

Video 2 → Problemes lineals

Exercici 2 diputats

2. En el congreso de los diputados hay n comités. El j -ésimo comité tiene v_j vacantes, $j=1, \dots, n$. Hay m diputados para cubrir las vacantes ($m \leq v_j$). P_{ij} es la preferencia del diputado i por una vacante del comité j ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). Cada vacante debe cubrirse por un diputado pero cada diputado puede cubrir, como máximo, vacantes en dos comités. Hay tres tipos de comités: exclusivos, semiexclusivos y no exclusivos. Si un diputado cubre una vacante en un comité exclusiva, no puede cubrir ninguna otra, pero si cubre una vacante en uno semiexclusivo y otra en otro comité, el otro debe ser no exclusivo.

Formular este problema como uno de programación entera sometido a las condiciones dadas que maximice las preferencias. ¿Cuál sería la formulación en el ejemplo numérico siguiente?

Diputado	Agricultura	Banca	Educación	Autonomías	Judicial	Ciencia	Interior	Correos
1	0	1	0	1/2	0	0	0	1/2
2	1/3	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1/2	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	1/2	0
6	0	0	0	1/2	1	1/3	0	0
7	0	0	0	1	1/2	0	0	1/3
8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0
10	0	1	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0
12	1/2	0	0	0	0	0	0	0
13	1/3	1/2	0	1	1	0	0	0
#vacantes	5	3	1	1	1	2	1	1
Tipo	Semie	Semie	Semie	Ex	Semie	Semie	Noex	Noex

• n comités, $j = 1, \dots, n$

• $v_j =$ vacantes del comité j

• m diputados, $i = 1, \dots, m$

• $m \leq v_j$

• $P_{ij} =$ preferència diputat i al comité j

• 1 vacante \leftrightarrow 1 diputat

1 diputat $\leftrightarrow \{1, 2\}$ vacants

• 3 comites \rightarrow Xocurivo (diputat només aquí)

↳ Semic (diputat aquest i com a més, no exclusiu)

↳ no Xocurivo

Volem maximitzar preferències.

$$x_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si diputat } j \text{ assignat a comité } i \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 2 \quad j \leq j \leq n$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq u_i \quad j \leq i \leq m$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{i \in \text{Exclusiu}} x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\textcircled{4} \quad (\sum_{i \in \text{semi}} x_{ij} + \sum_{i \in \text{no excl}} x_{ij}) \leq 2(1 - \delta_j), \quad j = 1, \dots, n$$

$$n = \# \text{ diputats}$$

$$m = \# \text{ comites}$$

$$v_i = \# \text{ vacantes del comite } i$$

$$I_{\text{ex}} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$I_{\text{semi}} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$I_{\text{no excl}} = \{7, 8, 9\}$$

$$\text{funció objectiu: } \max_{x, \delta} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{v_i} x_{ij} \cdot P_{ij} \right)$$

$$\text{s.a.: } \textcolor{red}{1}, \textcolor{blue}{2}, \textcolor{green}{3} \cup \textcolor{red}{4}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \delta_j \in \{0, 1\}$$

Video 2 → Problemes lineals

Exercici 1 tallar

I. Un problema común a diversas industrias es el de las pérdidas asociadas al corte de rollos de papel, tela, planchas metálicas etc., para poder cumplimentar los pedidos de los clientes. Este problema deriva del hecho que normalmente las fábricas producen rollos de anchura estándar (p.ej. 100 pulgadas) y longitud fija (p.ej. 500 pies). Los clientes requieren a menudo rollos de menor anchura para sus usos. Los rollos se cortan en una máquina cuyas cuchillas pueden fijarse a cualquier combinación de anchuras, siempre que la anchura de la combinación no exceda la del rollo. Así, el problema se convierte en el de asignar los pedidos de manera que:

- El número total de rollos estándar usados para satisfacer los pedidos sea mínimo, o bien
- Se minimice la pérdida total, siendo la pérdida la parte de un rollo no usada al ser su anchura menor que cualquier medida pedida, así como el número de rollos cortados que sobran respecto al número de rollos (de cierta anchura) pedidos.

Suponiendo que una fábrica de papel de periódico que fabrica rollos estándar de 100", debe satisfacer un pedido de 75 rollos de 24", 50 rollos de 40" y 110 rollos de 32", formular el problema como uno de programación entera, para las dos funciones objetivo anteriores.

Sugerencia: enumerar las posibilidades de cortar un rollo de anchura 100" en rollos de anchuras 24", 40" y 32". Definir como variable de decisión x_i a la i -ésima forma de efectuar el corte.

$$\text{a) Funció objectiu: } \min_x \left(\sum_{i=1}^{18} x_i \right)$$

$$\text{s.a.: } x \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 75 \\ 50 \\ 110 \end{bmatrix} \leq Ax$$

$$\text{b) Funció objectiu: } \min(p^T x + 24a_1^T x + 40a_2^T x + 32a_3^T x)$$

$$\text{s.a.: } x \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 75 \\ 50 \\ 110 \end{bmatrix} \leq Ax$$

Objectiu $\rightarrow \min(\text{quantitat rolls})$ o $\min(\text{pèrdua rolls no utilitzades} + \text{rolls excedents})$

$$\# \text{ rolls estàndard} = 100^n$$

$$\text{Pedido: } \rightarrow 75 \text{ rolls } 24"$$

$$\hookrightarrow 50 \text{ rolls } 40"$$

$$\hookrightarrow 110 \text{ rolls } 32"$$

```
for(i=0; i<4; i++) //24
for(j=0; j<2; j++) //40
for(k=0; k<3; k++) //32
if(i*24+j*40+k*32 <= 100)
print("i=", i, " j=", j, " k=", k)
```

maneres de tallar

$$24 \quad 40 \quad 32$$

$$a_i = (n_1, n_2, n_3) \geq 0$$

```
a_0 (i=0, j=0, k=1)
| (i=0, j=0, k=2)
| (i=0, j=0, k=3)
| (i=0, j=1, k=0)
| (i=0, j=1, k=1)
| (i=0, j=2, k=0)
| (i=1, j=0, k=0)
| (i=1, j=0, k=1)
| (i=1, j=0, k=2)
| (i=1, j=1, k=0)
| (i=1, j=1, k=1)
| (i=1, j=2, k=0)
| (i=2, j=0, k=0)
| (i=2, j=0, k=1)
| (i=2, j=1, k=0)
| (i=2, j=1, k=1)
| (i=3, j=0, k=0)
a_4 (i=4, j=0, k=0)
```

$$P = \lambda n \in \mathbb{R}^3 \mid 24n_1 + 40n_2 + 32n_3 \leq 100 \quad$$

$$n_1, n_2, n_3 \geq 0$$

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_4]$$

$$\begin{bmatrix} 75 \\ 50 \\ 110 \end{bmatrix} \leq Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_4 \\ 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + \dots + 3x_4 \end{bmatrix}$$

$$-75 + a_1^T x = \# \text{ rolls } 24$$

$$-50 + a_2^T x = \# \text{ rolls } 40$$

$$-110 + a_3^T x = \# \text{ rolls } 32$$

Video 3 → Sistema en forma canònica i base factible (canvi base)

