Набор зачетных задач № 1

Один студент может сдавать не более одного «литерного» пункта каждой задачи. После номера задачи указывается оценка сложности (каждого пункта) этой задачи. Понятия, которым пока не давалось строгого определения, можно рассматривать интуитивно. **Задачи сложности более единицы принимаются не более чем у четверых студентов всего потока. Исключение делается, если представлены существенно различные решения. Прочие задачи принимаются не более чем у восьмерых.**

Тема 1.

1. (1) Проверьте, для любых ли множеств A, B, C верно:

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

f) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

g) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

h) $A \cap B \subseteq C \iff A \subseteq \bar{B} \cup C$;

i) $A \subseteq B \cup C \iff A \cap \bar{B} \subseteq C$;

j) $(A \setminus B) \cup B = A \iff B \subseteq A$;

k) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;

l) $A \subseteq B \Longrightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;

m) $A \subseteq B \Longrightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$;

n) $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$.

2. (1) Существуют ли множества A, B, C, т. ч. $A \cap B \neq \varnothing$, но $A \cap C = \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

3. (2) Выведите тождество

$$A \cap A = A$$

из тождеств $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$, а также коммутативности и ассоциативности $\cap$ и $\cup$.

4. (1) Пусть $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ и A_i, B_i некоторые множества. Докажите, что включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \vartriangle (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) \subseteq (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2) \cup \ldots \cup (A_n \vartriangle B_n)$$

для любых $n \in \mathbb{N}_+$.

5. (1) Докажите тождество

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \ldots \cap (A_n \setminus B_n)$$

для любых $n \in \mathbb{N}_+$.

6. (3) Пусть какое-нибудь равенство, образованное из символов множеств $A_1, \ldots, A_n$ и символов операций $\cap, \cup, \setminus$ верно не для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что опровергающие равенство множества можно выбрать так, что $|A_i| \leqslant 1$ для всех i.

7.

a) (1) Существуют ли во множестве $\underline{2016} = \{0, 1, \ldots, 2015\}$ попарно различные подмножества A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, т. ч.

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ A_2 \cap A_3 = \varnothing,\ A_3 \cap A_4 = \varnothing,\ A_4 \cap A_5 = \varnothing,\ A_5 \cap A_1 = \varnothing,$$

причем $|A_i| > 672$?

b) (2) Тот же вопрос при условии $|A_i| = |A_j|$ для всех i, j.

c) (2) Существуют ли во множестве $\underline{30}$ попарно различные подмножества A_1, A_2, A_3, A_4, т. ч. $|A_i| = 15$, $|A_i \cap A_j| = 6$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2$ для всевозможных троек (i, j, k) попарно различных чисел?

8. (2) Приведите к противоречию следующие утверждения не используя аксиому фундирования:

a) существует множество всех двуэлементных множеств;

b) существует множество всех множеств – упорядоченных пар (т. е. множеств вида (x, y));

c) существует множество всех множеств-степеней (т. е. множеств вида $\mathcal{P}(x)$).

9. (1)

a) Пусть $X \cap Y \neq \varnothing$. Докажите, что $\bigcap X \cap \bigcap Y \subseteq \bigcap (X \cap Y)$.

b) Пусть $X \cap Y \neq \varnothing$. Приведите пример, когда $\bigcap X \cap \bigcap Y \neq \bigcap (X \cap Y)$.

c) Приведите пример, когда $\bigcap X \cap \bigcap Y \not\subseteq \bigcap (X \cap Y)$.

10. (1) Докажите, что $\mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{P}(A_i)\}$.

11. (1) Постройте множество A, т. ч. $|A| = 4$ и $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

12. (2) Для каждого $n \in \mathbb{N}_+$ постройте множество X_n, т. ч. $|X_n| = n$ и для всех $a, b \in X_n$ верно $a \in b$ или $b \in a$ или $a = b$.

13. (1) Пусть есть семейство $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и возрастающая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Докажите, что:

a) если $X_n \subseteq X_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{f(n)}$;

b) если $X_n \supseteq X_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_{f(n)}$.

