INGENIERIA INFORMATICA. MDIO1 EXAMEN FINAL. Curso 00/01 1Q

P1 Una empresa de refinado de crudo se plantea construir dos plantas para abastecer en lo posible el consumo de tres ciudades. Para el emplazamiento de las plantas se han considerado 3 ubicaciones candidatas, de forma que, desde cada ubicación se pueda hacer llegar a todas las ciudades la cantidad que se estime oportuna de gasolina. El consumo de la primera ciudad se estima en 10 millones de litros al año, el de la segunda en 20 y el de la tercera en 15. Las plantas se construirían cada una con una capacidad máxima de producción de 20 millones de litros anuales. El coste de construcción de una planta en la primera ubicación es de 200 millones de euros, en la segunda ubicación de 250 millones y en la tercera de 230 millones.
Los costes de transporte, expresados en millones de euros por millón de litros, desde las diferentes ubicaciones hasta las tres ciudades vienen dados en la siguiente tabla:

	$C1$	$C2$	$C3$
Ubicación 1	1	1,5	1
Ubicación 2	2	1	1,2
Ubicación 3	1	1	2

Formulad un problema mixto de programación lineal - lineal entera de forma que la empresa minimice los costes conjuntos de inversión de las dos plantas y el transporte de la gasolina hasta los centros de consumo a lo largo de 4 años. Emplead las variables:

- x_{ij} = cantidad de gasolina transportada desde la ubicación i hasta la ciudad j en el horizonte de 4 años.
- δ_i = variable binaria: = 1 se construye una planta en la ubicación i; = 0 no se construye la planta.

P2 Considerad el problema de programación lineal siguiente en el que las variables x_4, x_5 son variables de holgura y la variable x_6 es una variable de exceso:

$$
\begin{array}{lllll}
Max\ z = & x_3 & & & \\
 & x_1+ & & +x_3 & \leq 3 \\
 & & 3x_2 & +2x_3 & \leq 6 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 1 \\
 & x_i & \geq & 0 & i = 1...6
\end{array}
$$

Dado el punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$:

1. Comprobad que este punto se corresponde con una base factible del problema, determinando la base asociada.
2. Calculad la tabla correspondiente a la base del apartado anterior.
3. Partiendo del punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, hallar la solución del problema.
4. Añadir la restricción $x_3 \leq 2$ y determinad un nuevo punto con el valor óptimo z^* de la función objetivo para el problema modificado. Es posible determinar algún otro punto $x \in R^3$ que verifique las restricciones para el que la función objetivo también valga z^* ?. Justificad la respuesta y en caso afirmativo halladlo.

P3 Una multinacional envía sus productos desde su factoría en Estocolmo (E) a razón de 10 unidades diarias, hasta los dos principales centros de consumo en Roma (R) y Niza (N). Tanto en Roma como en Niza la demanda diária es de 5 unidades. Los envíos hacen una escala prévia en Bruselas (B) o Londres (L). Las unidades que pasan por Londres siguen hasta Niza, mientras que las unidades que son enviadas a Bruselas pueden ir hasta Niza o hasta Roma, o bien pueden ser direccionadas hasta Londres. Una vez en Roma, si es necesario, pueden ser enviadas a Niza y recíprocamente las que lleguen a Niza, si es necesario pueden seguir hasta Roma. El coste de transporte por unidad de producto de los diferentes tramos viene dado por la siguiente tabla:

	E	B	L	R	N
E		1	1		
B			1	2	3
L					1
R					1
N				1	

Partiendo de la solución definida por el conjunto básico de arcos (E,B), (B,R), (B,N), (B,L), se pide:

1. Formulad el problema en forma de problema de flujos sobre redes utilizando una matriz de incidencias nodos-arcos y reproduce la solución básica factible descrita.
2. Encontrar la solución del problema.
3. Verificar mediante el teorema de dualidad que dicha solución es correcta.
4. Se abre un nuevo tramo de recorrido (L,R) con coste 1. Altera esto la solución encontrada en el apartado 2. ?

