Листок № 1

1. Докажите, что если $A \subseteq B$ и $B = C$, то $A \subseteq C$.

2. Приведите пример множеств A и B, т. ч.:

а) $A \notin B$ и $A \nsubseteq B$;

б) $A \notin B$ и $A \subseteq B$;

в) $A \in B$ и $A \nsubseteq B$;

г) $A \in B$ и $A \subseteq B$.

3. Докажите, что для любых множеств a, b, c имеем $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} \neq \{a, b, c\}$. Может ли быть включение хотя бы в одну сторону?

4. Представьте в нотации $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ множество:

а) целых корней многочлена $17x^{19} - 62x^{12} + 11x^{11} - 8x^6 + x^3 - 2x + 1229$;

б) таких натуральных чисел, что синус каждого их простого делителя положителен.

5. Докажите, что если A и B пусты, то $A = B$.

6. Докажите, что $\varnothing \subseteq A$ для любого A.

7. В духе парадокса Рассела, приведите к противоречию предположение о существовании множества всех множеств.

8. Выпишите все элементы множества $\mathcal{P}(X)$, если X есть:

а) $\varnothing$;

б) $\{\varnothing\}$;

в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

г) $\{1, 2, 3\}$.

9. Докажите, что $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y) \iff X \subseteq Y$.

10. Пусть X некоторое множество фигур на плоскости. Заштрихуйте $\cup X$.

11. Докажите, что $\cup\varnothing = \varnothing$ и $\cup\{A\} = A$ для всех A.

12. Докажите, что если $X \subseteq Y$, то $\cup X \subseteq \cup Y$. Всегда ли верно обратное?

13. «Вычислите»:

а) $\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$;

б) $\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$;

в) $\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

14. Докажите, что $\cup\mathcal{P}(X) = X$. Что можно сказать о множестве $\mathcal{P}(\cup X)$?

15. Пусть дано множество A. С помощью «основных способов задания множеств» (*не используя никаких мощностей*) определите множество $\mathcal{P}_1(A)$ всех одноэлементных подмножеств A.

16. «Вычислите» $\cup\mathcal{P}_1(A)$.

17. Проверьте несколько тождеств алгебры множеств.

18. Докажите, что для любых множеств $A, B, C \subseteq U$ верно:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

в) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

д) $A \subseteq B \cap C \iff A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

е) $A \subseteq B \cup C \iff A \cap \bar{B} \subseteq C$.