14. (1)

a) Докажите, что $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} X_{(i,j)} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} X_{(i,j)}$.

b) Приведите пример, когда обратное включение неверно.

15. (1) Пусть $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ некоторое семейство множеств. Докажите, что найдется семейство $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, т. ч. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, но $B_i \cap B_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

16. (2) Решите следующие уравнения для X, т. е. постройте эквивалентное системе утверждение вида $\alpha \subseteq X \subseteq \beta$, где α и β строятся с помощью операций $\cap, \cup, \setminus$ без участия X:

a) $A \cap X = B$ и $A \cup X = C$, если $B \subseteq A \subseteq C$;

b) $A \setminus X = B$ и $X \setminus A = C$, если $B \subseteq A$ и $A \cap C = \varnothing$.

Решите следующие уравнения для X, причем найдите условия существования решения:

c) $A_i \cap X = B_i$ для всех $i \in I$;

d) $A_i \cup X = B_i$ для всех $i \in I$;

e) $A \cup X = B \cap X$ и $A \cap X = C \cup X$;

f) $A \setminus X = X \setminus B$ и $X \setminus A = C \setminus X$;

g) $A \cap X = B \setminus X$ и $C \cup X = X \setminus A$.

17. (1) Приведите пример множеств, т. ч.

a) $A \times B \neq B \times A$;

b) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

18. (1) Проверьте следующие тождества:

a) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

c) $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, если $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$;

d) $U^2 \setminus (A \times B) = (\bar{A} \times U) \cup (U \times \bar{B})$, где $A, B \subseteq U$;

e) $\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$;

f) $\bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$.

19. (2) Докажите, что для любых множеств X и Y верно

$$\cup X \subseteq Y \iff X \subseteq \mathcal{P}(Y).$$

Множество X *транзитивно*, если $\cup X \subseteq X$.

20.

a) (1) Постройте транзитивное множество, у которого есть нетранзитивный элемент.

b) (1) Постройте непустое транзитивное множество, у которого все элементы транзитивны.

c) (1) Докажите, что если X транзитивно, то транзитивно и $\cup X$.

d) (2) Докажите, что если X транзитивно, то транзитивно и $\mathcal{P}(X)$.

e) (2) Докажите, что если X транзитивно тогда и только тогда, когда $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

21. (2) Докажите, что если $A \subseteq A \times A$, причем $A \neq \varnothing$, то существует цепочка множеств $x_0 \ni x_1 \ni \ldots \ni x_n \ni x_{n+1} \ni \ldots$.

22. (3) Существует ли множество $A \neq \varnothing$, т. ч. $A \times A \subseteq A$?

23. (2) Предположим, что в любом множестве X найдется элемент $x \in X$, т. ч. $y \notin x$ для всех $y \in X$ (т. е. x есть $\in$-«минимальный» элемент). Докажите, что если $A^n = A^m$, то $A = \varnothing$ или $m = n$.

24. (1) Проверьте тождества:

a) $\operatorname{dom} R^{-1} = \operatorname{rng} R$;

b) $\operatorname{rng} R^{-1} = \operatorname{dom} R$;

c) $\operatorname{dom} R \cup \operatorname{rng} R = \cup\cup R$.

25. (1) Проверьте тождества:

a) $(\cup_{i\in I} R_i)^{-1} = (\cup_{i\in I} R_i^{-1})$;

b) $(\cap_{i\in I} R_i)^{-1} = (\cap_{i\in I} R_i^{-1})$;

c) $(\cup_{i\in I} R_i) \circ Q = (\cup_{i\in I} R_i \circ Q)$;

d) $Q \circ (\cup_{i\in I} R_i) = (\cup_{i\in I} Q \circ R_i)$;

e) $(\cap_{i\in I} R_i) \circ Q \subseteq (\cap_{i\in I} R_i \circ Q)$;

f) $Q \circ (\cap_{i\in I} R_i) \subseteq (\cap_{i\in I} Q \circ R_i)$.

