# Листок № 3

**1.** Приведите примеры отношений на $\mathbb{N}$ с разной комбинацией свойств (функциональность и др.), так чтобы среди примеров были как бесконечные, так и конечные множества (когда возможно).

**2.** Пусть отношение $R \circ Q$ инъективно, а $R$ тотально для $\operatorname{rng} Q$. Докажите, что тогда инъективно $Q$, но не всегда инъективно $R$.

**3.** Пусть отношение $R$ функционально. Тогда $R^{-1}[X \cap Y] = R^{-1}[X] \cap R^{-1}[Y]$.

**4.** Пусть отношение $R \subseteq A \times B$ тотально. Тогда $X \subseteq R^{-1}[R[X]]$ для всех $X \subseteq A$. Всегда ли верно обратное включение? А если $R$ функционально?

**5.** Пусть отношение $R \subseteq A \times B$ функционально. Докажите, что $R[R^{-1}[X]] \subseteq X$ для любого множества $X$. Всегда ли верно обратное включение? А если $R$ тотально и $X \subseteq B$?

**6.** Приведите несколько естественных примеров частичных функций $\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}$. Найдите их области определения и значений.

**7.** Согласны ли вы с тем, что «на пустом множестве каждая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена сверху»? Как вам нравится следующая запись (якобы) этого утверждения: $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in \varnothing\, f(x) \leqslant C$?

**8.** Для $f\colon A \xrightarrow{p} B$ и $g\colon B \xrightarrow{p} C$ проверьте тождества:

а) $\operatorname{rng}(g \circ f) = g[\operatorname{rng} f]$;

б) $\operatorname{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\operatorname{dom} g]$.

**9.** Пусть $f\colon A \xrightarrow{p} B$ и $g\colon B \xrightarrow{p} C$. Докажите, что для всех $a \in A$ верно $(g \circ f)(a) \simeq g(f(a))$.

**10.** При каких условиях из $B^A = D^C$ следует $A = C$ и $B = D$?

**11.** Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon A \to B$. Докажите, что $f \cap g\colon A \to B$ тогда и только тогда, когда $f = g$.

**12.** Докажите, что $(f \restriction X) \restriction Y = f \restriction (X \cap Y)$.

**13.** Всегда ли верно, что $f \sim \operatorname{dom} f$, если отношение $f$ функционально?

**14.** Докажите, что функция $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, т. ч. $f(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$, является биекцией.

**15.** Докажите, что $A \times \{x\} \sim A$.

**16.** Что представляют собой элементы множеств $\underline{3}^2$, $\underline{3}^{\underline{2}}$ $\underline{2}^{\underline{3}}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^{\underline{2}}$, $\underline{2}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, если $\underline{2} = \{0,1\}$ и $\underline{3} = \{0,1,2\}$? Приведите примеры таких элементов.

**17.** Проверьте утверждения:

а) $\underline{6}^{\mathbb{N}} \sim \underline{2}^{\mathbb{N}} \times \underline{3}^{\mathbb{N}}$;

б) $(X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim X^{\mathbb{N}}$;

в) $X^0 \times X^{\mathbb{N}} \sim X^{\underline{0}} \times X^{\mathbb{N}}$.

**18.** Докажите, что $X \lnsim \mathcal{P}(X)$ для всех $X$.

**19.** Докажите, что $\mathcal{P}_1(X) \sim X$.

**20.** Всегда ли верны следующие утверждения? Могут ли выполняться? А при $X \neq \varnothing$?

а) $\cup X \lnsim X$;

б) $X \lnsim \cup X$.

**21.** Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A = \{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{\beta^m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что $A \cup B \lnsim \mathbb{N}$.

**22.** *Предположим, утверждение континуум-гипотезы верно*. Тогда из $A \cup B = \mathbb{R}$ следует, что $A \sim \mathbb{R}$ или $B \sim \mathbb{R}$.

**23.** Приняв, что $\mathbb{R} \sim \underline{2}^{\mathbb{N}}$, докажите $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

**24.** Докажите, возможно, применяя теорему Кантора-Бернштейна, что:

а) $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$;

б) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z})^2 \sim (\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N})^3$;

в) подходящая пара фигур на плоскости или в пространстве равномощны;

г) множество окружностей на плоскости равномощно $\mathbb{R}$;

д) множество треугольников на плоскости равномощно $\mathbb{R}$;

е) если две фигуры на плоскости содержат отрезки прямой (или разумной кривой), то такие фигуры равномощны.