими характеристиками либо по затуханию, либо по селективности.

При $k = 0$ ($\eta = \infty$) рациональная эллиптическая функция вырождается в полином Чебышева.

Для эллиптического фильтра нули функции

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\frac{s}{j})}$$

совпадают с полюсами $R_n(\frac{s}{j})$, а полюсы находятся как корни уравнений

$$R_n\left(\frac{s}{j}\right) = \pm \frac{j}{\epsilon}.$$

Элементарные по существу, но требующие навыков работы с эллиптическими функциями выкладки приводят к следующим результатам. Пусть $n = 2m$ или $n = 2m + 1$. Положим $u_i = \frac{2i-1}{n}$, $i = [1, m]$. В этих обозначениях положения m нулей $H(s)$ на положительной мнимой полуоси s -плоскости можно найти как

$$s_i = j \frac{k}{\text{cd}(u_i K(k), k)},$$

а положения m полюсов в верхнем левом s -квадранте как

$$s_i = j \text{cd}\left((u_i - jv)K(k), k\right); \quad v = -\frac{j}{K(k_1)} \text{sn}\left(\frac{j}{\epsilon}, k_1\right).$$

При $n = 2m + 1$ имеется дополнительный вещественный полюс в точке $s = j \text{sn}(jvK(k), k)$. Разумеется, присутствуют также и сопряженные нули и полюсы в нижней полуплоскости. Всего насчитывается n полюсов и $2m$ мнимых нулей. При нечетных $n = 2m + 1$ недостающий нуль лежит в бесконечности.

2.4. Преобразование созвездий

Фильтр нижних частот можно трансформировать в фильтр верхних частот заменой $s' = \frac{1}{s}$ или в полосовой фильтр с относительной полосой $\Delta\nu = \frac{1}{Q}$ заменой $s' = Q(s + \frac{1}{s})$. Эти замены преобразуют созвездия нулей и полюсов синтезированной передаточной функции.

При замене $s' = \frac{1}{s}$ объект (нуль или полюс) в точке $s = \mu$ перемещается в точку $s = \frac{1}{\mu}$. В частности, объекты в бесконечности перемещаются в нуль, а объекты в нуле – в бесконечность.

Замена $s' = Q\left(s + \frac{1}{s}\right)$ удваивает число объектов. Каждый объект в точке μ дает начало двум объектам, положения которых находятся как корни квадратного уравнения $s + \frac{1}{s} = \frac{\mu}{Q}$. В частности, объект в бесконечности расщепляется на один такой же объект в нуле и один – в бесконечности. Примечательно, что созвездие полюсов фильтра Баттервортса инвариантно относительно преобразования $s' = \frac{1}{s}$.

Фильтры нижних частот Баттервортса и Чебышева полиномиальны – все их нули находятся в бесконечности. Они остаются полиномиальными и после преобразований. Переход к фильтру верхних частот переводит все нули в нуль. Преобразование в полосовой фильтр удваивает число нулей. При этом половина нулей оказывается в нуле, а вторая – остается в бесконечности.

Почти все нули эллиптических фильтров находятся в конечных точках на мнимой оси. Исключением является единственный нуль в бесконечности у фильтров нечетных порядков. Такими же они остаются и после преобразований. Преобразование в полосовой фильтр удваивает число мнимых нулей и расщепляет нуль в бесконечности на пару нулей в нуле и бесконечности.

3. Реализация фильтров

После того как задача синтеза фильтра решена, в нашем распоряжении оказываются списки его нулей и полюсов. Время приступить к реализации фильтра – нужно придумать конкретную RLC-схему, передаточная функция которой обладает нужными нулями и полюсами.

Проще всего реализуются полиномиальные фильтры с нуля-

ми в нуле или бесконечности. Их можно строить, соединяя последовательно (каскадно) элементарные полиномиальные звенья первого и второго порядков.

Звенья первого порядка с передаточными функциями

$$H_{\text{ФНЧ(ФВЧ)}}(s) = \frac{1(s)}{s + 1}$$

реализуют одиночные вещественные полюсы. Звенья второго порядка

$$H_{\text{ФНЧ(ПФ,ФВЧ)}}(s) = \frac{1(s, s^2)}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

реализуют пары комплексно-сопряженных полюсов.

При каскадном соединении звеньев их передаточные функции перемножаются, так что полюсы звеньев оказываются также и полюсами каскадного соединения. То же относится и к нулям.

Элементарные звенья с нетривиальными нулями реализуют параллельным соединением полиномиальных звеньев. Так, произвольную однополюсную передаточную функцию можно реализовать в виде

$$\frac{as + b}{s + 1} = a \frac{s}{s + 1} + b \frac{1}{s + 1},$$

сложив выходы двух полиномиальных звеньев с весами a, b . По той же схеме реализуется произвольная передаточная функция второго порядка

$$\frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 2\xi s + 1} = a \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1} + b \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} + c \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1},$$

реализующая пару нулей и пару полюсов.

Таким образом, любой фильтр можно реализовать параллельно-последовательным соединением звеньев всего пяти типов – двух звеньев первого порядка и трех – второго. Сложность создают высокодобротные звенья второго порядка с полюсами, близкими к мнимой оси. Для их реализации требуются индуктивности, поскольку, как известно, все RC-цепи являются апериодическими – их полюсы всегда вещественны.

Добавление к RC-компонентам идеальных усилителей приводит в класс активных RC-цепей. В этом классе открывается новая возможность строить петли обратной связи, позволяющие реализовать пары сопряженных полюсов.

4. Петли обратной связи

Петля обратной связи получается, когда часть выходного сигнала системы возвращается на ее вход и «подмешивается» ко входному сигналу, рис. 4. Структура петли служит моделью системы автоматического регулирования. К примеру, пусть вход системы – это поток пара, а выход – скорость вращения вала паровой машины. Можем замкнуть обратную связь, сделав так, чтобы повышение скорости вращения перекрывало подачу пара. Получится петля автоматического регулирования скорости.

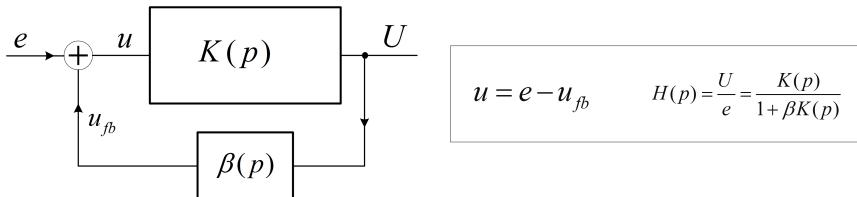


Рис. 4. Петля обратной связи

В «правильной» замкнутой петле регулирования обратная связь предполагается **отрицательной** – поступающий по цепи обратной связи сигнал $u_{fb} = \beta U$ должен компенсировать входное воздействие: $u = e - u_{fb}$. Повышение скорости вращения должно перекрывать поток пара. При неверном выборе направления регулирования получается **положительная** обратная связь: $u = e + u_{fb}$. Повышение скорости вращения наращивает подачу пара. Машина идет вразнос.

