Grau d'Enginyeria Informàtica. Curs 2018-19. Examen Final.

P1. [**4p**] Es vol programar la producció d'una determinada substància durant un horitzó de temps de 5 setmanes. Es parteix d'un stock al principi d'aquest periode de 5 setmanes de 20 unitats de volum d'aquesta substància. La demanda que s'ha de satisfer durant cadascuna de les setmanes del periode ve donada per la taula adjunta. Els recursos de producció standards permeten una producció de, com molt, 95 unitats de volum per setmana a un cost standard de 1 unitat monetària (u.m.) per unitat de volum . Si es vol incrementar la capacitat de producció, llavors ha de fer-se en condicions extraordinàries augmentant els recursos de forma que cada unitat de volum extra té un cost en u.m. també donades en la taula adjunta. La substància produïda es pot guardar d'una setmana per ser servides en les següents, però els costs de stock són de 0.5 u.m. per unitat de volum. Utilitzeu les següents variables:

- X_i = quantitat produïda en condicions ordinàries durant la setmana i.
- Y_i = quantitat produïda en condicions extraordinàries durant la setmana i.
- I_i = Existències en inventari de la substància al principi de la setmana i

Paràmetres:

- D_i = quantitat a servir al final de la setmana i
- Ci = cost de produïr una unitat de volum durant la setmana i en condicions extraordinàries.

	1	2	3	4	5
D_i	115	130	115	140	150
C_i	1.3	1.7	1.6	1.1	15

La quantitat de substància que quedi desprès del periode de 5 setmanes (I_6) ha de ser eliminada a un cost de 20 u.m. per unitat de volum. Formuleu un problema de programació lineal que minimitzi el cost total de la producció necessària més els costs de stock per satisfer les demandes Di expresades en la taula anterior. Per calcular els costs de stock en el mes i, considereu que el nivell d'inventari ve donat per $(I_i + I_{i+1})/2$.

P2) [**6p**] Una companyia te dos centres de producció d'energia mitjançant els que abasteix tres ciutats. La capacitat màxima de producció de les plantes és de 200 MW, mentre que les demandes a cada ciutat són només de 100 MW cadascuna. Les línies de transmisió entre centres de producció i les ciutats presenten les següents pèrdues econòmiques per MW:

	1	2	3
1	1	1	X
2	2	2	2

1. [2p] Formuleu el problema com un de fluxos sobre xarxes on el nus 0 absorbeix l'excès de producció; (i,j) = arc del centre de producció i al centre de consum j.
2. [4p] Partint de la base {(1,1), (1,0), (2,1), (2,2), (2,3)} determineu emprant l'algoritme del simplex la distribució òptima entre els centre de producció i consum.

P3 [**4p**] Per "botar" un sistema operatiu és necessari executar n aplicacions. El temps de càrrega de l'aplicació i en memòria, T_{ji}^{+}, depen de l'anterior aplicació j que s'hagi executat, mentre que el seu temps d'execució és propi i específic, T_i^{-}. Per T_{0i}^{+} s'entendrà el temps d'execució del programa i quan ell és el primer que s'executa estant el computador en buit. En acabar d'executar els n programes el computador fa un "shutdown" en un temps T, independentment del programa final, completant-se així un cicle. Considereu l'aplicació $n+1$ com aquesta aplicació de "shutdown". Considereu les variables binàries x_{ij} =1 si el programa j segueix al programa i i 0 altrament, sent $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$ i les variables binàries x_{0j} =1 si el programa j s'executa el primer de tots i 0 altrament.

Es demana: a) [**1.25p**] Per n=4, utilitzant nusos del 0 al n+1, dibuixeu un graf que reflecteixi totes les possibles seqüències d'un cicle i en el que els arcs del graf estiguin associats a les variables binàries x_{ij}, x_{0j} i tinguin associats els costs T_{0i}^{+}, T_{ji}^{+}, T_i^{-}, T.

b) [**2.75p**] formuleu un programa de PLE binari que tingui com funció objectiu a minimitzar la durada d'un cicle complet. Podeu identificar quin tipus de problema expresa l'anterior proces cíclic?