P4 Considerad el problema de programación lineal entera:

$$
\begin{array}{ll}
Max & x_1 + x_2 \\
 & 7x_1 - 7x_2 \qquad\qquad \geq 1 \\
 & 42x_1 - 35x_2 \qquad\quad \leq 30 \\
 & x_1 \qquad\qquad\qquad\quad\ \leq 1 \\
 & x_i \geq 0, \qquad x_i \in Z,\ i = 1,2
\end{array}
$$

Se sabe que la solución de la relajación inicial, o nodo 0, es $x_1 = 1,\ x_4 = 18,\ x_2 = 6/7$ con la tabla óptima siguiente:

1	2	3	4	5	
1	0	0	0	1	1
0	0	5	1	-7	18
0	1	1/7	0	1	6/7
0	0	1/7	0	2	13/7

1. Reproduce la solución del nodo 1, hijo del nodo 0, correspondiente a la restricción $x_2 \leq 0$.
2. Reproduce la solución del nodo 2, hijo del nodo 0, correspondiente a la restricción $x_2 \geq 1$
3. Examinando las restricciones del problema, qué podemos afirmar respecto de los nodos 3 y 4, hijos del nodo 1, y correspondientes respectivamente a las restricciones $x_1 \leq 0$ y $x_1 \geq 1$?.
4. Reproduce el árbol de exploración y resuelve el problema.

SOLUCIONES

P1 Costes de transporte:

c_{ij}		1	2	3
	$i \downarrow \;\; j \rightarrow$	$C1$	$C2$	$C3$
1	Ubicación 1	1	$1,5$	1
2	Ubicación 2	2	1	$1,2$
3	Ubicación 3	1	1	2

Costes de inversión: $d_i = 200, 250, 230, \; i = 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
Min_{\,x,\,\delta} \quad & 4 \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{3} \delta_i d_i \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{i1} + x_{01} = 10\,; \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} + x_{02} = 20\,; \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} + x_{03} = 15 \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 20\delta_1\,; \quad \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 20\delta_2\,; \quad \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 20\delta_3 \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{0j} = 5 \\
& \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3, \quad \delta_i \in \{0,\, 1\}, \;\; i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

P2

1) Examinando las restricciones: si $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ha de ser $x_4 = 2$, $x_5 = 6$, $x_6 = 0$. Por tanto las variables básicas son x_1, x_4, x_5 y las no básicas son x_2, x_3, x_6: $I_B = \{1, 4, 5\}$:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0
$$

Por tanto, efectivamente la solución proporcionada es una base factible del problema.

2)

$$
Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

Valor de la función objetivo para la base $I_B = \{1, 4, 5\}$: $z_0 = 0$

$$
r = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Tabla:

1	2	3	4	5	6	
1	1	1	0	0	-1	1
0	-1	0	1	0	1	2
0	3	2	0	1	0	6
0	0	-1	0	0	0	0

3) Entra x_3; $Min\,\{1,\; 6/2\} = 1$ sale x_1:

1	2	3	4	5	6	
1	1	1	0	0	−1	1
0	−1	0	1	0	1	2
0	1	0	0	1	2	4
1	1	0	0	0	−1	1

Entra x_6, $Min\ \{4/2,\ 2/1\} = 2$. Puede salir indistintamente x_4 o x_5. Se escoge x_4.

