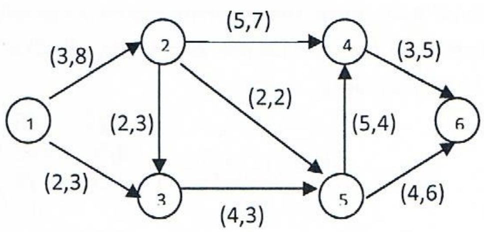
Segundo examen parcial de Investigación Operativa

Grau d'Informàtica **21 de diciembre de 2015**

1. Considera el siguiente problema de flujos en redes, en el que hay un único nodo de producción (nodo 1), y un único nodo de demanda (nodo 6). Los valores que aparecen sobre los arcos indican el costo unitario de utilización y su capacidad máxima (c_{ij}, u_{ij}), respectivamente.



   a. (1p) Encuentra la cantidad máxima de flujo que se puede enviar desde el nodo origen al nodo destino (Calcula el conjunto de corte de coste mínimo especificando claramente los conjuntos $W, \overline{W}, \delta(W)$).

   b. (1p) Con el dato del apartado anterior, queremos obtener el flujo factible de costo mínimo. ¿cuál es la matriz de incidencias nodos/arcos para este problema?

   c. (1p) Formula el problema de flujo de costo mínimo como un problema de programación lineal

   d. (1p) ¿cuál es la solución básica asociada al árbol de expansión T= {(1,2), (1,3), (2,4), (2,5), (5,6)}, en la que el conjunto de variables no básicas a su cota inferior es L={(2,3),(5,4)} y el conjunto de variables no básicas a su cota superior es U={(3,5)}?

   e. (1p) Busca una solución óptima del problema anterior utilizando Simplex para problemas de flujos en redes, tomando como solución factible básica inicial la asociada al árbol de expansión del apartado anterior. ¿Cuál es el valor óptimo del problema?

2. Considera el problema de Programación Lineal Entera (PLE):

$$
\begin{aligned}
z = \min \quad & -7x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 5x_1 + x_2 \le 20 \\
& 2x_1 + 2x_2 \ge 7 \\
& x_1, x_2 \ge 0, \text{ enteras}
\end{aligned}
$$

La solución óptima de la relajación lineal (LP) de (PLE) está determinada por la base B = {x1, x2,x5} y viene dada por xB = (x1, x2, x5) = (36/11, 40/11, 75/11), $\overline{c_j} = (\bar{c}_3, \bar{c}_4) = (3/11, 16/11)$, y la matriz:

$$
Y = (Y_3, Y_4) = \begin{pmatrix} -1/11 & 2/11 \\ 5/11 & 1/11 \\ 8/11 & 6/11 \end{pmatrix}
$$

donde x5 es la variable de exceso de la 3era restricción.

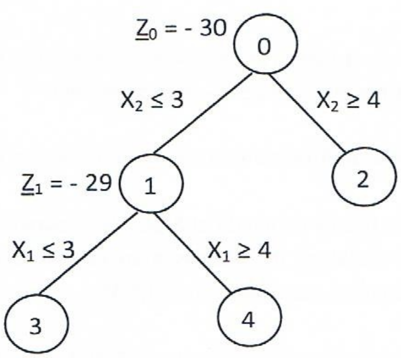
a. (1p) Dibuja el dominio para el problema y la envolvente convexa del conjunto de soluciones posibles para el problema.

b. (1.5p) Genera las 3 desigualdades de Gomory violadas por la solución óptima de la relajación lineal y represéntalas gráficamente en el espacio de las variables originales (x_1,x_2). ¿Se obtendría la solución óptima del problema entero después de incorporarlas al problema y resolver la correspondiente relajación lineal?

c. (2.5p) Supón que en el nodo inicial hemos ramificado en la variable x2. La solución óptima de la relajación lineal en el nodo 1 viene dada por xB=(x1, x5, x3, x2) = (17/5, 29/5, 7/5, 3), $\overline{c_j} = (\bar{c}_{h_2}, \bar{c}_4) = (3/5, 7/5)$, y la matriz:

$$Y = (Y_{h_2}, Y_4) = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 8/5 & 2/5 \\ -11/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siendo h_2 la holgura de la nueva restricción $x_2 \leq 3$. Asimismo, la solución óptima de la relajación lineal del nodo 4 (descendiente del nodo 1 en el que se ha ramificado en la variable x_1 y se ha elegido la rama de la derecha ($x_1 \geq 4$) está asociada a la base $\{x_1, x_5, x_3, x_2, h_2\}$ y viene dada por $x_B = (x_1, x_5, x_3, x_2, h_2) = (4, 1, 8, 8, 3)$, con valor de la función objetivo -28. Tenemos, por tanto, la siguiente exploración parcial del árbol:



Sabemos además que en el descendiente de la rama izquierda del nodo 1, el valor óptimo de la relajación lineal va a aumentar como poco en una unidad.