Тема 2.

26. (1) Приведите, если возможно, пример отношения $P \subseteq \mathbb{R}^2$, т. ч. P бесконечно и:

a) функционально, тотально, инъективно, сюръективно;

b) не функционально, тотально, инъективно, сюръективно;

c) функционально, не тотально, инъективно, сюръективно;

d) функционально, тотально, не инъективно, сюръективно;

e) функционально, тотально, инъективно, не сюръективно;

f) не функционально, не тотально, инъективно, сюръективно;

g) не функционально, тотально, не инъективно, сюръективно;

h) не функционально, тотально, инъективно, не сюръективно;

i) функционально, не тотально, не инъективно, сюръективно;

j) функционально, не тотально, инъективно, не сюръективно;

k) функционально, тотально, не инъективно, не сюръективно;

l) не функционально, не тотально, не инъективно, сюръективно;

m) не функционально, не тотально, инъективно, не сюръективно;

n) не функционально, тотально, не инъективно, не сюръективно;

o) функционально, не тотально, не инъективно, не сюръективно;

p) не функционально, не тотально, не инъективно, не сюръективно.

27. (2) Верно ли следующее предложение:

для любых множеств A и B существует отношение Q, т. ч. для любого отношения $R \subseteq A \times B$ найдется функция f со свойством $R = Q \circ f$?

28. (1) Пусть $f, g\colon A \to B$. Докажите, что $f \cup g\colon A \to B$ тогда и только тогда, когда $f = g$.

29. (1) Функция $f\colon A \to B$ такова, что отношение f^{-1} есть функция $B \to A$. Всегда ли f биекция?

30. (2) Пусть $f\colon A \to B$. Найдите необходимые и достаточные условия существования функции $h\colon B \to A$, т. ч. $h \circ f = \mathrm{id}_A$ (т. е. левой обратной к функции f).

31. (1) Функция $f\colon A \to B$ имеет левую обратную и правую обратную. Всегда ли f является биекцией?

32. (2) Для множеств A, B и отношений $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times A$ верно, что $Q \circ P = \mathrm{id}_A$ и $P \circ Q = \mathrm{id}_B$. Докажите, что $Q = P^{-1}$.

33. (1) Для всякой ли функции f верны тождества:

a) $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$;

b) $f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B] = f^{-1}[A \setminus B]$;

c) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$?

34. (1) Докажите, что тождество $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ имеет место тогда и только тогда, когда f инъекция.

35. (1) Докажите, что если f инъекция, то $f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B]$.

36. (1) Пусть $A \subseteq \mathrm{dom}\, f$ и $B \subseteq \mathrm{rng}\, f$. Проверьте утверждения:

a) $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$;

b) $f[A] \subseteq B \iff A \subseteq f^{-1}[B]$.

37. (2) Приведите пример множества A и биекций $f, g\colon A \to A$, т. ч. $f \circ g = g \circ f$, но ни одна из функций $f, g, f \circ g$ несть id_A.

38. (1) Пусть $A \sim B$, $A \cap B = \varnothing$ и $C \sim \underline{2}$. Всегда ли верно $A \times C \sim A \cup B$?

39. (2) Проверьте, является ли функция $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, т. ч. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x$ для всех $x, y \in \mathbb{N}$, биекцией.

40. (2) Постройте биекцию $[0, 1] \to [0, 1)$.

41. (2) Постройте биекцию между кругом с границей и кругом без границы (радиус круга 1, центр в начале координат).

42. (2) Пусть $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$.

43. (1) Известно, что $\mathbb{R} \sim \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Докажите, что:

a) $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$;

b) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

44. (1) Используя, быть может, теорему Кантора-Бернштейна, докажите:

a) $\underline{2}^{\mathbb{N}} \sim \underline{4}^{\mathbb{N}}$;

b) $\underline{2}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$;

c) $\underline{2}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

d) в $\mathbb{R}^3$ попарно равномощны любые (невырожденные) пирамида, призма, шар, цилиндр, тор («бублик»);

e) множество прямых в $\mathbb{R}^3$ равномощно $\mathbb{R}$.

