Листок № 6

Литература: well-orders, zermelo_b.

1. Вспомните три эквивалентные определения фундированного множества.

2. Пусть $(A, <)$ есть в. у. м. Является ли в. у. м. лексикографический порядок на множестве:

а) A^n;

б) A^*?

3. Не привлекая аксиомы выбора, докажите, что на любом множестве существует фундированный порядок.

4. Пусть X некоторое множество. Известно, что существует в. у. м. Y, большее или равное X по мощности. Не привлекая аксиомы выбора, докажите, что множество X может быть вполне упорядоченно.

5. Имеется (конечное) слово в алфавите $\{0, 1\}$. Один ход состоит в том, чтобы заменить любое вхождение подслова 01 на слово $10\ldots0$ (с произвольным конечным числом нулей). Докажите, что возможно сделать лишь конечное число ходов.

6. Имеются монеты всевозможных натуральных положительных номиналов в рублях. Купец заключил с чертом сделку: получив в первый день монету в N рублей, он обязался далее каждый день делать по своему произволу ровно одно из двух: либо тратить какую-нибудь монету, либо обменивать любую монету на любое конечное число монет любого меньшего достоинства (например, монету в сто рублей можно разменять на 100^{100} монет по девяносто девять рублей). Требуется показать, что через конечное число дней купец останется без денег и, разумеется, отдаст черту душу.

7. Опишете все в. у. м., где есть ровно два предельных элемента.

8. Докажите, что если в. у. м. A не имеет наибольшего элемента, то $A \cong \mathbb{N} \cdot B$ для некоторого в. у. м. B. Более того, можно положить $B = Lim_A^* = Lim_A \cup \{0_A\}$.

9*. Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{R}$ фундированы в смысле естественного порядка $(\mathbb{R}, <)$. Докажите, что множество $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ также фундировано.

10. Вспомните определения максимального и наибольшего элементов, верхней грани подмножества, а также цепи в ч. у. м. Приведите примеры.

11. Сформулируйте лемму Цорна. Выполнены ли условия леммы в ч. у. м. $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(U) \smallsetminus \{U\}, \subseteq)$ и $(\mathbb{N}, |)$? Для пустого ч.у.м.?

12. Докажите, что лемма Цорна допускает усиление: если выполнены условия леммы, то для каждого элемента ч. у. м. есть больший или равный ему максимальный элемент.

13. Сформулируйте обращение леммы Цорна («если каждый элемент ч. у. м. меньше или равен некоторому максимальному, то…»). Верно ли обращение леммы Цорна?

14. Цепь в ч. у. м. называется *максимальной* (по включению), если не является собственным подмножеством никакой другой цепи. Выведите из леммы Цорна, что в любом ч. у. м. каждая цепь содержится в некоторой максимальной (*принцип максимальности Куратовского— Хаусдорфа*). Выведите лемму Цорна из этого принципа.

15. Используя базис Гамеля в пространстве вещественных чисел над полем рациональных, докажите существование функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличной от умножения на константу, т. ч. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

16. С помощью леммы Цорна докажите, что любое ациклическое отношение включено в некоторый линейный порядок (на том же множестве).

17. Докажите, что в каждом *конечном* графе есть остовное дерево (*предполагается индукция по числу ребер*). Можно ли обобщить ваше доказательство на бесконечные графы, например, с помощью леммы Цорна?

18. Докажите, что для любых двух множеств A и B верно $A \lesssim B$ или $B \lesssim A$.

19. Пусть A бесконечное множество. Докажите, что $A \times \mathbb{N} \sim A$.

20. Пусть A бесконечно и $B \lesssim A$. Докажите, что $A \cup B \sim A$.

21. Пусть A бесконечное множество. Докажите, что A можно разбить на попарно не пересекающиеся части, каждая из которых равномощна A, причем можно иметь таких частей:

а) любое конечное ненулевое количество;

б) счетно много.

22. Пусть A бесконечно. Докажите, что $A \times A \sim A$.

23. Пусть A бесконечно и $B \lesssim A$. Докажите, что $A \times B \sim A$.

24. Пусть A бесконечно и $\underline{2} \lesssim B \lesssim A$. Докажите, что $B^A \sim \mathcal{P}(A)$.

25. Пусть A бесконечное множество. Найдите мощность множества $PO(A)$ всех частичных порядков (строгих или нестрогих) на множестве A.

26. Сколько существует конечных или счетных попарно неизоморфных в. у. м.? (*Прежде уточните вопрос.*)

27. Пусть A бесконечно. Докажите, что $A^{\mathbb{N}} \lesssim \mathcal{P}(A)$. Как обстоит дело для конечных A? Верно ли обратное вложение для $A = \mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и др.?

28. Пусть $\mathcal{P}^0(X) = X$ и $\mathcal{P}^{k+1}(X) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(X))$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Положим[1] $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^k(\mathbb{N})$. Докажите, что:

а) $A^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(A)$;

б) не существует множества B, т. ч. $A \sim B^{\mathbb{N}}$;

в) если $\mathcal{P}^k(\mathbb{N}) \lesssim B$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $A \lesssim B$;

г) не существует множества B, т. ч. A является наименьшим среди больших B по мощности;

д) не существует множества B, т. ч. $A \sim \mathcal{P}(B)$.

[1]Чтобы строго доказать существование множества A, нужно «рекурсивно» определить функцию $k \mapsto \mathcal{P}^k(X)$, а затем взять объединение области ее значений. Трудность с определением этой функции в том, что изначально мы не имеем множества, вмещающего все ее значения. Разрешается трудность применением аксиом подстановки.

29. Вспомните определение прямого произведения индексированного семейства множеств и определение соответствующих функций-проекторов. Вспомните, как связаны прямые произведения с аксиомой выбора.

30. (*Теорема Кёнига*) Пусть имеются два индексированных семейства множеств $\{B_i\}_{i\in I}$ и $\{A_i\}_{i\in I}$, т. ч. $B_i \lnsim A_i$ для всех $i \in I$. Докажите, что $\bigcup_{i\in I} B_i \lnsim \prod_{i\in I} A_i$.

31. Докажите, что если $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, то $B_i \sim \mathbb{R}$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$.

Пусть множество A вполне упорядочено. Разрешим без особых обоснований строить последовательности (функции) *трансфинитной рекурсией* по A: последовательность $(X_a)_{a\in A}$ считается определенной, если для каждого $a \in A$ показано, как определить X_a через X_b для всевозможных $b < a$. (Например, может быть $X_a = \cup_{b<a} X_b$ и т. п.)

32*. Докажите, что множество $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ можно разбить в объединение попарно не пересекающихся прямых.