Investigació Operativa. Grau d'Enginyeria Informàtica
1er Examen Parcial. Curs 2015-16

P1) [3.5 punts] Una companyia de productes electrònics fabrica n classes de components C_1, C_2, ... C_n i requereix per la seva producció de m recursos materials. La tecnologia emprada per la companyia requereix de quantitats unitàries a_{ij} del recurs i-èssim per unitat de producte j-èssim. La producció en quantitats x_1, x_2, x_n d'aquests productes ha de decidir-se cada mes per la qual cosa s'han adquirit els m recursos necessaris per a la producció en quantitats b_1, b_2, ... b_m, basant-se en estimacions d'altres períodes. El benefici c_i que la venda d'una unitat del producte i reporta a la firma és conegut també.

D'entre els m recursos necessaris els p primers són considerats nocius pel mediambient. Hi ha que considerar, però, unes clàusules molt específiques per als p recursos considerats nocius, ja que si no són utilitzats en la producció mensual no poden ser reaprofitats i han de llençar-se. En particular, l'administració ha fixat unes quantitats u_1, u_2, ... u_p màximes de productes nocius que poden ser llençades al medi ambient (sempre amb una sèrie de mesures preventives, és clar). En cas de que les quantitats d'aquestes substàncies perilloses no utilitzades finalment per la producció excedeixin de les màximes u_1, u_2, ... u_p, llavors la companyia hauria de pagar una quantitat o taxa proporcional a aquest excés respecte de u_1, u_2, ... u_p mentre que si són inferiors o iguals a u_1, u_2, ... u_p no caldria pagar res. Les taxes unitàries prenen els valors t_1, t_2, ... t_p.

Assumint que les quantitats x_1, x_2, ... x_n han de ser enteres, es tracta de que formuleu un problema de programació lineal entera mixta en el que es maximitzi el benefici total de la firma tenint-se en compte les possibles quantitats a pagar en forma de taxes per excés de vessament de productes nocius.

P2) [4 punts] Per al problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll} Min & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 14 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

1. Determineu una solució inicial factible usant el mètode de variables artificials.
2. Partint de la base $I_B = \{2,4\}$, efectueu una iteració completa del símplex revisat i analitzeu les característiques de la solució trobada després d'aquesta iteració.

$$\left(\text{ Per } I_B = \{2,4\},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

P3) [2.5 punts] Pel problema següent considereu el conjunt actiu candidat inicial $A^{(0} = \{1\}$ i el punt inicial factible $x^{(0} = (0,0,1)$. Es demana trobar la solució del problema aplicant el mètode de conjunts actius.

$$\begin{array}{rl} Min_x & 3(x_1-3)^2 + 2(x_2-4)^2 + (x_3-2)^2 \\ R0 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ R1, R2, R3 & x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{array}$$

P2) $\min_x \; x_6 + x_7$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 10$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 14$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1 \dots 7$$

1	2	3	4	5	6	7	
1	2	3	-1	0	1	0	10
2	2	1	0	-1	0	1	14
0	0	0	0	0	1	1	0
-3	-4	-4	1	1	0	0	-24

Entra x_3

$x_3^1 = \min\left\{ \frac{10}{3}, \frac{14}{1} \right\} = \frac{10}{3}$

Surt x_6

1	2	3	4	5	6	7	
1/3	2/3	1	-1/3	0	1/3	0	10/3
5/3	4/3	0	1/3	-1	-1/3	1	32/3
-5/3	-4/3	0	-1/3	1	4/3	0	-32/3

Entra x_1

$\hat{\gamma}_1 = \min\left\{ \frac{10/3}{1/3}, \frac{32/3}{5/3} \right\} = \frac{32}{5}$

Surt x_7

0	6/15	1	-6/15	1/5	6/15	-1/5	6/5
1	4/5	0	1/5	-3/5	-1/5	3/5	32/5
0	0	0	0	0	1	1	0

Base inicial

$I_B = \{3, 1\}$

Per $I_B = \{2, 4\}$ $\quad x_B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad z_0 = 7 \cdot 4 = 28$