P4. [**6p**] Resoleu el següent problema de PLE seguint les indicacions (a la dreta, solució per la relaxació del nus 0)

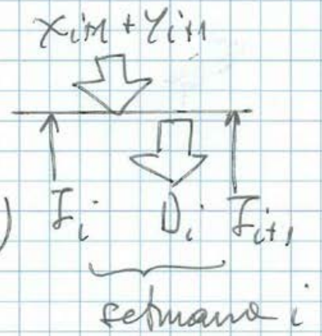
Min -x2

x1 + x2 + x3 + x4 = 10
4x3 + x5 = 30
2x1 + 4x2 + 2x3 + x6 = 30
xi >=0

1	2	3	4	5	6	
1/2	1	1/2	0	0	1/4	15/2
0	0	4	0	1	0	30
1/2	0	1/2	1	0	-1/4	5/2
1/2	0	1/2	0	0	1/4	15/2

1) [**1.25p**] Determineu el tall secant determinat per la 1ª fila i doneu l'increment de la funció objectiu determinada per la 1ª iteració del símplex dual.
2) [**1.75p**] Afegiu el tall secant determinat en l'anterior apartat i resoleu el problema.
3) [**1.25p**] Considereu ara l'algoritme de B&B amb penalitzacions. Tenint en compte la taula corresponent a la relaxació del nus 0, quina variable triarieu per ramificar i per què?
4) [**1.75p**] Ramifiqueu per la variable triada en l'apartat anterior i resoleu el probema usant l'algoritme de B&B amb penalitzacions.

P1) Equació de balanç:



$$I_{i+1} = I_i + X_i + Y_i - D_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$I_1 = 20.$$

$$D_i = I_i - I_{i+1} + X_i + Y_i$$

$$\min_{I, X, Y} \sum_{i=1}^{5} A_i X_i + \sum_{i=1}^{5} C_i \cdot Y_i + \sum_{i=1}^{5} \frac{I_i + I_{i+1}}{2} \cdot B_i + 20 \cdot I_6$$

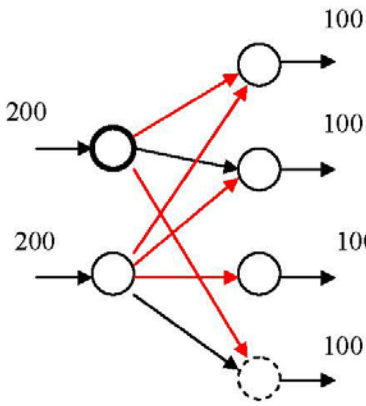
$$20 - I_2 + X_1 + Y_1 = 115$$
$$I_2 - I_3 + X_2 + Y_2 = 130$$
$$I_3 - I_4 + X_3 + Y_3 = 115$$
$$I_4 - I_5 + X_4 + Y_4 = 140$$
$$I_6 - I_5 + X_5 + Y_5 = 150$$
$$0 \leq X_i \leq 95 \qquad i = 1, 2 \dots 5$$
$$Y_i \geq 0$$
$$I_j \geq 0 \qquad j = 2, 3, 4, 5, 6$$

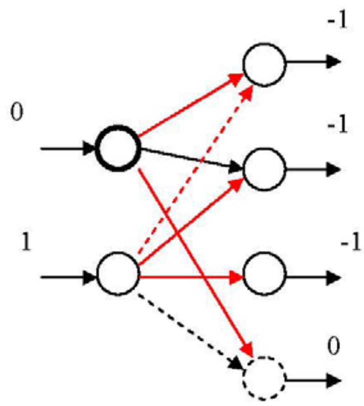
$A_i = 1$ ≡ cost producció en condicions ordinàries

