FIB. Enginyeria d'Informàtica

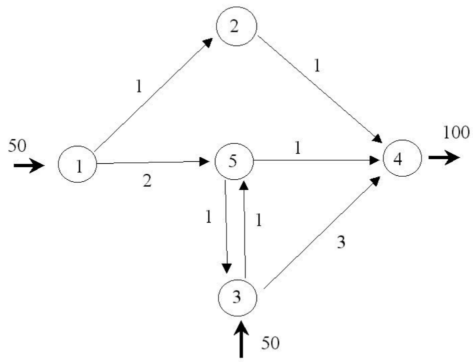
MDIO-1. Examen final. Curs 2001/02. 1^{er} **Q**

P1 El tècnic d'una siderúrgia ha de decidir la composició d'una al.leació d'estany i coure. Cal decidir quantes tones d'estany x_1 i quantes tones de coure x_2 incloure-hi. El cost per tona d'estany és de 6000 euros/tona i el cost per tona de coure és de 8000 euros/tona. Hi ha fet un encàrrec de 5 tones d'al.leació però s'acceptaria per part del client una quantitat superior. Es disposa de 5 tones d'estany i de 7 tones de coure. La proporció coure/estany no ha de superar 7/8. A la planta només es diposa de 18 hores per la realització de la comanda; en el procés total cada tona d'estany demanda 3 hores de feina, mentre que cada tona de coure només en demanda dues. Formuleu un problema de programació lineal que doni la resposta.

P2 Donat el problema:

$$
\begin{array}{lcccccl}
Min & 2x_1 & +2x_5 & & & & \\
 & & & & & & \\
R1 & 2x_1 & +6x_2 & & +x_4 & +3x_5 & = 4 \\
R2 & x_1 & +2x_2 & & & +2x_5 & = 2 \\
R3 & x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +2x_5 & = 4 \\
 & & & & & & \\
 & x_1, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Reproduïu el tableau del símplex per la base $I_B = \{4,1,3\}$.
2. Usant la forma revisada del símplex resoleu el problema partint de la base $I_B = \{4,1,3\}$.



P3 La xarxa de comunicacions d'una empresa ve il.lustrada pel següent graf:

Els nusos 1 i 3 actuen com nusos emisors de missatges mentre que el nus 4 és el receptor d'aquests missatges. La quantitat d'informació emesa pels nusos 1 i 3 és de 50 Tbytes durant un periode de temps determinat, mentre que el cost de transmissió per Tbyte apareix sobre cada enllaç de la xarxa.

1. Partint de la base factible formada pels arcs o enllaços $(1,5)$, $(5,3)$, $(3,4)$ i $(2,4)$, determineu fent ús del símplex, el cost total mínim de utilització de la xarxa de transmissions durant el període en qüestió. Segons aquesta disposició de la xarxa de transmissions quins enllaços resulten no utilitzats?

2. S'està estudiant llogar un nou enllaç amb un cost de transmissió per Tbyte de $3/2$. Entre quina parella de nusos caldría instal.lar el nou enllaç ? Quin seria el cost màxim del lloguer que caldria pagar de forma que en la nova situació el cost per període no superes el de la situació inicial?

3. El nusos 1 i 3 passen a tenir la necessitat de enviar 75 Tbytes cada un, mentre que el nus 4 continua admetent-ne només 100. Sabent que el cost per Tbyte no enviat (cancel.lat) al nus 1 és de 2 unitats i al nus 3 és de $3/2$. Es demana: a) escriure la formulació del problema de programació lineal resultant amb l'ajut d'una matriu d'incidències nusos-arcs i representar el graf associat a aquesta matriu d'incidències. b) determinar els volums transmessos en Tbytes sobre la xarxa de comunicacions i que no poden ser enviats, que minimitzen el cost total (transmissió + cancel.lació) d'operació de la xarxa.

P4 Donat el següent problema PLE i la solució de la seva relaxació lineal:

$$\begin{array}{rrl} Min & -x_1 - x_2 & \\ & -5x_1 + 9x_2 \leq & 11 \\ & 8x_1 - 4x_2 \leq & 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & x_i \in Z \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 0 & 1 & 8/52 & 5/52 & 11/4 \\ 1 & 0 & 4/52 & 9/52 & 11/4 \\ \hline 0 & 0 & 12/52 & 14/52 & -11/2 \end{array}$$

Se sap que la solució óptima corresponent a la relaxació del nus 1 ($x_1 \leq 2$) és $x_1^* = 2$ i el valor de la funció objectiu és $z_1 = -35/8$.