1	2	3	4	5	6	
1	0	1	1	0	0	3
0	−1	0	1	0	1	2
0	3	0	−2	1	0	0
1	0	0	1	0	0	3

Solución óptima: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = x_5 = 0,\ x_6 = 2$

4) $x_3 \leq 2 \rightarrow x_3 + x_7 = 2,\ \ x_7 \geq 0.$

1	2	3	4	5	6	7	
1	0	1	1	0	0	0	3
0	−1	0	1	0	1	0	2
0	3	0	−2	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	2
1	0	0	1	0	0	0	3

$\rightarrow$

1	2	3	4	5	6	7	
1	0	1	1	0	0	0	3
0	−1	0	1	0	1	0	2
0	3	0	−2	1	0	0	0
−1	0	0	−1	0	0	1	−1
1	0	0	1	0	0	0	3

Infactible primal, factible dual; se utiliza el símplex dual para hallar la nueva solución óptima.
$Max\{1/(-1),\ 1/(-1)\} = -1$. Sale x_7; entra x_1 o x_4. Se escoge x_1.

1	2	3	4	5	6	7	
0	0	1	0	0	0	1	2
0	−1	0	1	0	1	0	2
0	3	0	−2	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	−1	1
0	0	0	0	0	0	1	2

Nueva tabla óptima. Puesto que existen columnas no básicas con costes reducidos nulos existen óptimos alternativos. Uno de ellos puede obtenerse haciendo entrar en la base la variable x_4 (otra puede obtenerse haciendo entrar x_2):
Haciendo entrar x_4. $Min\{2,\ 1\} = 1$. Sale x_1:

1	2	3	4	5	6	7	
0	0	1	0	0	0	1	2
−1	−1	0	0	0	1	1	1
2	3	0	0	1	0	−2	2
1	0	0	1	0	0	−1	1
0	0	0	0	0	0	1	2

Haciendo entrar x_2. Sale x_5:

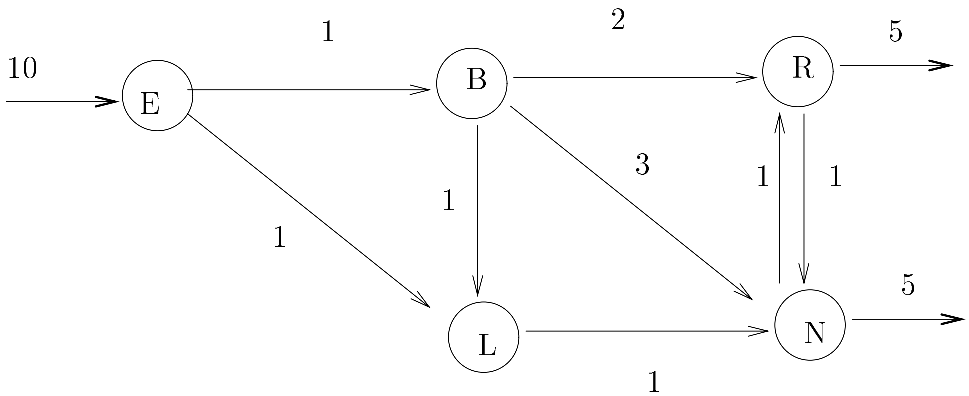
1	2	3	4	5	6	7	
0	0	1	0	0	0	1	2
0	0	0	1/3	1/3	1	0	2
0	1	0	−2/3	1/3	0	0	0
1	0	0	1	0	0	−1	1
0	0	0	0	0	0	1	2

P3

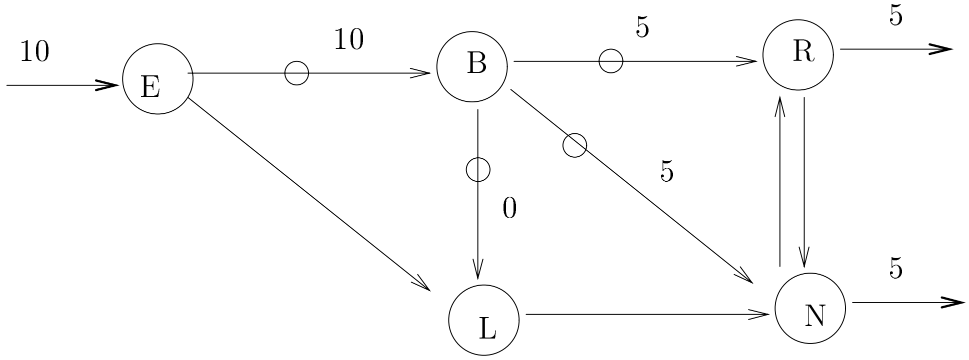
a) Formulación con matriz de incidencias:

$$Min_{\, x \geq 0} \quad x_{EB} + x_{EL} + x_{BL} + 3x_{BN} + 2x_{BR} + x_{RN} + x_{NR} + x_{LN}$$

$$\begin{array}{c} E \\ B \\ L \\ R \\ N \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ -1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & -1 & & & & & 1 \\ & & & & -1 & 1 & -1 & \\ & & & -1 & & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{EB} \\ x_{EL} \\ x_{BL} \\ x_{BN} \\ x_{BR} \\ x_{RN} \\ x_{NR} \\ x_{LN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

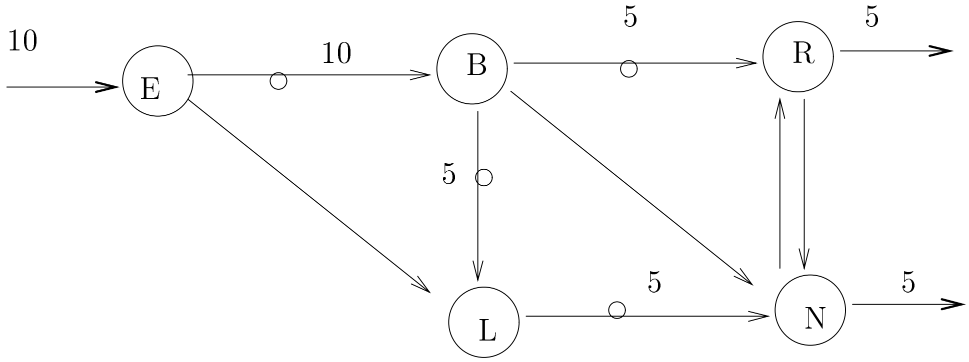


b) Solución básica inicial descrita:



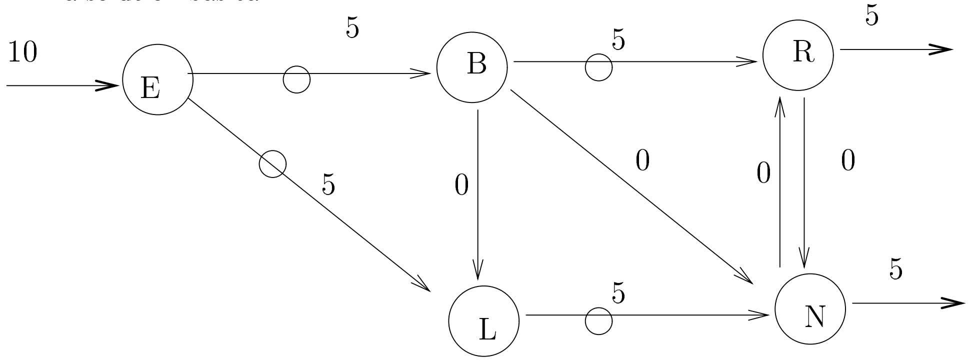
$$\begin{array}{llll}
\lambda_N \,=\, -4, & r_{EL} \,=\, c_{EL} - (\lambda_E - \lambda_L) \,=\, 1 - (+2) = -1 & & \\
\lambda_R \,=\, -3, & r_{LN} \,=\, c_{LN} - (\lambda_L - \lambda_N) \,=\, 1 - (-2+4) \,=\, -1 & \Leftarrow & \\
\lambda_B \,=\, -1, & r_{RN} \,=\, c_{RN} - (\lambda_R - \lambda_N) \,=\, 1 - (-3+4) \,=\, 0 & & \\
\lambda_L \,=\, -2, & r_{NR} \,=\, c_{NR} - (\lambda_N - \lambda_R) \,=\, 1 - (-4+3) \,=\, 2 & & \\
\lambda_E \,=\, 0 & & &
\end{array}$$