Ключевую роль в теории петель играет формула, выражаяющая передаточную функцию петли $H(p) = U/e$ через передаточные функции ее конструктивных блоков – $K(p) = U/u$ и $\beta = u_{fb}/U$. Ограничимся случаем отрицательной связи: $u = e - u_{fb}$. Имеем

$$e = u + u_{fb} = u + \beta U = u + \beta K u = (1 + \beta K) u.$$

Поэтому $u = e/(1 + \beta K)$ и $U = Ku = eK/(1 + \beta K)$. Это и дает основную формулу теории обратных связей:

$$H(p) = \frac{U}{e} = \frac{K}{1 + \beta K}.$$

Полюсы передаточной функции петли $H(p)$ находятся в тех точках p -плоскости, в которых петлевое усиление $\beta K(p)$ принимает значение минус 1. На положение этих точек не существует никаких ограничений фундаментального характера, подобных ограничению на положение полюсов пассивных RC-цепей. Оно может быть совершенно произвольным. Это и открывает возможность реализации сопряженных полюсов активными RC-цепями с обратной связью.

5. Задание

Работа выполняется в программе MicroCap. Предполагается наличие определенных навыков пользования ею для исследования схем в режимах *AC* (частотная область) и *Transient* (временная область). Задействована возможность варьирования параметров. Заявки на варьирование оформляются в диалоге *Stepping*. В тексте задания для их описания принят синтаксис: *Step What* = [*From, To|Step Value*]. К примеру, запись $R = [1k, 10k|1k]$ означает линейное (*Linear*) варьирование резистора R в диапазоне от 1 до 10 к с шагом 1 к. Запись же $R = [1k, 64k|Log 2]$ задает логарифмическое (*Log*) варьирование с шагом 2. Придется столкнуться и со сборкой схемы на макетной плате.

Для анализа созвездий нулей и полюсов фильтров используется пакет Matlab. Каких-либо предварительных навыков работы с ним не требуется. Вся деятельность протекает в окне команд Matlab в режиме калькулятора: ввод запроса – наблюдение результатов. Синтаксис запросов оговаривается.

Подготовленные для выполнения задания MicroCap-модели содержаться в папке **Cir**, нужные для работы *.m*-файлы Matlab – в папке **Mat**. Эти папки нужно целиком скопировать в свою рабочую директорию. Курсивом в тексте заданий выделены места, которые *предполагают фиксацию результатов в отчете*.

5.1. Звенья первого порядка

Полиномиальные однополюсные звенья с нулями в бесконечности и нуле реализуются интегрирующей и дифференцирующей цепями, рис. 5. Роль буферных усилителей в этих схемах вспомо-

гательна – они позволяют исключить взаимное влияние звеньев при их каскадном соединении.

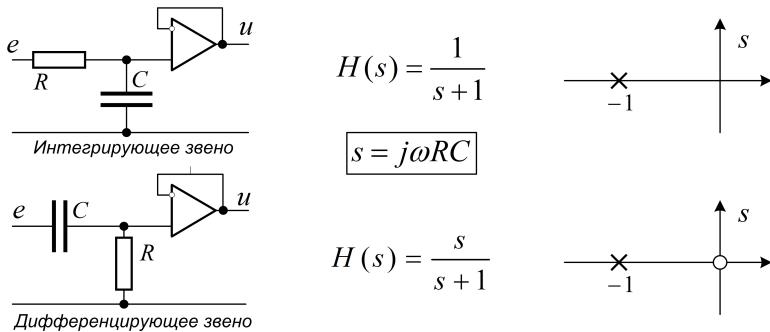


Рис. 5. Полиномиальные звенья первого порядка

Схемы на рис. 6 реализуют однополюсные звенья с произвольным расположением нуля.



Рис. 6. Звенья первого порядка с нулями передачи

На отрицательной вещественной полуоси этот нуль может располагаться либо до полюса, либо за ним. Эти два варианта и реализуются схемами пропорционально дифференцирующей и интегрирующей цепей. При фиксированном положении полюса в точке $s = \frac{p}{\omega_0} = -1$ (фиксированных значениях постоянной времени $\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC(\alpha + \beta)$ или $\tau = RC \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$) положение нуля можно регулировать параметром $\delta = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, выбирая его значение

в диапазоне $(0, 1)$. Значение δ определяет уровень подавления сигнала в полосе задержания.

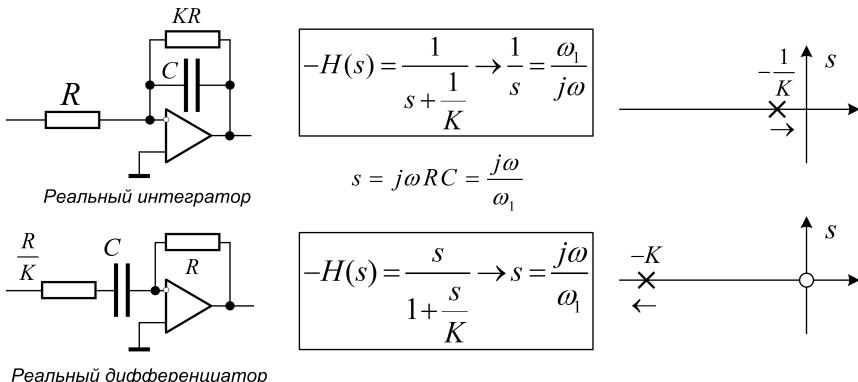


Рис. 7. Интегратор и дифференциатор

Схемы на рис. 7 имитируют свойства идеального интегратора с передаточной функцией $H(s) = \frac{1}{s} = \frac{\omega_1}{j\omega}$ и идеального дифференциатора с функцией $H(s) = s = \frac{j\omega}{\omega_1}$. Идеальные системы характеризуются единственным параметром – частотой единичного усиления ω_1 . Интегратор обладает полюсом в нуле и нулем в бесконечности. У дифференциатора все наоборот – нуль в нуле и полюс в бесконечности.

Идеальные интегратор и дифференциатор не реализуемы технически, поскольку их частотные характеристики уходят в бесконечность на нулевой или бесконечной частотах. Схемы на рис. 7 неограниченно приближаются к идеальным при $K \rightarrow \infty$. Роль усилителя в них существенна.

Переходная характеристика идеального интегратора – это линейно нарастающая функция $h_0(t) = \omega_1 t$. Переходную характеристику реального интегратора на рис. 7 найдем, факторизовав в сумму элементарных дробей ее лаплас-образ:

$$L[h_0](s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(s + \mu)} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \mu} \right\}; \quad \mu = \frac{1}{K}.$$

В результате получится

$$h_0(t) = \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - e^{-\mu\omega_1 t} \right\} = \omega_1 t \left\{ \frac{1 - e^{-\mu\omega_1 t}}{\mu\omega_1 t} \right\} \rightarrow \omega_1 t.$$

Поправочный фактор $\frac{1-e^{-x}}{x}$, $x = \mu\omega_1 t = \frac{\omega_1 t}{K}$ стремится к единице при $x \rightarrow 0$. Однако эта сходимость неравномерна по t . При любом фиксированном t параметр x можно сделать произвольно малым за счет усиления K . Однако при каждом данном K условие малости x заведомо нарушается с ростом t . Поэтому время удовлетворительной работы реального интегратора всегда ограничено интервалом $t \ll \frac{K}{\omega_1} = K\tau_1$.