45. (2) Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

46. (2) Докажите, что множество монотонно возрастающих функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

47. (2) Докажите, что в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ есть равномощное $\mathbb{R}$ подмножество, состоящее из попарно непересекающихся элементов, равномощных $\mathbb{R}$.

48. (2) Докажите, что любое множество попарно непересекающихся восьмерок на плоскости конечно или равномощно $\mathbb{N}$. («Восьмерка» есть объединение двух касающихся внешним образом окружностей ненулевого радиуса.)

49. (2) Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (всевозможных размеров). Существует ли в $\mathbb{R}^2$ множество попарно непересекающихся крестов, равномощное $\mathbb{R}$?

50. (2) Углом называется фигура, состоящая из точки и двух исходящих из нее лучей. Существует ли в $\mathbb{R}^2$ равномощное $\mathbb{R}$ множество попарно непересекающихся углов, т. ч. чтобы любые два различных имеют разную градусную меру?

51. (3) Докажите, что множество строгих локальных максимумов непрерывной функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

52. (2) Докажите, что множество биекций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ равномощно $\underline{2}^{\mathbb{N}}$.

53. (2) Пусть $A \cup B = \mathbb{R}$. Докажите, что $A \sim \mathbb{R}$ или $B \sim \mathbb{R}$.

54. (3) Пусть $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Всегда ли найдется $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $A_n \sim \mathbb{R}$?

55. (2) Пусть все элементы A суть одноэлементные множества (т. е. вида $\{x\}$). Не используя аксиому выбора (ниже́ равносильные утверждения), докажите, что для A существует *функция выбора* $f\colon A \to \cup A$, т. ч. $f(a) \in a$ для всех $a \in A$.

56. (3) Допустим, у любой сюръекции есть правая обратная функция. Выведите отсюда аксиому выбора:

> Пусть $\varnothing \notin A$. Тогда существует функция $f\colon A \to \cup A$, т. ч. $f(a) \in a$ для всех $a \in A$.

57. (2) Допустим, для каждого U множество $\mathcal{P}_*(U) = \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}$ имеет функцию выбора. Выведите отсюда аксиому выбора.

58. (2) Для индексированного семейства множеств $\{A_i\}_{i\in I}$ положим

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \in (\cup_{i\in I} A_i)^I \mid \forall i \in I\, f(i) \in A_i\}.$$

Предположим, что для всякого индексированного семейства $\{A_i\}_{i\in I}$, т. ч. $A_i \neq \varnothing$ при всех $i \in I$, имеет место $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Выведите отсюда аксиому выбора.

59. (2) (*неформальное*) Придумайте соответствие t, которое каждому множеству A сопоставляет пару (tA, ξ_{tA}), где tA множество и $\xi_{tA} \in tA$ какой-то отмеченный в нем элемент, и соответствие τ, которое каждой частичной функции $f\colon A \xrightarrow{p} B$ сопоставляет тотальную функцию $\tau f\colon tA \to tB$, т. ч. $\tau f(\xi_{tA}) = \xi_{tB}$ (т. е. отмеченные элементы сохраняются). При этом должны выполняться свойства: $\tau\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{tA}$ и $\tau(f \circ g) = \tau f \circ \tau g$.

Добейтесь, чтобы соответствия t и τ были взаимно-однозначными: у каждого множества с отмеченным элементом и у каждой функции, сохраняющей отмеченные элементы, должен быть ровно один прообраз (здесь функции $f\colon A \xrightarrow{p} B$ и $f'\colon A' \xrightarrow{p} B'$ считаются различными, если $A \neq A'$ или $B \neq B'$).

60. (2) Докажите, что функция $f\colon A \to B$ является инъекцией тогда и только тогда, когда для любых $g, h\colon C \to A$ из $f \circ g = f \circ h$ следует $g = h$.

