# Листок № 8

**Литература:** first-order, models-draft.

**1.** Изоморфны ли структуры:

а) $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;

б) $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;

в) $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$;

г) $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;

д) $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, S)$ и $(\mathbb{Z}, S^2)$, где $S(x, y)$ означает $y = x + 1$ и $S^2(x, y)$ означает $y = x + 2$;

е) $(\mathbb{N}, =, +)$ и $(\mathbb{Z}, =, +)$;

ж) $(\mathbb{Q}, =, +)$ и $(\mathbb{Z}, =, +)$?

**2.** Докажите, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется сигнатура $\sigma$, не содержащая ничего, кроме одновалентных предикатных символов, и выполнимое $\sigma$-предложение $\varphi$, любая модель которого имеет мощность не меньше $n$.

Назовем *(конечным) спектром* предложения $\varphi$ сигнатуры с равенством $\sigma$ множество

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid \text{существует нормальная } \sigma\text{-структура } \mathcal{M}, \text{ т. ч. } \mathcal{M} \models \varphi \text{ и } |\mathcal{M}| = n\}.$$

**3.** Докажите, что спектром подходящего предложения является каждое:

а) одноэлементное;

б) конечное;

в) коконечное (т. е. с конечным дополнением)

подмножество $\mathbb{N}_+$.

**4.** Найдите предложение, чей спектр — множество всех нечетных чисел.

**5*.** Найдите предложение, чей спектр — множество всех составных чисел.

**6.** Найдите предложение в сигнатуре $\{<, =\}$, чьи нормальные модели суть, в точности, двуэлементные линейные порядки.

**7.** В произвольном ч. у. м. выразите множество максимальных элементов. В произвольном л. у. м. выразите равенство.

**8.** В структуре $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$ выразите отношения:

а) $a = \varnothing$;

б) $a = U$;

в) $a$ одноэлемнтное;

г) $a$ двуэлементное;

д) $a = b \cup c$;

е) $a = b \cap c$;

ж) $a = U \setminus a$.

**9.** В структуре $(\mathbb{N}; |)$, где $m \,|\, n$ означает, что число $m$ является делителем числа $n$, выразите отношения:

а) равенство;

б) $\{0\}$;

в) $\{1\}$;

г) множество простых чисел;

д) $a$ и $b$ взаимно простые;

е) $a$ степень простого числа $b$;

ж) $a$ квадрат простого числа $b$;

з) $a$ есть наибольший (в смысле делимости) общий делитель чисел $b$ и $c$;

и) $a$ есть наименьшее общее кратное чисел $b$ и $c$.

**10.** В структуре $\mathbb{N} = (\mathbb{N}; =; +, \cdot\,; 0, 1)$ выразите функцию «целая часть квадратного корня».

**11.** В поле вещественных чисел $\mathcal{R}$ выразите:

а) множество положительных чисел;

б) отношение естественного порядка;

в) каждое рациональное число.

**12.** Опишите множество всех автоморфизмов следующей структуры, указав, если возможно, пример отношения, чья выразимость опровергается автоморфизмом:

а) $(\mathbb{Z}, <)$;

б) $(\mathbb{Z}, =, +)$;

в) $(\mathbb{Q}, =, +)$;

г) $\mathcal{R}$.

**13.** Пусть $S(x, y)$ означает $y = x + 1$ и $S^2(x, y)$ означает $y = x + 2$. Выразимо ли отношение $S^2$ в структуре $(\mathbb{Z}, S)$? А наоборот?

**14.** Докажите, что в структуре $(\mathbb{N}, |)$ невыразим естественный порядок $<$.

**15.** Пусть $P$, $Q$ и $R$ суть реляционные символы подходящей валентности. Приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме:

а) $\exists w\, (\forall x \exists y\, Pxyz \to \neg \forall y \exists w\, Qxyw)$;

б) $(\neg \exists x Rxy \to (\forall y Pyxw \land \exists x Qxyv)) \to (\exists w \forall v\, Rvw \lor Pxyx)$.

**16.** Всегда ли формула следующего вида является общезначимой?

а) $\forall x \varphi \to \exists y \varphi$;

б) $\exists y \forall x \varphi \to \forall x \exists y \varphi$;

в) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$;

г) $(\forall x \varphi \to \forall x \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$;

д) $(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$;

е) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \exists x \psi)$;

ж) $(\forall x \varphi \land \exists x \psi) \to \exists x(\varphi \land \psi)$;

з) $(\forall x \varphi \to \forall x \psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$;

и) $((\exists x Ax \lor \exists x Bx) \to \forall x Cx) \to \forall x((Ax \lor Bx) \to Cx)$;

к) $(\forall x Ax \to (\exists x Bx \land \exists x Cx)) \to \exists x(Ax \to (Bx \land Cx))$;

л) $\forall x \exists y \forall z Pxyz \to \forall z \exists y \forall x Pxyz$;

м) $\forall x \exists y \forall z Pxyz \to \exists y \forall z \exists x Pxyz$.

