Листок № 4

Литература: основной конспект, с. 60–72, 76–81.

1. Пусть все элементы множества X имеют вид $\{a, b\}$. Что означает аксиома выбора в применении к X? Ясно ли, как без нее обойтись?

2. Есть ли функция выбора у пустого множества?

3. Не используя аксиому выбора, докажите существование функции выбора для следующих множеств:

а) множество $\mathcal{P}_1(U)$ всех одноэлементных подмножеств множества U;

б) произвольное бинарное отношение R;

в) любое множество кругов на плоскости;

г) любое множество треугольников (с внутренностью или без) на плоскости.

(*Нужно дать точное определение функции выбора с помощью «основных способов задания множеств» и проверить функциональность с тотальностью.*)

4. Множество X таково, что $\cap X \neq \varnothing$. Есть ли у X функция выбора? Необходима ли аксиома выбора для ее существования?

5. Рассмотрите несколько конечных отношений и выясните, какими свойствами (рефлексивность и т. п.) они обладают.

6. Какими свойствами обладает отношение R на $\mathcal{P}(U)$, если $aRb \iff a \cap b = \varnothing$?

7. Как устроены отношения $R \subseteq A^2$, симметричные и антисимметричные одновременно?

8. Докажите, что отношение $R \circ R^{-1}$ всегда симметрично.

9. Пусть отношения P и Q симметричны. Докажите, что отношение $P \circ Q$ симметрично тогда и только тогда, когда $P \circ Q = Q \circ P$.

10. Докажите, что если отношения P и Q транзитивны, то таково же $P \cap Q$.

11. Пусть $f\colon A \to \mathbb{N}$ и отношение $\prec$ на множестве A таково, что $a \prec b \iff f(a) < f(b)$ («сравнение студентов по успеваемости»). Докажите, что $\prec$ есть строгий частичный порядок на A. Сравните нестрогий «напарник» $\preccurlyeq$ порядка $\prec$ с отношением $\{(a, b) \in A^2 \mid f(a) \leqslant f(b)\}$.

12. Докажите, что если P и Q суть строгие (либо нестрогие) частичные порядки на множестве A, то $P \cap Q$ и P^{-1} таковы же.

13. Докажите, что $\varphi(P^{-1}) = (\varphi(P))^{-1}$ для всех $P \in S(A)$ (напомним, что φ отображает строгий порядок в его нестрогого «напарника»).

14. Пусть R частичный порядок на A. Докажите, что $\min_R A = \max_{R^{-1}} A$ и $\max_R A = \min_{R^{-1}} A$.

15. Пусть $<$ строгий порядок на A. Если элемент x наибольший во множестве $B \subseteq A$, то $\max_< B = \{x\}$. В частности, наибольший элемент B единствен.

16. Пусть на множестве $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ задан порядок $\subseteq$. Найдите множества $\min A$ и $\max A$.

17. Найдите $\min_{|} \mathbb{N}$ и $\max_{|} \mathbb{N}$. Проделайте то же для $\mathbb{N} \smallsetminus \{0, 1\}$.

18. Допустим $\max_{<} A = \{x\}$. Всегда ли x есть наибольший элемент ч. у. м. $(A, <)$?

19. Рассмотрите какой-нибудь конечный порядок и для нескольких его подмножеств найдите множества верхних и нижних граней. Найдите инфимумы и супремумы, когда таковые имеются.

20. Пусть $(A, <)$ ч. у. м. и $B, C \subseteq A$. Обозначим $B^{\vartriangle}$ множество верхних, и $B^{\triangledown}$ множество нижних граней множества B. Докажите, что:

а) $(B \cup C)^{\vartriangle} = B^{\vartriangle} \cap C^{\vartriangle}$; $(B \cup C)^{\triangledown} = B^{\triangledown} \cap C^{\triangledown}$;

б) $B \subseteq C \Longrightarrow C^{\vartriangle} \subseteq B^{\vartriangle}$ и $C^{\triangledown} \subseteq B^{\triangledown}$;

в) $B \subseteq B^{\vartriangle\triangledown} \cap B^{\triangledown\vartriangle}$;

г) $B^{\vartriangle} = B^{\vartriangle\triangledown\vartriangle}$; $B^{\triangledown} = B^{\triangledown\vartriangle\triangledown}$.

21. В ч. у. м. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ для произвольного $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ найдите $\sup X$ и $\inf X$.

22. При каких условиях подмножество является цепью и антицепью одновременно? Найдите все цепи и все антицепи линейно упорядоченного множества.

23. Постройте в ч. у. м. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ цепь, имеющую наибольший, но не имеющую наименьшего элемента.

24. Докажите, что $(\mathbb{Q}, <) \ncong (\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Q}, <) \ncong (\mathbb{R}, <)$.

25. Рассмотрите несколько примеров решеток (полных решеток, полурешеток).

26. Пусть $\varphi\colon A^2 \to A$, причем операция φ на A удовлетворяет условиям коммутативности, ассоциативности и идемпотентности. Пусть $x \leq y \iff \varphi(x, y) = x$.

а) Докажите, что $\leq$ нестрогий частичный порядок на A.

б) Докажите, что $\varphi(x, y) = \inf\{x, y\}$ в смысле введенного порядка для всех $x, y \in A$.

в) Приведите естественные примеры такой операции φ.

27. Рассмотрите несколько естественных отношений эквивалентности. Как устроены соответствующие фактор-множества?

28. Пусть отношение R на множестве $\mathbb{N}^2$ таково, что $(a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c$.

29. Докажите, что если R и Q эквивалентности на A, то R^{-1} и $R \cap Q$ таковы же.

30. Докажите, что $R \subseteq A^2$ есть эквивалентность тогда и только тогда, когда $(R \circ R^{-1}) \cup \mathrm{id}_A = R$.

31. Проверьте, что если R и Q эквивалентности на A, то

$$R \circ Q = A^2 \iff Q \circ R = A^2.$$

32. Для функции f найдите отношение $\ker f$ и множество $\mathbb{R}/\ker f$, если

а) $f(x)$ есть целая часть числа x;

б) $f(x)$ есть дробная часть числа x.

33. Докажите, что для любого множества A и любой эквивалентности E на нем найдутся множество B и сюръекция $f\colon A \to B$, т. ч. $E = \ker f$.

34. Найдите все разбиения множества $\varnothing$.

35. Пусть $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \Pi(A)$. Пусть $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$ (разбиение Σ_1 *мельче* разбиения Σ_2), если для каждого $\sigma \in \Sigma_1$ найдется $\tau \in \Sigma_2$, т. ч. $\sigma \subseteq \tau$. Проверьте, что $(\Pi(A), \leq)$ есть ч. у. м.

36. Докажите, что $(\Pi(A), \leq) \cong (Eq(A), \subseteq)$.