Completa el árbol de exploración hasta obtener la solución óptima de (PLE). **Explica claramente** los criterios que utilizas para eliminar los nodos del árbol y para deducir cuáles la solución óptima del problema.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

- [ ] E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
- [ ] E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
- [ ] Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació: GRAU D' INFORMATICA 21 Diciembre 2015

Assignatura: INVESTIGACION OPERATIVA

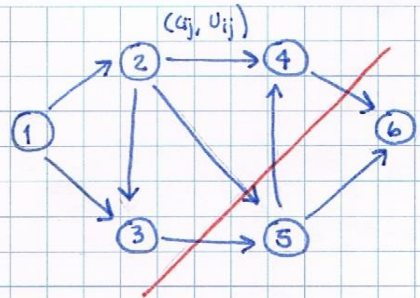
Cognoms: 2° EXAMEN PARCIAL - SOLUCION

Nom:

DNI:

Pàgina ______ de ______

Problema 1



a) $W = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{W} = \{5, 6\}$

$\delta(W) = \{(2,5), (3,5), (4,6)\}$

$u_{25} + u_{35} + u_{46} = 2 + 3 + 5 = 10 \Rightarrow$ Capacidad de corte mínimo

b)

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (3,5) & (4,6) & (5,4) & (5,6) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{array}
$$

c)

x_{ij} = Cantidad de flujo a pasar del nodo i al nodo j.

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

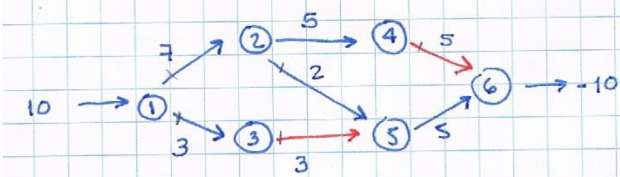
s.t.

$$
\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} &= 10 \\
-x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 0 \\
-x_{13} - x_{23} + x_{35} &= 0 \\
-x_{24} + x_{46} - x_{54} &= 0 \\
-x_{25} - x_{35} + x_{54} + x_{56} &= 0 \\
-x_{46} - x_{56} &= -10
\end{aligned}
$$

$x_{ij} \geq 0$

$x_{ij} \leq u_{ij}$

d) $T = \{(1,2), (1,3), (2,4), (2,5), (5,6)\}$
$L = \{(2,3), (5,4)\}$
$U = \{(3,5), (4,6)\}$



Solución:

$x_{12} = 7$
$x_{13} = 3$
$x_{24} = 5$
$x_{25} = 2$
$x_{35} = 3$
$x_{46} = 5$
$x_{56} = 5$

Como x_{12}, x_{13} y x_{25} tienen flujos igual a u_{ij}, tenemos una solución degenerada.

Flujo total = 10
coste total $= 7\cdot3 + 3\cdot2 + 5\cdot5 + 2\cdot2 + 3\cdot4 + 5\cdot3 + 5\cdot4 = 103$

$\lambda_1 - \lambda_2 = 3$
$\lambda_1 - \lambda_3 = 2$
$\lambda_2 - \lambda_4 = 5$
$\lambda_2 - \lambda_5 = 2$
$\lambda_5 - \lambda_6 = 4$
$\lambda_6 = 0$

$\lambda_1 = 9$
$\lambda_3 = 7$
$\lambda_4 = 1$
$\lambda_2 = 6$
$\lambda_5 = 4$

R_1

$\bar{c}_{23} = 2 - (6-7) = 3 < 0?$

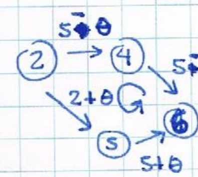
$\bar{c}_{54} = 5 - (4-1) = 2 < 0?$

R_2

$\bar{c}_{35} = 4 - (7-4) = 1 > 0?$

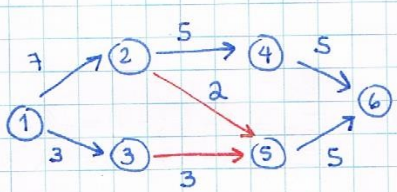
$\bar{c}_{46} = 3 - (1-0) = 2$ * $> 0?$

Entra x_{46}, Sale: $\theta = \min\{5, 5, \theta, 1\} = 0 \Rightarrow x_{25}$



$T = \{(1,2), (1,3), (2,4), (4,6), (5,6)\}$
$L = \{(2,3), (5,4)\}$
$U = \{(3,5), (2,5)\}$

Como $\theta = 0$, la solución es la misma pero asociada a otro árbol (sol. básica distinta)



$\lambda_1 - \lambda_2 = 3$
$\lambda_1 - \lambda_3 = 2$
$\lambda_2 - \lambda_4 = 5$
$\lambda_4 - \lambda_6 = 3$
$\lambda_5 - \lambda_6 = 4$
$\lambda_6 = 0$

