Investigació Operativa. Grau d'Enginyeria Informàtica
Examen Final. Curs 2015-16

P1) [5 punts] S'està estudiant el rendiment computacional d'una aplicació informàtica que haurà de ser executada massivament pels usuaris d'una entitat bancària com part del seu sistema de banca electrònica. Es planteja la reprogramació i/o redisseny algorítmic dels mòduls que integren aquesta aplicació ja que es sospita que poden ser altament optimitzats en termes de rendiment computacional. Si bé les perspectives són bones per tal aconseguir millorar el rendiment de l'aplicació, se sap que la reprogramació de tots els mòduls serà econòmicament molt alta en termes d'hores d'analista/programador. Per tant s'opta per analitzar quins dels mòduls cal optimitzar per ser crítics en el rendiment global de l'aplicació. Els mòduls de l'aplicació accedeixen a una base de dades que permet "concurrència total"per obtenir determinades informacions. A més a més, hi ha una relació de dependència entre els mòduls ja que es passen informació d'uns als altres, provinent aquesta dels accessos a la base de dades. Se suposa que l'aplicació executa en un entorn multithread que permet que tants mòduls com es vulgui puguin executar-se en paral·lel.

La següent taula ens mostra per a cada mòdul a) els mòduls immediatament previs que cal haver executat, b) el temps d'execució que s'obté segons com està programat ara per ara (T^+), c) el temps que s'espera aconseguir (T^-) després de ser redissenyat/reprogramat (segons estimacions dels experts) i d) el cost γ expressat en milers d'hores d'analista/programador de reduïr en una unitat el temps d'execució del mòdul (p.ex. si es vol que el mòdul M_5 passi d'executar-se de 5 unitats de temps a 4,5 unitats de temps, el número de milers d'hores de redisseny/reprogramació serà de $6 \cdot (5 - 4{,}5) = 3$.)

mòdul	precedència	T^-	T^+	γ
M_1	0	1	2	3
M_2	M_1	2	3	1
M_3	0	1	4	6
M_4	M_2, M_3	3	4	2
M_5	M_2, M_4	3	5	6
M_6	M_4, M_5	1	1	?

Es vol enfocar el problema utilitzant la modelització CPM per lo que se us demana que responeu les qüestions que segueixen pensant en un problema de programació lineal que reflecteixi el model CPM. Per tant assigneu a cada mòdul M_i una variable τ_i que tindrà el significat de temps d'execució del mòdul. L'instant a partir del qual es podrà començar a executar el mòdul M_i serà t_i^- i l'instant en el que ja s'haurà executat serà t_i^+. Creeu tants mòduls o tasques fictícies (activitat nul·la) com calguin per enllaçar els mòduls.

Es demana:
- (1pt) Dibuixeu un graf en el que apareixin mòduls i activitats fictícies enllaçats i on cada nus es correspongui amb un instant d'inici o fí d'un mòdul (real o fictici) i per tant amb una variable t_i^- o t_i^+.
- (1pt) Constriccions del problema per les variables τ_i, t_i^- o t_i^+.
- (0.5pt) Una funció objectiu que, en ser minimitzada, proporcioni la temporització mínima, és a dir quin és el camí crític que indica els mòduls que cal reprogramar i quin serà el temps d'execució de l'aplicació completa.
- (1.25pt)Una funció objectiu que expressi, en funció de les variables τ_i, el cost econòmic total (en hores totals de programació) del redisseny de les aplicacions.
- (1.25pt) Finalment s'opta per intentar determinar una solució que estigui a cavall entre la que proporciona el mínim temps possible d'execució i la de mínim cost econòmic (que seria no fer res). Indiqueu una metodologia que aconseguiria aquest propòsit i indiqueu com caldria modificar les funcions objectiu dels apartats anteriors i (si és que cal) les constriccions.

