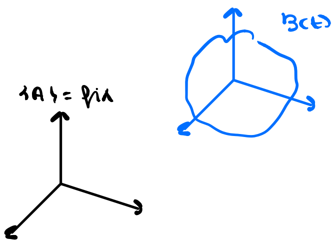
Propietats de matrius de rotació i problemes

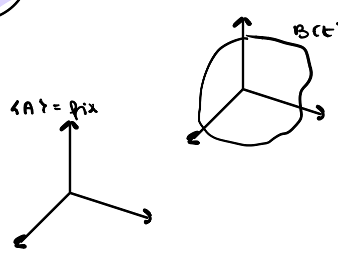
1 $\;{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ = descriu la situació del sistema B respecte A

↳ e.g. $\{B(t)\} = \{A\}$



(Provisionalment, prescindim del fet que $\ominus\{A\} \neq \ominus\{B\}$)

2 Si considerem un punt qualsevol genèric $P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$



• P

→ És clar que el valor p_x, p_y, p_z depèn de si el descrivim des de {A} o des de {B}

→ El descriurem simultàniament des de tots 2 (A i B)

$$P \begin{cases} {}^{A}P = ({}^{A}p_x, {}^{A}p_y, {}^{A}p_z) \\ {}^{B}P = ({}^{B}p_x, {}^{B}p_y, {}^{B}p_z) \end{cases}$$

→ Simplificació essencial: la relació de ${}^{A}P \leftrightarrow {}^{B}P$ és simplement

$${}^{A}P : {}^{A}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad {}^{B}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} : {}^{B}P$$

$${}^{A}P = ({}^{A}_{B}R)\ {}^{B}P$$

Existeix sempre una matriu 3x3 que relaciona les components ${}^{A}P$ i ${}^{B}P$

matriu de rotació

$$\underbrace{{}^{A}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}}_{{}^{A}P} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{{}^{A}_{B}R} \underbrace{{}^{B}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}}_{{}^{B}P}$$

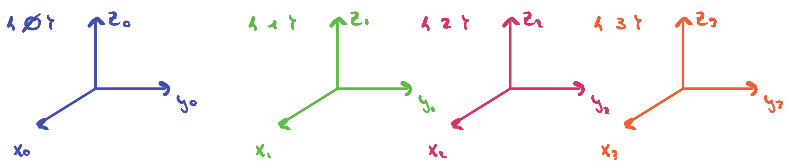
Comentari: això és cert per a tot sistema {A}

" " " " {B}

" " " punt P de l'espai 3D

Exercici teòric:

$\{A\} \equiv \{0\} \overset{{}^0_1R}{\rightsquigarrow} \{1\} \overset{{}^1_2R}{\rightsquigarrow} \{2\} \overset{{}^2_3R}{\rightsquigarrow} \{3\} \equiv \{B\}$



De la propietat 1, hem de ser conscients que...

Important: rotació es fa sobre els eixos des d'on l'estem mirant.

↗ eixos de rotació

${}^0_1R \rightsquigarrow \{\varnothing\}$

${}^1_2R \rightsquigarrow \{1\}$

${}^2_3R \rightsquigarrow \{2\}$

De la propietat 2

P = punt genèric a l'espai

$P \begin{cases} {}^0P \\ {}^1P \\ {}^2P \\ {}^3P \end{cases} \rightsquigarrow$ cada conjunt es diferent, on ${}^0P = {}^0_1R\,{}^1P$

" ${}^1P = {}^1_2R\,{}^2P$

" ${}^2P = {}^2_3R\,{}^3P$

${}^X_YR = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

from, to

1° eix de {Y} expressat en {X}

1° eix de {X} descrit en {Y}

2° " " " " " "

3° " " " " " "