Exercici 4

4. Calculeu mitjançant pivotacions la solució bàsica (no factible) corresponent als índexos bàsics $I_B = \{4, 2, 6\}$ pel conjunt de restriccions en forma estàndard:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 &= 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 6)$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{mD utilitzar amb } 4, 2, 6$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 & & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 5 \\ \hline b+b-2a & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 5 \\ \hline c+c-\frac{c}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & & -7 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 2 \\ \hline a+a+c & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 2 \\ \hline -1/2 & 1 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccccc|c} 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 & & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -3 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (x_4, x_2, x_6) = (2, 2, -3) \\ \text{negatiu} \rightarrow \text{no factible} \end{array} \right\}$$

Exercici 1

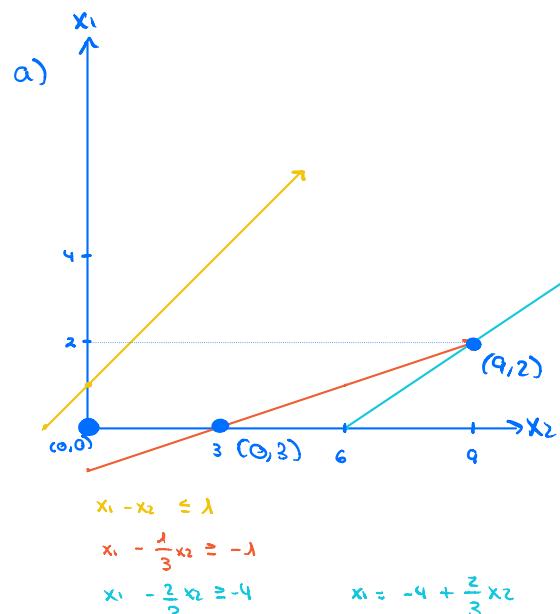
1. Donat el problema de Programació Lineal i les functions objectiu 1) a 5):

$$\text{Max } c^T x$$

$$\begin{aligned} s.a : \quad & x_1 - x_2 \leq 1 & (R1) \\ & x_1 - \frac{1}{3}x_2 \geq -1 & (R2) \\ & x_1 - \frac{2}{3}x_2 \geq -4 & (R3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & (R4), (R5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & c^T x = 4x_1 - 4x_2 & 3) \quad & c^T x = 4x_1 + 6x_2 \\ 2) \quad & c^T x = 10x_1 + 10x_2 & 4) \quad & c^T x = -x_1 - x_2 \\ & & 5) \quad & c^T x = -2x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

- (a) Representar gràficament la regió factible de les restriccions. Es acotada o no ?
(b) Trobar tots els extrems del poliedre que constitueix la regió factible i determinar els òptims corresponents a les f. objectius 1) a 5). En quins casos el problema és acotat ?
(c) Repetir els apartats anteriors si:
a) La restricció (R3) és ara $x_1 - \frac{5}{3}x_2 \geq -4$
b) (R1) a (R5) no s'alteren i s'afageix (R6): $x_1 \leq 8$
c) (R1), (R2), (R4), (R5) no s'alteren però (R3) és ara: $x_1 - \frac{5}{3}x_2 \geq 4$



b) Haig d'afegeir noves variables a restriccions, i canviar signes per tenir resultats positius

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/3 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 4 & \end{array} \quad I_B = \{3, 4, 5\} \quad \text{mD En el gràfic, vèrtex (0,0)}$$

No es acotada.

3	4	5	9	2
1	0	0	2	-1
0	3	0	-1	4/3
0	0	1	-1	2/3

→ provar de treure 4; incorporar 2.

$b \leftarrow 3b$	3	4	5	9	2
	1	0	0	2	-1
	0	3	0	-3	1/3
	0	0	1	-1	2/3

$a \uparrow$ $a+b \uparrow$ $c \uparrow$ $c - \frac{2}{3}b \uparrow$

$$I_2^+ = \{i_4=2, i_5=3\}$$

Nova Base $\rightarrow I_B = \{3, 2, 5\}$ $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vértex $(0, \frac{2}{3})$

→ provar de treure 5; incorporar 1.

$b \leftarrow b + 3c$	3	4	5	9	2
	1	-1	2	0	0
	0	-3	3	0	1

$a \uparrow$ $a + 2c \uparrow$

$$I_3 = \{3, 2, 1\}$$

$8(9)$

4 vértex $x_1 x_2$

Video 4 → Problema auxiliar

Exercici propfe

$$\begin{aligned} \text{max } & 6x_1 + 32x_2 \\ \text{s.a.: } & x_1 - 6x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

② Passar a forma estàndard \Rightarrow problema auxiliar

$$\begin{aligned} \min & -6x_1 - 32x_2 \\ \text{s.a.: } & x_1 - 6x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{problema auxiliar}$$

$I_B = \{3, 4, 6\}$	3	4	5	6
a	1	-6	1	0
b	1	-4	0	1
c	1	-1	0	-1
d	0	0	0	1
e	-1	1	0	0

$e \leftarrow d - c$

$I_B = \{3, 4, 6\}$

3	4	5	6
a	1	-6	1
b	1	-4	0
c	1	-1	0
d	-1	1	0

$$\textcircled{2} \quad \hat{x}_1 = \min \{3/x_1, 5/x_1, 1/x_1\} = 1 \rightarrow (0, 1)$$

base óptima

del problema auxiliar,

en la sortir variable

artificial x_6 .

