(2.b) PROPIEDADES DE LOS MODELOS LINEALES

- **ESTUDIO GRÁFICO DE UN P.P.L. EN R^2.**
  - **Caracterización de la región factible.**
  - **Resolución gráfica del problema.**
  - **Óptimos alternativos.**
  - **Problemas no factibles y no acotados.**
  - **Clasificación.**
- **CONVEXIDAD DE LA REGIÓN FACTIBLE.**
  - **Vértice de un conjunto convexo.**
- **FORMA STANDARD DE UN P.P.L. Y BASES FACTIBLES.**
- **RELACIÓN ENTRE BASES FACTIBLES Y VÉRTICES.**
- **TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA P.L.**
  - **Una estrategia para resolver P.P.L.**

Cap. 3 Hillier F.S., Lieberman G.J. "Introduction to Operations Research" Holden day Inc. 1986.
Cap. 2 Luenberger D.G."Linear and Nonlinear Programming" Addison-Wesley 1984

Análisis gráfico de un problema en dos dimensiones.

s = Tm aleación 1 , m = Tm aleación 2

$$\textit{ventas totales en miles de } € = 3s + 2m$$

Tm cobre	$2s + m$	$\leq$	100
Tm estaño	$s + m$	$\leq$	80
Máximo Tm aleación 1	s	$\leq$	40

$$\textit{no negatividades} \quad s,\ m \geq 0$$

$$
\begin{array}{lllrl}
Max & 3s + 2m & & & \\
 & & & & \\
s.a & 2s + m & \leq & 100 & (R1) \\
 & s + m & \leq & 80 & (R2) \\
(P) & s & \leq & 40 & (R3) \\
 & & & & \\
 & s,\ m & \geq & 0 & (NN)
\end{array}
$$

Solución gráfica del problema:

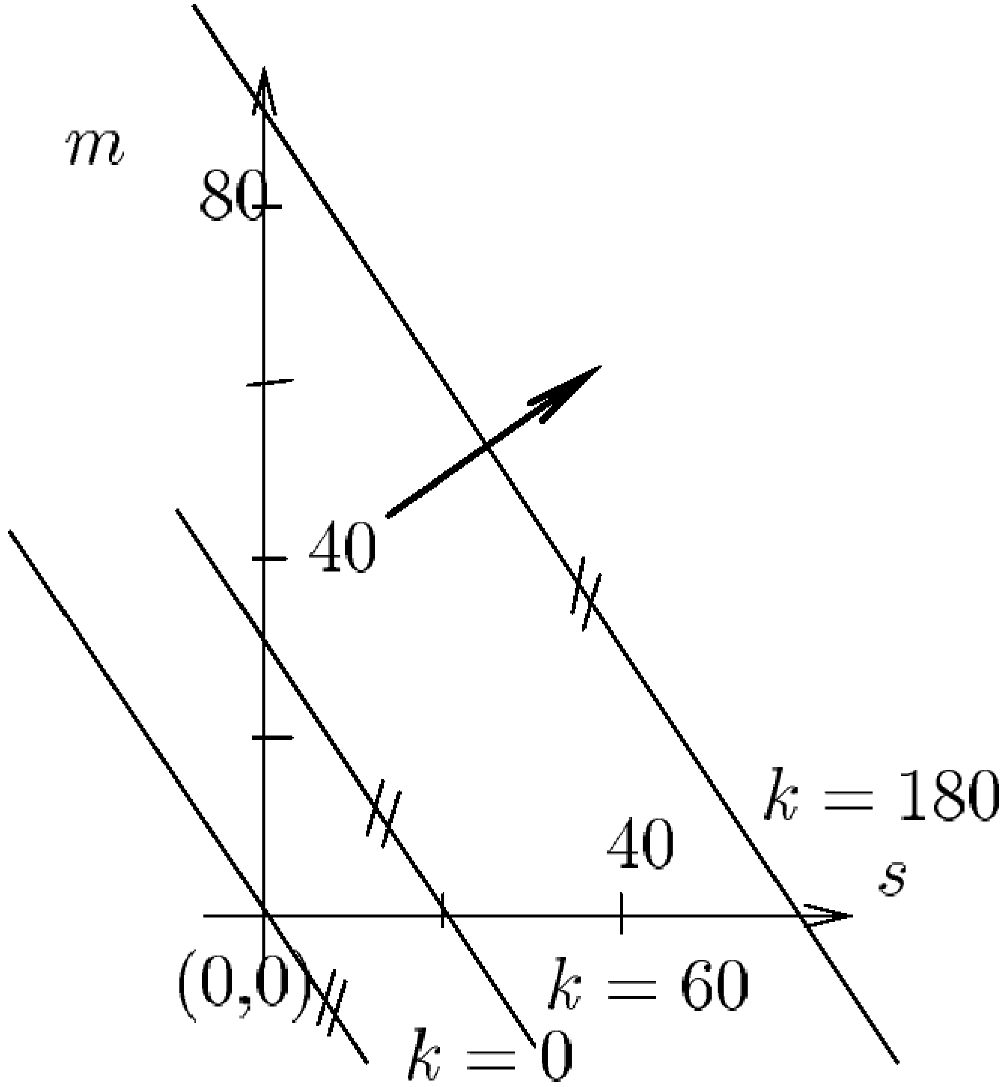
1. Curvas de nivel de la f.obj.
2. Repr. Gráfica de las restricciones

Análisis de la función objetivo.

Curvas de nivel de la f. obj.

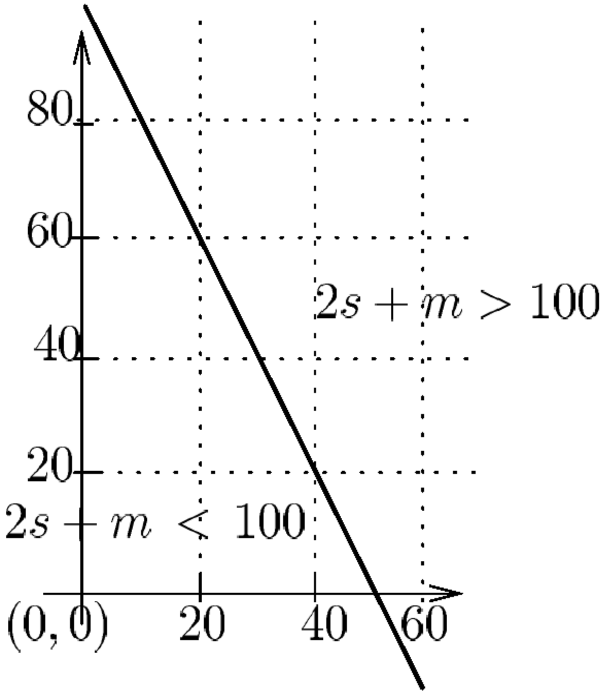
$$3s + 2m = k$$

Familia de rectas paralelas.



