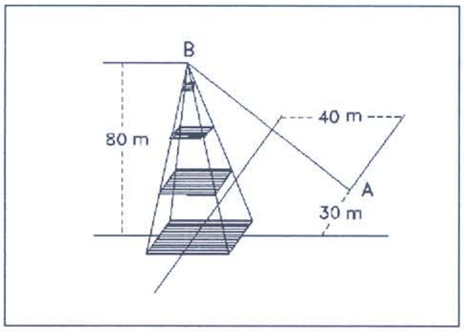
Tema 1 – Transformacions Geomètriques

1) El cable que subjecta una torre de comunicacions està fitxat al punt A. La tensió del cable és de 2500 N. Determineu:

a) Les components de la força $\vec{F}$ que actua sobre A.

b) Els angles $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ que defineixen la direcció de la força.



2) Un avió vola a una velocitat de 250 km/h respecte de l'aire en repòs. Si bufa un vent de 80 km/h en direcció Nord-Est.

a) En quina direcció ha de volar l'avió per tal que el seu rumb sigui Nord?

b) Quant val la velocitat de l'avió respecte a terra?
(Nota: En navegació la direcció del vent ens indica d'on bufa el mateix.)

3) Trobeu les expressions de transformació de coordenades cartesianes a polars, cilíndriques i esfèriques. Com a aplicació, escriviu el punt P, de coordenades cartesianes $(1, 2, -1)$, en coordenades cilíndriques i esfèriques.

4) Escribiu el vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ en funció dels vectors ortonormals $\{\vec{\nu},\ \vec{\tau}\}$, base de les coordenades polars per a $\varphi = \pi/6$ rad.

5) Utilitzeu les matrius de rotació bàsiques per a demostrar que si bé la composició de rotacions no és, en general, commutativa, sí que ho és en el cas de rotacions infinitesimals.

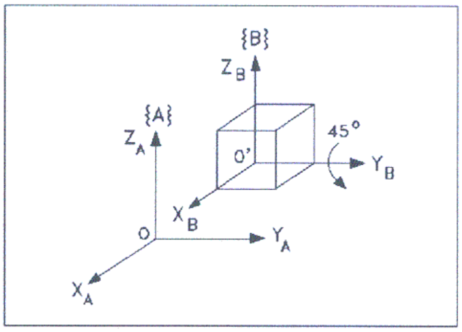
6) Demostreu que el producte escalar de dos vectors és invariant en front de una rotació del sistema de referència.

7) Determineu la matriu homogènia T corresponent a una rotació de valor γ respecte l'eix OX_A, seguida d'una translació de b unitats en la direcció de l'eix OY_B (que ha estat previament girat).

8) Un punt s'escriu com $^DP = (1, -1, -1)$ en un sistema de referència $\{D\}$, que ha

estat obtingut aplicant inicialment al sistema $\{A\}$ una rotació de 30^0 al voltant d'OX, a continuació una rotació de -45^0 respecte OZ i finalment una translació de +2 unitats segons OY. Trobeu ${}^{A}P$.

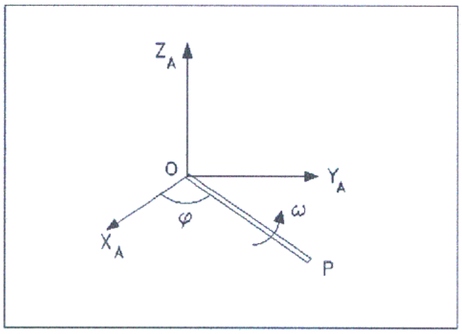
9) A la figura, el cub està unit de forma rígida al sistema mòbil $\{B\}$, amb origen en el punt ${}^{A}O'(1,1,1)$. Trobeu les coordenades, respecte del sistema fix $\{A\}$, dels vèrtex del cub quan girem $\{B\}$ 45^0 al voltant de l'eix Y_B.



10) Donat un punt P de coordenades cartesianes $(1,3,0)$ respecte d'un sistema de referència fix $\{A\}$,

a) Determineu les coordenades esfèriques i cilíndriques del punt P.

b) La vareta OP gira al voltant de l'eix Z_A amb velocitat angular $\omega = 2$ rad/s. Calculeu la matriu de rotació ${}^{A}_{B}R$ associada a un sistema de coordenades $\{B\}$ lligat a l'extrem de la vareta. Suposeu que per t=0 s, X_A i X_B coincideixen en orientació. Trobeu les coordenades del punt ${}^{A}H(1,3,1)$ respecte $\{B\}$ per t=2s.



11) Un observador està sobre un dispositiu que es trasllada a una velocitat constant $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$ m/s, i que gira amb velocitat angular constat $w = 0.25$rad/s entorn de l'eix Z. Escriviu la matriu homogènia de transformació entre el sistema lligat a l'observador mòbil $\{B\}$, a temps t, i el mateix sistema $\{A\}$ quan t=0s.

Si en t=10s l'observador mòbil dóna les coordenades cartesianes d'un punt P com (1,3,4), quines són les coordenades de P respecte el sistema $\{A\}$?.