- Entra x_1
- Surt x_6

$$I_B = \{3, 4, 1\}$$

	1	2	3	4	5	6	
a	1	-6	1	0	0	0	3
b	1	-4	0	1	0	0	5
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	-1	1	0	0	1	0	-1

	1	2	3	4	5	6	
a	0	-5	1	0	-1	1	2
b	1	-4	0	1	0	0	5
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	-1	1	0	0	1	0	-1

	1	2	3	4	5	6	
a	0	-5	1	0	-1	1	2
b	0	-3	0	1	1	-1	4
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	-1	1	0	0	1	0	-1

	1	2	3	4	5	6	
a	0	-5	1	0	-1	1	2
b	0	-3	0	1	1	-1	4
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	0	0	0	0	0	1	0

$I_B' = \{3, 4, 1\} \rightarrow$ base óptima pel problema auxiliar
i és factible per P.

\textcircled{3} Ho passem al problema original P (on x_6 no existeix)

$$\begin{array}{ll} \min & -6x_1 - 32x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 - 6x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1 - x_2 - x_5 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

	1	2	3	4	5	
a	0	-5	1	0	-1	2
b	0	-3	0	1	1	4
c	1	-1	0	0	-1	1
d	-6	-32	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	
a	0	-5	1	0	-1	2
b	0	-3	0	1	1	4
c	1	-1	0	0	-1	1
d	0	-38	0	0	-6	6

coefficients de cost redut?
 $\rightarrow -38 - 6$ (repòrt)

Veig que x_2 té totes les files negatives \Rightarrow P est

NO ACOTAT \rightarrow no té solució

$$d = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} d_3 \\ d_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_5 \end{array} \right)$$

Exercici profle 2.0.

\rightarrow serà acotat

$$\begin{array}{ll} \min & -6x_1 - 32x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

② Passar a forma estandard \Rightarrow problema auxiliar

$$\begin{array}{ll} \text{min} & -6x_1 - 32x_2 \\ \text{s.a.:} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_6 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{array} \end{array}$$

problema auxiliar

$$I_B = \{3, 4, 6\}$$

	1	2	3	4	5	6	
a	1	1	1	0	0	0	5
b	1	-4	0	1	0	0	5
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	0	0	0	0	1	0	0
e	-1	1	0	0	1	0	-1

$$I_B = \{3, 4, 6\}$$

$$\min \frac{1}{4} \frac{5}{1} + \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{4} Y = 1 \text{ and } 40,0,14$$

Entre 1, sqrt 6

	1	2	3	4	5	6	
a	1	1	1	0	0	0	5
b	1	-4	0	1	0	0	5
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	-1	1	0	0	1	0	-1

	1	2	3	4	5	6	
a	1	1	1	0	1	-1	4
b	0	-3	0	1	1	-1	4
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	-1	1	0	0	1	0	-1

	1	2	3	4	5	6	
a	1	1	1	0	0	0	5
b	1	-4	0	1	0	0	5
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	-1	1	0	0	1	0	-1

	1	2	3	4	5	6	
a	0	2	1	0	1	-1	4
b	0	-3	0	1	1	-1	4
c	1	-1	0	0	-1	1	1
d	0	0	0	0	0	1	0

$\rightarrow P \leftarrow D$

	1	2	3	4	5	
a	0	2	1	0	1	4
b	0	-3	0	1	1	4
c	1	-1	0	0	-1	1
d	-6	-32	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	
a	0	2	1	0	1	4
b	0	-3	0	1	1	4
c	1	-1	0	0	-1	1
d	0	-38	0	0	-6	6

$$\min \frac{1}{2} \frac{4}{2} \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow \text{Entre 2}$$

sqrt 1

	1	2	3	4	5	
a	0	2	1	0	1	4
b	0	-3	0	1	1	4
c	1	-1	0	0	-1	1
d	0	-38	0	0	-6	6

	1	2	3	4	5	
a	0	2	1	0	1	4
b	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	10
c	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
d	0	-38	0	0	-6	6

	1	2	3	4	5	
a	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
b	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	10
c	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
d	0	-38	0	0	-6	6

	1	2	3	4	5	
a	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
b	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	10
c	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
d	0	0	19	0	13	82

$$I_B = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$(-1) + \frac{1}{2}(2) = 0$$

$$-3 + 2(-\frac{3}{2}) = 0$$

Exercici transpos

$$\begin{array}{l}
 \min x: -300x_1 - 250x_2 \\
 \text{s.o.:} \quad \begin{array}{lll}
 x_1 + 2x_2 + x_3 & = 150 \\
 3x_1 + 2x_2 + x_4 & = 300 \\
 2x_1 + x_5 & = 100 \\
 x_1 \geq 0
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} i = 1, \dots, 5
 \end{array}$$

1	2	3	4	5	
2	2	1	0	0	150
3	2	0	1	0	300
2	0	0	0	1	100
300-250	0	0	0	0	0

$$\min \left\{ \frac{150}{1}, \frac{300}{3}, \frac{100}{2} \right\} = \min \{ 150, 100, 50 \} = 50 \rightarrow \text{entra } x_1 \text{ sort } x_5$$

x₅ est le que té 001

1	2	3	4	5	
0	2	1	0	-1/2	100
0	2	0	1	-3/2	150
1	0	0	0	1/2	50
0	-250	0	0	150	25000

$$\min \left\{ \frac{100}{2}, \frac{150}{2} \right\} = \min \{ 50, 75 \} = 50 \rightarrow \text{entra } x_2 \text{ sort } x_3$$

x₃

1	2	3	4	5	
0	1	1/2	0	-1/4	50
0	0	-1	1	-1	50
1	0	0	0	1/2	50
0	0	125	0	175/2	27500

Taula óptima \rightsquigarrow solució única del problema
 $x_B = \{x_2, x_4, x_1\} = (50, 50, 50)$

Video 5 → Simplex revisat

- Es treballa matricialment, no de forma canònica
- De iteració en iteració no conservem tots els elements de la forma canònica
- És necessari actualitzar sempre la inversa de la base B_K^{-1} i B_{K+1}^{-1}

