FIB. Enginyeria d'Informàtica. MDIO-1. Examen final. Curs 2003/04. 1^{er} Q

P1 Una empresa està especialitzada en la fabricació de tres tipus de productes, diem-ne A, B, C. Per la seva fabricació es necessiten dos tipus de recursos, diem-ne $R1, R2$. Les quantitats de recursos consumides per cada unitat de producte (matriu de tecnologia) ve donada en la següent taula:

	A	B	C
$R1$	2	5	3
$R2$	1	2	3

Un estudi de mercat es mostra favorable a la fabricació i venda d'aquests tres productes en tres països, diem-ne $P1, P2, P3$ on els preus de venda expressats en \$ poden variar. L'estudi mostra que les quantitats màximes de cada producte que cada país pot arribar a absorbir i els preus de venda de cada producte venen donats per les següents taules:

Preus unitaris de venda en \$			
	A	B	C
$P1$	20	22	31
$P2$	20	19	32
$P3$	20	21	33

N^o màxim de vendes			
	A	B	C
$P1$	20530	25080	42700
$P2$	30200	27000	45900
$P3$	11000	31000	32500

La gerència de l'empresa vol saber si val la pena invertir un capital de 7.500.000 \$ en la compra de recursos $R1, R2$ per tal de poder captar el mercat que ofereixen aquests tres païssos pels seus productes.

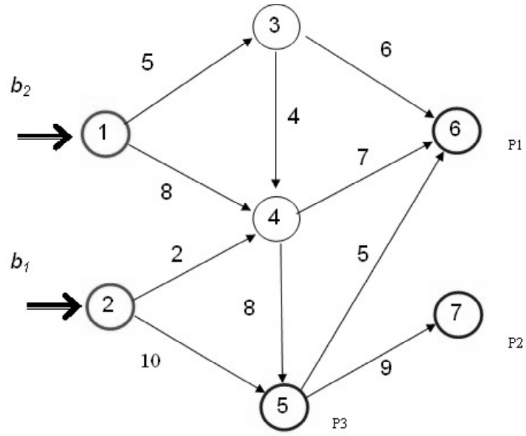
Els recursos han de venir per carretera i són comprats a dos subministradors diferents. El primer subministrador, situat al nus 1 de la xarxa de transport que es mostra a la figura següent, proporciona recursos de tipus $R1$ i els ven a un preu de 15 \$ unitat, mentre que el segón subministrador proporciona el recurs $R2$, els ven a 4 \$ unitat i està situat al nus 2. En la fabricació dels tres tipus de productes intervindrien únicament els recursos comprats als subministradors.

Els costs unitaris de transport venen indicats sobre els arcs del graf mostrat i són els mateixos per tots dos tipus de recursos. Els països $P1, P2, P3$ apareixen al graf de la figura ubicats als nusos 6, 7, 5 respectivement. Es demana:

Siguin x_1, y_1, z_1 les quantitats dels productes A, B, C que es vendràn en el païs 1, x_2, y_2, z_2 les quantitats que es vendràn en el païs 2 etc.,

Siguin b_1 i b_2 les quantitats de recurs $R1$ i $R2$ respectivement que han de comprar-se. Siguin r_{ij} les quantitats del recurs i que han de arribar travesant la xarxa de transport al païs j i finalment u^i_{pq} les quantitats del recurs i que són transportades pel arc (p, q) de la xarxa.

Amb les anteriors variables escriure un problema de programació lineal que determini les quantitats x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, 3$ de productes que es vendràn i les quantitats de recursos b_1, b_2 necessaris per empendre el negoci de forma que s'obtingui el màxim benefici possible, comptabilitzant com benefici= Ingresos per vendes als països - compra de recursos - costs de transport.