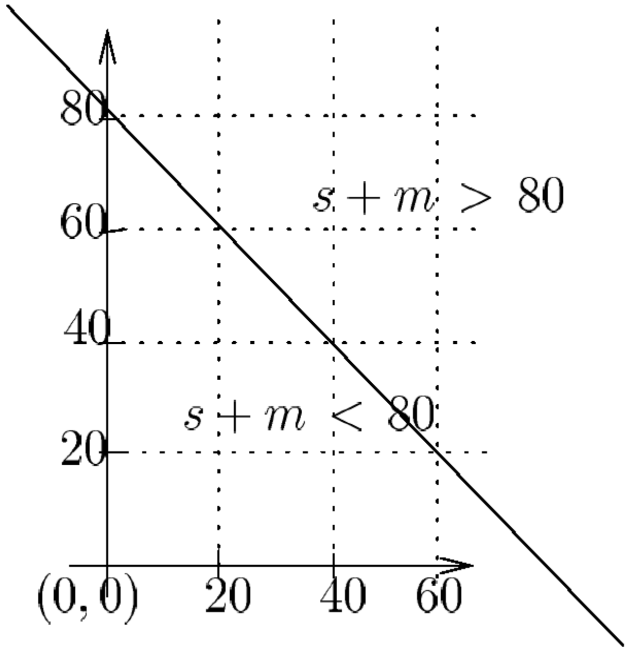
Análisis de las restricciones

Se van a determinar los puntos del plano que verifican simultáneamente las restricciones R1, R2, R3 y NN.