P2) [3 punts] Resoleu el següent problema de programació lineal usant l'algoritme del símplex:

$$
\begin{array}{ll}
Min_x & 3x_1 + 4x_2 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\
 & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

P3) [2 punts] Considereu el problema:

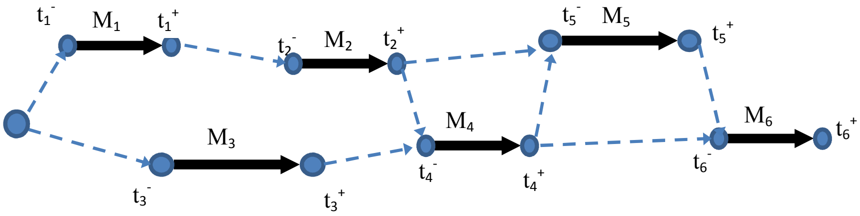
$$
\begin{array}{ll}
Min_x & x_1^2 + x_2^2 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\
 & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

1- Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker que hagin de verificar les solucions.

2- usar-les per veure si el punt $x_1 = 0, x_2 = 5/3$ és solució del problema.

P1. Solució:

1.



2. Cada una de les precedències comporta una tasca artificial; sigui P el conjunt de precedències. $P = \{(1,2),(2,4),(3,4),(2,5),(4,5),(4,6),(5,6)\}$.

$$T_i^- \le \tau_i \le t_i^+ - t_i^-$$
$$t_i^+ - t_i^- \le T_i^+$$
$$t_i^+ \le t_j^-, \quad (i,j) \in P$$
$$t_k^- \ge 0, \; \forall \, k \; t.q. \; \nexists (i,k) \in P$$

3. Funció objectiu: t_6^+

4. Funció objectiu: $\sum_{\ell=1}^{6} \gamma_\ell (T_\ell^+ - \tau_\ell)$

5. Cerca d'òptims Pareto; examinar solucions amb la funció objectiu parametritzada per $0 \le \alpha \le 1$

$$\alpha t_6^+ + (1-\alpha) \sum_{\ell=1}^{6} \gamma_\ell (T_\ell^+ - \tau_\ell)$$

P2. Solució:

$$\begin{array}{ll} Min_x & 3x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

Fase 0 amb variables artificials:

$$\begin{array}{ll} Min_x & x_5 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{array}, \quad I_B = \{3,5\}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \hline -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}, \quad \text{Entra } x_2, \hat{x}_2 = \min\{\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\} = \frac{5}{3}, \text{ Surt } x_5$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1/3 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 5/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}, \quad \text{Solució de la fase 0 } I_B = \{3,2\}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ \hline 5/3 & 0 & 0 & 4/3 & -20/3 \end{array}$$

Solució òptima única $x_3 = 5$, $x_2 = 5/3$. (0 les altres variables)

P3. Condicions KKT

1-

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \cdot (10 - 2x_1 - 3x_2) = 0 \\ \lambda_2 \cdot (-5 + x_1 + 3x_2) = 0 \\ \mu_1 x_1 = 0, \\ \mu_2 x_2 = 0 \\ (10 - 2x_1 - 3x_2) \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ \mu_1 \geq 0 \\ (-5 + x_1 - 3x_2) \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0 \end{array}$$

2-

$x_1 = 0$, $x_2 = 5/3$ és factible i $x_2 > 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$

$(10 - 2x_1 - 3x_2)_{(0,5/3)} = 5 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

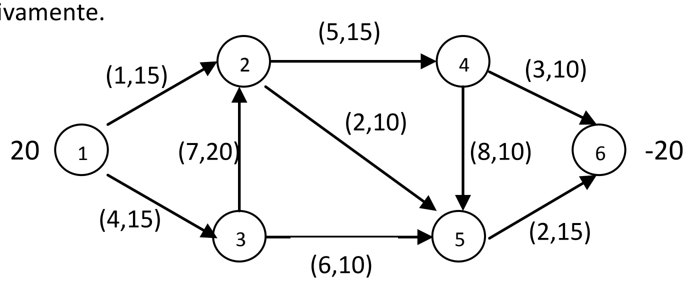
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 10/9,\ \mu_1 = -10/9 < 0$. El punt no és solució.

