Листок № 5

Мы начинаем изучение натуральных чисел, индукции и рекурсии, конечных и счетных множеств. Индукция по $\mathbb{N}$ является сквозной и самой главной идеей. Нужно обратить внимание на разные (хотя эквивалентные) формы принципа индукции. В теоремах о счетной мощности мы явно указываем применение аксиомы выбора, хотя не стремимся применить слабейшую необходимую ее форму.

Далее нужно изложить основы теории формальных языков. На лекция соответствующих определений *не будет*.

Литература: основной конспект, с. 85–120.

1. Докажите, что для каждого натурального $n \geqslant 3$ найдутся $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_+$, т. ч.

$$1 = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

причем $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$.

2. Пусть число $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$. (*Порядковая индукция: два шага назад.*)

3. Найдите все решения уравнения $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$ во множестве $\mathbb{Z}$. (*Принцип наименьшего числа.*)

4. На краю пустыни, представляющей собой луч прямой, стоит машина и бесконечный резервуар бензина. С полным баком машина может проехать 100 км. В любой точке пустыни можно слить часть бензина из бака и оставить его там на хранение, так что хранимое количество неограниченно. Докажите, что можно проехать сколь угодно далеко в пустыню. (*Усиление индуктивного предположения, чтобы в нем на «кончился бензин».*)

5. На доске написаны N цифр — нули и единицы в любой комбинации. Разрешается выполнять два действия:

- заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);
- заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что за конечное число шагов можно получить любую желаемую последовательность длины N.

6. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет использован и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов. (*Всю нужную геометрию понимаем интуитивно.*)

7. У каждого депутата в (конечной) палате имеется не более трех врагов (никакой депутат себе не враг и враждебности не прощает). Покажите, что депутатов можно разделить на две фракции так, чтобы у каждого депутата было не более одного врага внутри его фракции.

8. Пусть конечные множества A и B равномощны. Докажите, что всякая функция $f\colon A \to B$ является инъекцией тогда и только тогда, когда является сюръекцией.

9. Используя предыдущую задачу, докажите *китайскую теорему об остатках*: пусть числа $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_+$ попарно взаимно просты и $a_i \in \underline{m_i}$; тогда существует единственное число $x \in \underline{M}$, где $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$, т. ч. $x \equiv_{m_1} a_1, \ \ldots, \ x \equiv_{m_n} a_n$.

10. Рассмотрите несколько примеров рекурсивных определений функций.

Напомним теорему о рекурсии:

> Пусть U некоторое множество, $u_0 \in U$ и $h\colon U \to U$. Тогда существует единственная функция $f\colon \mathbb{N} \to U$, т. ч.
>
> $$f(0) = u_0 \quad \text{и} \quad f(n+1) = h(f(n))$$
>
> при всех $n \in \mathbb{N}$.

11. Обоснуйте такую форму рекурсии:

> Пусть U некоторое множество, $u_0 \in U$ и $h\colon \mathbb{N} \times U \to U$. Тогда существует единственная функция $f\colon \mathbb{N} \to U$, т. ч.
>
> $$f(0) = u_0 \quad \text{и} \quad f(n+1) = h(n, f(n))$$
>
> при всех $n \in \mathbb{N}$.

12. Обоснуйте такую форму рекурсии (*примитивная рекурсия*):

> Пусть U и V некоторые множества, $g\colon V \to U$ и $h\colon \mathbb{N} \times V \times U \to U$. Тогда существует единственная функция $f\colon \mathbb{N} \times V \to U$, т. ч.
>
> $$f(0, v) = g(v) \quad \text{и} \quad f(n+1) = h(n, v, f(n, v))$$
>
> при всех $v \in V$ и $n \in \mathbb{N}$.

13. Если A счетно, а B счетно или конечно, то счетно и $A \cup B$.

14. Выведите принцип зависимого выбора следует из аксиомы выбора.

15. Пусть множество A бесконечное, а множество B конечное или счетное. Докажите, что тогда $A \cup B \sim A$.

16. Докажите, что если множество $A \setminus B$ бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \sim A \setminus B$.

Словом длины n в алфавите A (т. е. непустом множестве) называется любая функция $\sigma\colon \underline{n} \to A$.

17. Покажите, что длина слова определена однозначно и равна его мощности как множества.

18. Докажите, что если алфавит A конечный или счетный, то множество A^* счетно.

19. Для любых $\sigma, \tau, \rho \in A^*$ верно:

а) $\sigma\varepsilon = \sigma = \varepsilon\sigma$;

б) $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$.

20. Докажите, что для любых $\sigma, \tau \in A^*$ верно:

а) $(\sigma^{\mathsf{R}})^{\mathsf{R}} = \sigma$;

б) $(\sigma\tau)^{\mathsf{R}} = \tau^{\mathsf{R}}\sigma^{\mathsf{R}}$.

21. Докажите *левый закон сокращения*: для любых $\sigma, \tau, \rho \in A^*$ из $\sigma\tau = \sigma\rho$ следует $\tau = \rho$.