61. (2) Докажите, что функция $f\colon A \to B$ является сюръецией тогда и только тогда, когда для любых $g, h\colon B \to C$ из $g \circ f = h \circ f$ следует $g = h$.

Тема 3.

62. (1) Приведите пример множества A и бинарного отношения R на нем, т. ч. R:

a) рефлексивно, симметрично, не транзитивно;

b) рефлексивно, антисимметрично, не транзитивно;

c) рефлексивно, транзитивно, не симметрично;

d) антисимметрично, транзитивно, не рефлексивно;

e) симметрично, транзитивно, не рефлексивно.

63. (1) Докажите, что если P и Q иррефлексивны, то $P \cup Q$, $P \cap Q$ и P^{-1} таковы же.

64. (1) Пусть P и Q иррефлексивны. Всегда ли иррефлексивно $P \circ Q$?

65. (1) Пусть $S(A)$ (или $N(A)$) есть множество всех строгих (соответственно, нестрогих) частичных порядков на множестве A.

a) Пусть $X \subseteq S(A)$, причем $X \neq \varnothing$. Докажите, что $\cap X \in S(A)$.

b) То же для множества $N(A)$.

66. (1) Найдите все такие отношения $R \subseteq A^2$, что R есть частичный порядок *и* эквивалентность.

67. (2) Докажите, что для любого ч. у. м. $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$ найдется $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, т. ч. $\mathcal{A} \cong (S, \subseteq)$. Иначе говоря, любой порядок устроен, как включение на подходящем семействе подмножеств.

68. (1) Пусть $X \subseteq Eq(A)$, причем $X \neq \varnothing$. Докажите, что $\cap X \in Eq(A)$.

69. (2) Пусть P и Q суть две эквивалентности на множестве A. Докажите, что $P \cup Q$ есть эквивалентность тогда и только тогда, когда $P \cup Q = P \circ Q$.

70. (2) Пусть P и Q суть две эквивалентности на множестве A. Докажите, что $P \circ Q$ есть эквивалентность тогда и только тогда, когда $P \circ Q = Q \circ P$.

71. (2) Пусть P и Q суть две эквивалентности на множестве A, причем $P \circ Q = Q \circ P$. Докажите, что $P \circ Q = \sup\{P, Q\}$ в ч. у. м. $(Eq(A), \subseteq)$.

72. (1) Проверьте, что отношение R на множестве A рефлексивно и транзитивно тогда и только тогда, когда $R = (R \circ R) \cup \mathrm{id}_A$.

73. (1) Пусть отношение R на множестве A рефлексивно и транзитивно, а $Q = R \cap R^{-1}$. Докажите, что: (1) Q есть эквивалентность на A; (2) если xQx', yQy' и xRy, то $x'Ry'$; (3) отношение R', т. ч. $[x]_Q R [y]_Q \iff xRy$, есть частичный порядок на A/Q.

74. (1) Пусть на на *конечном* непустом множестве A задан частичный порядок $\leq$. Докажите, что в A есть минимальный и максимальный элементы.

75. (2) Пусть на *конечном* множестве A задан частичный порядок R. Докажите, что на этом множестве найдется частичный порядок Q, т. ч. $R \subseteq Q$ и для любых различных $a, b \in A$ верно aQb или bQa.

76. (2) Пусть P и Q суть линейные порядки на множестве A. Когда $P \circ Q$ является линейным порядком на A?

77. (3) Пусть $Eq(U)$ есть множество всех отношений эквивалентности на множестве U. Докажите, что в частично упорядоченном множестве $(Eq(U), \subseteq)$ для любого $X \subseteq Eq(U)$ существуют $\sup X$ и $\inf X$. Выясните, как устроены эти супремум и инфимум.

78. (2) Пусть в частично упорядоченном множестве $(A, \leq)$ для всякого подмножества $X \subseteq A$ существует $\sup X$. Докажите, что для всякого $X \subseteq A$ существует $\inf X$.