ЗАДАНИЕ 1.

1. Открыть в Micro-Cap модель **zpole.cir** пропорционально интегрирующей и дифференцирующей цепей с полюсом в точке $s = \frac{p}{\omega_0} = -1$, $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10k$ и нулями в точках $s = -2$ и $s = -\frac{1}{2}$. Изучить их частотные и фазовые характеристики. Измерить *уровни подавления на частоте f_0 и в полосах задержания*. Оценить положения и уровни экстремумов фазовых характеристик.
 2. Изменить номиналы резисторов в схемах так, чтобы, сохранив положения полюсов, переместить нули в точки $s = -4$, $s = -\frac{1}{4}$. Изучить последствия изменений. Измерить *уровни подавления на частоте f_0 и в полосах задержания*. Оценить положения и уровни экстремумов фазовых характеристик.
 3. Открыть модель **integrator.cir** реального интегратора с частотой единичного усиления $f_1 = \frac{1}{2\pi RC} = 10k$ и усилением $K = \frac{R_K}{R}$. Варьируя резистор $R_K = [20k, 640k|\log 2]$, изучить поведение нормированных частотных и фазовых характеристик. Убедиться в том, что *граничные частоты f_0 по уровню $0.7 = -3 \text{ dB}$ (частоты полюсов)* удовлетворяют условию $f_0 = \frac{f_1}{K}$.
 4. Подключив источник *step* единичного перепада, изучить переходные характеристики интегратора $h_0(t/\tau_1)$, $\tau_1 = RC = 15.92 \mu$, варьируя $R_K = [20k, 640k|\log 2]$. Оценить значения ошибок интегрирования в точках $\frac{t}{\tau_1} = \frac{K}{2}$. Подключив источник *pulse*, проанализировать результаты интегрирования серии прямоугольных импульсов при $R_K = [20k, 640k|\log 2]$.
-

5.2. Активные звенья с двойным Т-мостом

Интересные схемные решения дает применение в петлях обратной связи двойного Т-моста, передаточная функция которого $\beta(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+1}$ ($s = \frac{p}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$) обладает нулем в точке $s = j$

на мнимой оси. Этот нуль проявляется себя обращением в нуль модуля коэффициента передачи моста на частоте ω_0 .

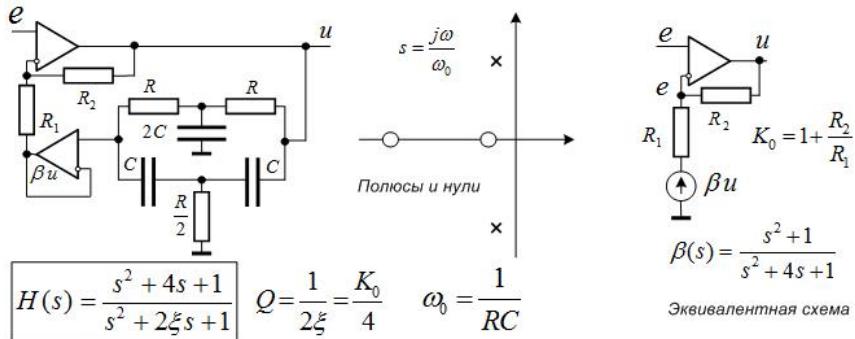


Рис. 8. Полосовой фильтр с двойным Т-мостом

Включение моста в цепь отрицательной обратной связи приводит к схеме полосового фильтра на рис. 8. На частоте ω_0 мост «выключает» обратную связь. Схема вырождается в обычный неинвертирующий усилитель с коэффициентом передачи $K_0 = \frac{u}{e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. На других частотах обратная связь включается, снижая усиление.

Приравняв токи через резисторы R_1, R_2 в эквивалентной схеме на рис. 8, найдем

$$\frac{e - \beta u}{R_1} = \frac{u - e}{R_2} \Rightarrow H(s) = \frac{u}{e} = \frac{K_0}{1 + \beta(s)(K_0 - 1)}.$$

Подстановка сюда передаточной функции моста $\beta(s)$ дает приведенное на рисунке выражение для передаточной функции $H(s)$ фильтра.

Свойства фильтра определяются парой сопряженных полюсов с добротностью $Q = \frac{K_0}{4}$, которые дают выброс на частотной характеристике при $s = j$ с уровнем K_0 . Оба нуля передаточной функции лежат на вещественной оси. Как следствие, частотная характеристика имеет конечные (единичные) пределы в нуле и бесконечности.

В реальности двойной Т-мост не может быть сбалансирован абсолютно точно. Погрешности в компонентах моста сдвигают его нули в левую или правую полуплоскость, так что его пере-

даточная функция принимает вид $\beta(s) \simeq \frac{s^2 + \delta s + 1}{s^2 + 4s + 1}$ с малым параметром δ . Постоянная затухания полосового фильтра становится при этом равной $2\xi = (\frac{4}{K_0} + \delta \frac{K_0 - 1}{K_0})$. Видно, что при отрицательных δ , когда нули Т-моста оказываются в правой полуплоскости, затухание может стать аномально малым или даже отрицательными. Этот эффект можно с выгодой использовать для повышения добротности фильтра за счет разбалансирования моста. С другой стороны, приходится принимать во внимание, что дисбаланс моста может сделать фильтр неустойчивым.

На рис. 9 приведена схема режекторного фильтра. Воспользовавшись эквивалентной схемой на рисунке, найдем

$$\beta(s)[e - (1 - \gamma)u] = u - (1 - \gamma)u \Rightarrow H(s) = \frac{u}{e} = \frac{\beta(s)}{\gamma + (1 - \gamma)\beta(s)}.$$

Подстановка сюда $\beta(s)$ приводит к показанной на рисунке передаточной функции $H(s)$ с парой нулей на мнимой оси и парой близко лежащих к нулям сопряженных полюсов.

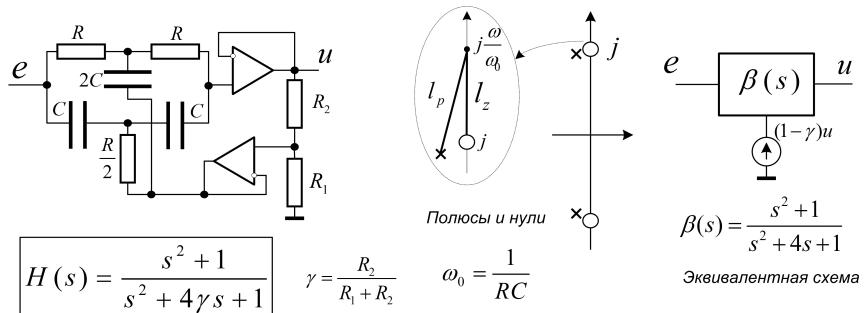


Рис. 9. Режекторный фильтр с двойным Т-мостом

Эффект от обратной связи сводится к переносу полюсов двойного Т-моста с вещественной оси в окрестность его нулей. В результате провал на частотной характеристике в окрестности частоты режекции становится более острым – как видно из рисунка, при уходе от нуля по оси частот расстояния l_z , l_p до нуля и полюса, отношение которых и определяет частотную характеристику, быстро становятся почти одинаковыми.