C_i ≡ cost " extr. segons taula

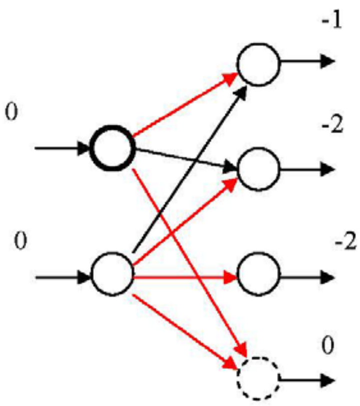
$B_i = 1/2$ ≡ cost de stock

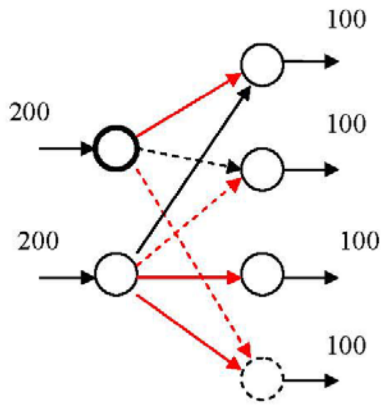
Solució: P2



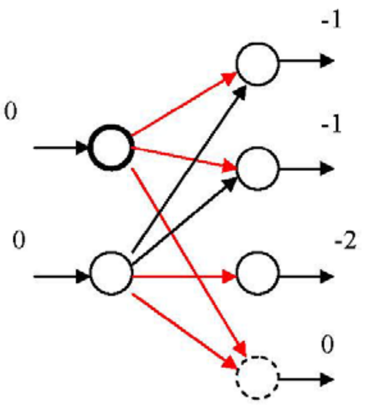


r_{12} =1- (0+1) = 0; r_{20} = 0 – (1-0) = -1 <0. Entra l'arc (2,0) en la base. Es forma cicle amb (2,0), (1,0), (2,1), (1,1). Surt de la base l'arc (2,1). x_{20} = Min {100, 0}=0





r_{21} = 2 – (0+1) = 1 >0 ; r_{12}= 1 – (0+2) = -1 <0. Entra l'arc (1,2). Es forma cicle (1,2), (1,0), (2,2), (2,0). x_{12} = Min{100, 100} = 100. Poden sortir (2,2) o (1,0). Es tria el (2,2)

