ALGORISME DEL SIMPLEX PRIMAL

$$\begin{array}{lrl} Min\ _x & c^\top x & \\ s.a & Ax = & b \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} I & Y & Y_0 \\ \hline 0 & r_N & -z_0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} Y & = B^{-1}N \\ Y_0 & = B^{-1}b \\ r_N & = c_N - N^\top B^{-\top} c_B \\ z_0 & = c_B^\top B^{-1} b \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} i_1 & \ldots & i_m & j_1 & \ldots & j_{n-m} & 0 \\ \hline 1 & \ldots & 0 & y_{1,1} & \ldots & y_{1,n-m} & y_{1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & y_{m,1} & \ldots & y_{m,n-m} & y_{m,0} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & r_1 & \ldots & r_{n-m} & -z_0 \end{array}$$

(*tableau* en forma canónica. Las fòrmulas de la derecha constituyen las fórmulas matriciales básicas en que es basan los algoritmos del símplex primal.)

0) **Inicialización**. Determinar s.b.f. inicial $B_{(0}$. $k = 0$

1) Calcular costes reducidos para $B = B_{(k}$:
$r_N = c_N - Y^\top c_B = c_N - N^\top B^{-\top} c_B$

2) Si $r_N \geq 0 \ \Rightarrow\ B_{(k}$ **base óptima. STOP**.

3) Si $\exists q$ *t.q.* $(r_N)_q < 0$ & $y_{iq} \leq 0$ $(1 \leq i \leq m) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Problema no Acotado. STOP.**

4) Seleccionar variable no básica de entrada x_{j_q}.
(q tal que $r_q = Min\ \{\ r_\ell \mid\ 1 \leq \ell \leq n-m\ \}$)

5) Encontrar variable básica de salida x_{i_s} y **Efectuar cambio de base** .

Determinar $p = i_s \in I_B$ según:

$$\hat{x}_{j_q} = \frac{y_{s,0}}{y_{s,q}} = Min\{\ \frac{y_{t,0}}{y_{t,q}}\ \mid y_{tq} > 0\ \}$$

$$I_{B_{(k+1}} = I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$$

6) $k \leftarrow k+1$. Volver a 1)

****

ALGORISME DEL SIMPLEX DUAL

$$\begin{array}{lll} Min_{\ x} & c^\top x \\ s.a & Ax = & b \\ (Primal) & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} I & Y & Y_0 \\ \hline 0 & r_N & -z_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Y & = B^{-1}N \\ Y_0 & = B^{-1}b \\ r_N & = c_N - N^\top B^{-\top} c_B \\ z_0 & = c_B^\top B^{-1} b \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{lll} Max_{\ \lambda} & b^\top \lambda \\ s.a & A^\top \lambda \leq & c \\ (Dual) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc|c} i_1 & \dots & i_m & j_1 & \dots & j_{n-m} & 0 \\ \hline 1 & \dots & 0 & y_{1,1} & \dots & y_{1,n-m} & y_{1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & y_{m,1} & \dots & y_{m,n-m} & y_{m,0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & r_1 & \dots & r_{n-m} & -z_0 \end{array}$$

(tableau en forma canònica. Les fòrmules de la dreta constitueixen les fòrmules matricials bàsiques en que es basen els algorismes del símplex primal i dual)

0) Inicialització. Determinar base factible dual inicial $B_{(0}$. $k = 0$

$(\ \lambda \ = \ B^{-\top} c_B, \ \ r_N \ = \ c_N - N^\top \lambda \ \geq \ 0 \ )$

1) Si $x_B \ = \ B_{(k}^{-1} b \ \geq \ 0 \ \ \Rightarrow \ B_{(k}$ **base òptima. STOP**.

2) Per lo tant: $J_- \ = \{ \ 1 \leq s \leq m \mid x_{i_s} \ < \ 0, \ \ i_s \ \in \ I_B \} \neq \emptyset$

3) Si $\exists \, s \ \in \ J_- \ \ t.q. \ \ I_-^{i_s} \ = \{ \ 1 \ \leq \ t \ \leq \ n-m \mid y_{s,t} \ < \ 0 \ \} \ = \ \emptyset$

$\Rightarrow$ **Problema DUAL no Acotat.**
(Problema PRIMAL infactible) STOP.

4) Seleccionar variable bàsica de sortida x_{i_s} (la més negativa).

5.1) Formar $I_-^{i_s} \ = \{ \ 1 \leq \ t \ \leq m \mid y_{s,t} < 0 \ \}$

5) Seleccionar variable no bàsica de entrada x_{j_q}

Determinar $j_q \ \in \ I_N$ segons:

$$\underline{r}_{\ s} \ = \ \frac{r_q}{y_{s,q}} \ = \ Max\{ \ \frac{r_t}{y_{s,t}} \ \mid \ t \ \in \ I_-^{i_s} \ \}$$

5.1) **Efectuar canvi de base** .

$$I_{B_{(k+1}} \ = \ I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$$

6) $k \ \leftarrow \ k+1$. Tornar a 1)

****

ALGORISME DEL SIMPLEX PRIMAL (Forma Revisada)

Sigui y_q la columna de la matriu Y corresponent a la variable x_{j_q}. Siguin $y_{p,q}$ l'element pivotal corresponent al canvi de base $p <-> q$ i $y_{i,q}$ qualsevol altre element del vector y_q

Llavors la matriu $B_{(k+1}$ per la nova base $I_{B_{(k+1}} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{j_q}, \dots, x_{i_m}\}$ verifica l'expressió:

$$B_{(k+1} = B_{(k}\eta$$

essent η la matriu donada per:

$$\eta = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & y_q & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \rightarrow \eta^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & \vdots & & & \\ & 1 & & -y_{iq}/y_{pq} & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1/y_{pq} & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & -y_{i'q}/y_{pq} & & 1 & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{array}\right)$$

$$F\grave{o}rmula\ d'actualitzaci\acute{o}\ de\ l'inversa:\ \ B^{-1}_{(k+1} = \eta^{-1}B^{-1}_{(k} \tag{3}$$

0) Es disposa de: s.b.f. inicial $B^{-1}_{(0}$, $x_B^{(0}$, I_{B_0}, I_N. $k = 0$

1) Calcular Multiplicadors $\lambda = B^{-\top}c_B$:

2) Seleccionar $j_q \in I_N$ t.q:
$r_q = c_{j_q} - a_{j_q}^\top \lambda < 0$.
(Si es impossible $\Rightarrow r_N \geq 0$) $\Rightarrow$ $B_{(k}$ **base òptima. STOP**.

3) Calcular $y_q = B^{-1}a_{j_q}$

4) Formar $I^+_{j_q} = \{ 1 \leq t \leq m \mid y_{tq} > 0 \}$

(Si $I^+_{j_q} = \emptyset \Rightarrow$ **Problema no Acotat. STOP.**)

5) Calcular: $\hat{x}_{j_q} = \dfrac{y_{s,0}}{y_{s,q}} = Min\{ \dfrac{y_{t,0}}{y_{t,q}} \mid t \in I^+_{j_q} \}$

6) Efectuar canvi de base: $I_{B_{(k+1}} = I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$

(Entra x_{j_q}, surt x_{i_s})

6.1) **Formar** η^{-1}

6.1) **Calcular** $B^{-1}_{(k+1} = \eta^{-1}B^{-1}_{(k}$

6.1) **Calcular** $x_B^{(k+1} = \eta^{-1}x_B^{(k}$

6.1) **Calcular** $z_0^{k+1} = z_0^k + r_q \cdot \hat{x}_{j_q}$

7) $k \leftarrow k + 1$. Tornar a 1)