Per exemple: ${}^YP = {}^Y_XR\,{}^XP$

$\hookrightarrow = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

Immediatament, podem utilitzar (quan ens interessi): $\begin{cases} {}^0P = {}^0_1R \cdot {}^1P \\ {}^1P = {}^1_2R\ {}^2P \\ {}^2P = {}^2_3R\ {}^3P \end{cases}$

fins i tot

$\hookrightarrow {}^3P = {}^3_1R\ {}^1P$

e.g. $\rightsquigarrow {}^0P = {}^0_1R \cdot {}^1_2R \cdot {}^2_3R \cdot {}^3P$

Quan combinem diverses rotacions podem obtenir la matriu ${}^A_BR$ directament del producte matemàtic de multiplicacions elementals, on:

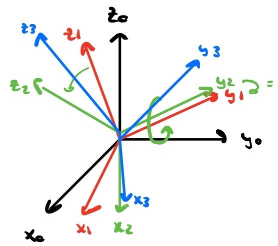
$\{A\} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \{B\}$

$${}^0_NR = \prod \left({}^{n-1}_{n}R \cdot P^n \right)$$

Llei de composició $\rightsquigarrow$ És la clau que ens permet fer el càlcul més complicat que puguem necessitar amb només ROTACIONS ELEMENTALS ($R(x,\theta)$, $R(y,\theta)$, $R(z,\theta)$)

Idea: si considerem

$$\{A\} \equiv \{0\} \xrightarrow{R(z,\theta_z)} \{1\} \xrightarrow{R(y,\theta_y)} \{2\} \xrightarrow{R(x,\theta_x)} \{3\} \equiv \{B\}$$

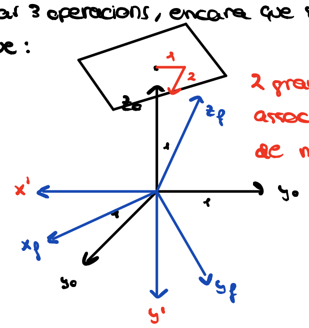


Pregunta (Euler)
→ amb aquestes 3 simples operacions de rotació elementals que fan $\{0\} \to \{3\}$ hem generat la matriu de rotació més general possible?

yass

⇝ ${}^0_3R$

El motiu de necessitar 3 operacions, encara que siguin independents, és que:



2 graus de llibertat (1 i 2) associats a les possibilitats de modificar z_0

+ un 3r grau de rotació final associat a f

Premonició d'Euler:

$$R[x,\theta] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

$$R[y,\theta] = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & 0 & \mathrm{Sin}[\theta] \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{Sin}[\theta] & 0 & \mathrm{Cos}[\theta] \end{pmatrix}$$

$$R[z,\theta] = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\theta] & -\mathrm{Sin}[\theta] & 0 \\ -\mathrm{Sin}[\theta] & \mathrm{Cos}[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La composició de 3 rotacions elementals permet descriure de forma senzilla la matriu de rotació més general possible

$$R_{\text{general}} = R(z,\theta_z)\, R(y,\theta_y)\, R(x,\theta_x)$$

- També és possible:

$$R_{\text{general}} = \underbrace{R(z,\theta_z)}_{{}^0_1R}\ \underbrace{R(y,\theta_y)}_{{}^1_2R}\ \underbrace{R(z,\theta_z)}_{{}^2_3R}$$

qualsevol eix sempre i quan no estiguin seguides

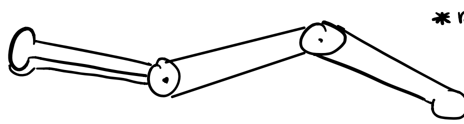
e.g.

$\cancel{R(y,\theta_y) R(x,\theta_x) R(x,\theta_x)}$

Important: el fet essencial que permet treballar amb matrius elementals és l'ús de sistemes de referència locals

⇓

matrius ${}^{i-1}_{i}R$ que utilitzen els eixos i-1 diferents de $\{0\}$ i que aconseguim que siguin elementals.



*Brutal la representación gráfica