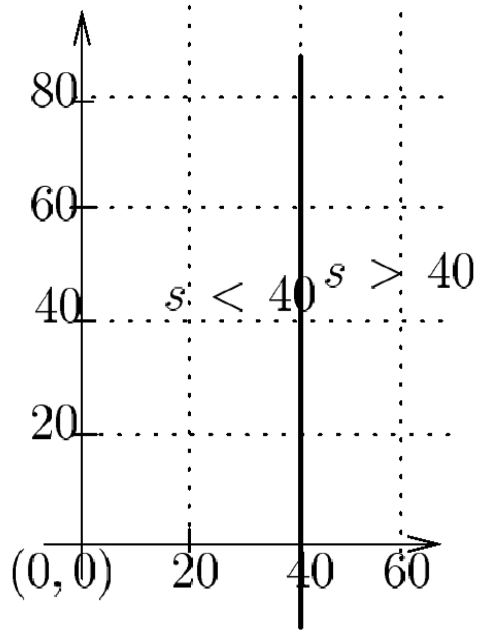
semiespacio

$\{ (s,m) \mid 2s + m \leq 100 \}$



semiespacio

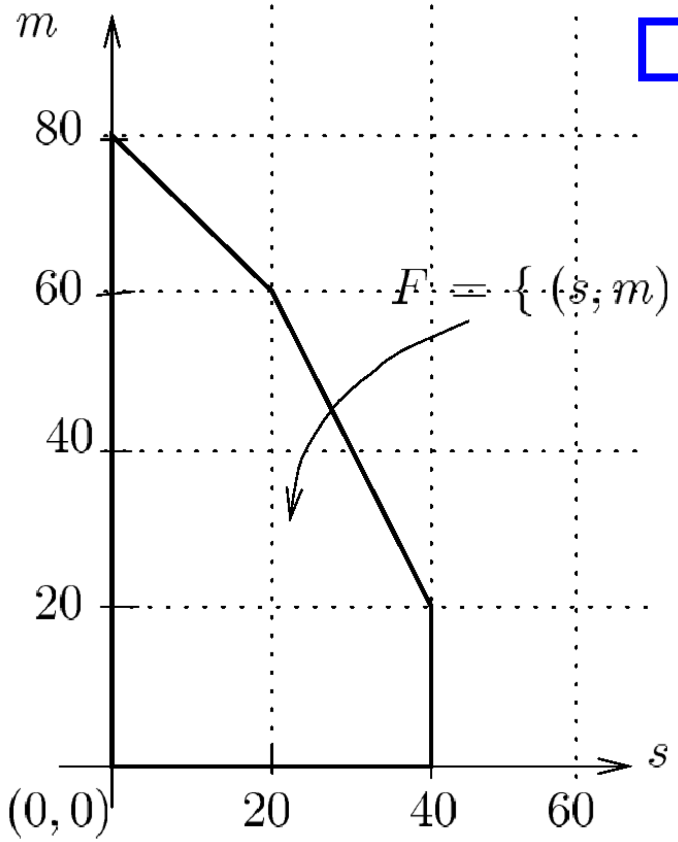
$\{ (s,m) \mid s + m \leq 80 \}$



semiplano

$\{ (s,m) \mid s \leq 40 \}$

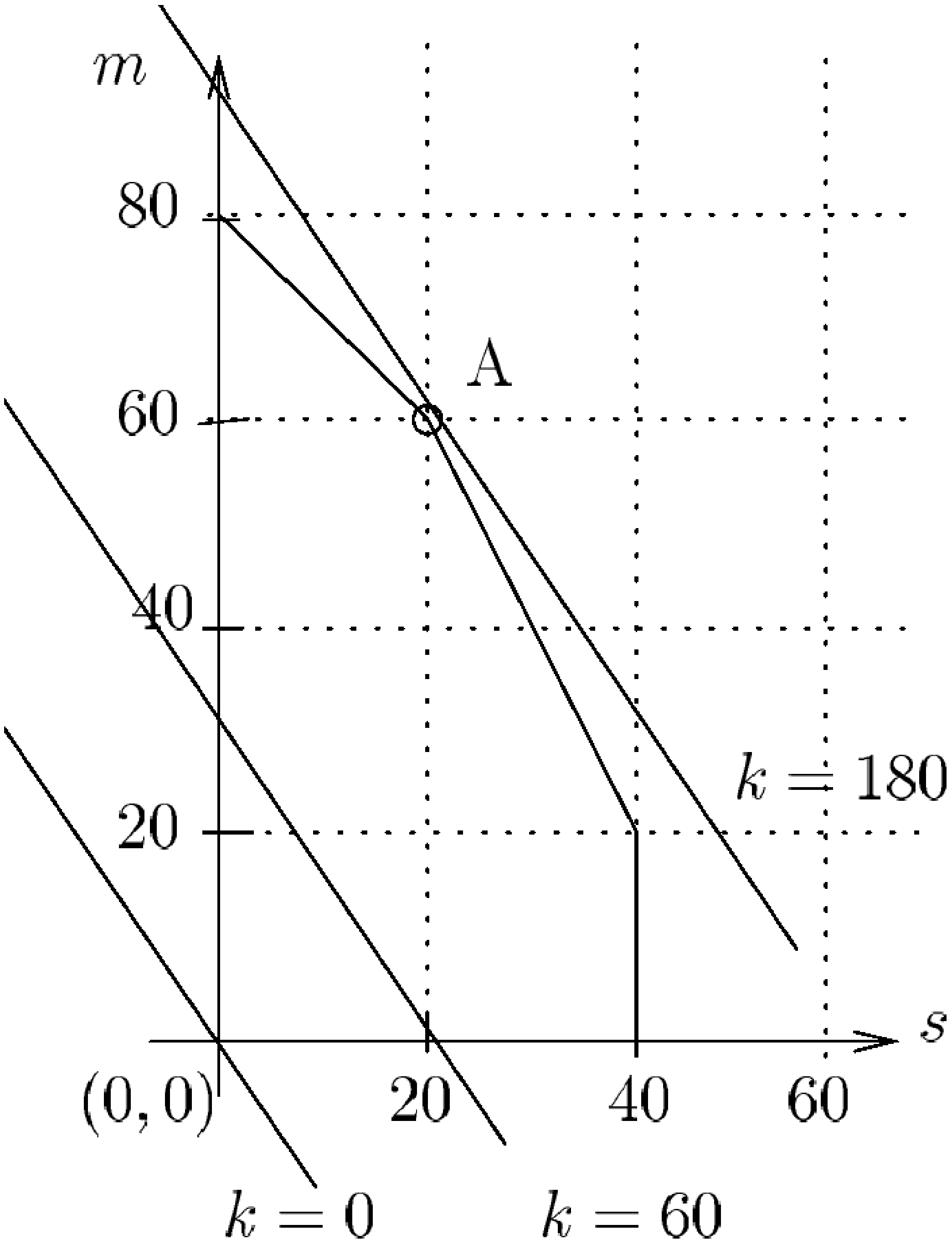
NN restricciones de no negatividad: cuadrante de los no negativos.



$$F = \{ (s, m) \in R^2 \mid 2s + m \leq 100, \;\; s + m \leq 80, \;\; s \leq 40, \;\; s \geq 0, \; m \geq 0 \}$$

- El conjunto de puntos F se denomina **conjunto factible** o **región factible** del problema (P).
- La región factible o conjunto factible se halla como intersección en número finito de semiespacios:

$$F = \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\textit{(tantas como restricciones)}} \quad \cap \quad \underbrace{F_{NNs} \cap F_{NNm}}_{\textit{(tantas como variables)}}$$



Para valores de k > 180 las curvas de nivel de la f.obj. no intersectan la región factible:

k=180 es el mayor valor que puede alcanzar la f.obj. en la región factible.

Este valor se obtiene en el punto x_A =(20,60) :

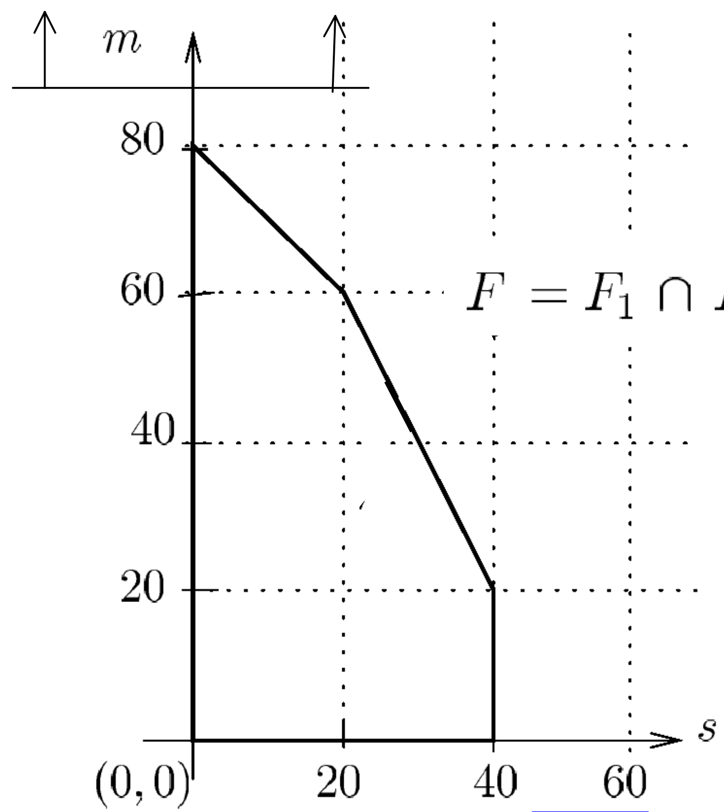
ÓPTIMO (SOLUCIÓN) DE (P)

Concepto de problema factible o infactible.

En el ejemplo anterior, el problema (P) ha resultado tener $F \neq \emptyset$. Si la región factible o conjunto factible de un problema de programación lineal es no vacío entonces diremos del problema (P) que es un **problema factible.**

Si $F = \emptyset$ entonces diremos del problema (P) que es un **problema infactible.**

Ejemplo: Consideremos un problema idéntico al (P) pero con una restricción más: $m \geq 85$ (deben producirse 85 o más mesas). Si F_4 es el semiespacio $\{ (s, m) \mid m \geq 85 \}$ la región factible vendrá dada por:

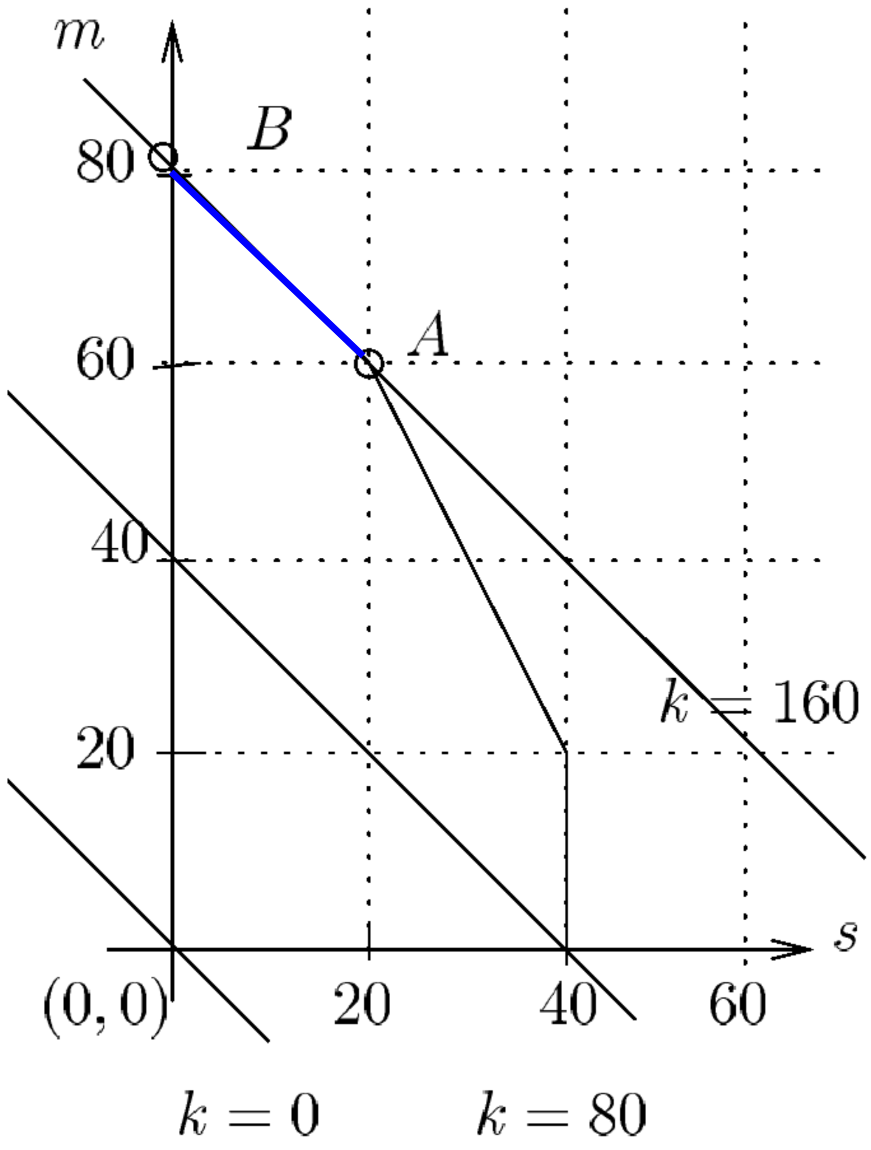


$$F = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_{NNs} \cap F_{NNm} = \emptyset$$

Concepto de óptimos alternativos

$$Max \quad 2s + 2m$$

$$
\begin{array}{llcll}
s.a & 2s + m & \leq & 100 & (R1) \\
 & s + m & \leq & 80 & (R2) \\
(P'') & s & \leq & 40 & (R3) \\
 & s,\ m & \geq & 0 & (NN)
\end{array}
$$



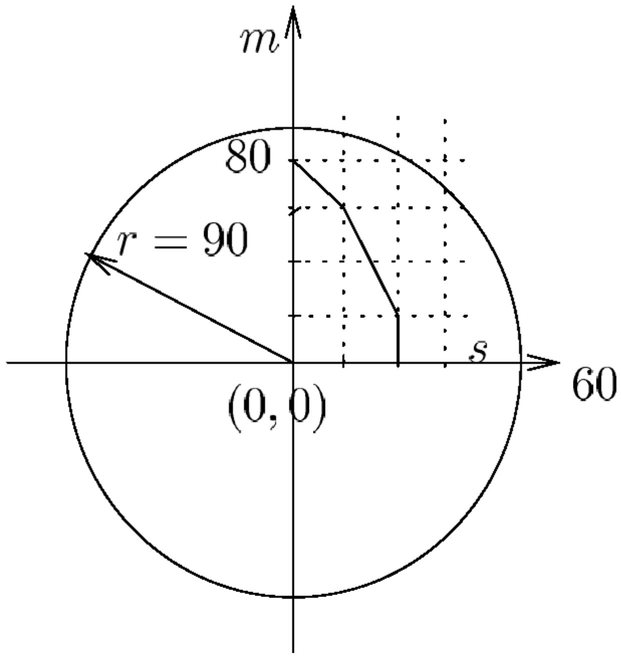
Los puntos del segmento AB son la intersección entre la región factible de (P") y la curva de nivel con máximo valor de la f.obj.

Segmento AB: conjunto solución

Concepto de región factible no acotada

Una región factible es **acotada** en $\mathbf{R}^n$ si: $\exists$ r >0 t.q:

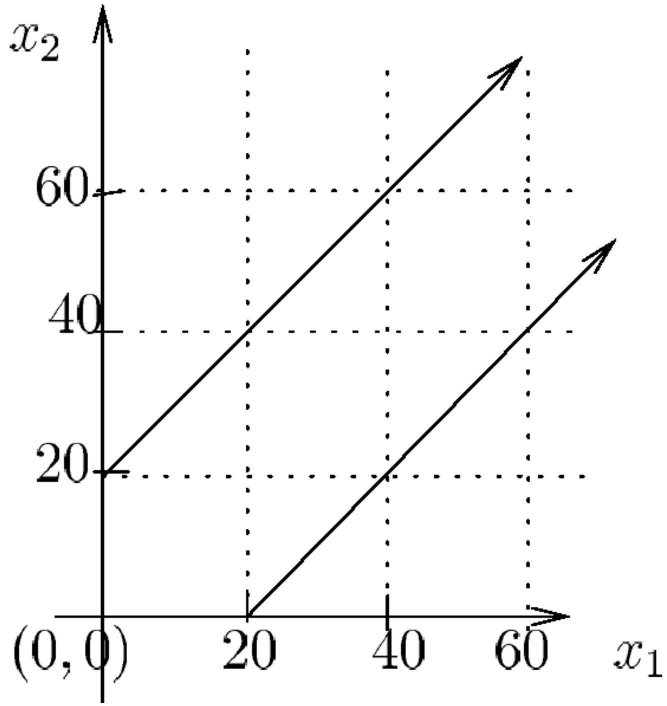
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F \rightarrow (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq r$$