79. (2) Пусть на множестве A задан частичный порядок $\leq$. Элемент $a \in A$ называется *компактным*, если у любого множества $X \subseteq A$ с условием $a \leq \sup X$ найдется *конечное* подмножество $Y \subseteq X$, т. ч. $a \leq \sup Y$. Найдите все компактные элементы A, если

a) $A = \mathcal{P}(U)$ и $\leq\ =\ \subseteq$;

b) $A = [0, 1] \cap \mathbb{R}$ и $\leq$ есть обычный порядок вещественных чисел.

Пусть $(A, \leq)$ частично упорядоченное множество. Элементы $x, y \in A$ называются *сравнимыми*, если $x \leq y$ или $y \leq x$. Множество $B \subseteq A$ называется *цепью*, если любые два его различные элемента сравнимы, и *антицепью*, если любые два его различные элемента несравнимы.

80. (2) В частично упорядоченном множестве $(A, \leq)$ каждая цепь конечна, причем имеет мощность не более $m \in \mathbb{N}$, а каждая антицепь тоже конечна, причем имеет мощность не более $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что A конечно и имеет мощность не больше mn.

81. (3) Пусть $\leq$ есть частичный порядок на *бесконечном* множестве A. Докажите, что в A есть бесконечная цепь или бесконечная антицепь.

82. (2) На множестве $2^{\mathbb{N}}$ определим отношение E, т. ч. fEg тогда и только тогда, когда $f = g \circ \sigma$ для некоторой биекции $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (т. е. f перестановка последовательности g). Проверьте, что E отношение эквивалентности, и докажите, что множество $2^{\mathbb{N}}/E$ счетно.

Тема 4.

83. (2) Докажите, что $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$, где $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ есть множество всех *конечных* подмножеств множества $\mathbb{N}$.

84. (2) Докажите, что существует множество $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, т. ч. $X \sim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ и выполнено:

a) для любых $A, B \in X$, если $A \neq B$, то множество $A \cap B$ конечно;

b) для любых $A, B \in X$ верно $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$ (т. е. X есть цепь в частично упорядоченном множестве $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \subseteq)$).

85. (2) Докажите, что $\mathbb{N} \lesssim A$ для всех бесконечных A, с помощью аксиомы счетного выбора (см. Конспект).

86. (2) Пусть множество A конечно и $\varnothing \notin A$. Не используя аксиому выбора, докажите, что существует функция $f\colon A \to \cup A$, т. ч. $f(a) \in a$ для всех $a \in A$.

87. (2) Не используя аксиому выбора, докажите, что для A существует функция выбора, если $\varnothing \notin A$ и

a) $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

b) $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

88. (2) Выведите аксиому счетного выбора из принципа зависимого выбора.

89. (2) Не используя никакой формы аксиомы выбора, докажите, что если множество A и все его элементы конечны, то множество $\cup A$ тоже конечно.

90. (2) Не используя никакой формы аксиомы выбора, докажите, что если A бесконечно, то множество $\cup A$ тоже бесконечно.

91. (2) Докажите, что если $A = \cup A$, то множество A пусто или бесконечно.

92. (2) Докажите следующую *теорему о совместной рекурсии*. Пусть U_i и V некоторые множества, $g_i\colon V \to U_i$ и $h_i\colon \mathbb{N} \times V \times U_1 \times U_2 \to U_i$. Тогда существует единственная пара (f_1, f_2) функций, т. ч. $f_i\colon \mathbb{N} \times V \to U_i$ и

$$f_i(0, v) = g_i(v) \quad \text{и} \quad f_i(n+1, v) = h_i(n, v, f_1(n, v), f_2(n, v))$$

при всех $v \in V$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$. (См. Конспект.)

93.

94.

95.

96.

97. (2) Докажите *лемму Леви*: для любых $\sigma, \tau, \theta, \eta \in A^*$, если $\sigma\tau = \theta\eta$ и $|\sigma| \geqslant |\theta|$, то найдется ξ, т. ч. $\sigma = \theta\xi$ и $\eta = \xi\tau$.