ЗАДАНИЕ 2.

1. Открыть модель полосового фильтра **pass2T.cir** с $f_0 = 10k$, $K_0 = 20$. Изучить его частотную и фазовую характеристики. Измерить усиление на частоте f_0 и полосу Δf по уровню -3 dB. *Снять зависимость усиления и ширины полосы от $R_2 = [20k, 100k|20k]$.*

2. Изучить поведение фильтра при разбалансировании моста варьированием $R_5 = [1.5k, 5.5k|500]$. *Снять зависимость от R_5 пикового усиления.* Оценить значение R_5 , при котором пиковое усиление достигает максимума. Характер изменения фазовой характеристики фильтра показывает, что при этом полюс фильтра пересекает мнимую ось, оказываясь в правой полуплоскости. Фильтр становится неустойчивым.

3. Изучить переходную характеристику фильтра. *Измерить уровни скачка в нуле и первого выброса.* Проследить за ее изменением при варьировании $R_5 = [5.0k, 2.5k|500]$. *Оценить значение R_5 , при котором фильтр теряет устойчивость.*

4. Открыть модель режекторного фильтра **stop2T.cir** с $f_0 = 10k$, $\gamma = 0.1$. Изучить его частотную и фазовую характеристики. *Измерить ширину полосы режекции Δf по уровню $0.7 = -3$ dB.* Изучить ее изменение при варьировании $R_1 = [90k, 240k|30k]$ и $R_1 = [300k, 1500k|300k]$. Измерить уровень выброса на АЧХ при $R_1 = 1500k$. Изучить поведение фильтра при разбалансировании моста варьированием $R_5 = [1k, 9k|2k]$.

5. Изучить переходную характеристику фильтра. Измерить *уровни скачка в нуле и первого выброса.* Проследить за ее изменением при варьировании $R_1 = [90k, 240k|30k]$ и $R_5 = [1k, 9k|2k]$.

5.3. Исследование созвездий

Исследование созвездий полюсов и нулей фильтров выполняется из окна команд пакета Matlab. Запустите Matlab, установите простую конфигурацию рабочего стола через меню *Desktop/Desktop Layout/Command Window Only*. Инструментом *Current Directory* установите путь на папку **Mat** в своей рабочей директории. В распоряжении окажется набор подготовленных *m*-функций для построения созвездий.

Функция $P = \text{batt}(n)$ возвращает список P полюсов фильтра Баттервортса порядка n . Информация о полюсах распечатывается в окне команд, а их конфигурация отображается в отдельном окне карты созвездия.

Для примера наберите в окне команд: $\text{batt}(7); [\text{Enter}]$. (Закрывающий символ ; отменяет штатную распечатку возвращаемого списка в формате Matlab). В ответ будет распечатана информация о четырех полюсах фильтра Баттервортса порядка $n = 7$ в левом верхнем квадранте s -плоскости, и появится окно с картой созвездия. В распечатке положение полюса характеризуется его координатами $-x + jy$, частотой $\nu = \sqrt{x^2 + y^2}$, обратной частотой $1/\nu$ (вместо ν Matlab печатает $n\nu$), затуханием $2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{y}{\nu}$ и добротностью Q . Удобно организовать рабочий стол так, чтобы окно команд Matlab и окно созвездия разместились на нем без перекрытия.

Функцию $\text{batt}(n)$ можно вызывать с параметрами: $\text{batt}(n, \eta, \eta_1)$. Если задан только один параметр селективности η , функция подсчитывает и выводит значение $\text{stoplevel} = \eta_1$ затухания в точке η – на границе полосы задержания. Если задан также и второй параметр затухания η_1 , то подсчитывается и выводится значение селективности $\text{stopband} = \eta$, при котором заданное затухание достигается. Первый параметр при этом игнорируется – может быть, например, нулевым.

Для примера, наберите $\text{batt}(7, 2);$. Получите значение затухания $\text{stoplevel} = 128$ на удвоенной частоте среза. Команда $\text{batt}(7, 0, 128);$ даст оценку $\text{stopband} = 2$ частоты, на которой достигается затухание 128. Ранее введенные команды можно ли-стать стрелками вверх/вниз.

Функция $P = \text{cheb}(n, \epsilon, \eta, \eta_1)$ возвращает список полюсов фильтра Чебышева порядка n с неравномерностью ϵ в полосе пропускания. Необязательные параметры η, η_1 имеют тот же смысл, что и раньше.

Функция $[P Z] = \text{ellp}(n, \epsilon, \eta, \eta_1)$ возвращает список P полюсов и список Z нулей эллиптического фильтра порядка n с неравномерностью ϵ и селективностью η (затуханием η_1). Один из параметров η, η_1 обязательен – влияет на конфигурацию созвездия. Значение второго вычисляется и распечатывается.

Функции $\text{highpass}(P, Z)$ и $\text{bandpass}(Q, P, Z)$ преобразуют со-

звездие P, Z полюсов и нулей фильтра нижних частот в созвездие полюсов-нулей фильтра верхних частот и полосового фильтра с шириной полосы $\frac{1}{Q}$. Аргументы Z при их вызове не обязательны.

ЗАДАНИЕ 3.

1. Составить общее представление о конфигурациях созвездий фильтров Баттервортса ($batt(n)$), Чебышева ($cheb(n, 1)$) и эллиптических ($ellp(n, 1, 1.5)$) порядков $n = [1, 15]$. При $n = 11$ исследовать зависимость созвездия фильтра Чебышева от $\epsilon = 0.1; 0.5; 1$. При $n = 7$ исследовать зависимость созвездия эллиптического фильтра от $\epsilon = 0.1; 0.5; 1$ и $\eta = 1.1; 1.5; 2; 3$.

2. Найти *уровень затухания* фильтра Чебышева с $n = 7, \epsilon = 1$ при $\eta = 2$. Выяснить, при каком *значении* η тот же уровень затухания достигается фильтром Баттервортса порядка $n = 7$.

3. Найти *уровень затухания* фильтра Чебышева с $n = 7, \epsilon = 1$ при $\eta = 1.5$. Оценить *порядок* n фильтра Баттервортса с примерно тем же затуханием при $\eta = 1.5$.

4. Найти *уровень затухания* эллиптического фильтра с $n = 7, \epsilon = 1, \eta = 1.1$. Выяснить, при каком *значении селективности* η тот же уровень затухания достигается фильтром Чебышева с $n = 7, \epsilon = 1$.