1. Sense necessitat de utilitzar el símplex dual per resoldre el nus 1, determineu la solució del nus 3 directament emprant, ara sí, el símplex dual.

2. Utilitzant el símplex dual determineu la solució del nus 2.

3. Emprant l'informació que hagueu obtingut en els apartats anteriors i emprant la inspecció de les restriccions del problema determineu la seva solució.

P1 Solució:

$$\begin{array}{ll} Min & 3000x_1 + 6000x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 8x_2 - 7x_1 \leq 0 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \leq 5,\ x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

P2 $I_B = \{4,1,3\}$

1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_0 = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z_0 = c_B^\top Y_0 = (0\ 2\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \tag{2}$$

2.

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{B_0} = \{4,1,3\}$$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z_0 = c_B^\top Y_0 = (0,\ 2,\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 0 - (6,\ 2,\ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

Entra x_2.

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_2 = Min\{0/2,\ 2/2,\ 2/1\} = 0 \to \text{Surt } x_4.$$

Nova base $I_B = \{2,1,3\}$. Nou valor de la funció objectiu $z_1 = z_0 + r_2 \cdot \hat{x}_2 = 4 - 2 \cdot 0 = 4$

$$\eta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1} = \eta^{-1}B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} r_4 &= 0 - (1,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0 \\ r_5 &= 2 - (3,\ 2,\ 2) \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 < 0 \end{aligned}$$

Entra x_5.

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad Min\{2/3, 4\} = 2/3, \ \text{Surt } x_1$$

Nova base $I_B = \{2, 5, 3\}$. $z = 4 - 4 \cdot 2/3 = 4/3$.

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \eta^{-1} B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_B = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} r_4 &= 0 - (1,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2/3 > 0 \\ r_1 &= 2 - (2,\ 1,\ 1) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4/3 > 0 \end{aligned}\right. \quad \text{òptim}$$

P4)

1)

1	2	3	4	5	6	0
0	1	8/52	5/52	0	0	11/4
1	0	4/52	9/52	0	0	11/4
0	0	−4/52	−9/52	1	0	−3/4
0	0	−8/52	−5/52	0	1	−3/4
0	0	12/52	14/52	0	0	11/2

$Max\{\,-14/5,\ -12/8\,\} = -12/8$ (3)

1	2	3	4	5	6	0
0	1	0	0	0	1	2
1	0	0	13/104	0	1/2	19/8
0	0	0	−13/104	1	−1/2	−3/8
0	0	1	5/8	0	−52/8	39/8
0	0	0	13/104	0	3/2	35/8

$Max\{\,-3,\ -1\,\} = -1$ (4)

1	2	3	4	5	6	0
0	1	0	0	0	1	2
1	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	−8	4	3
0	0	1	0	5	−9	3
0	0	0	0	1	1	4

Taula Optima (5)

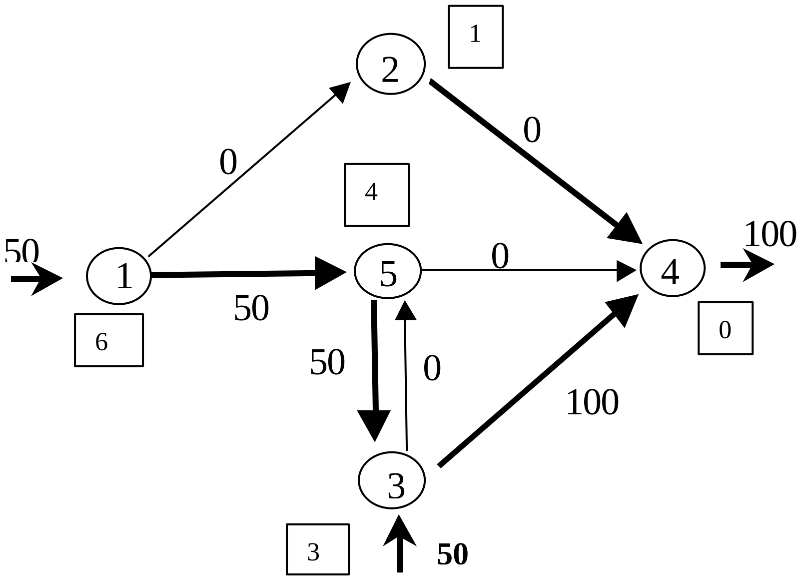
2)

1	2	3	4	5	0
0	1	8/52	5/52	0	11/4
1	0	1/13	9/52	0	11/4
0	0	4/52	9/52	1	−1/4
0	0	12/52	14/52	0	11/2

