Forma d'una matriu de rotació infinidecimal

Matrius de rotació elementals $R[x, \theta]$, $R[y, \theta]$, $R[z, \theta]$

```
rx3x3[θ_] := {{1, 0, 0}, {0, Cos[θ], -Sin[θ]}, {0, Sin[θ], Cos[θ]}}
ry3x3[θ_] := {{Cos[θ], 0, Sin[θ]}, {0, 1, 0}, {-Sin[θ], 0, Cos[θ]}}
rz3x3[θ_] := {{Cos[θ], -Sin[θ], 0}, {Sin[θ], Cos[θ], 0}, {0, 0, 1}}
```

Parametrització en termes dels angles D' Euler :

In[5]:=

```
{rx3x3[θx] // MatrixForm, ry3x3[θy] // MatrixForm, rz3x3[θz] // MatrixForm}
```

Out[5]=

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[\theta_x] & -\sin[\theta_x] \\ 0 & \sin[\theta_x] & \cos[\theta_x] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos[\theta_y] & 0 & \sin[\theta_y] \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin[\theta_y] & 0 & \cos[\theta_y] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos[\theta_z] & -\sin[\theta_z] & 0 \\ \sin[\theta_z] & \cos[\theta_z] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$R[x, \theta_x] . R[y, \theta_y] . R[z, \theta_z]$:

In[6]:=

```
rx3x3[θx].ry3x3[θy].rz3x3[θz] // MatrixForm
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_y]\cos[\theta_z] & -\cos[\theta_y]\sin[\theta_z] & \sin[\theta_y] \\ \cos[\theta_z]\sin[\theta_x]\sin[\theta_y] + \cos[\theta_x]\sin[\theta_z] & \cos[\theta_x]\cos[\theta_z] - \sin[\theta_x]\sin[\theta_y]\sin[\theta_z] & -\cos[\theta_y]\sin[\theta_x] \\ -\cos[\theta_x]\cos[\theta_z]\sin[\theta_y] + \sin[\theta_x]\sin[\theta_z] & \cos[\theta_z]\sin[\theta_x] + \cos[\theta_x]\sin[\theta_y]\sin[\theta_z] & \cos[\theta_x]\cos[\theta_y] \end{pmatrix}$$

Fem aquesta rotació general en el cas que TOTS tres angles d'Euler siguin molt petits ($\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\} \ll 1$)

Quan un angle és molt petit, $\alpha \ll 1$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha) &\sim \alpha + O[\alpha]^2 \\ \cos(\alpha) &\sim 1 + O[\alpha]^2 \end{aligned}\right\}$$ per a ser precisos :

In[9]:=

```
Series[Sin[α], {α, 0, 9}]
```

Out[9]=

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^9}{362880} + O[\alpha]^{10}$$

La matriu : $R[x, \theta_x] \cdot R[y, \theta_y] \cdot R[z, \theta_z]$ pren la forma, per angles petits ⇝ infinitesimal

In[21]:=