5. Преобразовать созвездие фильтра Баттервортса порядка 7 в созвездие фильтра верхних частот ($highpass(batt(7))$) и созвездие полосового фильтра с $Q = 5$ ($bandpass(5, batt(7))$). Изучить поведение созвездия полосового фильтра при варьировании $Q = 2; 5; 10$. Обратить внимание на добротности полюсов. Повторить все это для фильтра Чебышева $cheb(7, 1, 1.5)$.

6. Вычислить созвездия нулей и полюсов эллиптического фильтра, набрав $[P Z] = ellp(7, 1, 1.5)$; и преобразовать их в созвездия фильтра верхних частот ($highpass(P, Z)$) и полосового фильтра с $Q = 2; 5; 10$ ($bandpass(Q, P, Z)$). Обратить внимание за значения добротностей полюсов.

7. В трактах промежуточной частоты приемников применяются стандартные полосовые фильтры с центральной частотой $f_0 = 465 k$, двухсторонней полосой $\Delta f = 24 k$ ($Q = \frac{f_0}{\Delta f} \simeq 20$), неравномерностью 3 dB ($\epsilon = 1$) и затуханием $\eta_1 = 10^4 = 80$ dB. Оценить селективность η , которую обеспечивает эллиптический фильтр порядка $n = 7$ с таким затуханием. Подобрать порядок

n фильтра Чебышева, который обеспечит сопоставимое значение селективности при том же затухании. Преобразовав эти фильтры в полосовые с $Q = 20$, сравнить *максимальные добротности полюсов*.

5.4. Звенья Саллена-Ки

Звенья Саллена-Ки, рис. 10, используют неинвертирующий усилитель с коэффициентом усиления $K < 3$. Они просты как схемотехнически, так и в плане расчета. Резонансная частота звена задается выбором постоянной времени RC : $\omega_0 = 1/RC$, а добротность $Q = 1/(3 - K)$ зависит только от усиления. Попытка достижения этими звеньями высоких значений добротности наталкивается на проблему точности задания коэффициента усиления. Скажем, чтобы получить добротность $Q = 100$, нужно иметь $K = 2.99$, и это при том, что при $K > 3$ звено теряет устойчивость.

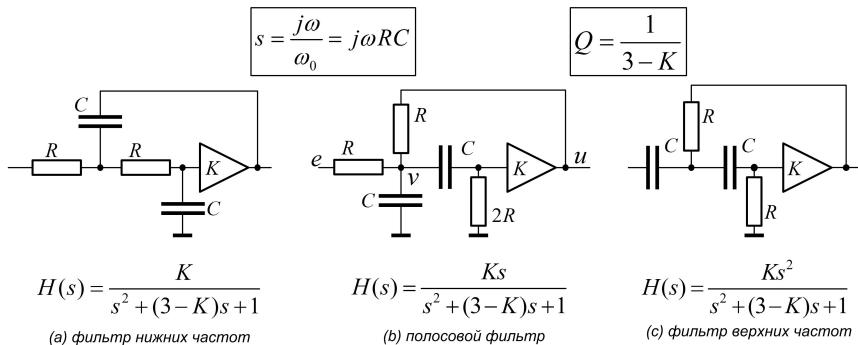


Рис. 10. Звенья Саллена-Ки

ЗАДАНИЕ 4.

1. Открыть модель `skey.cir` звеньев Саллена-Ки с частотой $f_0 = 10\text{ }k$ и добротностью $Q = 1$. В ней применены неинвертирующие масштабные усилители с коэффициентами $K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Изучить частотные характеристики звеньев. *Измерить значения коэффициентов передачи при $f = f_0$.* Проанализировать изменение частотных характеристик фильтра низких частот (lp),

верхних частот (hp) и полосового фильтра (bp) при варьировании резисторов $R_L, R_H, R_P = [11k, 19k|2k]$. Измерить пиковые значения усиления при $R_{L,H,P} = 19k$.

2. Исследовать переходные характеристики фильтров и их поведение при варьировании $R_L, R_H, R_P = [11k, 19k|2k]$. Сформулировать критерии распознавания типа (lp, bp, hp) фильтра по форме его переходной характеристики.

3. Открыть модель **sk3pole.cir** с фильтрами Баттерворта верхних и нижних частот порядка $n = 3$ на частоту среза $f_0 = 10k$. Одиночные вещественные полюсы фильтров реализованы в модели интегрирующей и дифференцирующей цепями, сопряженные пары полюсов – звеньями нижних и верхних частот с добротностью $Q = 1$. Роль межкаскадных буферных усилителей выполняют преобразователи напряжение/напряжение с единичным коэффициентом передачи. Проанализировать частотные характеристики фильтров. Измерить скорости спада в dB на октаву и затухания на частотах $f_0/2, 2f_0$.

Преобразовать их в фильтры Чебышева с $\epsilon = 1$. Параметры полюсов ФНЧ [$\nu_0 = 0.298$ и $(\nu, Q) = (0.916, 3.073)$] и ФВЧ [$\nu_0 = 3.355$ и $(\nu, Q) = (1.092, 3.073)$] можно вывести командой `highpass(cheb(3, 1))`. Настроить входные RC-цепи на частоты ν_0 вещественных полюсов, установив резисторы $R_i(R_d)$ равными $10k * \frac{1}{\nu_0}$. Частоты и добротности звеньев Саллена-Ки настроить по параметрам (ν, Q) комплексных полюсов. Для подстройки частоты изменять оба резистора фильтра $R = 10k$ до $R * \frac{1}{\nu}$. Добротность подстраивать резисторами $R_2 = R_1(2 - \frac{1}{Q})$. Убедиться в правильности настроек, проанализировав частотные характеристики. Измерить уровни затухания на частотах $f_0/2, 2f_0$.

4. Открыв прототип **sk4pole.cir**, реализовать 4-полюсной полосовой фильтр Чебышева с $f_0 = 10k, \epsilon = 1, Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 6$ (`bandpass(6, cheb(2, 1))`) с полюсами $[(\nu_1, Q) = (0.937, 18.68), (\nu_2, Q) = (1.067, 18.68)]$. Частоты звеньев подстраивать изменением пар емкостей, добротности – установкой резисторов R_2 . Убедиться в правильности настроек, проанализировав частотную и фазовую характеристики. Измерить затухания на частотах $f_0/2, 2f_0$ и $f_0/10, 10f_0$.

Найдем передаточную функцию полосового звена Саллена-Ки на рис. 10b. Приведем емкостной импеданс к виду

$Z_C = \frac{1}{pC} = \frac{R}{s}$; $s = pRC = \frac{p}{\omega_0}$. К тому же, не ограничивая общности, сопротивление R примем за единицу – безразмерная передаточная функция не зависит от того, в каких единицах измечаются сопротивления. Тогда импедансы резисторов окажутся равными 1 или 2, а импеданс емкости – равным $1/s$.