Investigación Operativa – Grau d'Informàtica

Examen Final-Segundo Parcial **13 de enero de 2016**

1. Considera el siguiente problema de flujos en redes, en el que hay un único nodo de producción (nodo 1), y un único nodo de demanda (nodo 6). Supongamos que deseamos enviar 20 unidades de flujo desde el nodo 1 hasta el nodo 6. Los valores que aparecen sobre los arcos indican el costo unitario de utilización y su capacidad máxima (c_{ij}, u_{ij}) , respectivamente.



   a. (1p) Con el dato del apartado anterior, queremos obtener el flujo factible de costo mínimo. ¿cuál es la matriz de incidencias nodos/arcos para este problema?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

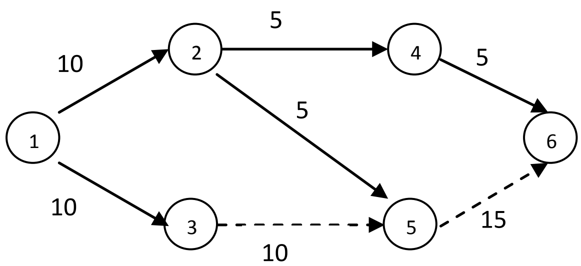
   b. (1p) Formula el problema de flujo de costo mínimo como un problema de programación lineal

La formulación es:

Min cx
Ax=b
$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

Donde *c* es el vector de coeficientes de coste asociados a los arcos, *b* es el vector de producciones/demandas asociados a los nodos (b_1=20, b_6=-20, b_i=0, i≠1, 6), *u* es el vector de capacidades asociadas a los arcos, y las variables de decisión x_{ij} indican el flujo que circula por el arco (i,j).

   c. (1p) ¿cuál es la solución básica asociada al árbol de expansión T= {(1,2), (1,3), (2,4), (2,5), (4,6)}, en la que el conjunto de variables no básicas a su cota inferior es L= {(3,2),(4,5)} y el conjunto de variables no básicas a su cota superior es U={(3,5), (5,6)}?



   d. (1.5p) ¿Es óptima la solución asociada al árbol de expansión del apartado anterior? Si no lo es, encuentra una solución óptima utilizando Simplex para problemas de flujos en redes a partir de este árbol. En el primer cambio de base, escoge como variable de salida la variable asociada a arco (1,2). ¿Cuál es el valor óptimo del problema?

Las variables duales asociadas a una base son la solución del sistema $c_{ij} = u_i - u_j$ para todo arco básico. Para la base del apartado anterior tenemos:

$u_1 - u_2 = 1$	$u_1 = 9$
$u_1 - u_3 = 4$	$u_3 = 5$
$u_2 - u_4 = 5$	$u_2 = 8$
$u_2 - u_5 = 2$	$u_5 = 6$
$u_4 - u_6 = 3$	$u_4 = 3$
$u_6 = 0$	

Los costes reducidos $r_{ij} = c_{ij}\ (u_i - u_j)$ son entonces:

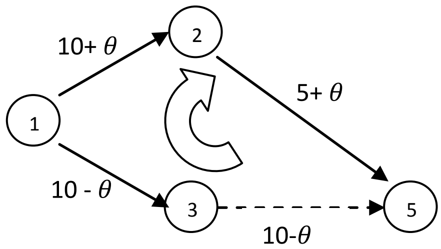
R1 < 0 ? $r_{32} = 7 - (5 - 8) = 10$

$r_{45} = 8 - (3 - 6) = 11$

R2 > 0 ? $r_{35} = 6 - (5 - 6) = 7$ ❋

$r_{56} = 2 - (6 - 0) = -4$

El arco (3,5) es el candidato a entrar a la base. El ciclo que se forma al introducirlo en la base (reduciendo su valor porque se encuentra en su cota superior) es:

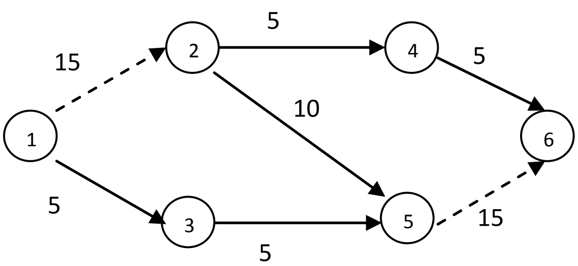


Para que la nueva solución sea factible se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} 10-\theta \geq 0 \\ 10-\theta \geq 0 \\ 10+\theta \leq 15 \\ 5+\theta \leq 10 \end{array}\right\} \quad \theta = 5$$

Tenemos dos candidatos para salir de la base, arcos (1,2) y (2,5). Ambos se encuentran en su cota superior. Escogemos arco (1,2) para salir de la base.

La nueva base está formada por los arcos: T= {(1,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,6)}. El conjunto variables no básicas en su cota inferior es L= {(3,2),(4,5)} (permanece igual). El conjunto de variables no básicas en su cota superior es U={(1,2), (5,6)}. El valor de las variables viene dado por:



Calculando las variables duales asociadas a la nueva base tenemos:

$u_1 - u_3 = 4$	$u_1 = 16$
$u_2 - u_4 = 5$	$u_2 = 8$
$u_2 - u_5 = 2$	$u_5 = 6$
$u_3 - u_5 = 6$	$u_3 = 12$
$u_4 - u_6 = 3$	$u_4 = 3$
$u_6 = 0$	

siendo los costes reducidos asociados a las variables no básicas:

R1 < 0 ? r_{32} = 7 - (12 -8) = 3

r_{45} = 8 - (3 -6) = 11

R2 > 0 ? r_{12} = 1 - (16 -8) = -7

r_{56} = 2 - (6 - 0) = -4

Puede comprobarse que se cumple la condición de optimalidad, puesto que todas las variables no básicas en R1 tienen coste reducido no negativo y las variables no básicas en R2 tienen un coste reducido no positivo.

El valor óptimo del problema es el valor de la solución asociada a esta base y es:

1 + 15 + 4 *5 + 5* 5 + 2* 10 + 6* 5 + 3* 5 + 2 *15 = 155

2. Considera el problema de Programación Lineal Entera (PLE):

$$
\begin{array}{lll}
z = & \min & -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\
 & \text{s.a.} & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 4 \\
 & & 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 20 \\
 & & 6x_1 + x_2 + x_3 \ge 7 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{ enteras}
\end{array}
$$

La solución óptima de la relajación lineal (LP) de (PLE) está asociada a la base B = {x2, x3, x6}. Para esta base tenemos la siguiente información:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

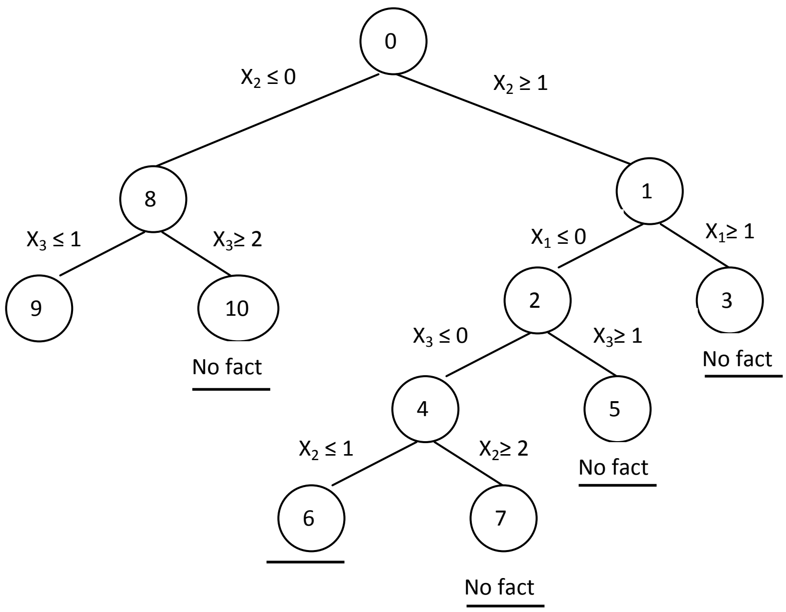
$\bar{b}$ = (x1, x3, x6) = B^{-1} b = (11/12, 5/6, 41/4),

