Листок № 2

1. Пусть $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3\}$. Используя определение упорядоченной пары множеств, «распишите» каждый элемент множества $A \times B$ и убедитесь непосредственно, что все они принадлежат $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

2. Когда множество (a, b) одноэлементное?

3. Как устроены множества $A \times \varnothing$ и $A \times \{\varnothing\}$?

4. Приведите пример множеств A и B, т. ч. $A \times B \neq B \times A$. (*Напомним, что внутреннее устройство чисел и т. п. — как множеств, мы не уточняли.*)

5. При каких условиях из $A \times B = C \times D$ следует $A = C$ и $B = D$?

6. Проверьте тождества:

а) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

7. Докажите, что если A и B непусты, то $A \subseteq C$ и $B \subseteq D \iff A \times B \subseteq C \times D$. Существенно ли условие непустоты?

8. Докажите, что если множества A и B непусты и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$, то $A = B = C = D$. Существенно ли условие непустоты?

9. Рассмотрим бинарное отношение $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5)\}$. «Вычислите» $\bigcup\bigcup R$, $\operatorname{dom} R$ и $\operatorname{rng} R$.

10. Докажите, что для любых множеств R, A и B верно:

а) если $R \subseteq A \times B$, то R бинарное отношение, причем $\operatorname{dom} R \subseteq A$ и $\operatorname{rng} R \subseteq B$;

б) если R бинарное отношение, то $R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{rng} R$.

11. Пусть A некоторая группа мужчин и aPb означает, что a сын b. Как понимать отношения $P \circ P$, P^{-1} и $P^{-1} \circ P$?

12. Для обычных неравенств натуральных чисел «вычислите»:

а) $\leqslant \circ \leqslant$;

б) $< \circ <$;

в) $< \circ \leqslant$;

г) $\leqslant \circ \geqslant$;

д) $< \circ >$;

е) $> \circ <$.

13. Пусть $P \subseteq A \times B$, Q и R бинарные отношения. Докажите:

а) $(P^{-1})^{-1} = P$;

б) $(P \cup Q)^{-1} = P^{-1} \cup Q^{-1}$;

в) $(\bar{P})^{-1} = \overline{P^{-1}}$;

г) $(P \cup Q) \circ R = (P \circ R) \cup (Q \circ R)$;

д) $(P \cap Q) \circ R \subseteq (P \circ R) \cap (Q \circ R)$.

14. Всегда ли можно ли заменить равенством последнее включение предыдущей задачи?

15. Используя утверждения задачи 13, покажите, что:

а) $(P \cap Q)^{-1} = P^{-1} \cap Q^{-1}$;

б) если $P \subseteq Q$, то $P \circ R \subseteq Q \circ R$;

в) $R \circ (P \cap Q) \subseteq (R \circ P) \cap (R \circ Q)$.

16. Пусть $R \subseteq A \times B$, причем множества A и B непустые. Тогда $R^{-1} \neq \bar{R}$.

17. Пусть $R \subseteq A^2$. Всегда ли верно $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$?

18. Докажите, что для любых отношений R, Q и множеств X, Y верно:

а) $R[X \cup Y] = R[X] \cup R[Y]$;

б) если $X \subseteq Y$, то $R[X] \subseteq R[Y]$;

в) $R[X \cap Y] \subseteq R[X] \cap R[Y]$ (всегда ли можно это включение заменить равенством?);

г) $R[\varnothing] = \varnothing$;

д) $(R \circ Q)[X] = R[Q[X]]$.