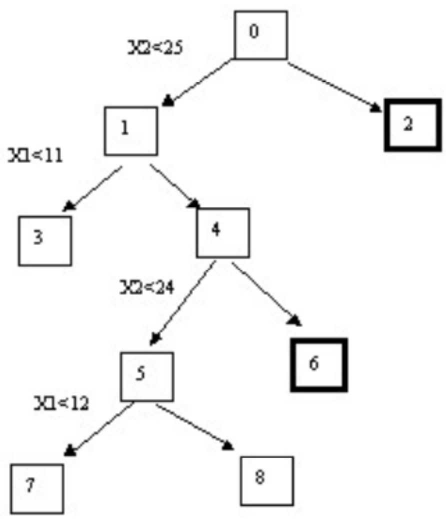
P2 Resoldre el problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{lrrcl}
Min & -5x_1 & +2x_5 & & \\
 & & & & \\
R1 & -2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\
R2 & 3x_1 & -2x_2 & \leq & 3 \\
R3 & x_1 & & \leq & 3 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

P3 Pel problema de programació entera següent es proporciona de forma esquemàtica el seu arbre d'exploració:

$$
\begin{array}{lrl}
Min & -1000x_1 - 700x_2 & \\
s.a & 100x_1 + 50x_2 & \leq 2425 \\
 & 20x_2 & \leq 510 \\
 & Z \ni x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{100} & \frac{-1}{40} & 11 + \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{20} & 25 + \frac{1}{2} \\
\hline
0 & 0 & 10 & 10 & 29350
\end{array}
$$

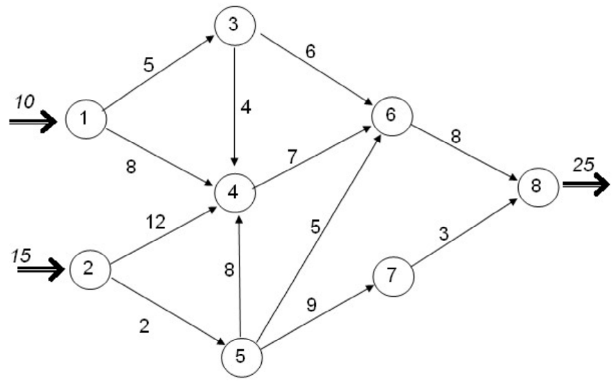


Els valors de la funció objectiu i de les components x_1^*, x_2^* de les relaxacions lineals corresponents a cada un dels nusos són:

Nus	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f. obj	-29350	-29250	∞	-28500	-29150	-29050	∞	-28800	-28750
x_1^*	$11 + \frac{1}{2}$	?	$--$	11	?	$12 + \frac{1}{4}$	$--$	12	13
x_2^*	$25 + \frac{1}{2}$	?	$--$	25	?	24	$--$	24	$22 + \frac{1}{2}$

1. Quina és la solució del problema ? Raoneu la resposta.
2. Indiqueu per cada nus quin és el valor de la incumbent amb la que ha treballat l'algorisme
3. Obteniu les solucions corresponents als nusos 1 i 4 usant l'algorisme del símplex dual.

P4 La xarxa de transports dels productes d'una empresa ve il.lustrada pel següent graf on els costs unitaris de transport venen donats sobre la mateixa figura:



Es demana:

1. Partint de la base factible formada pels arcs $(1,3)$, $(3,4)$, $(4,6)$, $(6,8)$, $(2,5)$, $(5,6)$, $(7,8)$, determineu el cost mínim de transport de les 25 unitats que es transporten des dels nusos 1 i 2 fins al 8.

2. Es vol afegir un nou arc que uneixi directament els nusos 1 a 7, quin hauria de ser els màxim cost unitari de transport que hauria de tenir aquest nou arc $(1,7)$ per tal de que sigui utilitzat ?

3. Finalment es decideix un cost de transport pel arc $(1,7)$ de 15. Quina serà en aquesta situació la nova distribució de fluxes sobre la xarxa ?

P1 Solució:
Numeració dels arcs:

Arc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,4)$	$(4,5)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(5,7)$

B matriu d'incidències nusos arcs; c vector de costs de transport:

$$B = \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & \\ -1 & & & & 1 & & 1 & & & \\ & -1 & -1 & & -1 & 1 & & & etc. & \\ & & & -1 & & -1 & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \right), \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

u^1 fluxes sobre el graf de transport pel recurs 1. u^2 fluxes sobre el graf de transport pel recurs 2.
p^1, p^2 injeccions/extraccions sobre els nusos pels recursos 1, 2 respectivament.

$$u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \\ u_8^1 \\ u_9^1 \\ u_{10}^1 \end{pmatrix}, \quad u^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \\ u_7^2 \\ u_8^2 \\ u_9^2 \\ u_{10}^2 \end{pmatrix}, \quad p^1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{15} \\ -r_{16} \\ -r_{17} \end{pmatrix}, \quad p^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{25} \\ -r_{26} \\ -r_{27} \end{pmatrix}$$