	2	3	4	5	
1	1	1	0	0	5
1	-4	0	1	0	5
1	-1	0	0	-1	1
-6	-32	0	0	0	

partim de la $B_K = \{3, 4, 1\} = I_3$ $I_n = \{2, 5\}$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r = c_B - N^T B_0^{-1} c_B$$

$$B_{K+1}^{-1} = n^T \cdot B_K^{-1}$$

$$y_0 = B_0^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_0^T \cdot c_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda$$

$$r_2 = c_2 - N^T \cdot \lambda$$

$$r_2 = -32 - (1, 4, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -38 \quad \rightarrow 2 \text{ pot entrar a la base} \rightarrow \text{qui ha de sortir?}$$

hem de calcular y_2

$$y_2 = B_0^{-1} \cdot a_2$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{4}{2} \rightarrow \min \rightarrow (1, 0, 0)$ surt amb surt 3
 $\frac{-3}{-1} \rightarrow$
 $\frac{-1}{-1} \rightarrow$

$$\begin{aligned} z_0 &= -6 \text{ per la base } \{3, 4, 1\} \\ z_1 &= -6 - 38 \cdot 2 = -82 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Base}_{K+1} (B_1) \\ \downarrow \end{array} \right.$$

Nova base B_1 és óptima? NOVA ITERACIÓ

Tenim...

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_{B_0} = \{3, 4, 1\} \quad \text{nova incorporació} \rightarrow 2 \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I_{B_1} = \{2, 4, 1\}$$

hem de trobar B_1^{-1}

$$B_{K+1}^{-1} = n^T B_K^{-1}$$

$$B_1^{-1} = n^T B_0^{-1} = n^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = B_0^{-1} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow n^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1} = n^{-1} B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & 1 & -5/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = y_0 = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & 1 & -5/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

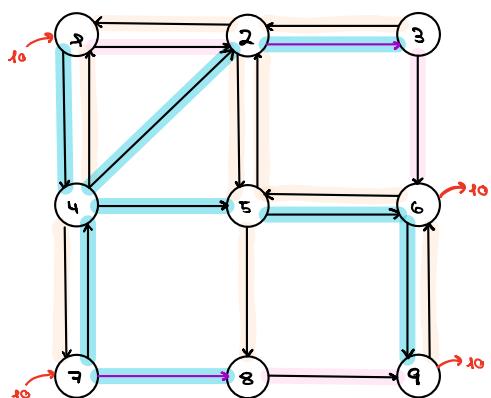
Coster reductie → 13,54
 met jaal hem tot

$$r_5 = c_5 - a_5^T \lambda = 0 - (0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} -19 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \underline{\underline{13 > 0}}$$

$$a = B_1^{-T} \cdot c_{B_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}_{\leftarrow 2}^{\leftarrow 4} = \begin{pmatrix} -19 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Video 6 → networks

Exercici 6 - nets.



capacitat màxima: $u_{ij} = 8$

$$c_{ij} = 2 \text{ , except for } \begin{cases} c_{23} = 3 \\ c_{78} = 3 \end{cases}$$

minimize total cost. → with simplex

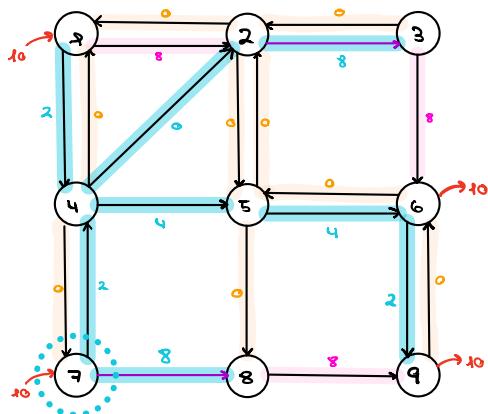
Starting with...

$$I_B = \{(1,4), (6,9), (4,5), (7,4), (5,6), (7,8), (4,2), (2,3)\}$$

$$I_B^+ = \{(1,2), (3,6), (8,9)\}$$

$$I_B^- = \{(2,1), (4,1), (5,8), (2,5), (5,2), (3,2), (4,7), (6,5)\}$$

→ Assigno costos per inspecció (miro quants entren i quants surten)



Segons l'algoritme de simplex...

- ① determino un node aleatori "root" per establir-lo de variable dual i el poso a 0.

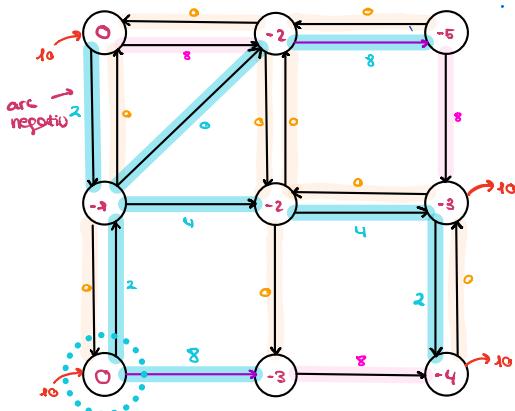
Afago el 7 com a arrel

Calculo funció objectiu → $\text{cost}_{ij} \cdot \text{flux}_{ij} = 86$

- ② Com que ja tinc l'arbre de recobriment, puc calcular les variables duals

↔ per links bàrics $a = (i,j) \in I_B \rightarrow c_{ij} = \bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_j$

$$\bar{\alpha}_i = -(\text{cost root} \rightarrow i)$$



- ② Ara podem calcular els costos reduïts pels links NO bàrics (N)

$$\hookrightarrow r_{ij} = c_{ij} - (\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_j) \Leftrightarrow (i,j) \in I_B^+ \cup I_B^-$$

$$I_B^+ = \{(1,2), (3,6), (8,9)\}$$

$$I_B^- = \{(2,1), (4,1), (5,8), (2,5), (5,2), (3,2), (4,7), (6,5)\}$$

$$r_{12} = 2 - (0+2) = -2$$

$$r_{45} = 4 - (-5+2) = 3$$

$$r_{89} = 4 - (-4+2) = 2$$

$$r_{21} = 2 - (-2+0) = 2$$

$$r_{41} = 4 - (-2+0) = 2$$

$$r_{58} = 5 - (-2+2) = 3$$

$$r_{25} = 2 - (-2+2) = 0$$

$$r_{52} = 5 - (-2+2) = 1$$

$$r_{32} = 3 - (-5+2) = 4$$

$$r_{96} = 9 - (-4+2) = 5$$

$$r_{62} = 6 - (-4+2) = 2$$

$$r_{65} = 6 - (-2+2) = 2$$

$$r_{58} = 5 - (-2+2) = 3$$

- ③ Miro si amb els costos reduïts hem trobat la solució óptima

↔ si es compleix que...