ACOTADA

NO ACOTADA

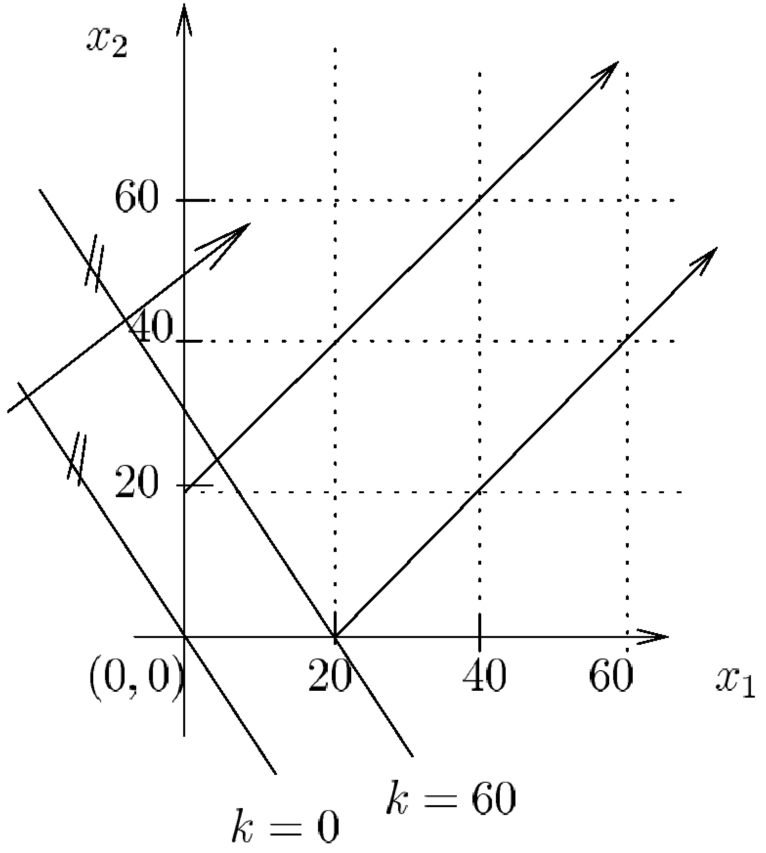
$$\begin{array}{lcr} x_2 - x_1 & \leq & 20 \\ x_2 - x_1 & \leq & -20 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Concepto de "problema no acotado".

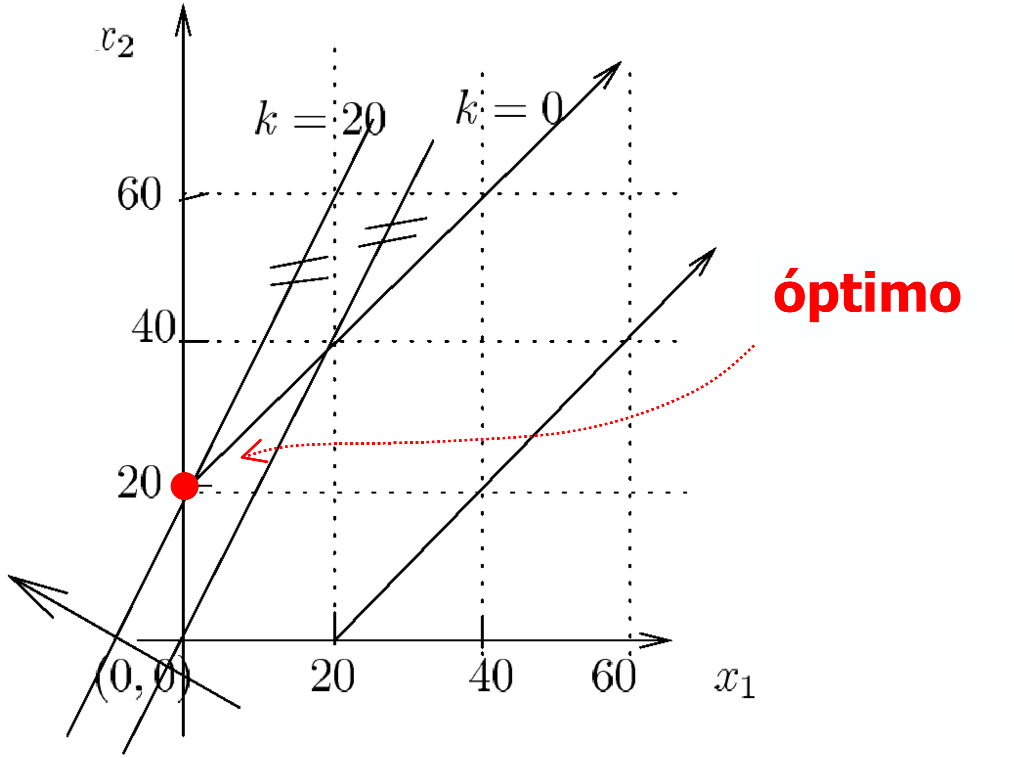
$$\begin{array}{rcr} x_2 - x_1 & \leq & 20 \\ x_2 - x_1 & \leq & -20 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(Max f)



$$f_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

PROBLEMA NO ACOTADO



$$f_2(x_1, x_2) = x_2 - 2x_1$$

PROBLEMA ACOTADO

Clasificación de los problemas de programación lineal.

Los problemas de programación lineales pueden clasificarse mediante el siguiente cuadro:

$$
\begin{array}{l}
Problemas\ de \\
Progr.\ Lineal
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
Factible\ (F \neq \emptyset)
\left\{
\begin{array}{ll}
F\ acotada & \begin{array}{l}(S \neq \emptyset\ :\ Existen \\ óptimos\ únicos\ o \\ alternativos)\end{array} \\[2em]
F\ no\ acotada & \left\{
\begin{array}{l}
*\ \ Existen\ óptimos \\
únicos\ o \\
alternativos. \\[2em]
*\ \ Problema\ no\ acotado \\
(No\ existen\ óptimos:\ \ S = \emptyset)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\\[4em]
Infactible\ (F = \emptyset)
\end{array}
\right.
$$

CONVEXIDAD de la REGIÓN FACTIBLE

Definición: Dados dos puntos x_1, x_2, el $\boxed{\text{segmento abierto } \overline{x_1 x_2}}$ son los puntos x t.q.:

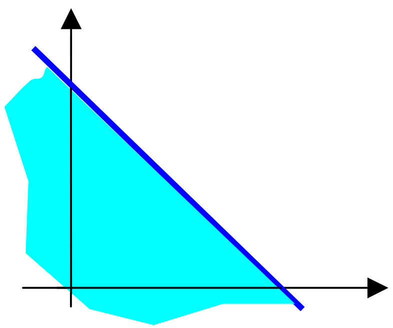
$$x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, \quad 0 < \alpha < 1$$

Definición de conjunto convexo. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si, $\forall\, x_1, x_2 \in C$, el segmento abierto $\overline{x_1 x_2} \subset C$

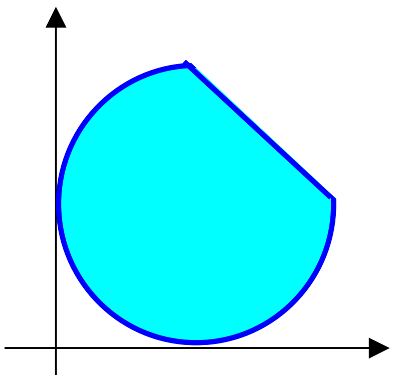
Supongamos $F = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\ \}$, (o $Ax \leq b$, o $Ax = b$)

<u>F es un conjunto convexo</u>

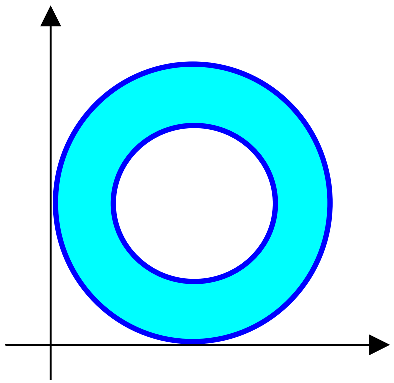
$$\left.\begin{array}{l} Ax^1 \geq b \\ Ax^2 \geq b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) = \\ \qquad = \alpha A x^1 + (1-\alpha)Ax^2 \geq \alpha b + (1-\alpha)b = b, \quad (\leq, =) \end{array}$$



$x_1 + x_2 \leq 1$



$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1$
$x_1 + x_2 \leq \frac{29}{10}$

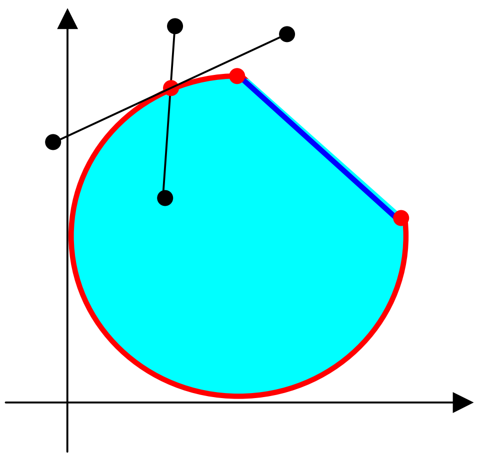


$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1$
$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \geq \frac{1}{2}$

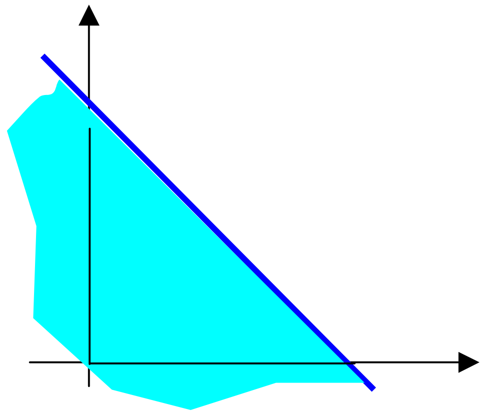
Vértices de un conjunto convexo

$\hat{x}$ es un vértice de $C \subset \mathbb{R}^n$, convexo, si $\forall\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $\hat{x} \in \overline{x_1 x_2}$:

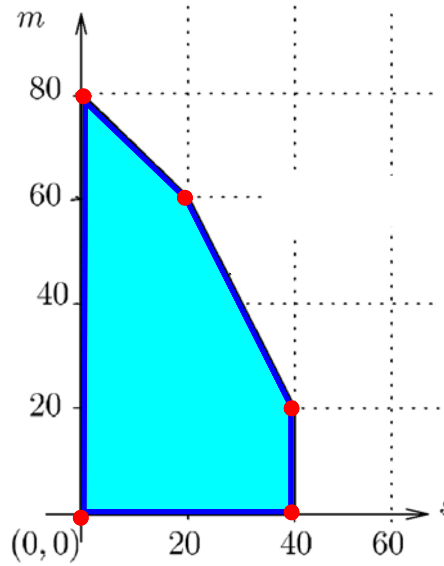
$$x_1 \notin C, \text{ o } x_2 \notin C, \text{ o ambos}$$



$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq \tfrac{1}{2}$$



$$x_1 + x_2 \leq 1$$



NO TODOS LOS CONVEXOS TIENEN VÉRTICES

FORMA STANDARD DE UN P.P.L.

Tras transformaciones, todo P.P.L. puede expresarse de la forma:

$$
\begin{aligned}
Min_x \quad & c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \\
s.a: \quad & a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
& a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0, \ \ldots x_n \geq 0
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
Min_x \quad & c^\top x \\
s.a: \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$(m \leq n)$

- Todas las variables x_i están sujetas a $x_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots n$
- Todos los términos de la derecha b_i son no negativos: $b_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots m$
- La matriz de coeficientes A es de pleno rango:

Hay m columnas de A tales que al formar una matriz B con ellas, ésta es inversible.

Todos los paquetes para P.L. convierten automáticamente a la forma Standard

Ejemplo: (Ejercicio Nº 2 de la colección)

$$
\begin{array}{lll}
Min & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
s.a: & -x_1 - x_2 - x_3 & \geq -5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq 6 \\
 & x_2,\ x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
s.a: & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = +5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 & = 6 \\
 & x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3 - x_4$$

$$c^\top x = -5 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_2 + 4x_3 = \cancel{-5} + 5x_2 + 5x_3 + x_4$$

$$2(5 - x_2 - x_3 - x_4) + 3x_2 + x_3 - x_5 = 6$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & 5x_2 + 5x_3 + x_4 & \\
s.a: & x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = 4 \\
 & x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

DEFINICIÓN DE BASE FACTIBLE

Sistema $Ax = b,\ x \geq 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4 \\ x_i \geq 0 & \quad (\, i = 1, \ldots 5\,) \end{aligned} \longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN: B **es base factible si:** $\boxed{B^{-1}b \geq 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

B **es una base asociada al conjunto de índices {1, 4, 5}**

Sistema $Ax = b,\ x \geq 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \qquad (\, i = 1, \ldots 5 \,)$$

B **base asociada a I_B = {1, 4, 5}**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

Notación:

$$x_{Reord} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

RELACIÓN ENTRE BASES FACTIBLES Y VÉRTICES *(F en F.S.)*

- Si $\bar{x}$ es s.b.f de F con índices básicos $I_B \Rightarrow$ es un vértice de F:

  $\bar{x}_{Reord} = \left(\frac{\bar{x}_B}{0}\right) = \left(\frac{B^{-1}b}{0}\right)$. Supongamos que no es vértice de F.