22. Докажите, что если $\sigma = \sigma^{\mathsf{R}}$, т. е. слово $\sigma \in A^*$ есть *палиндром*, то для некоторых $\tau \in A^*$ и $a \in A$ имеет место $\sigma = \tau\tau^{\mathsf{R}}$ или $\sigma = \tau a \tau^{\mathsf{R}}$.

23. Докажите, что для всех $\sigma \in A^*$ и $k, l \in \mathbb{N}$ верно:

а) $\sigma^k\sigma^l = \sigma^{k+l}$;

б) $\sigma^k\sigma^l = \sigma^l\sigma^k$.

24. Докажите, что $(A^*, \sqsubseteq)$ есть ч. у. м. для любого алфавита A.

25. Докажите, что $(A^*, \sqsubseteq) \cong (A^*, \sqsupseteq)$.

26. Докажите, что для любых $\sigma, \tau, \rho \in A^*$ верно:

а) существует $\inf_{\sqsubseteq}\{\sigma, \tau\}$;

б) если $\sigma \sqsubseteq \rho$ и $\tau \sqsubseteq \rho$, то $\sigma \sqsubseteq \tau$ или $\tau \sqsubset \sigma$.

27. Какому хорошо известному упорядочению изоморфно ч. у. м. $(\{a\}^*, \sqsubseteq)$?

28. Докажите, что если $\sigma\tau = \tau\sigma$, то найдется слово ρ и числа $k, l \in \mathbb{N}$, т. ч. $\sigma = \rho^k$ и $\tau = \rho^l$.

Пусть $a \in A$. Рассмотрим функцию $|\cdot|_a \colon A^* \to \mathbb{N}$, т. ч.

$$|\sigma|_a = |\sigma^{-1}[\{a\}]| = |\{i \in \underline{|\sigma|} \mid \sigma(i) = a\}|$$

для всех $\sigma \in A^*$.

29. Докажите, что для всех $\sigma, \tau \in A^*$ верно $|\sigma\tau|_a = |\sigma|_a + |\tau|_a$.

Пусть $\mathcal{B} = \{\langle, \rangle\}$ Определим функцию $b \colon \mathcal{B}^* \to \mathbb{Z}$ *скобочного итога*, полагая $b(\sigma) = |\sigma|_\langle - |\sigma|_\rangle$ для всех $\sigma \in \mathcal{B}^*$. Язык R *правильных скобочных последовательностей* над алфавитом $\mathcal{B}$ есть множество

$$\{\sigma \in \mathcal{B}^* \mid b(\sigma) = 0 \text{ и } b(\tau) \geqslant 0 \text{ для всех } \tau \sqsubseteq \sigma\}.$$

30. Докажите, что если $\sigma, \tau \in R$, то $\langle\sigma\rangle, \sigma\tau \in R$.

31. Докажите, что для любого $\sigma \in R \setminus \{\varepsilon\}$ найдется $\tau \in \mathcal{B}^*$, т. ч. $\sigma = \langle\tau\rangle$.

32. Докажите, что для любого $\sigma \in R \setminus \{\varepsilon\}$, если ни для какого $\rho \in R \setminus \{\varepsilon\}$ не верно $\rho \sqsubset \sigma$, то найдется $\tau \in R$, т. ч. $\sigma = \langle\tau\rangle$.

33. Пусть E'' есть наименьшее $X \subseteq \mathbb{N}$, т. ч.

$$\{0, 2\} \subseteq X \quad \text{и} \quad \forall n \forall m\, (n, m \in X \Longrightarrow n + m \in X).$$

Почему такое множество существует? Докажите, что E'' есть множество всех четных чисел.

34. Пусть $R \subseteq A^2$. Положим $(R)_1 = R$ и $(R)_{n+1} = (R)_n \circ R$ при всех $n > 0$. Докажите, что

а) $(R)_m \circ (R)_n = (R)_{m+n}$;

б) $\hat{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} (R)_n$, где $\hat{R}$ транзитивное замыкание отношения R.

35. Определите «симметричное замыкание» отношения $R \subseteq A^2$ и выразите его через R.

Определим множество S как $\subseteq$-наименьшее такое $X \subseteq \{\langle, \rangle\}^*$, что

$$\varepsilon \in X \quad \text{и} \quad \forall \sigma \forall \tau\, \big(\sigma, \tau \in X \Longrightarrow \langle\sigma\rangle, \sigma\tau \in X\big).$$

Определим множество B как $\subseteq$-наименьшее такое $X \subseteq \underline{2}^*$, что

$$\{0, 1\} \subseteq X \quad \text{и} \quad \forall \sigma\, \big(\sigma \in X \setminus \{0\} \Longrightarrow \sigma 0, \sigma 1 \in X\big).$$

Определим язык Ar *замкнутых арифметических термов*, состоящий из выражений вроде $\langle\langle 3{+}2\rangle \cdot 5\rangle$, где натуральные числа сами выступают своими обозначениями. Итак, Ar есть наименьшее $X \subseteq (\mathbb{N} \cup \{+, \cdot\,, \langle, \rangle\})^*$, т. ч.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ n \in Ar \quad \text{и} \quad \forall \sigma \forall \tau\, \big(\sigma, \tau \in X \Longrightarrow \langle\sigma + \tau\rangle, \langle\sigma \cdot \tau\rangle \in X\big).$$

36. Перепишите выше определенные множества (включая $\hat{R}$ и E'') в форме $\mathcal{F}(X)$ для подходящих индуктивного определения $\mathcal{F}$ над U и множества $X \subseteq U$.