En $I_B^+ \rightarrow r_a \leq 0$
AND
En $I_B^- \rightarrow r_a \geq 0$

optimal solution

⊕ En I_B AND $r_a = 0$

En $I_B^+ \rightarrow r_{36}, r_{89} \neq 0 \rightarrow$ hoig

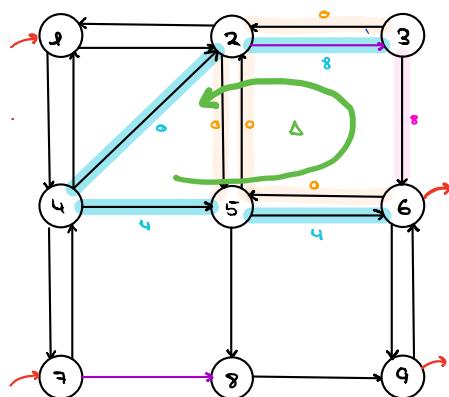
de continuar

→ En cas que no... ① Busca alguna $a \in \text{IN}^+$ amb $r_a > 0$ \Rightarrow Exemple $r_{36} = 3$

OR

$a \in \text{IN}^-$ amb $r_a < 0$

② La considero i borro el cicle



En $\text{IN}^+ \Rightarrow r_a < 0$
AND
En $\text{IN}^- \Rightarrow r_a > 0$
④ En IB $\Rightarrow r_a = 0$

UNIQUE solution

③ Calculo el maxim augment/diminució en el cicle $(i,j) \in \text{IN}^- / (i,j) \in \text{IN}^+$

Flow en direcció contrària de 3,6 $\Rightarrow \Delta = \min \{ 8, 8, 0, 4, 4 \} = 0 \Rightarrow$ no implica canvi

Ulleres $\Rightarrow (4,2) \Rightarrow \text{IN}^-$, (3,6) entra a IB
 $(2,3) \Rightarrow \text{IN}^+$, (3,6) entra a IB } qualsevol de les opcions és vàlida

④ Calculo els nous flows i indexos per $\text{IB}, \text{IN}^+, \text{IN}^-$

④ Torno a l.

Vídeo 7: Problemes de programació línica entera

Un transportista ha de trasladar y montar un conjunto de unidades de 6 tipos diferentes utilizando un camión de capacidad $60 m^3$. La siguiente tabla proporciona los volúmenes de los diferentes tipos de piezas y los valores unitario de cada tipo de pieza.

Tipo	1	2	3	4	5	6
volumen m^3	1	2	1	3	$\frac{3}{2}$	4
valor	10	11	10	12	15	7

Si x_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ es la cantidad de cada tipo de pieza, determinar estas cantidades de forma que se maximice el valor de la carga sabiendo que:

- Si se trasladan unidades de tipo 1 entonces debe trasladarse un kit de montaje que ocupa $3 m^3$.
- Si se transportan unidades de tipo 2 no pueden transportarse unidades de tipo 3 y 4 a la vez.
- Si se transportan unidades de tipo 3 deben transportarse como mínimo 2 unidades de tipo 5.
- Al menos deben transportarse unidades de tres tipos.

6 tipus unitats el camió amb $60 m^3$

$x_i \rightarrow$ quantitat tipus i

- ① per a $i=1$ amb $\oplus 3m^3$ (no valor econòmic)
- ② per a $i=2$ amb $i=3,4$ no es pot a la vegada
amb $(2,-), (2,3), (2,4), (-,3,4)$
- ③ per a $i=3$ amb min 2 unitats de $i=5$
- ④ $m = 3$ (min diferents tipus)

$$\begin{aligned} \text{Max}_x & 20x_1 + 22x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 15x_5 + 7x_6 \\ \text{s.a.: } & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + \frac{3}{2}x_5 + 4x_6 + 3x_7 \leq 60 \\ & 0 \leq x_i \leq \hat{x}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} x_7 = 10 \text{ altrewise} \\ \rightarrow C \end{array} \right. \\ & \text{contriccions addicionals} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_i \leq \hat{x}_i \\ \rightarrow C_{\text{fitat}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

② $x_2 \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_2 \leq x_4 \text{ amb } \bar{x}_2 \leq \bar{x}_4 \text{ amb } x_2 \leq 0 \text{ ó } x_4 \leq 0$

$x_2 \leq 0 \text{ ó } x_4 \leq 0 \text{ ó } x_4 \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{diferents} \\ \text{casos} \end{array} \right.$

$\sum_{i=2}^4 e_i \leq 2$

$$\begin{aligned} -x_2 \geq 0, -x_4 \geq 0, -x_4 \geq 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ -x_2 \leq -20, -x_4 \leq -60, \bar{x}_4 \leq -20 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \leq 20e_2 \\ x_3 \leq 20e_3 \\ x_4 \leq 20e_4 \end{array} \right. \quad \circlearrowleft$$

④ $x_i \in \{0, \hat{x}_i\} \quad i = 2, \dots, 6$

$\hat{x}_i = 1 - x_i$
 $x_i \geq 0 \Rightarrow \hat{x}_i - 1 \geq 0 \rightarrow x_i \leq \hat{x}_i \quad \hat{x}_i = - -$
 $\sum_{i=1}^6 \hat{x}_i \geq 3$

$-x_i \geq -\hat{x}_i x_i$

$x_i \leq \hat{x}_i x_i$

$x_i \in \{0, 1\}$

$x_i \geq 0 \Rightarrow \hat{x}_i - 1 \geq 0$

$\hat{x}_i = \sum_{i=1}^6 \hat{x}_i \geq 3$

② $x_1 \geq 0 \Rightarrow x_7 \geq \lambda \text{ amb } x_1 \leq 0 \text{ ó } x_7 \geq \lambda \text{ (o ambdues)}$