$\lambda_1 = 11$
$\lambda_3 = 9$
$\lambda_2 = 8$
$\lambda_4 = 3$
$\lambda_5 = 4$

R_1

$\bar{c}_{23} = 2 - (8-9) = 3 < 0?$

$\bar{c}_{54} = 5 - (4-3) = 4 < 0?$

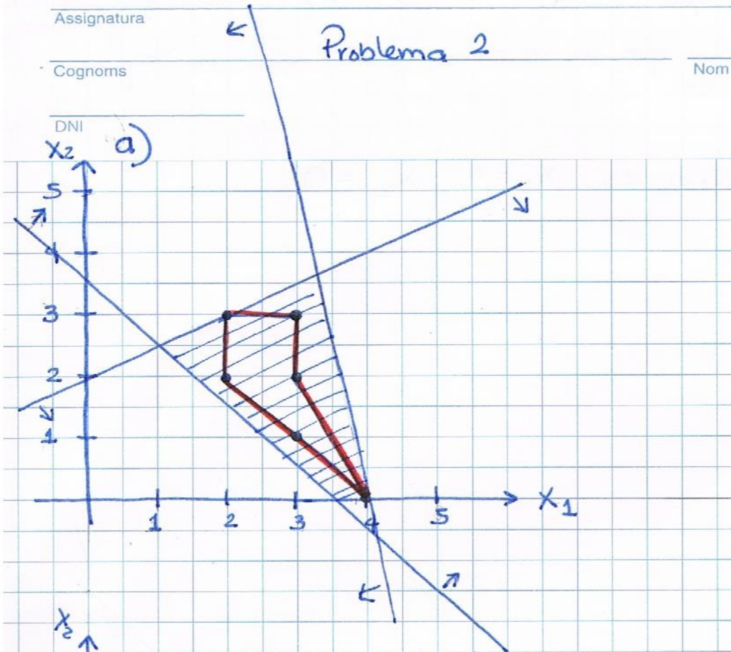
R_2

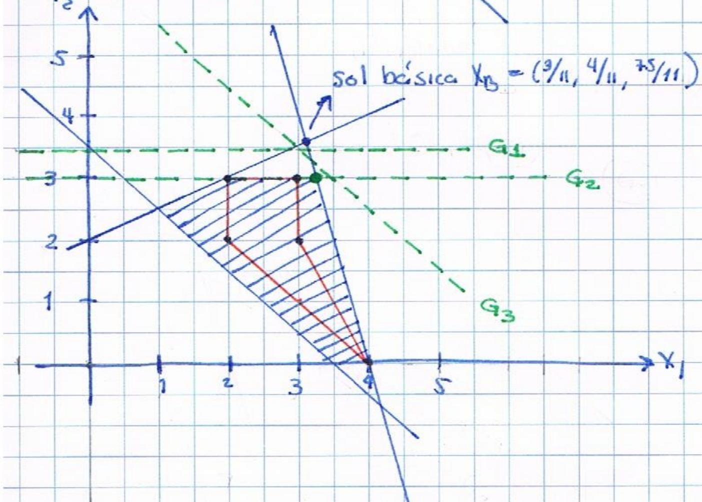
$\bar{c}_{35} = 4 - (9-4) = -1 > 0?$

$\bar{c}_{25} = 2 - (8-4) = -2 > 0?$

Como $\bar{c}_{ij} \in R_1 \geq 0$ y $\bar{c}_{ij} \in R_2 < 0$, tenemos ya la solución óptima!

a)





La solución óptima del problema entero no se alcanzaría al resolver el problema lineal (LP) + añadiendo los cortes de Gomory.

b)

$$\frac{10}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 \geq \frac{3}{11}$$

$$\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \geq \frac{7}{11}$$

$$\frac{8}{11}x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{9}{11}$$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \qquad x_3 = 4 + x_1 - 2x_2$

$5x_1 + x_2 + x_4 = 20 \qquad x_4 = 20 - 5x_1 - x_2$

$$\frac{10}{11}(4 + x_1 - 2x_2) + \frac{2}{11}(20 - 5x_1 - x_2) \geq \frac{3}{11}$$

$$\frac{22}{11}x_2 \geq -\frac{77}{11}$$

$$x_2 \leq 7/2 \quad \boxed{G_1}$$

$$\frac{5}{11}(4 + x_1 + 2x_2) + \frac{1}{11}(20 - 5x_1 - x_2) \geq \frac{7}{11}$$

$$x_2 \leq 3 \quad \boxed{G_2}$$

$$\frac{8}{11}(4 + x_1 - 2x_2) + \frac{6}{11}(20 - 5x_1 - x_2) \geq \frac{9}{11}$$

$$x_1 + x_2 \leq 13/2 \quad \boxed{G_3}$$

c) Nodo 4 es eliminado por integridad

Nodo 3 se elimina por acotamiento, ya que la f.o. aumentará en por lo menos una unidad, por lo que $z_3 \geq \lceil -29 + 1 \rceil = -28$

Nodo 2 se elimina por infactibilidad ya que se ve claramente que ninguna solución factible cumple que $x_2 \geq 4$.

Por tanto la solución óptima es $x_1 = 4 \quad x_2 = 0. \quad z = -28$