Выразим потенциал u на выходе через потенциал в узле v :

$$u = v \frac{2}{2 + \frac{1}{s}} K \quad \Rightarrow \quad v = u \frac{2s + 1}{2Ks}.$$

Запишем условие равенства нулю токов в узле v :

$$e - v = vs + v \frac{1}{2 + \frac{1}{s}} + v - u \quad \Rightarrow \quad e = v \frac{2(s^2 + 3s + 1)}{2s + 1} - u.$$

Исключив здесь v , получим результат.

Формулы для передаточных функций двух других звеньев находятся по аналогии.

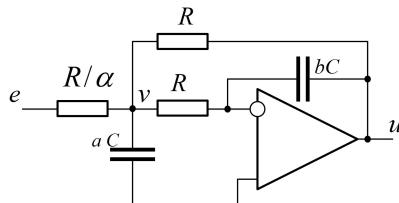
5.5. Звенья с двойной обратной связью

Схемы звеньев второго порядка на операционном усилителе, охваченном двойной отрицательной обратной связью, показаны на рис. 11. Все они похожи топологически и различаются только расстановкой резисторов-конденсаторов. Расчет звеньев несколько усложняет схемная избыточность: звено второго порядка характеризуется всего тремя параметрами (резонансная частота ω_0 , коэффициент передачи K_0 и добротность Q), а в схеме присутствует целых пять «свободных» RC-компонентов. В показанных на рисунках схемах свобода выбора несколько ограничена тем, что два из пяти компонентов искусственно объявлены одинаковыми. И все равно задание трех параметров звена не позволяет выбрать оставшиеся четыре компонента однозначно. Приведенные на рисунках расчетные формулы относятся к одному из возможных вариантов выбора, выделенному простотой расчета.

Расчет звена начинается с выбора пары R, C , дающей заданную частоту $\omega_0 = 1/RC$. Конкретные значения R и C в определенной мере произвольны. Далее подключаются приведенные на рисунке в рамках расчетные формулы, которые позволяют

однозначно определить номиналы всех пяти компонентов по заданным параметрам K_0 и Q .

Звенья с двойной обратной связью всегда устойчивы. Достижимые значения добротности лимитируются в них отношением номиналов компонентов: в любой схеме присутствует компонент со значением, пропорциональным Q , и компонент со значением, пропорциональным $1/Q$. Отношение номиналов этих компонентов растет как Q^2 , что создает сложности при больших Q .

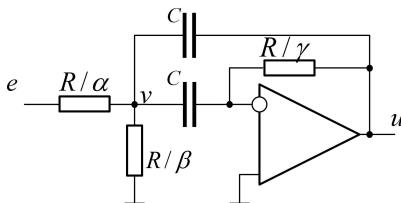


(a) фильтр нижних частот

$$H(s) = -\frac{K_0}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$s = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$\alpha = K_0 \quad a = Q(K_0 + 2) \quad b = \frac{1}{Q(K_0 + 2)}$$

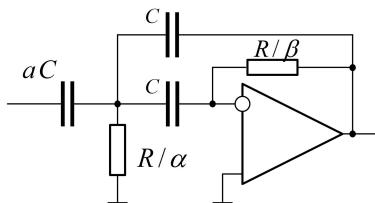


(b) полосовой фильтр

$$H(s) = -\frac{K_0 s}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$s = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$\alpha = K_0 \quad \gamma = \frac{1}{2Q} \quad \beta = 2Q - K_0$$



(c) фильтр верхних частот

$$H(s) = -\frac{K_0 s^2}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$s = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$\alpha = K_0 \quad \alpha = Q(K_0 + 2) \quad \beta = \frac{1}{Q(K_0 + 2)}$$

Рис. 11. Звенья с двойной обратной связью

ЗАДАНИЕ 5.

1. Открыв прототип **amp1bp.cir**, реализовать полосовое звено на рис. 11b с $f_0 = 5 k$, $K_0 = 5$, $Q = 15$. Заданные условно под частоту $f_0 = 5 k$ RC-параметры ($20 k$, $1592 p$) прототипа придется изменить под требуемые параметры фильтра и с учетом

доступности компонентов в кассе лаборатории.

Выбрать в кассе пару конденсаторов с емкостями, близкими к емкостям шаблона. Пересчитать значение R из условия $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ ($\frac{1}{2\pi} = 0.1592$). Вычислить значения резисторов $\frac{R}{\alpha}$, $\frac{R}{\beta}$, $\frac{R}{\gamma}$ схемы исходя из $\alpha = K_0$, $\beta = 2Q - K_0$, $\gamma = \frac{1}{2Q}$. Удостовериться в доступности близких номиналов резисторов в кассе.

Установить выбранные значения компонентов в прототип. Убедиться в правильности реализации, изучив частотную и фазовую характеристики звена. Измерив *частоту максимума и ширину полосы* по уровню $0.7 = -3$ dB, оценить *добротность*. Измерить *пиковое усиление* QK_0 . Изучить поведение АЧХ при варьировании $R_2 = [100, 1.3k|200]$. Построить *график зависимости частоты пика от R_2* . Объяснить наблюдаемое явление. Проанализировать переходную характеристику звена.

2. Собрать смоделированное звено на макетной плате. Подключив генератор сигналов и осциллограф, изучить частотную и переходную характеристики. Экспериментально измерить параметры K_0, f_0, Q . Убедиться в совпадении экспериментальных данных с результатами моделирования.

3. Открыв прототип **cheb6pole.cir**, реализовать шестиполюсной полосовой фильтр Чебышева с параметрами $f_0 = 1k$, $\epsilon = 1$, $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 3$. Прототип содержит каскадное соединение фильтра нижних частот, фильтра верхних частот и полосового фильтра. По умолчанию, все звенья настроены на частоту $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 1k$.

Фильтр `bandpass(3, cheb(3, 1))` имеет три полюса с параметрами $[(v_0, Q_0) = (1.0, 10.66), (v_1, Q_1) = (0.860, 20.36), (v_2, Q_2) = (1.162, 20.36)]$.

Коэффициенты усиления всех трех звеньев выбрать единичными: $K_0 = 1$. Полюс с частотой ν_1 реализовать звеном нижних частот (вместе с парой нулей в бесконечности). Для этого вычислить базовую емкость $C^* = C \frac{1}{\nu_1}$, $C = 10n$ и установить емкости $aC = 3Q_1C^*$, $bC = \frac{C^*}{3Q_1}$. Полюс с частотой ν_2 реализовать звеном нижних частот (вместе с парой нулей в нуле), вычислив базовое сопротивление $R^* = R \frac{1}{\nu_2}$, $R = 10k$ и установив резисторы $\frac{R}{\alpha} = \frac{R^*}{3Q_2}$ и $\frac{R}{\beta} = 3Q_2R^*$. Оставшийся полюс с частотой ν_0 реализовать полосовым звеном (один нуль в нуле – один в бесконечности), установив $\frac{R}{\gamma} = 2Q_0R$ и $\frac{R}{\beta} = \frac{R}{2Q_0-1}$, где $R = 10k$.