Entra LN (Podría entrar EL); Ciclo orientado según $L \to N \to B \to L$. $\hat{x}_{LN} \,=\, Min\{5\} \,=\, 5$;
Sale BN.
Nueva solución básica:



$$
\begin{array}{ll}
\lambda_N \,=\, -3, & r_{EL} \,=\, c_{EL} - (\lambda_E - \lambda_L) \,=\, 1 - (+2) = -1 \;\; \Leftarrow \\
\lambda_R \,=\, -3, & r_{BN} \,=\, c_{BN} - (\lambda_B - \lambda_N) \,=\, 3 - (-1+3) \,=\, 1 \\
\lambda_B \,=\, -1, & r_{RN} \,=\, c_{RN} - (\lambda_R - \lambda_N) \,=\, 1 - (-3+3) \,=\, 1 \\
\lambda_L \,=\, -2, & r_{NR} \,=\, c_{NR} - (\lambda_N - \lambda_R) \,=\, 1 - (-3+3) \,=\, 1 \\
\lambda_E \,=\, 0 &
\end{array}
$$

Entra EL; Ciclo orientado según $E \to L \to B \to E$. $\hat{x}_{EL} \,=\, Min\{5,\, 10\} \,=\, 5$; Sale BL.
Nueva solución básica:



$$
\begin{array}{ll}
\lambda_N \,=\, -2, & r_{BL} \,=\, c_{BL} - (\lambda_B - \lambda_L) \,=\, 1 - (-1+1) = 1 \\
\lambda_R \,=\, -3, & r_{BN} \,=\, c_{BN} - (\lambda_B - \lambda_N) \,=\, 3 - (-1+2) \,=\, 2 \\
\lambda_B \,=\, -1, & r_{RN} \,=\, c_{RN} - (\lambda_R - \lambda_N) \,=\, 1 - (-3+2) \,=\, 2 \\
\lambda_L \,=\, -1, & r_{NR} \,=\, c_{NR} - (\lambda_N - \lambda_R) \,=\, 1 - (-2+3) \,=\, 0 \\
\lambda_E \,=\, 0 &
\end{array}
$$

Solución óptima.

c) Aplicación del teorema de dualidad:

F.obj. primal:

$$c^{\top} x \,=\, 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \,=\, 25$$

F.obj. dual:

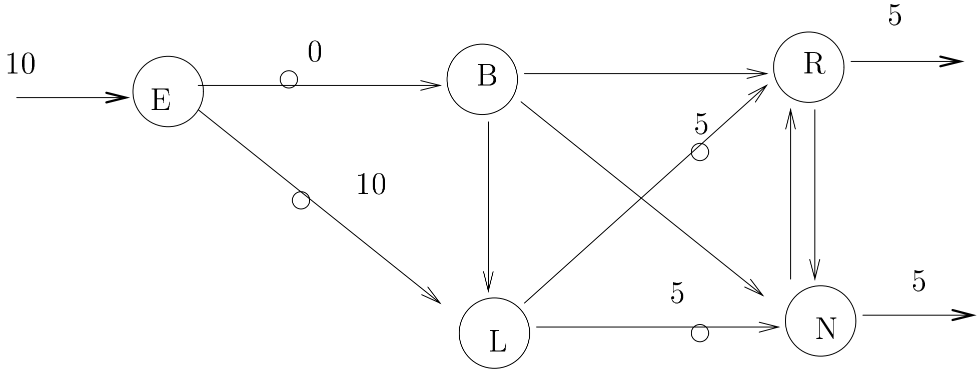
$$b^{\top} \lambda \,=\, \lambda_R b_R + \lambda_N b_N \,=\, -3 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-5) \,=\, 25$$

d) $r_{LR} \,=\, 1 - (-1+3) \,=\, -1 \,<\, 0$: Sí altera la solución.