z_B = -95/12

u = (-1/3,- 3/4, 0),

$\bar{c_j} = (\bar{c}_1, \bar{c}_4, \bar{c}_5)$ = (7/12, 1/3, 3/4),

a. Hemos realizado la siguiente exploración parcial del problema



La solución óptima de la relajación lineal del nodo 6 está asociada a la base B = {x5, x4, x6, S2, x1, x_2}. (s_2 es el exceso de la restricción $x_2 \geq 1$; y h_1, h_2 y h_3 son, respectivamente las holguras de las restricciones $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 1$ y $x_3 \leq 0$). Para esta base tenemos la siguiente información:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_6 \\ s_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z_B = -5;$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \quad \bar{c}_j = \begin{pmatrix} \bar{c}_{h1} & \bar{c}_{h2} & \bar{c}_{h3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

La solución óptima de la relajación lineal del nodo 6 está asociada a la base B = {x4, x1, x6, x2, x3}. Para esta base tenemos la siguiente información: (h_2 y h3 son, respectivamente las holguras de las restricciones $x_2 \leq 0$ y $x_3 \leq 1$)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 & -22/5 & -7/5 \\ 0 & 1/5 & 0 & -4/5 & -4/5 \\ 0 & -6/5 & 1 & 19/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/5 \\ 3/5 \\ 37/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z_B = -\frac{29}{5};$$

$$\bar{c}_j = \begin{pmatrix} \bar{c}_5 & \bar{c}_{h2} & \bar{c}_{h3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 13/5 & 8/5 \end{pmatrix}.$$

i. (1p) ¿cuál es actualmente una cota superior del óptimo del problema? ¿qué vector de valores $\bar{b}$ la proporciona?

   Una cota superior es z_{sup} = -5. El vector que la proporciona es (x1, x2, x3) = (0,1,0).

ii. (1p) ¿cuál es la cota inferior en el nodo 9?

   $$z_{sup} = \left\lceil -\frac{29}{5} \right\rceil = -5$$

iii. (1.5p) Completa la exploración hasta obtener la solución óptima del problema entero.

   Como el nodo 9 es el 'único que no está cerrado, pero la cota inferior que tiene coincide con la cota superior, lo podemos eliminar por acotación. Por tanto, la exploración del árbol está completa y la solución optima es la que ha proporcionado la incumbente que es (x1, x2, x3) = (0,1,0).

b. (2p) Obtén los 3 cortes de Gomory violados por la solución óptima de la relajación lineal en el nodo 0. Expresa los cortes en función de las variables originales del problema.

$$Y = B^{-1}N = (Y_1, Y_4, Y_5) = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/12 & 1/3 & -1/4 \\ 11/6 & -1/3 & 1/2 \\ 19/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

i=1; $\frac{5}{12}x_1 + \frac{4}{12}x_4 + \frac{3}{4}x_5 \geq \frac{11}{12}$

i=2; $\frac{5}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq \frac{5}{6}$

i=3; $\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_5 \geq \frac{1}{4}$

Por la primera restricción tenemos que $x_4 = 8 - 2x_1 - 6x_2 - 3x_3$. Por la segunda restricción tenemos que $x_5 = 7 - 5x_1 - 4x_2 - 4x_3$ **.** Por tanto los cortes de Gomory expresados en las variables originales (x1, x2, x3) son:

i = 1; $4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 7$

i = 2; $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 8$

i = 3; $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 5$