Листок № 9

Литература: recursive_simple.

1. Пусть функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невозрастающая. Тогда f вычислима.

2. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ в точке n принимает значение 1, если в десятичной записи числа π есть n девяток подряд. Иначе $f(n) = 0$. Докажите, что f вычислима.

3. Являются ли следующие множества разрешимыми? Перечислимыми?

а) множество всех простых чисел;

б) множество $\{xy \mid x \in A, y \in B\}$, где A и B разрешимы (перечислимы);

в) множество $A \subseteq B$, где B разрешимо (перечислимо).

4. Допустим, множества A_i перечислимы при всех $i \in \mathbb{N}$. Всегда ли перечислимо $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$?

5. Докажите, что перечислимое множество можно перечислить без повторений.

6. Докажите, что непустое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая тотальная *неубывающая* функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{rng} f$.

7. Докажите, что в каждом бесконечном перечислимом множестве есть бесконечное разрешимое подмножество.

8. Пусть множество $U \subseteq \mathbb{N}^2$ перечислимо. Тогда существует вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $\operatorname{dom} f = \operatorname{pr}^1 U$ и $\Gamma_f \subseteq U$.

9. Докажите, что произвольные перечислимые множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$ можно разделить на перечислимые непересекающиеся части. Именно, существуют перечислимые A', B', такие что $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $A' \cup B' = A \cup B$ и $A' \cap B' = \varnothing$.

10. Докажите, что существует невычислимая функция двух аргументов, все сечения которой по одному из аргументов вычислимы.

11. Докажите, что существует вычислимая функция f, не имеющая вычислимого тотального продолжения, т. ч. $\operatorname{rng} f = \{0, 1\}$.

Множество C *отделяет* множество A от множества B, если $A \subseteq C$ и $B \subseteq \bar{C}$.

12. Существуют перечислимые множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$, т. ч. $A \cap B = \varnothing$, но никакое разрешимое множество C не отделяет A от B.

13. Существует счетно много перечислимых множеств, попарно не пересекающихся и попарно не отделимых никакими разрешимыми множествами.

14. Докажите, что существует у. в. ф. V, т. ч.

а) V_p нигде не определена при всех четных p;

б) если V_p нигде не определена, то p четно.

15. Докажите, что не существует универсальной *тотальной* вычислимой функции.

16. Докажите, что для *любой* у. в. ф. U множество $T = \{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{dom} U_n = \mathbb{N}\}$ неперечислимо.

17. Докажите, что существует вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т. ч. $f(x) \simeq (f(x+1))^2$ при всех $x \in \mathbb{N}$. Найдите все такие функции.

18. Пусть U г. у. в. ф. Докажите, что существует «программа» $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $U(n,x) \simeq n^{U(x^2,n+x)}$ при всех $x \in \mathbb{N}$.

19. Пусть U г. у. в. ф. Докажите, что существуют две *различные* «программы» $a, b \in \mathbb{N}$, т. ч. $U(a,x) = b$ и $U(b,x) = a+1$ при всех $x \in \mathbb{N}$.

20. Пусть U г. у. в. ф. Является ли множество $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall x, y \in \operatorname{dom} U_n\,(x \neq y \to |U_n(x) - U_n(y)| > 2019)\}$ перечислимым? Коперечислимым?

21. Вспомните известные свойства отношения $\leq_m$.

22. Пусть $\varnothing \neq B \subsetneq \mathbb{N}$ и A разрешимо. Докажите, что $A \leq_m B$.

23. Докажите, что нет подмножества $\mathbb{N}$, к которому сводились бы все прочие подмножества.

24. Какие множества m-сводятся к $\mathbb{N}$ и $\varnothing$?

25. Докажите, что существует неперечислимое множество:

а) все элементы которого просты;

б) содержащее все степени двойки, а все элементы которого не имеют простых делителей, кроме 2 и 3.

26. Докажите, что если U г. у. в. ф., то $A \leq_m K_U$ для каждого перечислимого множества A.

27. Пусть U г. у. в. ф. Проверьте перечислимость и коперечислимость множеств:

а) $\{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{dom} U_n \text{ конечно}\}$;

б) $\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \text{ есть биекция } \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$;

в) $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \in \operatorname{dom} U_n, \text{ но } 1 \notin \operatorname{dom} U_n\}$.

28*. Пусть $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{dom} U_n \text{ конечно}\}$ и $D' = \{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{dom} U_n \text{ коконечно}\}$. Докажите, что $G \leq_m G'$.