Producció al països $j = 5, 6, 7$ (s'adopta aquí la numeració del nusos pels països). A = matriu de tecnologia; t^j = vector de producció al país j. r_j vector de recursos. v^j = preus de venda dels productes al país. $\bar{t}^j$ = quantitats màximes dels productes i al país j.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad t^j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}, \quad r_j = \begin{pmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \end{pmatrix}, \quad v^j = \begin{pmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ v_3^j \end{pmatrix}, \quad \bar{t}^j = \begin{pmatrix} \bar{x}_j \\ \bar{y}_j \\ \bar{z}_j \end{pmatrix}$$

Limitacions del presupost per compra de recursos: $d^\top b = d_1 b_1 + d_2 b_2 \leq 7.5 \cdot 10^6\$$
(s'admet també $c^\top(u^1 + u^2) + d^\top b \leq 7.5 \cdot 10^6\$$, incloent-hi també els costs de transports)
Model:

$$\begin{array}{lll} Max & v^{1\top} t^1 + v^{1\top} t^2 + v^{1\top} t^3 & -c^\top(u^1 + u^2) - d^\top b \\ s.a: & At^1 \leq r_1 & \\ & At^2 \leq r_2 & \\ & At^3 \leq r_3, & t^j \geq 0,\ t^j \leq \bar{t}^j,\ r_j \geq 0,\ j = 5, 6, 7 \\ & Bu^1 = p^1, & \\ & Bu^2 = p^2, & u^i \geq 0, b_i \geq 0,\ i = 1, 2 \\ & d^\top b \leq 7.5 \cdot 10^6\$ & \end{array}$$

P2 Solució:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{1}$$

Entra x_1. $Min\,\{\,3/3,\, 3/1\,\} \;=\; 1$ Surt x_4.

$$\begin{array}{lrlrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 0 & -1/3 & 1 & 2/3 & 0 & 4 \\ 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -4/3 & 0 & 5/3 & 0 & 5 \end{array} \tag{2}$$

Entra x_3. $Min\left\{\,\frac{2}{2/3}\,\right\} \;=\; 3$. Surt x_5.

$$\begin{array}{lllrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array} \tag{3}$$

Costs reduïts nonegatius: solució óptima (única ja que són tots positius).

P3 Solució:

1) Clarament, els nusos 2 i 6 apareixen marcats per infactibles, l'incumbent ha d'actualitzar-se als nusos 3 i 7 on apareix una solució entera. La millor solució entera apareix al nus 7 amb f.obj = -28800, mentre que al nus 8 amb solució fraccionaria, apareix un valor de la f.obj de -28750 que ja és superior al de la incumbent. Per tant el nus 8 haurà de marcar-se per no ser posteriorment explorat i queda tancat l'arbre. La solució és doncs la que apareix al nus 7.

2) Valor de la incumbent:

Nusos 1, 2,3 ∞, nusos 4,5,6,7: -28500. Al acabar l'exploració del nus 7: -28800. Nus 8: -28800.

3) Nus 1: $x_2 \leq 25$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{100} & \frac{-1}{40} & 0 & \frac{23}{2} \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{20} & 0 & \frac{51}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & 1 & \frac{-1}{2} \\
\hline
0 & 0 & 10 & 10 & 0 & 29350
\end{array} \tag{4}$$

Surt x_5, entra x_4.

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{100} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{47}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -20 & 10 \\
\hline
0 & 0 & 10 & 0 & 200 & 29250
\end{array} \tag{5}$$

Solució òptima.