  $\exists x^1, x^2 \in F,\ x^1 \neq x^2$, t.q. $\bar{x} = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2,\ 0 < \alpha < 1$.

  $\left(\frac{\bar{x}_B}{0}\right) = \alpha \left(\frac{x_B^1}{x_N^1}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{x_B^2}{x_N^2}\right) \Rightarrow\ x_N^1 = x_N^2 = 0,$

  pero como x^1, x^2 son factibles:

  $Bx_B^1 = b,\ \ Bx_B^2 = b \Rightarrow\ x_B^1 = x_B^2 = \bar{x}_B \Rightarrow\ x^1 = x^2 = \bar{x}.$

- Para cada vértice $\bar{x} \in F$ existe al menos un conjunto de índices básicos I_B y una base B tal que: $\bar{x}_B = B^{-1}b,\ \bar{x}_N = 0.$

- A vértices distintos corresponden bases distintas.

$$(P)\quad \begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ s.a: & Ax = b \qquad \leftarrow \quad F \text{ en F.S.} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema Fundamental de la P.L.

1. Si $F \neq \emptyset \Rightarrow$ existe al menos una s.b.f.
2. Si (P) posee solución entonces hay una solución de (P) que es s.b.f.

Una estrategia para resolver el P.P.L. consiste en:

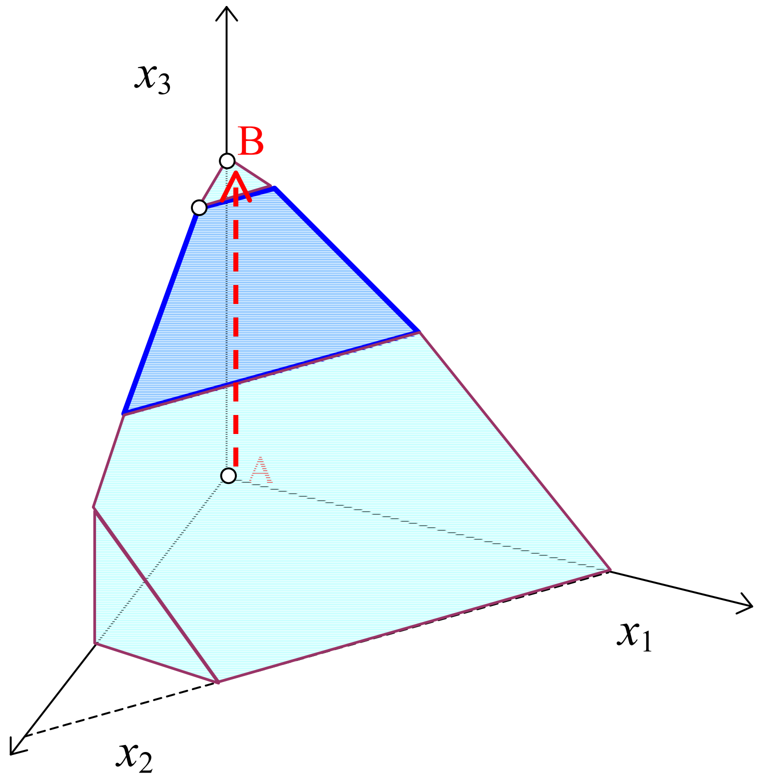
1. **Determinar si $F = \emptyset$.**
2. **En caso contrario, determinar una s.b.f. (vértice) de F inicial**
3. **Visitar s.b.f's hasta encontrar una que sea solución de (P)**
4. **Determinar si la s.b.f. solución es única o existen otras soluciones.**

1. **Determinar si F=∅.**
2. **En caso contrario, determinar una s.b.f. (vértice) de F inicial.**
3. **Visitar s.b.f's hasta encontrar una que sea solución de (P)**
4. **Determinar si la s.b.f. solución es única o existen otras soluciones.**

En el próximo tema:

- **Se desarrolla un método para saltar de una s.b.f. a otra vecina.**
- **En cada salto se mejora la función objetivo.**
- **Se detecta si se alcanza una solución de (P) o bien si el problema es no acotado.**
- **Finalmente, se desarrolla un método para encontrar una s.b.f. inicial o bien detectar que $F=\varnothing$.**

ALGORITMO DEL SÍMPLEX

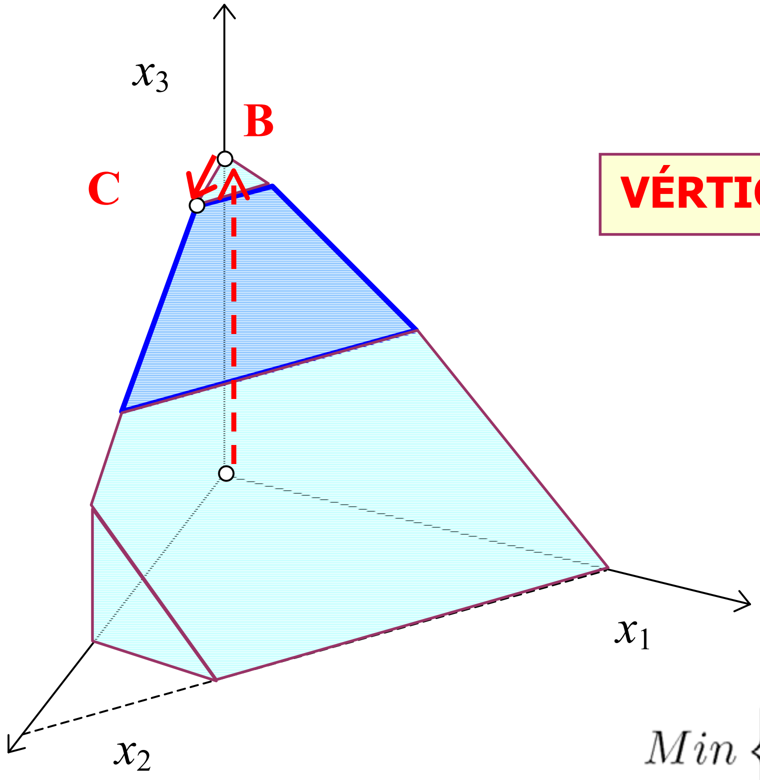


$$
\begin{array}{lrrrl}
Min & -12x_1 & -12x_2 & -16x_3 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1 \\
 & x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & \leq 11/9 \\
 & x_1 & +x_2 & +5/3x_3 & \leq 53/36 \\
 & -1/2x_1 & x_2 & & \leq 2/3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