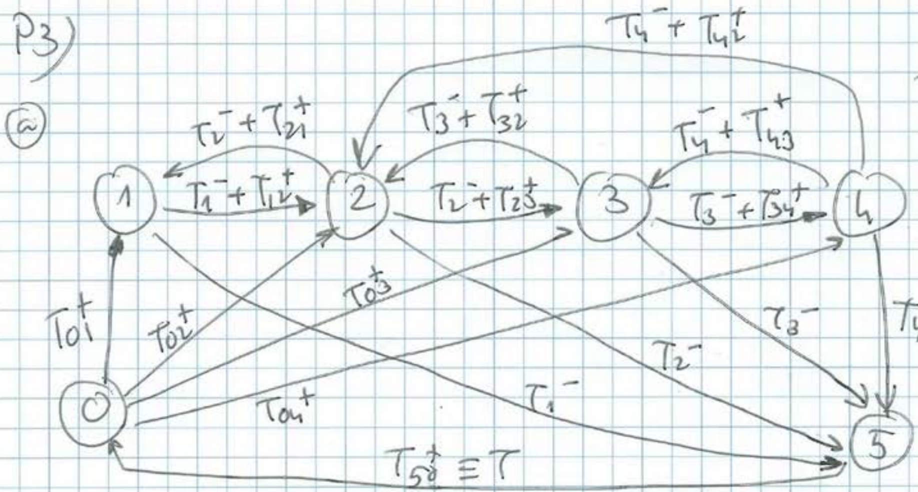


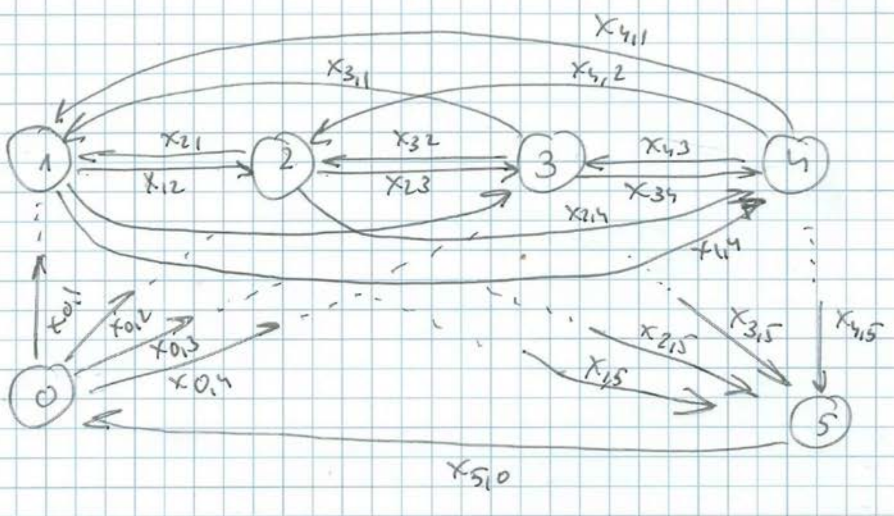
r_{21} = 2 – (0+1) = 1 >0
r_{22} = 2 – (0+1) = 1 >0 Òptim.

P3)

(a)

Incomplet





(b), (c) L'anterior procés cíclic expressa un tour hamiltonià de cost mínim sobre el graf complet ($V=\{0,1,\dots,n+1\}$)

Formulació d'un TSP asimètric.

$$\min_{u,x} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=0}^{n+1} x_{ji} = 1, \quad i=0,1,\dots,n+1$$

$$u_0 = 1$$

$$u_i - u_j \le n\cdot(1-x_{ij}) - 1 \qquad 0 \le i,j \le n+1$$

$$2 \le u_i \le n+1 \qquad 1 \le i \le n+1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad 0 \le i,j \le n+1, \; i \ne j$$

$$c_{ij} = \begin{cases} M & i=0,\ j=n+1 \\ M & j=0,\ 1\le i\le n \\ M & i=1+n,\ j\geq 1 \\ T_i^- + T_{ij}^+ & 1\le i,j\le n,\ i\neq j \\ T_{0i}^+ & 1\le i\le n \\ T_i^- & 1\le i\le n,\ j=n+1 \end{cases}$$

P4) La 1ª fila comporta el tall

1) $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_6 \geq \frac{1}{2}$

1	2	3	4	5	6	7	
1/2	1	1/2	0	0	1/4	0	15/2
0	0	4	0	1	0	0	30
1/2	0	1/2	1	0	−1/4	0	5/2
−1/2	0	−1/2	0	0	−1/4	1	−1/2
1/2	0	1/2	0	0	1/4	0	15/2

$$\sigma = -\operatorname{Max}\left\{ \frac{1/2}{-1/2}, \frac{1/2}{-1/2}, \frac{1/4}{-1/4} \right\} = 1$$

Increment f. obj $= -\sigma \cdot x_s = -1\,(-1/2) = 1/2$

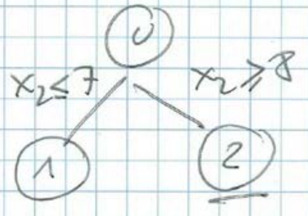
f. obj després 1ª it. SIMPLEX DUAL $-\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = -7$

y s'efectua la iteració:

1	2	3	4	5	6	7	
0	1	0	0	0	0	1	7
0	0	4	0	1	0	0	30
0	0	0	1	0	−1/2	1	2
1	0	1	0	0	1/2	1/2	1
0	0	0	0	0	0	1	7

sol. òptim

3) La taula indica que la variable x_2 és monòtona
El nus $x_2 \geq 8$ és infactible
Es tria x_2 per ramificar.



4)

1	2	3	4	5	6	7	
$1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/4$	0	$15/2$
0	0	4	0	1	0	0	30
$1/2$	0	$1/2$	1	0	$-1/4$	0	$5/2$
$-1/2$	0	$-1/2$	0	0	$-1/4$	1	$-1/2$ ←
$1/2$	0	$1/2$	0	0	$1/4$	0	$15/2$

$x_2 + x_7 =$

$\sigma = -\mathrm{Max}\{-1, -1, -1\} = 1$ empat

0	1	0	0	0	0	1	7
0	0	4	0	1	0	0	30
0	0	0	1	0	0	1	4
1	0	1	0	0	$1/2$	-2	1
0	0	0	0	0	0	1	7

òptim