98. (3) Рассмотрим функцию $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $\varphi(n) = f(n+2)$, где f последовательность Фибоначчи, и язык $F = \{\sigma \in \underline{2}^+ \mid 0 \not\sqsupset \sigma$ и $\sigma(i) = \sigma(i+k) = 1 \Longrightarrow k \neq 1\}$ (иначе говоря, не допускается две единицы подряд и нули в конце слова, отличного от 0). Рекурсией по длине определим функцию $g\colon \underline{2}^* \to \mathbb{N}$, т. ч. $g(\sigma) = \sum_{i<|\sigma|} \varphi(i) \cdot \sigma(i)$, т. е. сумму конечного множества чисел Фибоначчи, заданного σ.

Язык F и функция g представляют собой *фибоначчиеву систему счисления*. Убедитесь в этом, проверив $F \overset{g}{\sim} \mathbb{N}$. (При доказательстве инъективности можно проверить и использовать лемму: сумма членов последовательности φ с наибольшим номером i, без повторов и подряд идущих членов, строго меньше числа $\varphi(i+1)$.)

Определим отображение $\mathcal{E}\colon \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$, при всех $X \subseteq U$ полагая $\mathcal{E}(X) = X \cup \{f(\vec{u}) \mid f \in \mathcal{F}$ и $\vec{u} \in X\}$. Положим также $\mathcal{E}^0(X) = X$ и $\mathcal{E}^{n+1}(X) = \mathcal{E}(\mathcal{E}^n(X))$.

99. (2) Докажите, что $\mathcal{F}(Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^n(Y)$ для каждого $Y \subseteq U$.

100. (1) (*вспоминая программирование; не совсем формально*) Дайте индуктивное определение следующих типов данных:

a) массив элементов типа `int`, упорядоченный по возрастанию

b) массив элементов типа `int`, упорядоченный по невозрастнию;

c) список элементов типа `int`;

d) двунаправленный список элементов типа T;

e) двоичное дерево элементов типа T;

f) двоичное дерево поиска (binary search tree) элементов типа `int`;

g) AVL-дерево элементов типа `int`;

h) красно-черное дерево элементов типа `int`;

i) стек элементов типа T;

j) очередь элементов типа T.

101. (2) Пусть $A = \mathbb{N} \cup \{|\}$. Удовлетворяет ли свойству однозначности разбора следующее определение формального языка L над алфавитом A: язык L есть наименьшее такое множество $X \subseteq A^*$, что

a) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma\tau \in X$;

b) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $\sigma|\tau| \in X$;

c) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau, \rho \in X$, то $|\sigma|\tau|\rho \in X$;

d) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma|\tau| \in X$;

e) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau, \rho \in X$, то $|\sigma|\tau|\rho| \in X$;

f) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma||\tau| \in X$;

g) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma|\tau| \in X$ и $|\sigma||\tau| \in X$;

h) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma||\tau \in X$ и $\sigma||\tau| \in X$;

i) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma| \in X$ и $|\sigma\tau| \in X$;

j) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma| \in X$ и $|\sigma|\tau| \in X$;

k) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma| \in X$ и $|\sigma\tau \in X$;

l) если $p \in \mathbb{N}$, то $p \in X$; если $\sigma, \tau \in X$, то $|\sigma| \in X$ и $\sigma\tau| \in X$;

m) $0 \in X$; если $\sigma \in X$, то $1\sigma \in X$ и $\sigma\sigma \in X$;

n) $0 \in X$; если $\sigma \in X$, то $1\sigma \in X$ и $\sigma\bar{\sigma} \in X$, где $\bar{\sigma}$ означает результат замены в σ всех вхождений 0 на 1 и наоборот (прочие символы не меняются);

o) $0 \in X$; если $\sigma \in X$, то $1\sigma \in X$ и $\sigma\sigma^{\mathsf{R}} \in X$;

p) $0 \in X$; если $\sigma \in X$, то $1\sigma \in X$ и $\sigma^{\mathsf{R}}\sigma \in X$.

102.
103.
104.
105.
106.
107.