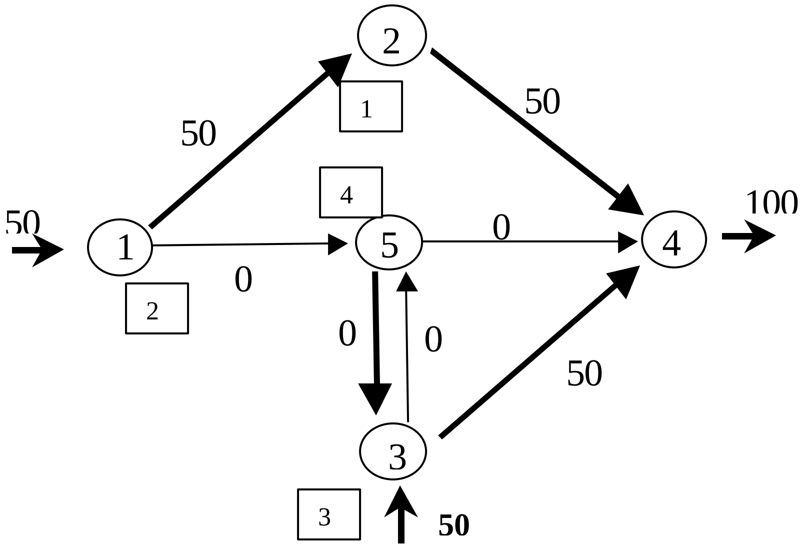
Dual no acotat; Primal Infactible (6)

3) El nus 4 és infactible: $x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 3$ és clarament infactible. Observant la primera restricció, si $x_2 \geq 3 \Rightarrow x_1 = 2$ i s'adopta $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ llavors $-10 + 27 = 17 > 11$. Per tant la solució està al nus 3.

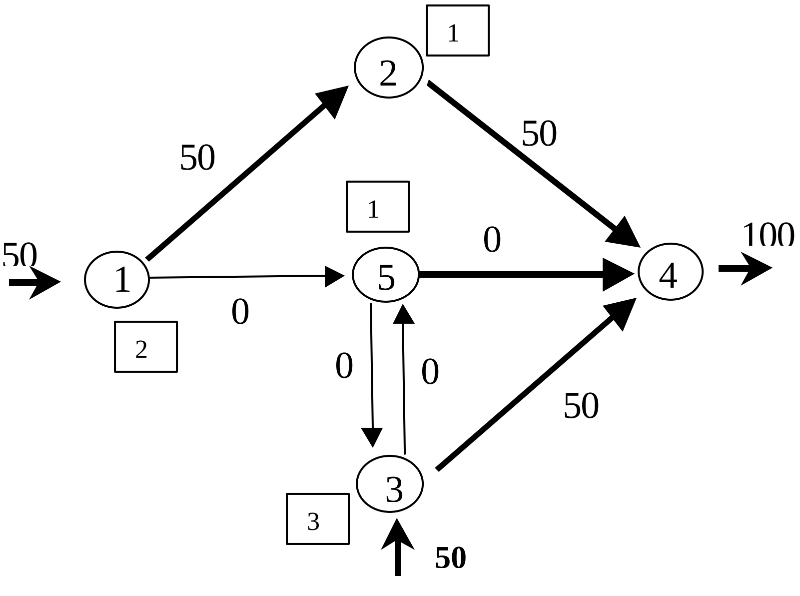
r_{12}=1-(6-1) = -4 <0
Min {50, 50,100}=50
Entra (1,2), Surt (1,5)

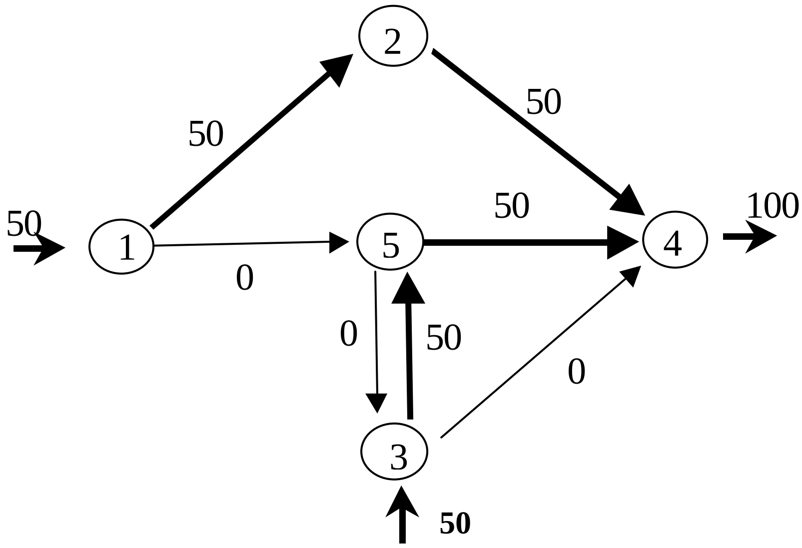


r_{54}=1-(5-0) = -4 <0
Min {50,0}=0
Pivotació degenerada
Entra (5,4), Surt (5,3)