Nus 4: $x_1 \geq 12$

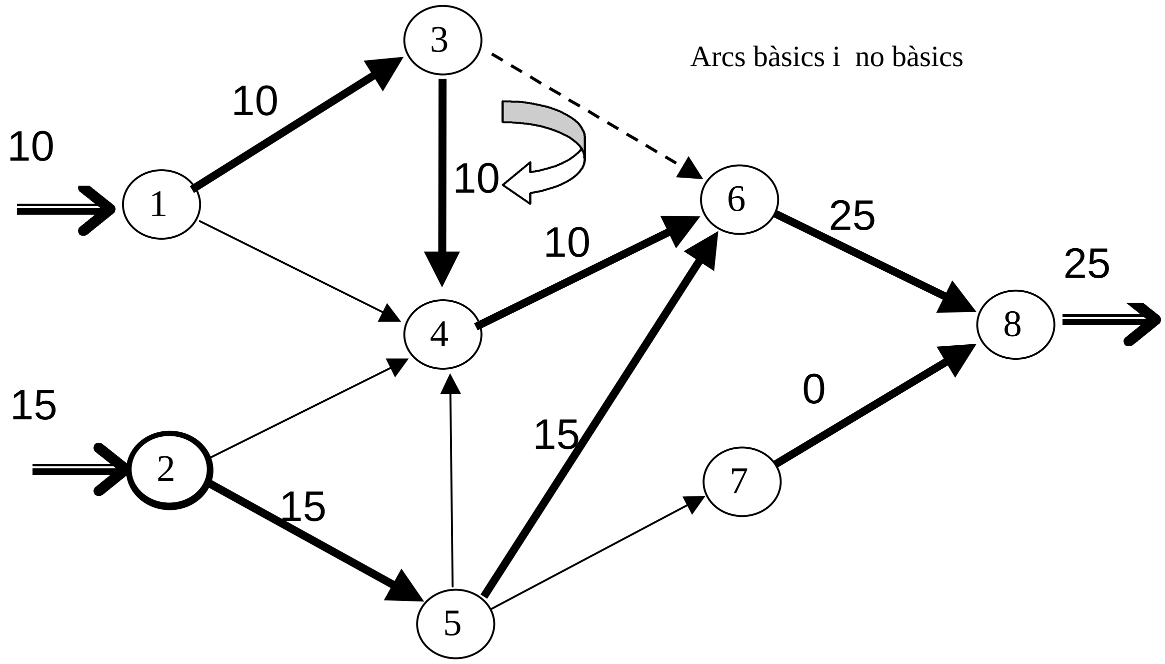
$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{100} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{47}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -20 & 0 & 10 \\
0 & 0 & \frac{1}{100} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{4} \\
\hline
0 & 0 & 10 & 0 & 200 & 0 & 29250
\end{array} \tag{6}$$

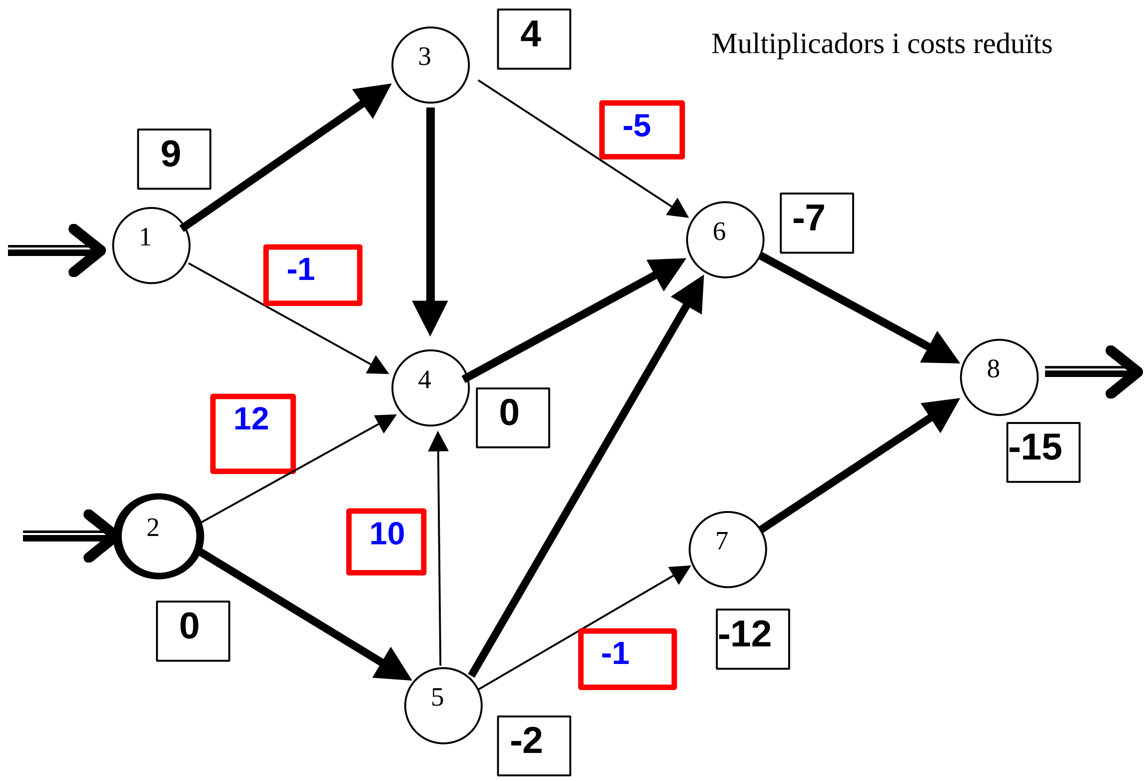
Surt x_6, entra x_5.