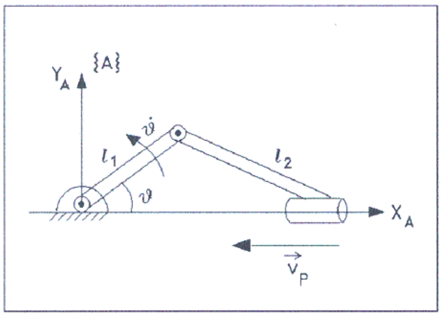
12) La Lluna completa una revolució al voltant de la Terra en 28 dies, essent la distància mitjana entre el centre de la terra i el de la Lluna, $D_{T-L} = 3.8 \times 10^8$m. En el mateix periode, efectua una revolució completa al voltant de si mateixa, respecte d'un eix paral.lel al de la rotació anterior. Si prenem com a eixos fixos un sistema cartesiá lligat al centre de la Terra, trobeu la matriu homogènia de transformació entre el sistema lligat a la Terra i el lligat a la Lluna (suposeu que per t=0s , els sistemes eren paral·lels).

Expliqueu el fenomen que la Lluna presenti sempre la mateixa cara.

13) Un element habitual en molts dispositius mecànics és el sistema biela-maneta representat a la figura.

a) Trobeu una expressió general per a la velocitat del pistó, $\vec{v}_p$, respecte del sistema de referència $\{A\}$, com a funció de $\theta, \dot{\theta}, l_1, l_2$.

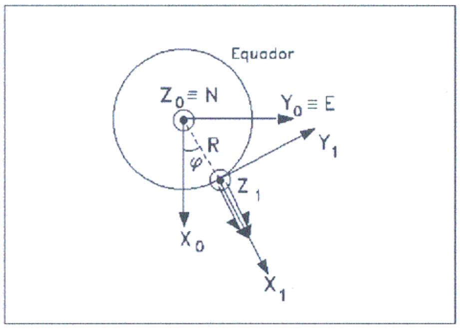
b) Calculeu $\vec{v}_p$ per a $\theta = 20^0, \dot{\theta} = 50$ rad/s, $l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.4$ m.
(Suggeriment: descriviu el moviment des de B i passeu a $\{A\}$ mitjançant una rotació)



14) Es llença un coet des d'un punt de l'Equador a 30^0 de longitud.

a) Trobeu la matriu homogènia de transformació ${}^0_1T$, essent $\{1\}$ el sistema d'eixos situat al punt de llançament i $\{0\}$ un sistema d'eixos situats al centre de la Terra, amb Z_0 assenyalant el Nord i X_0 situat sobre el meridià de Greenwich, (0^0 de longitud). Es suggereix prendre el sistema d'eixos $\{1\}$ com s'indica a la figura, on X_1 és l'eix de la vertical del coet i R el radi de la Terra.

b) Si el coet es desplaça a velocitat constant $|\vec{v}|$ i gira sobre si mateix amb una velocitat angular constant w, trobeu l'expressió general de ${}^{0}_{1}T$ per a un instant de temps t qualsevol, essent $\{1\}$ el sistema d'eixos solidari al coet.



SOLUCIONS

1)

a) $F_x = 795$ N; $F_y = -1060$ N; $F_z = 2120$ N
b) $\theta_x = 71.5^0$; $\theta_y = 115.1^0$; $\theta_z = 32.0^0$

2)

a) 13.08^0 en direcció Nord-Est
b) 187 Km/h

3)

$\rho = \sqrt{5}$; $\phi = 63.4^0$; $z = -1$ $\quad$ $r = \sqrt{6}$; $\phi = 63.4^0$; $\theta = 114.1^0$

4) $\vec{v} = 1.866\vec{\eta} + 1.232\vec{\tau}$

7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma & bc\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma & bs\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8)

$$^{A}P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

9)
$(1,1,1); (1+\sqrt{2}/2, 1, 1-\sqrt{2}/2); (1+\sqrt{2}/2, 2, 1-\sqrt{2}/2); (1,2,1); (1+\sqrt{2}/2, 1, 1+\sqrt{2}/2); (1+\sqrt{2}, 1, 1); (1+\sqrt{2}, 2, 1); (1+\sqrt{2}/2, 2, 1+\sqrt{2}/2)$

10)

a) $\rho = \sqrt{10}; \phi = 71.6^0; z = 0$ $\quad$ $r = \sqrt{10}; \phi = 71.6^0; \theta = 90^0$
b) $^{B}H = (-6.09, -1.20, 1)$

11)

$$\begin{pmatrix} c0.25t & -s0.25t & 0 & 2t \\ s0.25t & c0.25t & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad {}^{A}P(t=10s) = \begin{pmatrix} 17.4 \\ 8.2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

12)

$$\begin{pmatrix} c\omega t & -s\omega t & 0 & D_{T-L}c\omega t \\ s\omega t & c\omega t & 0 & D_{T-L}s\omega t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13)

a)

$$^{A}v_{px} = -\left(1 + \frac{(l_1/l_2)\cos\theta}{\sqrt{1-(l_1/l_2)^2\sin^2\theta}}\right) L_1 \sin\theta\,\dot{\theta}$$

b)

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} -24.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m/s$$

14)

a)

$$\begin{pmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & Rc\phi \\ s\phi & c\phi & 0 & Rs\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} c\phi & -s\phi c\omega t & s\phi s\omega t & (vt+R)c\phi \\ s\phi & c\phi c\omega t & -c\phi s\omega t & (vt+R)s\phi \\ 0 & s\omega t & c\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$