$\lambda^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r_1 = 3 - (1 \;\; 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$ $\quad$ Entra 1

$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\min\{7, 4\} = 4 = \hat{\theta}_1$, $I_{B'} = \{2, 1\}$

$z_0 = 28 - 1 \cdot 4 = 24$

$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_1^{-1} = \eta^{-1} B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$r_3 = 5 - (3 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$r_4 = 0 - (-1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ $\quad > 0$

$r_5 = 0 - (0 \;\; -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ $\quad$ òptim únic

$x_{B'} = \eta^{-1} x_B =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

P3) $\boxed{A^0 = \{1\}}$ $\min_x \; 3(x_1-3)^2 + 2(x_2-4)^2 + (x_3-2)^2$

$x_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4(x_2-4) = 0 \\ 2(x_3-2) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{array} \quad \text{infactible.}$$

$$0 \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad \begin{array}{l} 4\alpha \geq 0 \\ 1+\alpha \geq 0 \\ 5\alpha \leq 0 \end{array} \rightarrow \alpha = 0, \; y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A^1 = \{0, 1, 2\}}$

$$\min_x \; 3(x_1-3)^2 + 2(x_2-4)^2 + (x_3-2)^2$$

$$\begin{array}{ll} 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 & | \lambda \\ x_1 = 0 & | \mu_1 \\ x_2 = 0 & | \mu_2 \end{array} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 6(x_1-3) \\ 4(x_2-4) \\ (x_3-2) \end{array} \Bigg|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{array}{l} -\lambda + \mu_1 \\ -\lambda + \mu_2 \\ -\lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -18 = -\lambda + \mu_1 \\ -16 = -\lambda + \mu_2 \\ -1 = -\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda = +1 \\ \mu_1 < 0 \\ \mu_2 < 0 \end{array}$$

$\boxed{A^2 = \{0\}}$

$$\min_x \; 3(x_1-3)^2 + 2(x_2-4)^2 + (x_3-2)^2$$

$$1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad | \lambda$$

$$\begin{bmatrix} 6(x_1-3) \\ 4(x_2-4) \\ 2(x_3-2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 34/22 \\ 20/11 \\ -52/22 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{pmatrix} 34/22 \\ 20/11 \\ -52/22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad \begin{array}{l} \alpha\, 34/22 \geq 0 \\ \alpha\, 20/11 \geq 0 \\ 0 \leq 1 - \alpha\, 74/22 \end{array} \rightarrow \alpha \leq \frac{22}{74}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{22}{74} \left(\begin{bmatrix} 34/22 \\ 20/11 \\ -52/22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 34/74 \\ 40/74 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{A^3 = \{0, 3\}}$

$$\boxed{A^3 = \{0, 3\}}$$

$$\min_x \; 3(x_1-3)^2 + 2(x_2-4)^2 + (x_3-2)^2$$

$$1 - x_1 - x_2 - x_3 \quad | \; \lambda$$

$$x_3 = 0 \quad | \; \mu_3$$

$$\begin{aligned} 6(x_1-3) &= -\lambda \\ 4(x_2-4) &= -\lambda \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/10 \\ 4/10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -6\left(\frac{6}{10} - 3\right) = \frac{156}{10} > 0$$

$$\begin{aligned} 6(x_1-3) &= -\lambda \\ 4(x_2-4) &= -\lambda \\ 2(x_3-2) &= -\lambda + \mu_3 \rightarrow \mu_3 = \frac{156}{10} - 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/10 \\ 4/10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ÒPTIM}}$$

P1)

$$\max_x \; \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{l=1}^{p} t_l \max\left\{0, b_l - \sum_{j=1}^{n} a_{l,j} x_j - u_l\right\}$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \dots m$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$\max_x \; \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{l=1}^{p} t_l \theta_l$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2 \dots m$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_l &\ge b_l - \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j - u_l \\ \theta_l &\ge 0 \end{aligned}\right\} l = 1, 2, \dots p$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots n$$