**17.** Докажите, что если $T \models \varphi \to \psi$, то $T \models \exists x \varphi \to \psi$, если $x \notin FV(\psi)$.

**18.** Докажите, что если $T \models \varphi \to \psi$, то $T \models \exists x \varphi \to \exists x \psi$.

**19.** Используя индуктивное определение отношения $\vdash$, докажите, что формулы следующего вида выводимы в исчислении предикатов:

а) $\exists y \forall x \varphi \to \forall x \exists y \varphi$;

б) $\neg \exists x \varphi \to \forall x \neg \varphi$;

в) $\neg \forall x \varphi \to \exists x \neg \varphi$.

**20.** Докажите, что любой конечный или счетный линейный порядок вкладывается (т. е. $x < y \iff \alpha x <' \alpha y$) в порядок $(\mathbb{Q}, <)$.

**21.** С помощью игры Эренфойхта проверьте следующие структуры на элементарную эквивалентность:

а) $(\mathbb{Z}; =, A)$ и $(\mathbb{Q}; =, A)$, где $Axyz \iff x + y = z$;

б) $(\mathbb{N}; S^1)$ и $(\mathbb{N}; S^2)$;

в) $(\mathbb{R}; <)$ и $(\mathbb{R} + \mathbb{R}; <)$;

г) $(\mathbb{Z}; <)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}; <)$.

**22.** С помощью теоремы о компактности докажите, что любой порядок можно продолжить до линейного.

*Элементарной теорией* $\sigma$-структуры $\mathcal{M}$ называется множество

$$Th(\mathcal{M}) = \{\varphi \in \mathrm{St}_\sigma \mid \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

**23.** Всегда ли теория $Th(\mathcal{M})$ является непротиворечивой? Полной?

**24.** Покажите, что существует счетная нормальная модель $\mathcal{M}$ теории $Th(\mathbb{N})$, т. ч. $\mathcal{M} \equiv \mathbb{N}$, однако $\mathcal{M} \not\cong \mathbb{N}$ (*нестандартная модель арифметики*; $\mathbb{N} = (\mathbb{N}; =, <; +, \cdot; 0, 1)$).

**25.** Покажите, что в нестандартной модели всегда есть «копия» модели $\mathbb{N}$ (значения термов $n = 0 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}$), чьи элементы называются *стандартными*. Что будет, если сложить (перемножить) (не)стандартный и (не)стандартный элементы?

**26.** Покажите, что в смысле порядка $<^{\mathcal{M}}$ любая нестандартная модель устроена как $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$.

Далее все структуры считаются нормальными. Для теорий (или отдельных предложений) $T$ и $S$ будем писать $T \equiv S$, если $T \models S$ и $S \models T$. Теория $T$ *конечно аксиоматизруема*, если для некоторого предложения $\varphi$ имеем $T \equiv \varphi$.

Некоторая совокупность («класс») $\sigma$-структур $\mathcal{K}$ называется *аксиоматизуремой*, если существует $\sigma$-теория $T$, т. ч. $\mathcal{M} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{M} \models T$ для всех $\sigma$-структур $\mathcal{M}$. Класс $\mathcal{K}$ *конечно аксиоматизируем*, если можно выбрать такую $T$ конечно аксиоматизируемой. Например, конечно аксиоматизируем класс строгих частичных порядков, поскольку он задается конъюнкцией аксиом иррефлексивности и транзитивности.

**27.** Пусть теория $T$ конечно аксиоматизируема. Тогда найдется конечная подтеория $T' \subseteq T$, т. ч. $T' \equiv T$. (*Иначе говоря, конечную аксиоматизацию можно выделить из самой теории.*)

**28.** Пусть теории $T$ и $S$ таковы, что $\forall \mathcal{M}\, (\mathcal{M} \models T \iff \mathcal{M} \not\models S)$. Тогда обе конечно аксиоматизируемы.

**29.** Докажите, что класс $\mathcal{K}$ конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда оба класса $\mathcal{K}$ и $\bar{\mathcal{K}}$ (все $\sigma$-структуры вне $\mathcal{K}$) аксиоматизируемы.

**30.** Пусть фиксирована сигнатура теории полей $(=; +, -, \cdot; 0, 1)$. Докажите, что: (а) классы полей и не-полей конечно аксиоматизируемы; (б) класс полей характеристики

$p > 0$ конечно аксиоматизируем; (в) класс полей характеристики 0 аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем; (г) класс полей положительной характеристики не аксиоматизируем.