$x_1 \geq 0 \quad \text{OR} \quad x_7 - \lambda \geq 0$

$x_1 = \underline{x}_1 + \delta_1 \quad \delta_1 \in [0, \lambda]$
 $x_7 - \lambda = \underline{x}_7 + (\lambda - \delta_1)$

$x_1 \leq 60 \delta_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ x_7 \geq \underline{x}_7 \end{array} \right. \quad \rightarrow x_1 \leq 60x_7$

$$\begin{aligned} g &= \min g(x) \in G \\ g(x) &= -x_1 \rightarrow -60 \\ h &= \min h(x) \in G \\ h(x) &= x_7 \rightarrow \underline{x}_7 \end{aligned}$$

③ $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_5 - 2 \geq 0$

↓

$x_3 \leq 0 \text{ ó } x_5 - 2 \geq 0$

$-x_3 \geq 0 \text{ ó } x_5 - 2 \geq 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$-x_3 = -60 \quad x_5 = -2$

$\begin{cases} -x_3 \geq (-60) \delta \\ x_5 - 2 \geq -2(1 - \delta) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \lambda \in \{0, 2\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_3 \leq 60 \delta \\ x_5 \geq 2 \delta \end{array}$

$x_5 - 2 \geq -2 + 2\delta$

$x_5 \geq 2\delta$

Vídeo 8 : Problemes de programació llineal entera + simplex dual.

⊕ teoria → resultat.

Vídeo 9 Programació llineal multiobjectiu.

Fabricación propia + instalación. Importación + instalación.

	d_i	s_i	h_i	m_i	p_i	c_i		b_i	e_i
S_1	3000	20	0,55	1	4	7	→	16	13
S_2	5000	24	0,4	1	6	7		18	17
S_3	7000	18	0,6	1	7	9		11	9
Recursos	—	—	2400	6000	—	—		—	—

- d_i Demanda de producto instalado en Hm^2
- s_i Precio de venta de producto instalado/ Hm^2 .
- h_i Tiempo de máquina / Hm^2
- m_i Materia prima/ Hm^2
- p_i Coste de producción/ Hm^2
- c_i Coste de importación/ Hm^2
- $b_i = s_i - p_i$ Beneficio / Hm^2 por fabricación propia.
- $e_i = s_i - c_i$ Beneficio / Hm^2 por importación.

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

k funciones objetivo $z_1 = c_1^\top x, \dots, z_k = c_k^\top x$ (a minimizar)

Definición: x^* es óptimo Pareto de z_1, \dots, z_k sobre F si,

$$\forall x \in F, \exists \ell, 1 \leq \ell \leq k \text{ t.q.: } c_\ell^\top x > c_\ell^\top x^*$$

A) x^* es mínimo Pareto de z_1, \dots, z_k sobre F

$$\exists \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \geq 0, \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow x^* \text{ es solución de (P)}$$

B) Sea $\alpha > 0$.

$$\text{Si } x^* \text{ es solución de (P)} \downarrow$$

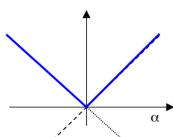
$$x^* \text{ es mínimo Pareto}$$

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & \alpha_1 c_1^\top x + \dots + \alpha_k c_k^\top x \\ \text{s.a.:} \quad & x \in F \end{aligned} \quad (P)$$

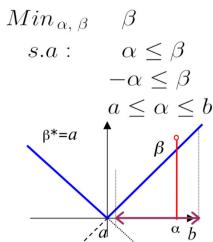
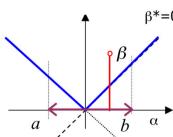


MINIMIZACIÓN DE | · |

$$|\alpha| = \max\{\alpha, -\alpha\}$$



$$\text{Min}_{\alpha} |\alpha| \equiv \text{Min}_{\alpha} \alpha \leq \alpha \leq b$$



$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & |c^\top x| \quad \text{Min}_{x, \beta} \quad \beta \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \quad \equiv \quad c^\top x \leq \beta \\ & x \geq 0 \quad -c^\top x \leq \beta \\ & Ax = b, x \geq 0 \end{aligned}$$

Solución intuitiva: ponderar con pesos $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ las dos funciones objetivo z_1, z_2 y formar

$$z_P = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$$

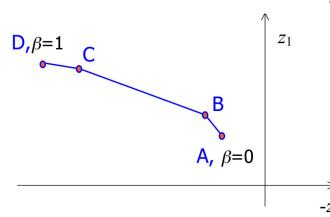
$$\begin{aligned} \text{Max}_{x,t} \quad & z_P = \alpha_1(16x_1 + 18x_2 + 11x_3 + 13t_1 + 17t_2 + 9t_3) - \\ & - \alpha_2(7t_1 + 7t_2 + 9t_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0,55x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3 \leq 2400 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6000 \\ & \text{s.a.:} \quad x_1 + t_1 = 3000 \\ & x_2 + t_2 = 5000 \\ & x_3 + t_3 = 7000 \\ & x_i \geq 0, t_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Ensayar diferentes valores de α_1, α_2 y examinar las soluciones.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x,t} \quad & z_P = \beta(16x_1 + 18x_2 + 11x_3 + 13t_1 + 17t_2 + 9t_3) - \\ & - (1 - \beta)(7t_1 + 7t_2 + 9t_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad 0,55x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3 \leq 2400 \\ & \alpha_1 = \beta, \alpha_2 = 1 - \beta, \beta \in [0, 1] \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 6000 \\ & \text{s.a.:} \quad x_1 + t_1 = 3000 \\ & x_2 + t_2 = 5000 \\ & x_3 + t_3 = 7000 \\ & x_i \geq 0, t_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$



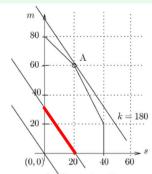
	z_1	z_2
A	19333, 3	78000, 0
B	19418, 1, 8	78090, 1
C	19787, 5, 0	84875, 0
D	198500, 0	86750, 0

...