r_{25}=2-(2-1) = 1 > 0
r_{35}=1-(3-1) = -1 < 0
Min {50}=50
Entra (3,5), Surt (3,4)



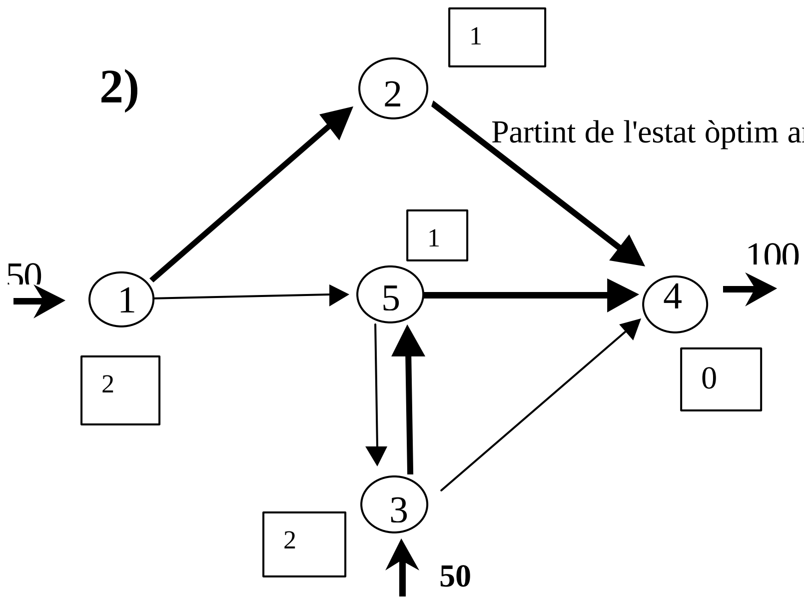


rij >= 0

òptim

Cost de transport = 200

2)



Partint de l'estat òptim anterior. El nou arc ha de verificar:

$3/2 - (\lambda i - \lambda j) < 0$:

$\lambda i > 3/2 + \lambda j$

La única possibilitat és (1,4)

$r_{14}=3/2-(2-0) = -1/2 < 0$

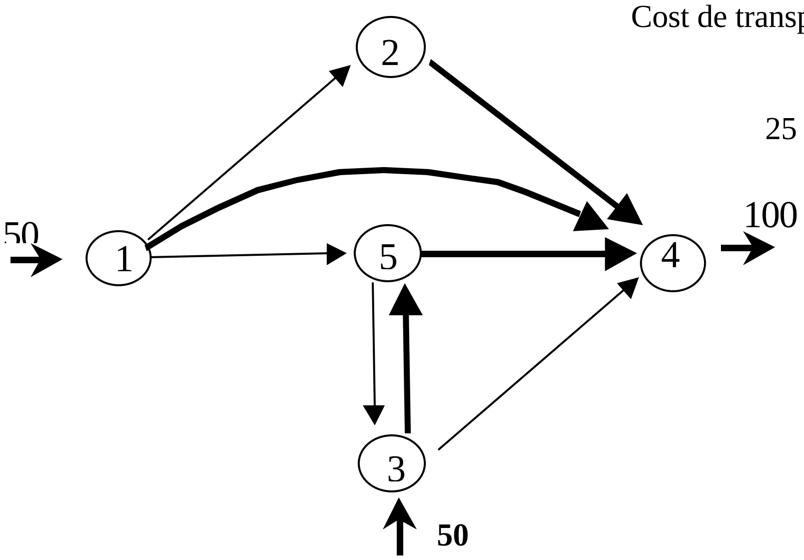
Rij > 0; òptim

Cost de transport: $3/2 \cdot 50 + 50 \cdot 1 + 50 \cdot 1 = 175$

Cost anterior de transport 200;

200 -175= 25 → es poden pagar

25 unitats pel lloguer de la nova línia



3)

r_{ij} >=0; òptim