Листок № 7

Литература: boolean, main, compactness.

1. Найдите мощность множества всех булевых функций.

2. Вспомните определение пропозициональной формулы: инфиксный («естественный») и префиксный варианты (в т. ч. с произвольным множеством связок). Рассмотрев несколько выражений, определите, какие из них являются формулами. Для обоснования используйте теорию индуктивных определений.

3. Вспомните определение свойства однозначности разбора. Зачем нужно такое свойство? Вспомните определения функции V (множество атомов, имеющих свободные вхождения в формулу), значения формулы при оценке и на наборе. Вычислите значения нескольких формул.

4*. Докажите, что язык пропозициональных формул в инфиксной записи является беспрефиксным и выведите отсюда свойство однозначности разбора для соответствующего определения.

5. В каком смысле формула задает булеву функцию? Почему при этом существен порядок переменных и каков его «программистский» смысл?

6. Что такое д. н. ф. и к. н. ф.? Приведите несколько примеров и контрпримеров. Как могут быть устроены формулы, одновременно являющиеся тем и другим?

7. Постройте таблицу истинности формулы φ и найдите эквивалентные ей д. н. ф. и к. н. ф., где

$$\varphi = (\neg p \to (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee p) \to (r \wedge p)).$$

8. Верно ли, что каждая формула эквивалентна некоторой формуле, где из связок есть лишь:

а) $\wedge$ и $\neg$;

б) $\wedge$, $\vee$ и $\to$;

в) $\wedge$ и $\to$;

г) $\neg$ и $\to$?

9. Выполнены ли следующие эквивалентности:

а) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$;

б) $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \neg\psi \wedge \varphi$;

в) $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$;

г) $\varphi \wedge \top \equiv \varphi$;

д) $\varphi \vee \bot \equiv \varphi$;

е) $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$;

ж) $\varphi \to \neg\psi \equiv \neg\psi \to \neg\neg\varphi$;

з) $\varphi \to (\psi \to \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \to \theta$?

10. Верно ли, что существует единственная функция $(\ )^* \colon \mathrm{Fm}(\neg, \wedge, \vee) \to \mathrm{Fm}(\neg, \wedge, \vee)$, т. ч. для всех $p \in \mathrm{At}$ и $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\neg, \wedge, \vee)$ верно:

- $p^* = p$;
- $(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$;
- $(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$;
- $(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$?

Формула φ^* называется *двойственной* формуле φ.

11. Докажите, что для всех формул $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}(\neg, \wedge, \vee)$ и всех оценок $\xi \colon \mathrm{At} \to \underline{2}$ верно:

а) $(\varphi^*)^* = \varphi$;

б) $[\varphi](\xi) = [\neg\varphi^*](\xi^*)$, где $\xi^* = \mathrm{not} \circ \xi$;

в) $\varphi \equiv \psi$ равносильно $\varphi^* \equiv \psi^*$;

г) φ тавтология тогда и только тогда, когда φ^* невыполнима.

12. Используя двойственность и соответствующий результат для д. н. ф., докажите, что каждая каждая формула эквивалентна некоторой к. н. ф.

13. Формализуйте следующее рассуждение[1] с помощью пропозициональных формул и проверьте его на корректность:

> Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

14. Предположив существование опровергающей оценки, проверьте, являются ли следующие формулы тавтологиями:

а) $((p \to q) \to p) \to p$;

б) $(p \to r) \to ((p \to q) \to (r \to q))$.

15. Существует ли формула A, т. ч. обе формулы:

[1] из книги С. Клини «Математическая логика».

а) $(p \wedge A) \to (p \to q)$ и $(p \vee r) \to (p \vee A)$;

б) $(p \vee A) \to (p \vee (q \to r))$ и $(r \to p) \to (q \wedge A)$

являются тавтологиями?

16. Укажите просто проверяемый критерий:

а) тавтологичности к. н. ф.;

б) выполнимости д. н. ф.

17. Вычислите значение нескольких формул при подстановках вида $[\psi/q]$.

18. Докажите, что подстановки, вообще говоря, не коммутируют.

19. Дайте рекурсивное определение одновременной подстановки $(\cdot)[\psi_1/q_1, \ldots, \psi_n/q_n]$.