Убедиться в правильности настроек, изучив частотные и фазовые характеристики отдельных звеньев и частотную характеристику фильтра в целом. *Измерить затухания на частотах $0.5k$, $2.0k$ и $100k$.*

Найдем передаточную функцию фильтра нижних частот на рис. 11а. Импедансы емкостей aC , bC приведем к виду $\frac{R}{as}$, $\frac{R}{bs}$, $s = pRC$, и примем R за единицу. Тогда фигурирующие в схеме сопротивления станут равными $1, 1, 1/\alpha$.

Токи i , протекающие по емкости bC и резистору R при входе усилителя одинаковы:

$$i = v/1 = -ubs \quad \Rightarrow \quad u = -v \frac{1}{bs}.$$

Запишем условие равенства нулю суммы токов в узле v :

$$(e - v)\alpha = vas + v + (v - u); \quad \alpha e = v\left(\alpha + as + 2 + \frac{1}{bs}\right).$$

Откуда

$$v = e \frac{\alpha}{as + (\alpha + 2) + 1/b}; \quad u = -v \frac{1}{bs} = -e \frac{\alpha}{abs^2 + (\alpha + 2)bs + 1}.$$

Осталось волевым образом принять, что $ab = 1$, то есть $a = 1/b$. Тогда

$$H(s) = \frac{u}{e} = -\frac{\alpha}{s^2 + (\alpha + 2)bs + 1} = -\frac{K_0}{s^2 + 2\xi s + 1}.$$

Отсюда и следуют приведенные на рисунке расчетные формулы:

$$\alpha = K_0; \quad 2\xi = 1/Q = (K_0 + 2)b; \quad a = 1/b.$$

Расчетные формулы фильтра верхних частот на рис. 11с находятся по аналогии.

В схеме полосового фильтра на рис. 11б имеются две емкости с импедансами $1/s$ и три резистора с сопротивлениями $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$. Имеем: $vs = -u\gamma$ или $u = -v\frac{s}{\gamma}$. Далее для узла v :

$$(e - v)\alpha = v\beta + vs + (v - u)s; \quad \alpha e = v\left(\alpha + \beta + 2s + \frac{s^2}{\gamma}\right).$$

Откуда

$$v = e \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 2s + s^2/\gamma}; \quad u = -v \frac{s}{\gamma} = -e \frac{\alpha s}{s^2 + 2\gamma s + (\alpha + \beta)\gamma}.$$

Осталось волевым образом принять, что $(\alpha + \beta)\gamma = 1$. Это и дает

$$\alpha = K_0; \quad \frac{1}{Q} = 2\gamma; \quad \beta = \frac{1}{\gamma} - \alpha = 2Q - K_0.$$

Резонансную частоту $\omega_0 = 1/RC$ полосового фильтра можно перестраивать в широких пределах при сохранении усиления QK_0 на ней и полосы пропускания $\Delta\omega = \omega_0/Q$, изменяя в схеме всего один резистор R/β .

Будем варьировать сопротивление R по закону $R' = R/k$, одновременно изменяя параметры $\alpha' = \alpha/k$, $\gamma' = \gamma/k$ с тем, чтобы значения резисторов R/α и R/γ оставались неизменными. Резонансная частота $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ будет изменяться при этом по закону $\omega'_0 = k\omega_0$, а усиление в резонансе $K_0Q = \alpha/2\gamma$ и полоса $\Delta\omega = \omega_0/Q = 2\gamma\omega_0$ – оставаться неизменными. Чтобы условие $(\alpha + \beta)\gamma = 1$ продолжало выполняться, придется варьировать параметр β : $\beta' = 1/\gamma' - \alpha' = \frac{k}{\gamma} - \frac{\alpha}{k}$. Это достигается изменением резистора R/β :

$$(R/\beta)' = \frac{R'}{\beta'} = \frac{R}{k} \frac{1}{\left(\frac{k}{\gamma} - \frac{\alpha}{k}\right)} = (R/\beta) \frac{(1 - \gamma\alpha)}{(k^2 - \gamma\alpha)} \simeq \frac{(R/\beta)}{k^2}; \quad \gamma\alpha = \frac{K_0}{2Q}.$$

При достаточно больших добротностях линейный закон перестройки частоты $\omega'_0 = k\omega_0$ дает варьирование резистора R/β по квадратичному закону.

5.6. Полосовое звено на сдвоенном усилителе

При реализации полосовых фильтров приходится сталкиваться с чрезвычайно высокими значениями добротностей звеньев. Схемное решение на рис. 12 позволяет преодолеть эти сложности. Как видно из рисунка, достижимое значение добротности лимитируется в ней отношением $\frac{1}{\alpha} = Q$ номиналов резисторов. Это позволяет реально достигать значений $Q \simeq 1000$. К тому же, схема проста в смысле выбора компонент. Помимо резистора $\frac{R}{\alpha} = QR$ в ней имеются две пары одинаковых резисторов и пара

одинаковых конденсаторов. Частота звена задается постоянной времени RC независимо от добротности. Резисторы R_d делителя напряжения можно выбирать как угодно. Ничем не плох выбор $R_d = R$. Расплатой за высокую добротность оказывается низкое усиление – в максимуме оно равно 2 независимо от Q .

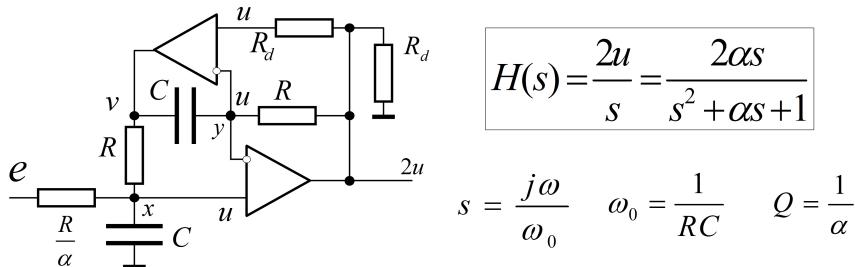


Рис. 12. Полосовой фильтр на сдвоенном операционном усилителе

ЗАДАНИЕ 6.

1. Открыть модель **amp2bp.cir**. По частотной характеристики звена *оценить его параметры f_0, Q .* Изучить поведение частотной характеристики при варьировании $R_1 = [100k, 6400k|Log2]$. Измерить значение добротности при $R_2 = 6400k$.

2. Изучить поведение частотной характеристики при варьировании $R_5 = [1k, 10k|1k]$. Измерить частоту и уровень пика при $R_5 = 1.11k$ ($\gamma = \frac{R_5}{R_4+R_5} = 0.1$). Объяснить результаты.

Найдем выражение для передаточной функции схемы на рис. 12. Потенциал $2u$ на выходе через делитель напряжения R_d/R_d с коэффициентом передачи $1/2$ однозначно определяет потенциал u на неинвертирующем входе верхнего усилителя. Ссылка на принцип виртуального замыкания, согласно которому потенциалы входов операционного усилителя можно считать одинаковыми, дает основание присвоить значение u потенциалам на всех входах обоих усилителей. Остается выписать условия равенства токов в узлах x и y на схеме:

$$\alpha(e - u) = su + (u - v); \quad 2u - u = s(u - v).$$

Дальнейшее не заслуживает обсуждения.