37. Докажите, что для каждого $A \subseteq U$ существует индуктивное определение $\mathcal{F}$ над U, т. ч. $A = \mathcal{F}(\varnothing)$.

38. Рассмотрим определение $\mathcal{F} = \{+^{(2)}\}$ над множеством $\mathbb{Z}$. Применяя индукцию по построению, докажите, что $\mathcal{F}(\{1\}) = \mathbb{N}_+$, $\mathcal{F}(\{1, -1\}) = \mathbb{Z}$ и $\mathcal{F}(\{2, -2\}) = 2\mathbb{Z}$.

39. Рассмотрим определение $\mathcal{F} = \{1^{(0)}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, f^{(1)}, g^{(1)}\}$, где $f(x) = -x$, $g(x) = 1/x$ при $x \neq 0$ и $g(0) = 0$, над множеством $\mathbb{R}$. Применяя индукцию по построению, докажите, что

а) $\mathcal{F}(\varnothing) = \mathbb{Q}$;

б) $\mathcal{F}(\{\sqrt{2}\}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (*т. е. это* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$).

40. Пусть отношение $R \subseteq A^2$ симметрично. Тогда его транзитивное замыкание $\hat{R}$ также симметрично. Докажите это, применяя а) индукцию по построению;

б) результат задачи 34.

41. С помощью индукции по построению докажите, что

а) $\langle\rangle\rangle \notin S$;

б) $000 \notin B$;

в) $\langle + \rangle \notin Ar$.

42. Докажите, что $S = R$.

43. Приведите примеры построений элементов относительно данных выше индуктивных определений.

44. С помощью построений докажите, что

а) $\langle\rangle\rangle \notin S$;

б) $000 \notin B$;

в) $\langle + \rangle \notin Ar$.

(*Мы используем теорему, что элемент попадает в* $\mathcal{F}(X)$ *тогда и только тогда, когда имеет соответствующее построение.*)

45. Докажите, что префикс построения и конкатенация построений есть построение.

46. Пусть $\mathcal{F}$ — индуктивное определение над U и $Y, Z \subseteq U$. Используя, если нужно, построения, докажите, что:

а) если $Y \subseteq Z$, то $\mathcal{F}(Y) \subseteq \mathcal{F}(Z)$;

б) если $u \in \mathcal{F}(Y)$, то $u \in \mathcal{F}(Y')$ для некоторого конечного $Y' \subseteq Y$;

в) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(Y)) \subseteq \mathcal{F}(Y)$.

47. Обладает ли приведенное выше определение языка S свойством однозначности разбора?

Положим $\mathcal{D} = \{\varepsilon^{(0)}, q^{(2)}\}$, где $q(\sigma, \tau) = \langle\sigma\rangle\tau$ для всех $\sigma, \tau \in \mathcal{B}^*$. Язык $D = \mathcal{D}(\varnothing)$ называют *языком Дика.*

48. Докажите, что $D = R$.

49. Докажите, что определение $\mathcal{D}$ обладает свойством однозначности разбора.

50. Пусть C_n есть число правильных скобочных последовательностей длины $2n$. Используя однозначность разбора, докажите, что

$$C_0 = 1 \quad \text{и} \quad C_{n+1} = \sum_{k+m=n} C_k \cdot C_m.$$

Существуют ли правильные скобочные последовательности нечетной длины?

51. Приведите несколько примеров языков, обладающих и не обладающих свойством беспрефиксности.

52. Докажите, что язык L бессуффиксный тогда и только тогда, когда язык $L^{\mathsf{R}} = \{\sigma^{\mathsf{R}} \mid \sigma \in L\}$ беспрефиксный.

53. Докажите, что язык замкнутых арифметических термов Ar является беспрефиксным.

54. Используя беспрефиксность, докажите, что приведенное определение языка Ar обладает свойством однозначности разбора.

55. Проверьте однозначность разбора для следующих модификаций определения языка Ar:

а) пишем только левую скобку: $\langle\langle 2 + 3 \cdot 5$ и пр.;

б) пишем только правую скобку;

в) пишем одинаковые символы вместо правой и левой скобок: $||2 + 3| \cdot 5|$ и пр.;

г) не пишем скобок вовсе.

56. Используя теорему о рекурсии по построению, определите функцию на языке Ar, возвращающую по терму $t \in Ar$

а) его значение (натуральное число);

б) число закрывающих скобок в терме;

в) наибольшую константу, входящую в терм;

г) число *различных* констант, входящих в терм.