FIB. Enginyeria d'Informàtica

MDIO-1. Examen parcial. Curs 2002/03. 1^{er} **Q**

P1. Una planta de producció requereix pel seu funcionament com mínim els següents obrers en els diferents periodes de producció de 4 hores cada un:

TORN	requeriments
$1-5$	22
$5-9$	55
$9-13$	88
$13-17$	110
$17-21$	44
$21-1$	33

El període de 21 a 1 precedeix al de 1 a 5. Els contractes de treball es fan per vuit hores diàries consecutives. Si x_t és el número d'obrers que entren al torn $t = 1, 2, ..., 6$, determineu mitjanant un problema de programació lineal quin ha de ser el valor óptim de x_t de forma que el número total d'obrers contractats sigui mínim.

P2 Donat el problema:

$$\begin{array}{lllll}
Min & -12x_1 & -12x_2 & -16x_3 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1 \\
 & x_1 & +x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & \leq \frac{11}{9} \\
 & x_1 & +x_2 & +\frac{5}{3}x_3 & \leq \frac{53}{36} \\
 & -\frac{1}{2}x_1 & +x_2 & & \leq \frac{2}{3}
\end{array}$$

1. Reproduïu el tableau del símplex per la base $I_B = \{4, 5, 3, 7\}$.
2. A partir de la taula anterior efectueu una passa del símplex en la seva forma revisada.
3. Si considerèssim ara els costs $(c_1, c_2, c_3) = (-13, -2, 10)$, seria òptima la base $I_B = (4, 2, 3, 7)$

SOLUCIONS

1)

$$
\begin{array}{ll}
Min & \sum_{\ell=1}^{6} x_\ell \\
& x_6 + x_1 \geq 22 \\
& x_1 + x_2 \geq 55 \\
& x_2 + x_3 \geq 88 \\
& x_3 + x_4 \geq 110 \\
& x_4 + x_5 \geq 44 \\
& x_5 + x_6 \geq 33 \\
& 0 \leq x_\ell \in Z, \quad \ell = 1, 2, ...6
\end{array}
$$

2.1)

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -3/5 \\ 1/5 & 1/5 & -4/5 \\ 3/5 & 3/5 & 3/5 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
Y_0 = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11/9 \\ 53/36 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/60 \\ 2/45 \\ 53/60 \\ 2/3 \end{pmatrix}; \ \ z_0 = -212/15
$$

$$
r = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -3/5 \\ 1/5 & 1/5 & -4/5 \\ 3/5 & 3/5 & 3/5 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ -12/5 \\ 48/5 \end{pmatrix}
$$

1	2	3	4	5	6	7	8
2/5	2/5	0	1	0	−3/5	0	7/60
1/5	1/5	0	0	1	−4/5	0	2/45
3/5	3/5	1	0	0	3/5	0	53/60
−1/2	1	0	0	0	0	1	2/3
−12/5	−12/5	0	0	0	48/5	0	212/15

2.2) Iteració símplex revisat.

$$
\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -48/5 \\ 0 \end{pmatrix}; r_1 = -12 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -48/5 \\ 0 \end{pmatrix} = -12/5 < 0
$$

Entra x_1.

$$
y_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 3/5 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{c} I^+_{j_q} = I^+_1 = \{1, 2, 3\} \\ \hat{x}_1 = Min\{ \dfrac{7/60}{2/5}, \dfrac{2/45}{1/5}, \dfrac{53/60}{3/5} \} = 10/45 \end{array}
$$

Surt $i_2 = 5$; Nova base $I_B = \{4, 1, 3, 7\}$. Matriu pel canvi de base i nou terme de la dreta:

$$
\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ x_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/60 \\ 2/45 \\ 53/60 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/48 \\ 2/9 \\ 3/4 \\ 7/9 \end{pmatrix}
$$

$$B_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = -220/15; \qquad \begin{array}{l} r_2 = -12 - (1,1,1,1)\lambda = 0 \\ r_5 = 0 - (0,1,0,0)\lambda = 12 > 0 \quad \text{òptim} \\ r_6 = 0 - (0,0,1,0)\lambda = 0 \end{array}$$

2.3)

Cal calcular la inversa per $I_B = \{4,2,3,7\}$. La columna no bàsica per la variable x_2 en la taula per la base $I_B = \{4,5,3,7\}$ és la $y_2 = (2/5, 1/5, 3/5, 1)^{\top}$. Per tant, la matriu d'actualització de la base per pasar de la $I_B = \{4,5,3,7\}$ a la $I_B = \{4,2,3,7\}$ és:

$$\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix}; \;\; r_1 = -13 - (1,1,1,-1/2) \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} = -11 < 0$$

Per tant $I_B = \{4,2,3,7\}$ no és òptima.