CONCEPTO DE LA PROGRAMACIÓN POR OBJETIVOS

$$\text{Max} \quad 3s + 2m$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.:} \quad & 2s + m \leq 100 \\ & s + m \leq 80 \\ & (P) \quad s \leq 40 \\ & s, m \geq 0 \end{aligned}$$



Política: Calcular s, m t.q.: beneficio = 60.

$$3s + 2m + u^- - u^+ = 60, \quad u^+, u^- \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Min}_{s, m, u, \beta} \quad & \beta \\ \text{s.a.:} \quad & u^+ - u^- \leq \beta \\ & 3s + 2m + u^+ - u^- = 60 \\ & 2s + m \leq 100 \\ & s + m \leq 80, \quad s \leq 40 \\ & s, m, u^+, u^- \geq 0 \\ & s + m \leq 80, \quad s \leq 40 \\ & s, m, u^+, u^- \geq 0 \end{aligned}$$

Valor de referencia

...

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

$c_1^\top x \dots c_k^\top x \leftarrow$ expresión mediante las v. de decisión
 $\theta_1 \dots \theta_k \leftarrow$ valores de referencia

Para el objetivo ℓ :

- A - "lo más cerca posible"
 $c_\ell^\top x \approx \theta_\ell$
 $c_\ell^\top x + u_\ell^+ - u_\ell^- = \theta_\ell, u_\ell^+, u_\ell^- \geq 0$
- B - "como mínimo"
 $c_\ell^\top x \geq \theta_\ell$
y lo mayor posible
 $c_\ell^\top x - u_\ell^- = \theta_\ell, u_\ell^- \geq 0$
- C - "como máximo"
 $c_\ell^\top x \leq \theta_\ell$
y lo menor posible
 $c_\ell^\top x + u_\ell^+ = \theta_\ell, u_\ell^+ \geq 0$

Formar f.obj con k términos según caso A,B,C.

	A	B	C
Término en f.obj.	$ u_\ell^+ - u_\ell^- $	$-u_\ell^-$	u_ℓ^+

of 16

MÚLTIPLES OBJETIVOS CON PRIORIDAD

k objetivos $z_1 = c_1^\top x, \dots, z_k = c_k^\top x$ sobre

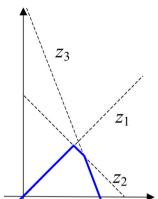
$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

$$\underset{x \in F}{\text{Min}_x c_1^\top x} \xrightarrow{S_1} \underset{x \in S_1}{\text{Min}_x c_2^\top x} \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_{\ell-1}} \underset{x \in S_{\ell-1}}{\text{Min}_x c_\ell^\top x} \xrightarrow{S_\ell} \dots$$

A) Para $\ell \leq k$, $S_\ell = \{x^*\}$

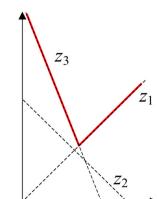
B) S_k no unitario; \Leftarrow Conjunto sol. del Problema.

OPTIMIZACIÓN DEL PEOR CASO POSIBLE



$$z_1(x) = x, z_2(x) = 1 - x, z_3(x) = 2 - 3x \\ f(x) = \text{Min}\{z_1(x), z_2(x), z_3(x)\}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{x,y} y \\ &\text{s.a.: } \begin{aligned} x &\geq y \\ 1-x &\geq y \\ 2-3x &\geq y \end{aligned} \end{aligned}$$



$$g(x) = \text{Max}\{z_1(x), z_2(x), z_3(x)\}$$

$$\begin{aligned} &\text{Min}_{x,y} y \\ &\text{s.a.: } \begin{aligned} x &\leq y \\ 1-x &\leq y \\ 2-3x &\leq y \end{aligned} \end{aligned}$$

$$I = \{(s, m) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{aligned} 2s + m &\leq 100, s + m \leq 80 \\ s &\leq 40, s, m \geq 0 \end{aligned}\}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{(s,m)} z_1 = 3s + 2m \quad s_1^* = 20 \\ &(s, m) \in F \quad \rightarrow m_1^* = 60 \\ &z_1^* = 180 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{(s,m)} z_2 = 5s + m \quad s_2^* = 40 \\ &(s, m) \in F \quad \rightarrow m_2^* = 20 \\ &z_2^* = 220 \end{aligned}$$

$$z_1(40, 20) = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 160$$

$$z_2(20, 60) = 5 \cdot 20 + 60 = 160$$

$$\text{Max}_{s,m} y$$

$$\begin{aligned} &\text{s.a.: } \begin{aligned} 3s + 2m &\geq y \\ 5s + m &\geq y \\ 2s + m &\leq 100 \\ s + m &\leq 80 \\ s &\leq 40 \\ s, m &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$s_P^* = 25$$

$$m_P^* = 50$$

$$z_P^* = \text{Min}\{3 \cdot 25 + 2 \cdot 50, 5 \cdot 25 + 50\} = 175$$

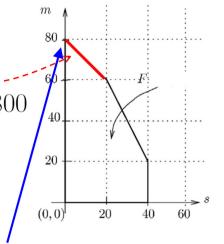
of 16

Beneficio: $z_1 = 10s + 10m$, Calidad: $z_2 = 100 - 0, 2s - 0, 1m$

Recursos sobrantes:

$$z_3 = 100 - (2s + m) + 80 - (s + m) = 180 - 3s - 2m.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min}_{s,m} -(10s + 10m) \\ \text{s.a.: } \begin{aligned} 2s + m &\leq 100 \\ s + m &\leq 80 \\ s &\leq 40 \\ s, m &\geq 0 \end{aligned} \end{array} \right\} \rightarrow S_1, z^* = 800$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Min}_{s,m} 0, 2s + 0, 1m \\ (s, m) \in S_1 \end{array} \right\} \rightarrow S_2 = \{(0, 80)\}, z_2^* = 92$$

El tercer objetivo ya no puede optimizarse: $S_3 \equiv S_2$

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_x c_1^\top x & \text{Min}_x c_2^\top x \\ Ax = b & \xrightarrow{z_1^*} c_1^\top x = z_1^* \\ x \geq 0 & \text{Min}_x c_3^\top x \\ & \xrightarrow{z_2^*} c_2^\top x = z_2^* \xrightarrow{z_3^*} \dots \\ & \text{Min}_x c_3^\top x \\ Ax = b & \xrightarrow{z_3^*} c_3^\top x = z_3^* \\ x \geq 0 & \end{array}$$

En el problema ℓ :

\exists coste reducido $\stackrel{?}{=} 0$ SI

↓ NO

STOP. Solución única x^*

SIGUIENTE
PROBLEMA $\ell + 1$
(Reoptimización)

x^* mínimo jerárquico de
 z_1, z_2, \dots, z_k

SI NO HAY SOLUCIÓN ÚNICA EN EL PROBLEMA k
DEBEN EXAMINARSE SUS SOLUCIONES.