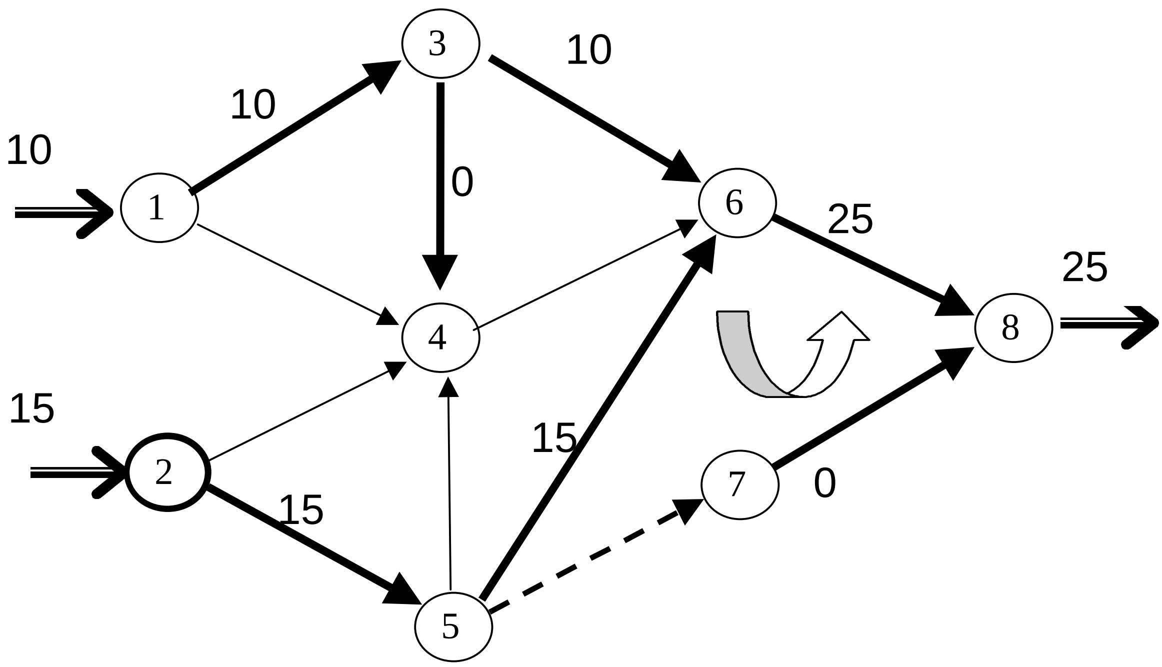
$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 \\
0 & 1 & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 2 & \frac{49}{2} \\
0 & 0 & \frac{-2}{5} & 1 & 0 & -40 & 20 \\
0 & 0 & \frac{-1}{50} & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\
\hline
0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 400 & 29150
\end{array} \tag{7}$$