$$\hat{x}_{LR} \,=\, Min\{5,\, 5\} \,=\, 5; \text{Sale } BR$$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_N \,=\, -2, & r_{BL} \,=\, c_{BL} - (\lambda_B - \lambda_L) \,=\, 1 - (-1+1) = 1 \\
\lambda_R \,=\, -2, & r_{BN} \,=\, c_{BN} - (\lambda_B - \lambda_N) \,=\, 3 - (-1+2) \,=\, 2 \\
\lambda_B \,=\, -1, & r_{RN} \,=\, c_{RN} - (\lambda_R - \lambda_N) \,=\, 1 - (-2+2) \,=\, 1 \\
\lambda_L \,=\, -1, & r_{NR} \,=\, c_{NR} - (\lambda_N - \lambda_R) \,=\, 1 - (-2+2) \,=\, 1 \\
\lambda_E \,=\, 0 & r_{BR} \,=\, c_{BR} - (\lambda_B - \lambda_R) \,=\, 2 - (-1+2) \,=\, 1
\end{array}
$$

Nueva solución óptima:



P4

1) $x_2 \leq 0$:

1	2	3	4	5	6	
1	0	0	0	1	0	1
0	0	5	1	-7	0	18
0	1	$1/7$	0	1	0	$6/7$
0	0	$-1/7$	0	-1	1	$-6/7$ ←
0	0	$1/7$	0	2	0	$13/7$

$$\text{Sale } x_6, \text{ entra } x_3: \; Max\{ \frac{1/7}{-1/7}, \frac{2}{-1} \} = -1$$

1	2	3	4	5	6	
1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	-42	35	-12 ←
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	7	-7	6
0	0	0	0	1	1	1

Sale x_4, entra x_5 :

1	2	3	4	5	6	
1	0	0	$1/42$	0	$5/6$	$5/7$
0	0	0	$-1/42$	1	$-5/6$	$2/7$
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	-7	0	$-7/6$	4
0	0	0	$1/42$	0	$11/6$	$5/7$

Tabla óptima

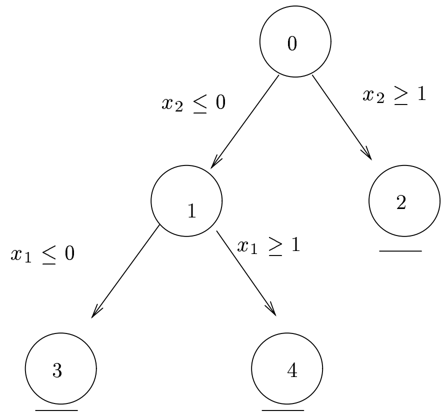
2)

1	2	3	4	5	6	
1	0	0	0	1	0	1
0	0	5	1	-7	0	18
0	1	$1/7$	0	1	0	$6/7$
0	0	$1/7$	0	1	1	$-1/7$ ←
0	0	$1/7$	0	2	0	$13/7$

Problema dual no acotado → problema primal infactible.

3) Para el nodo 3 correspondiente a la restricción $x_1 \leq 0$ debe ser $x_1 = 0$, ya que las variables han de ser no negativas. Por tanto no podrá verificarse la primera restricción: $7x_1 - 7x_2 \geq 1$. Dicho nodo, por tanto debe marcarse por infactibilidad.
Para el nodo 4 correspondiente a la restricción $x_1 \geq 1$, puesto que es hijo del nodo 1 ($x_2 \leq 0$) no podrá verificarse la segunda restricción $42x_1 - 35x_2 \leq 30$. El nodo 4 nodo, por tanto debe marcarse también por infactibilidad.

4)



Todos los nodos aparecen marcados por infactibles y el árbol de exploración aparece cerrado. La región factible no contiene solución entera alguna.