20. Покажите, как можно обойтись без одновременных подстановок, используя лишь подстановки вида $[\psi/q]$ и некоторый запас «свежих», не встречающихся в рассматриваемых формулах атомов. Иначе говоря, докажите, что для любых $q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{At}$ и $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathrm{Fm}(\hat{F})$ существуют $r_1, \ldots, r_m \in \mathrm{At}$ и $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathrm{Fm}(\hat{F})$, т. ч.

$$\varphi[\psi_1/q_1, \ldots, \psi_n/q_n] = \varphi[\theta_1/r_1] \ldots [\theta_m/r_m].$$

Назовем *абстрактной подстановкой* любую функцию $\sigma\colon \mathrm{Fm} \to \mathrm{Fm}$, коммутирующую со связками:

$$\sigma(\hat{f}\varphi_1 \ldots \varphi_n) = \hat{f}\sigma(\varphi_1) \ldots \sigma(\varphi_n).$$

21. Докажите, что любая абстрактная подстановка σ выражается через одновременную в следующем смысле: для любых $q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{At}$ существуют формулы $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathrm{Fm}$ т. ч. $\sigma(\varphi) = \varphi[\psi_1/q_1, \ldots, \psi_n/q_n]$ для каждой $\varphi \in \mathrm{Fm}(\vec{q})$.

22. Проверьте следующие свойства логического следования:

а) $\Gamma, \psi \models \varphi \iff \Gamma \models \psi \to \varphi$;

б) $\Gamma, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \models \varphi \iff \Gamma \models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi)\ldots))$;

в) $\Gamma, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \models \varphi \iff \Gamma \models (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$;

г) $\Gamma, \varphi \models \varphi$;

д) $\Gamma \models \varphi$ и $\Gamma \models \psi \iff \Gamma \models \varphi \wedge \psi$;

е) $\Gamma, \varphi, \psi \models \theta \iff \Gamma, \varphi \wedge \psi \models \theta$;

ж) $\Gamma \models \varphi$ или $\Gamma \models \psi \Longrightarrow \Gamma \models \varphi \vee \psi$;

з) $\Gamma, \varphi \models \theta$ и $\Gamma, \psi \models \theta \iff \Gamma, \varphi \vee \psi \models \theta$;

и) $\Gamma \models \varphi$ и $\Gamma, \psi \models \theta \Longrightarrow \Gamma, \varphi \to \psi \models \theta$;

к) $\Gamma, \varphi \models \bot \iff \Gamma \models \neg\varphi$;

л) $\Gamma \models \varphi$ и $\Gamma \subseteq \Delta \Longrightarrow \Delta \models \varphi$;

м) $\Gamma \models \varphi$ и $\Delta \models \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma \Longrightarrow \Delta \models \varphi$.

23. Граф $G = (V, E)$ называется k-дольным, где $k \in \mathbb{N}_+$, если существуют попарно непересекающиеся множества $V_1, \ldots, V_k$, в объединении дающие V, т. ч. из $x, y \in V_i$ следует $xy \notin E$ для всех i. Используя теорему о компактности, докажите, что граф является k-дольным тогда и только тогда, когда каждый конечный его подграф k-дольный.

24. Докажите, не используя никакой формы аксиомы выбора, что на конечном множестве любой порядок можно продолжить до линейного.

25. Используя теорему о компактности, докажите, что на счетном множестве любой порядок можно продолжить до линейного.

26*. Решите задачу про черта и купца с помощью теоремы о компактности. (Можно вывести лемму Кёнига в качестве промежуточного шага.)

Пусть U есть некоторое непустое множество. Рассматриваем теоретико-множественную интерпретацию формул из $\mathrm{Fm}(\neg, \wedge)$ над U.

27. Вычислите значения нескольких формул в такой интерпретации.

28. Докажите, что формула φ является U-тавтологией тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ не U-выполнима. Выразите U-эквивалентность через U-тавтологии.

29. Докажите, что φ является U-выполнимой тогда и только тогда, когда φ выполнима.

30. Докажите, что φ является U-выполнимой тогда и только тогда, когда при некоторой U-оценке α верно $[\varphi](\alpha) = U$.

31. Докажите, что φ является U-тавтологией тогда и только тогда, когда φ тавтология.

32. Докажите, что $\varphi \equiv_U \psi$ равносильно $\varphi \equiv \psi$.

33. Объясните, как можно дать теоретико-множественную интерпретацию формуле над любым множеством связок.

34. Используя построенную теорию, докажите, что если какое-то равенство, построенное с помощью символов операций $\cap$, $\cup$ и $\overline{(\cdot)}$ из букв $A_1, \ldots, A_n$, не является тождеством, то его всегда можно опровергнуть, придав буквам значение пустого множества и некоторого синглетона.

35. Докажите, что если какое-то выражение, построенное с помощью символов операций $\cap$, $\cup$ и $\overline{(\cdot)}$ из букв $A_1, \ldots, A_n$, не равно тождественно пустому множеству, то в любом непустом универсуме U можно выбрать множества $A_1, \ldots, A_n$ так, что значение выражения будет все U.

36. Объясните, какую роль играет требование непустоты U и что будет, если его отбросить.