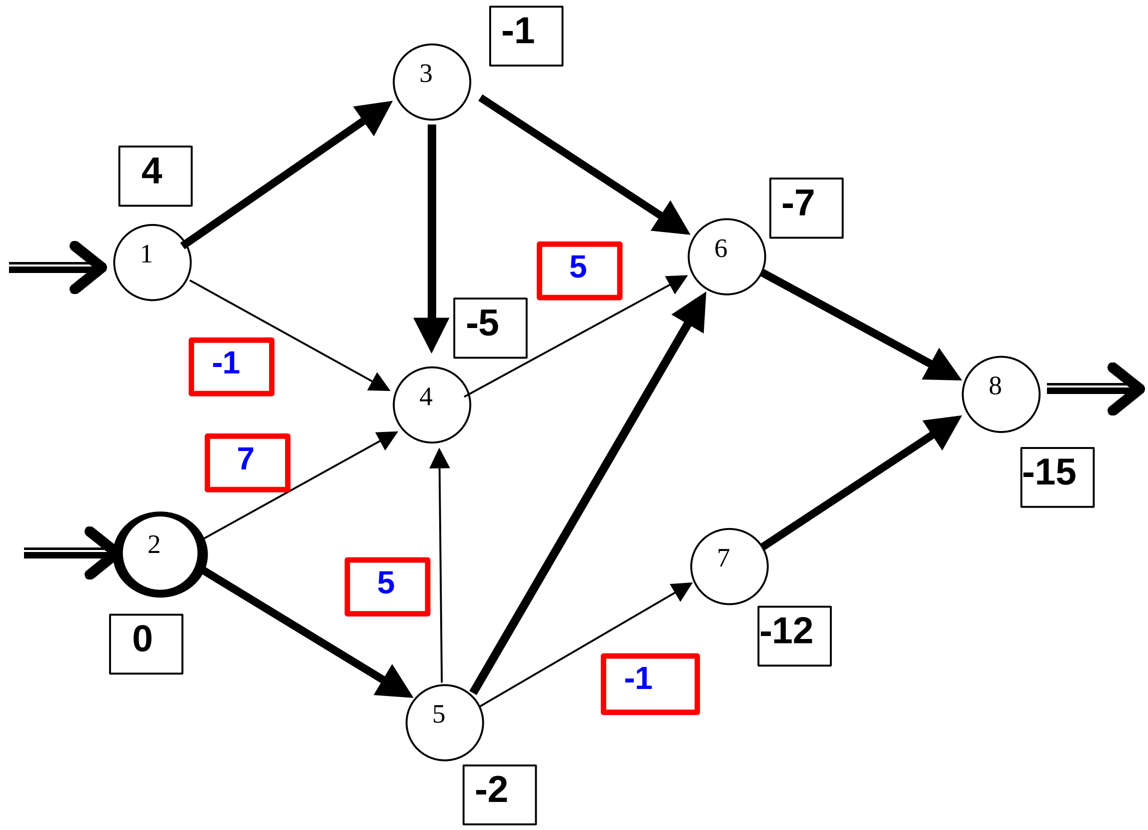
Solució òptima.