OPTIMIZACIÓN DEL PEOR CASO POSIBLE. Ejemplo

Cia. con dos productos.

Puede vender toda su producción en los mercados M1 o M2 de dos países (no en ambos).

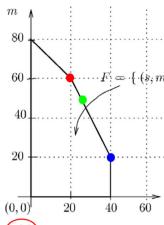
Los beneficios por unidad de producto en cada mercado son:

	Prod.1	Prod.2
M1	3	2
M2	5	1

Está en curso la firma de un importante acuerdo económico con los países pero el resultado es incierto. Si la Cia. vende su producción en el mercado con el que se llegue al acuerdo conseguiría una importante posición estratégica. No se puede demorar la producción hasta después de la firma del acuerdo.

a) Se decide vender en el país con el que se firme el acuerdo. \rightarrow No se sabe donde va a venderse la producción.

b) Se decide una opción conservadora: producir en cantidades (s, m) de forma que el peor beneficio posible sea el máximo.



$F = \{(s, m)\}$

(s, m)

Resolució d'un problema de Vehicle Routing (P2.poly)

Pràctica 2. Resolució d'un problema de Vehicle Routing.

Cada estudiant tindrà assignat un fitxer gràfic on apareixerà l'esquema d'una ciutat representada per arteries i nusos principals, formant un graf dirigit.

D'entre els nusos caldrà destacar els marcats com A i B. Els estudiants amb DNI parell adoptaran com depot per a problema de VR a resoldre el nus A i el B com una localització més on distribuir mercaderia, mentre que els estudiants amb DNI senar adoptaran com depot el nus B i el A com una destinació.

En el fixer gràfic s'especifica quin es el cost de viatge d'un (i, j) mitjançant una fórmula basada en les coordenades x_c, y_c dels nusos i, j .

El fitxers .mod proporcionats presenten codis AMPL d'exemple que utilitzen el fixer .dat que defineix el graf de la ciutat i també que resolen un problema TSP en n nusos mitjançant la implementació de la formulació MTZ.

Utilitzeu una capacitat de transport dels vehicles de $C = 40$ unitats.

Es demana:

- Implementeu l'algoritme de Floyd-Warshall per a calcular els costs de viatge mínims entre les diferents destinacions (incloent-t'hi el depot)
- Implementeu la formulació MTZ del Vehicle Routing Problem i reporteu la seva solució per a $K = 3, 4, 5$ vehicles com grandària de flota.

Formulació MTZ del VRP.

Se suposa un graf dirigit $G = (N \cup \{0\}, A), N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_{i,j}} \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} x_{i,j} \\ \sum_{i \in N} x_{i,j} &= 1, \quad j \in N \\ \sum_{j \in N} x_{i,j} &= 1, \quad i \in N \\ \sum_{j \in N} x_{0,j} &= K, \\ \sum_{j \in N} x_{i,0} &= K, \\ u_j &\geq u_i + a_j - C(1 - x_{i,j}) \quad i \neq 0, j \neq 0 \\ a_i &\leq u_i \leq C \quad i \in N \\ x_{i,j} &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Gràf proporcionat

Doni parell: A oríen

Doni senar: B oríen.

Nusos (claus: punts d'entrega.
(+A + B))

Quins clients ha de visitar cada camió (amb TSP)

Gràf amb números proporcionat.

① Procediment de passar de trama
unica a prof \rightarrow punts de pas
s'ignoren
(Floyd-Warshall)

② Desobrir 'l'.

Ref ~> Algoritme de camins mínims (PPT-2020..)

ALGORISME de CAMINS MÍNIMS TOTS AMB TOTS (Floyd-Warshall)

Permet treballar amb costs < 0 ; detecta cicles < 0

Necessita espai d'emmagatzament $|N|^2$.

$$\text{Sigui } D = (d_{ij}); d_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i, j) \in A \\ 0 & i = j \\ \infty & (i, j) \notin A \end{cases}$$

d_{ij}^ℓ = distància mínima quan només hi estan als nusos

$$\{i, j\} \cup \{1, 2, \dots, \ell - 1\} = R^\ell$$

$$d_{ij}^{\ell+1} = \min \{d_{ij}^\ell, d_{il}^\ell + d_{lj}^\ell\}$$

S'inicialitza una matriu de predecessors P :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \begin{cases} i & (i, j) \in A \\ 0 & (i, j) \notin A \end{cases} \\ P_{ij}^{\ell+1} &= \begin{cases} \text{si } d_{ij}^{\ell+1} = d_{ij}^\ell & P_{ij}^{\ell+1} = P_{ij}^\ell \\ \text{si } d_{ij} = d_{il}^\ell + d_{lj}^\ell & P_{ij}^{\ell+1} = P_{lj}^\ell \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

ALGORISME de CAMINS MÍNIMS TOTS AMB TOTS (Floyd-Warshall)

Inicialització:

$$\begin{aligned} P(i, j) &= i, \quad D(i, j) = c_{i,j} \quad \text{si } (i, j) \in A \\ D(i, j) &= 0 \quad \text{si } i = j \\ P(i, j) &= 0 \quad D(i, j) = \infty \quad \text{si } (i, j) \notin A \end{aligned}$$

Per $\ell = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{Per } i &= 1, \dots, n \\ \text{Per } j &= 1, \dots, n \\ \text{Si } D(i, j) &> D(i, \ell) + D(\ell, j) \\ D(i, j) &= D(i, \ell) + D(\ell, j) \\ P(i, j) &= P(\ell, j) \end{aligned}$$

Fi Per

- Al finalitzar $P(i, *)$ és el vector de predecessors de l'arbre originat a $i \in N$.

- Si hi han cicles negatius apareixerà algun $d_{ii}^\ell < 0$, essent i el nus de numeració més alta dins del cicle i d_{ii}^ℓ el cost del cicle.

0 → tota amb costos zeros.

- $i = j \rightarrow \text{cost} = 0$ (diagonal)
- (i, j) no existeix $\rightarrow \text{cost} = \infty$
- (i, j) existeix $\rightarrow \text{cost} = c_{ij}$