```
(rx3x3[θx].ry3x3[θy].rz3x3[θz] /.
    {Sin[θx] → θx, Cos[θx] → 1} /. {Sin[θy] → θy, Cos[θy] → 1} /. {Sin[θz] → θz, Cos[θz] → 1}) //
  MatrixForm
```

Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_x\theta_y + \theta_z & 1 - \theta_x\theta_y\theta_z & -\theta_x \\ -\theta_y + \theta_x\theta_z & \theta_x + \theta_y\theta_z & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_z \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Pregunta: la matriu infinitesimal compleix les propietats de les matrius de rotació?

→ Det = 1 ? ⇝ $\text{Det}_{mi} = 1 + \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2$ ⇝ si θ_i són molt petits ⇝ $\simeq 1$ ✔

→ Columna 1 x columna 1 = 1 ? $1 + \theta_y^2 + \theta_z^2$ ⇝ si θ_i són molt petits ⇝ $\simeq 1$ ✔

Resultats importants (amb $\theta \ll 1$)

1) La rotació infinitesimal es pot escriure com :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_z \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

2) Expressió trobada per una matriu infinitesimal, a partir de

$$\texttt{rz3x3}[\theta_z].\texttt{ry3x3}[\theta_y].\texttt{rx3x3}[\theta_x] \to \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

, és a dir, la rotació infinitesimal $R[z, \theta_z]\, R[y, \theta_y]\, R[x, \theta_x]$ pot escriure's com ⇝

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_z \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

3) L'expressió $\begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_z \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}$ constitueix una forma "universal" de les matrius de rotació

4) Resultat final ⇝ com es composen? $R_{inf} \cdot R'_{inf} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta1_z & \theta1_y \\ \theta1_z & 1 & -\theta1_x \\ -\theta1_y & \theta1_x & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -\theta2_z & \theta2_y \\ \theta2_z & 1 & -\theta2_x \\ -\theta2_y & \theta2_x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta2_z & \theta2_y \\ \theta2_z & 1 & -\theta2_x \\ -\theta2_y & \theta2_x & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -\theta1_z & \theta1_y \\ \theta1_z & 1 & -\theta1_x \\ -\theta1_y & \theta1_x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -(\theta1_z + \theta2_z) & (\theta1_y + \theta2_y) \\ (\theta1_z + \theta2_z) & 1 & -(\theta1_x + \theta2_x) \\ -(\theta1_y + \theta2_y) & (\theta1_x + \theta2_x) & 1 \end{pmatrix}$$

El resultat final és que $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$

En composar matrius de rotació infinetesimals, es manté l'estructura original:

$$R[\theta_x, \theta_y, \theta_z] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

(És antisimètrica: $r_{ij} = -r_{ij}$ si $i \neq j$)

sense més que substituir
$\theta_x \rightarrow \theta_{1x} + \theta_{2x}$
$\theta_y \rightarrow \theta_{1y} + \theta_{2y}$
$\theta_z \rightarrow \theta_{1z} + \theta_{2z}$
si hem composat $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$, etc...

Per exemple, $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ (tal que $i = \{1,2,3\}$ i R_i és inf.), el resultat és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -(\theta1_z + \theta2_z + \theta3_z) & (\theta1_y + \theta2_y + \theta3_y) \\ (\theta1_z + \theta2_z + \theta3_z) & 1 & -(\theta1_x + \theta2_x + \theta3_x) \\ -(\theta1_y + \theta2_y + \theta3_y) & (\theta1_x + \theta2_x + \theta3_x) & 1 \end{pmatrix} + O[\theta]^2$$

Translació + Rotació

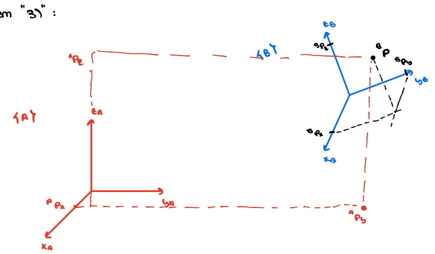
Objectius

- 1) Hem d'incorporar poder tractar sistemes amb orígens situats arbitràriament
- 2) ${}^A_BR \equiv$ descripció exhaustiva de la situació de {B} (vist i descrit des d'{A})
- 3) Proporcionar a {A} la transformació de les coordenades d'un punt $P \rightsquigarrow {}^AP = {}^A_BR \cdot {}^BP$

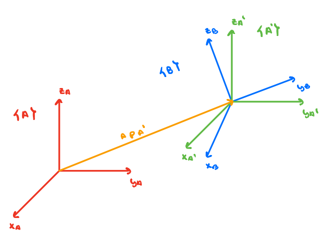
general

${}^A_BR$ rol doble

Examinem "3)":



Seria fantàstic que passés això: ${}^AP = {}^A_BT \cdot {}^BP \rightsquigarrow$ NO ES POT



$P = \{{}^AP ; {}^{A'}P ; {}^BP\}$

1) ${}^{A'}P = ({}^{A'}_BR)\,{}^BP$
matriu de rotació

2) ${}^AP = {}^{A'}P + {}^AP_{A'}$
- ${}^AP_x = {}^{A'}P_x + {}^AP_{A'x}$
- ${}^AP_y = {}^{A'}P_y + {}^AP_{A'y}$
- ${}^AP_z = {}^{A'}P_z + {}^AP_{A'z}$

1 i 2 $\rightsquigarrow$

$= R_{11}\,{}^BR_x + R_{12}\,{}^BR_y + R_{13}\,{}^BP_z$

${}^AP_x = {}^{A'}P_x + {}^AP_{A'x} = R_{11}\,{}^BR_x + R_{12}\,{}^BR_y + R_{13}\,{}^BP_z + {}^AP_{A'x}$

$= R_{21}\,{}^BR_x + R_{22}\,{}^BR_y + R_{23}\,{}^BP_z$

${}^AP_x = {}^{A'}P_y + {}^AP_{A'} = R_{21}\,{}^BR_x + R_{22}\,{}^BR_y + R_{23}\,{}^BP_z + {}^AP_{A'y}$

$= R_{31}\,{}^BR_x + R_{32}\,{}^BR_y + R_{33}\,{}^BP_z$

${}^AP_x = {}^{A'}P_z + {}^AP_{A'} = R_{31}\,{}^BR_x + R_{32}\,{}^BR_y + R_{33}\,{}^BP_z + {}^AP_{A'z}$

Nota: passarem a treballar amb 4 coordenades

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llavors:

$${}^AP = [\underbrace{{}^A_BT}_{4x4}]\,{}^BP$$

matriu de translació generalitzada

$${}^A_BT = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR \equiv {}^{A'}_BR & & {}^AP_{A'x} \\ & & & {}^AP_{A'y} \\ & & & {}^AP_{A'z} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$