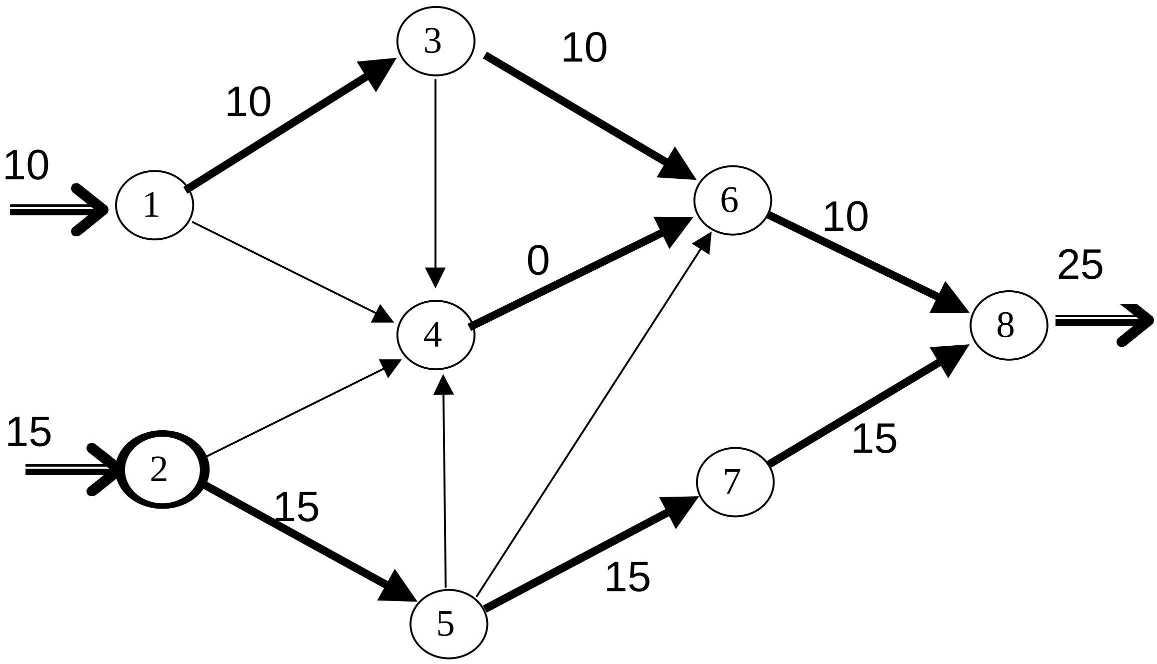
Problema 4. Solució

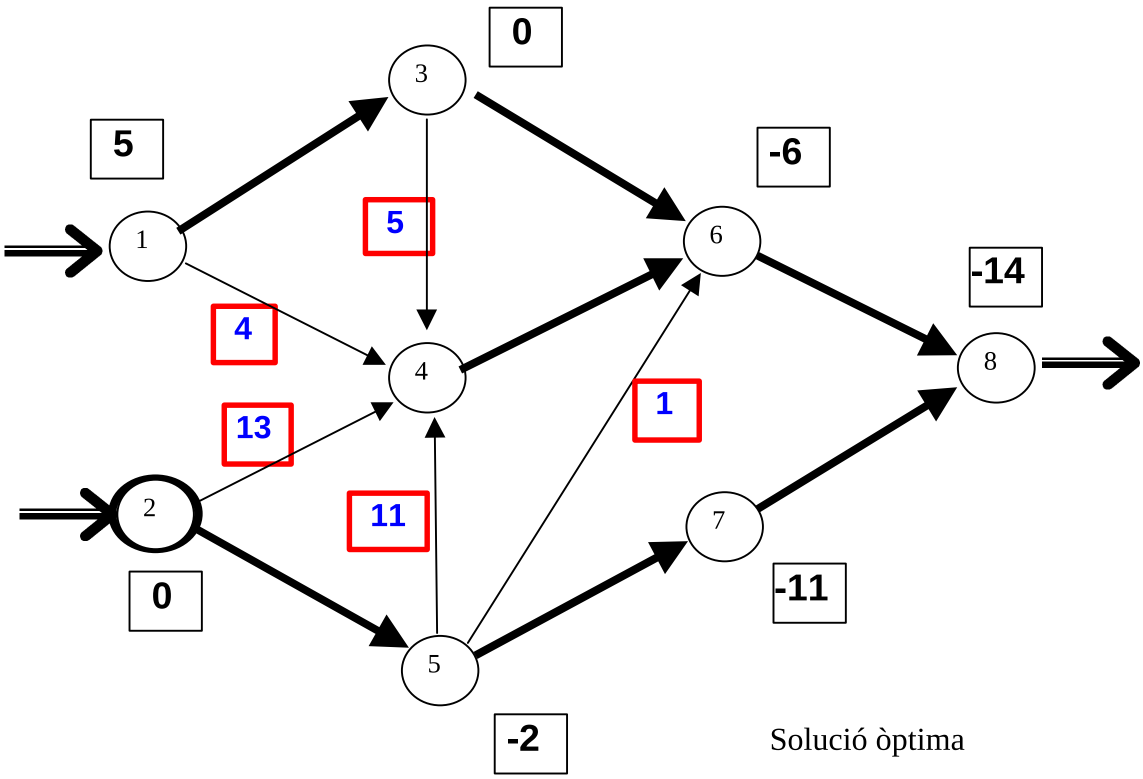





10
10
10
0
25
25
15
15
15
0
1
2
3
4
5
6
7
8


-1
4
-7
5
-5
-1
7
-15
5
0
-12
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
8





Solució òptima

2) A partir de les variables duals en la solució òptima el cost màxim que pot tenir el nou arc (1, 7) és de 16.
3) Si el cost de l'arc és de 15, llavors entrarà a la base el nou arc. La solució bàsica òptima obtinguda serà degenerada: $x_{14} = x_{54} = x_{68} = x_{36} = x_{15} = x_{56} = x_{46} = x_{24} = x_{14} = 0$, $x_{17} = 10$, $x_{25} = 15$, $x_{57} = 15$, $x_{78} = 25$.