VÉRTICE A

1	2	3	4	5	6	7	0
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	4/3	0	1	0	0	11/9
1	1	5/3	0	0	1	0	53/36
−1/2	1	0	0	0	0	1	2/3
−12	−12	−16	0	0	0	0	0

$$Min\left\{1/1,\ \frac{11/9}{4/3},\ \frac{53/36}{5/3}\right\} = Min\{1, 11/12, 53/60\}$$



VÉRTICE B

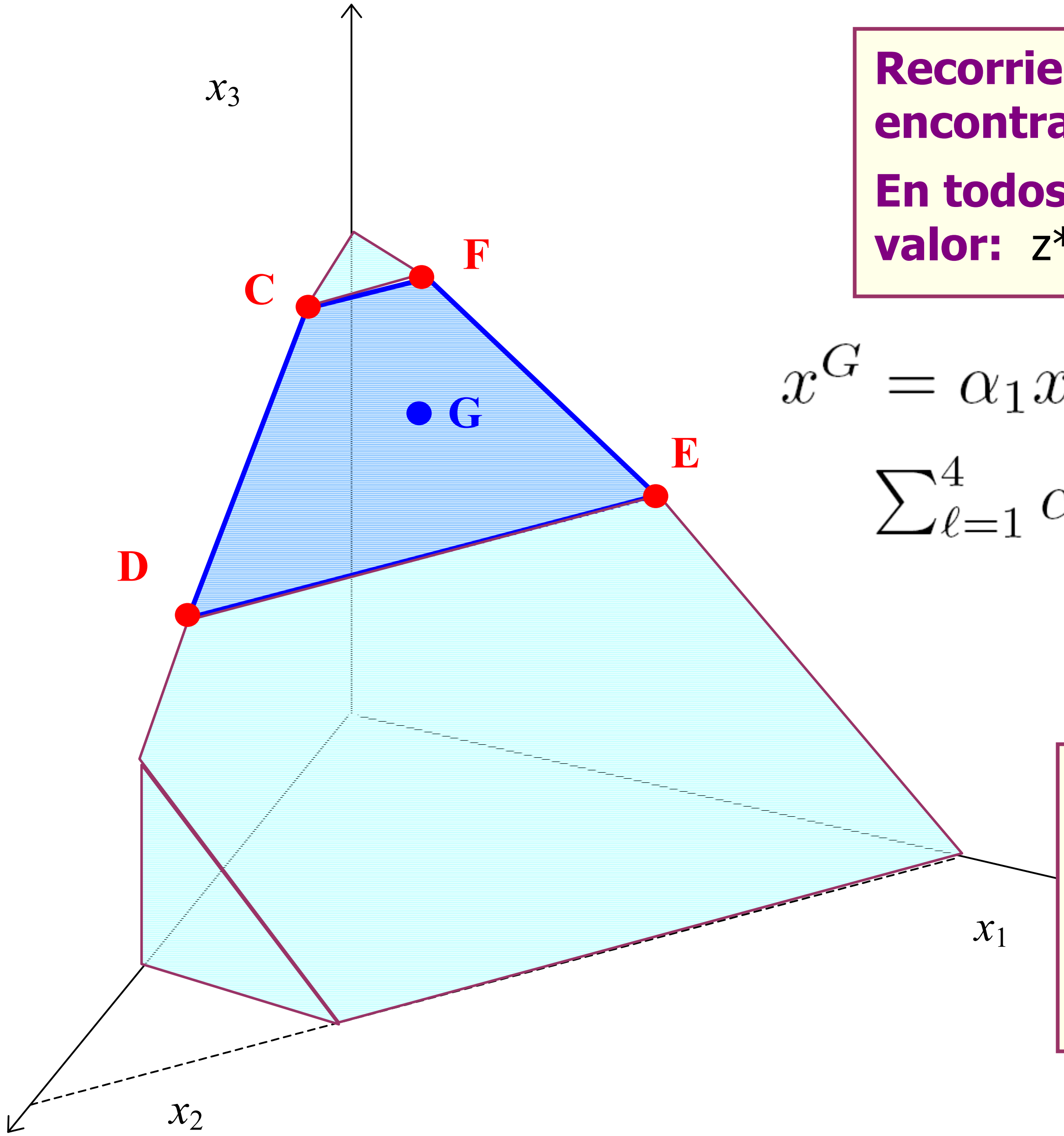
1	2	3	4	5	6	7	0
$2/5$	$2/5$	0	1	0	$-3/5$	0	$7/60$
$1/5$	$1/5$	0	0	1	$-4/5$	0	$2/45$
$3/5$	$3/5$	1	0	0	$3/5$	0	$53/60$
$-1/2$	1	0	0	0	0	1	$2/3$
$-12/5$	$-12/5$	0	0	0	$48/5$	0	$212/15$

$$Min\left\{\frac{7/60}{2/5}, \frac{2/45}{1/5}, \frac{53/60}{3/5}, 2/3\right\} = Min\{35/60, 10/45, 265/180, 2/3\}$$

VÉRTICE C

1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	0	1	-2	1	0	$1/36$
1	1	0	0	5	-4	0	$2/9$
0	0	1	0	-3	3	0	$9/12$
$-3/2$	0	0	0	-5	4	1	$4/9$
0	0	0	0	12	0	0	$220/15$

ÓPTIMOS ALTERNATIVOS



Recorriendo las diferentes bases encontraríamos los puntos C, D, E, F.

En todos ellos la f.obj. tiene igual valor: z* = 220/15.

$$x^G = \alpha_1 x^C + \alpha_2 x^D + \alpha_3 x^E + \alpha_4 x^F$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} \alpha_\ell = 1, \quad \alpha_\ell \geq 0, \ell = 1, 2, 3, 4$$

Cualquier punto G sobre la cara tendrá igual valor para la f.obj.

(COMPROBADLO)