Действуя по аналогии, нетрудно проверить, что при коэффициенте передачи делителя $\gamma \neq \frac{1}{2}$ передаточная функция фильтра

принимает вид

$$H(s) = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{s}{(s^2 + \alpha s + \frac{1-\gamma}{\gamma})}.$$

С уменьшением γ наблюдается рост частоты и добротности по закону $\sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

5.7. Звенья эллиптических фильтров

Практически все звенья эллиптических фильтров наряду с двумя сопряженными полюсами реализуют пару сопряженных нулей на мнимой оси. Исключение составляет вещественный полюс фильтров нечетного порядка, парный нуль которого находится в бесконечности. Передаточная функция типового звена эллиптического фильтра имеет вид

$$H(s) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{s^2 + \gamma^2}{(s^2 + \delta s + 1)},$$

где $s = \frac{p}{\omega_0}$. Параметры $\omega_0, Q = \frac{1}{\delta}$ определяют положение полюсов, а параметр γ – положение нулей в точках $s = \pm j\gamma$. Нормировочный множитель $\frac{1}{\gamma^2}$ обеспечивает единичное значение коэффициента передачи при $s = 0$.

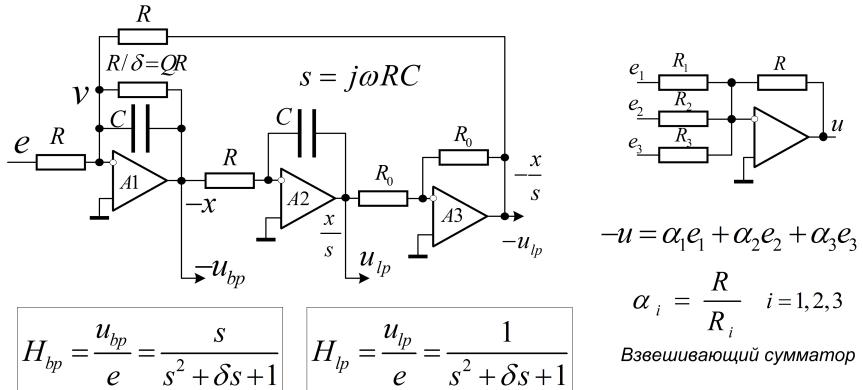


Рис. 13. Баквадратное звено

Эту функцию можно реализовать в виде суммы

$$\frac{s^2 + \gamma^2}{s^2 + \delta s + 1} = 1 - \delta \frac{s}{s^2 + \delta s + 1} + (\gamma^2 - 1) \frac{1}{s^2 + \delta s + 1}.$$

Требуемый для этого набор полиномиальных передаточных функций дает схема биквадратного (*biquad*) звена на рис. 13. Она реализует одновременно и инвертирующее полосовое звено (выход $-u_{bp}$), и два варианта фильтра нижних частот – ненивертирующий (выход u_{lp}) и инвертирующий (выход $-u_{lp}$).

Для реализации звена эллиптического фильтра достаточно просуммировать вход и пару выходов биквадратного звена с весовыми коэффициентами 1, δ , $\gamma^2 - 1$. При $\gamma > 1$ задействуется неинвертирующий выход биквадратного звена, при $\gamma < 1$ – инвертирующий. Нужная для этого схема трехходового сумматора на операционном усилителе показана на рис. 13.

ЗАДАНИЕ 7.

1. Выбрать параметр селективности $\eta = 1.10 + 0.05m$, где $m = [0, 8]$ – Ваш номер в списке (по модулю 9). Реализовать трехполюсной эллиптический фильтр нижних частот с параметрами $f_0 = 1\text{ }k$, $\epsilon = 1$, η .

В Matlab набрать: `ellp(3, 1, η);`. Зафиксировать ожидаемое значение затухания $stoplevel = \eta_1$, параметры нуля ν_z и двух полюсов ν_0 , ν_p . Перевести затухание в децибелы, набрав: $20 * log10(\eta_1)$.

Открыть прототип **elliptic3p.cir**. Входное интегрирующее звено реализует в нем вещественный полюс, биквадратное звено – пару сопряженных полюсов и пару нулей на мнимой оси. Сумматор *SUMM* построен на управляемом источнике напряжения. Все постоянные времени по умолчанию настроены на частоту $1\text{ }k$ ($10\text{ }k$, $15.92\text{ }n$).

Установить частоту ν_0 вещественного полюса, изменив резистор интегрирующей цепи на $10k * \frac{1}{\nu_0}$. Задать частоту ν_p комплексных полюсов биквадратного звена, выбрав все три резистора R равными $10k * \frac{1}{\nu_p}$. Задать добротность звена, установив $R_Q = RQ$.

Выразить частоту нуля ν_z в долях частоты ν_p комплексного полюса: $\gamma = \frac{\nu_z}{\nu_p}$. Вычислить коэффициенты γ^2 , $\alpha_1 = \frac{1}{Q}$, $\alpha_2 = \gamma^2 - 1$. Подставить их в формулу суммирования – строка

$$Value = (v(u) + \alpha_1 * v(nbp) + \alpha_2 * v(lp)) / \gamma^2$$

диалога настройки сумматора.

Изучить частотную характеристику фильтра и частотные характеристики составляющих его звеньев. Убедиться в том, что конструктивные требования выполнены. Измерить неравномерность в полосе пропускания, *границу η полосы задержания, положение нуля и уровень затухания η_1* . По фазовой характеристике фильтра установить, в какой полуплоскости оказались его нули.

2. Реализовать фильтр верхних частот с теми же параметрами. В Matlab набрать $[P Z] = \text{ellp}(3, 1, \eta)$; $\text{hihgpass}(P, Z)$. Входную интегрирующую цепь преобразовать в дифференцирующую. Принять как должное, что коэффициент α_2 получится отрицательным. В строке Value сумматора нормировочный делитель γ^2 установить единичным.

Проверить выполнение конструктивных требований. Измерить неравномерность в полосе пропускания, *границу η полосы задержания, положение нуля и уровень затухания*. По фазовой характеристике фильтра установить, в какой полуплоскости оказались его нули.

Выражения для передаточных функций биквадратного звена на рис. 13 выводятся просто. Обозначим через $-x$ потенциал на выходе усилителя $A1$. Для выходных потенциалов $A2, A3$ это даст $\pm \frac{x}{s}$. Осталось записать уравнение суммы токов в узле v с учетом равенства нулю потенциала на выходе усилителя:

$$e = x(\delta + s) + x/s \quad \Rightarrow \quad -H_{lp} = \frac{x}{e} = \frac{s}{s^2 + \delta s + 1}.$$

Учебное издание

АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители: **Григорьев Александр Алексеевич**
Филатов Иван Васильевич

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *Л. В. Себова*

Подписано в печать 12.07.2016. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 200 экз. Заказ 275

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru