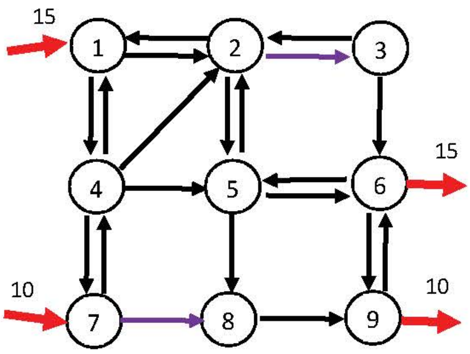


Examen Parcial 1 de I.O. Grau d'Enginyeria Informàtica. Curs 2019-20

P1[3 punts] Una cimentera disposa de tres canteres i pot fabricar 3 tipus de ciments a partir de 3 tipus de grava. Cada tipus de grava s'extrau de la corresponent cantera, la qual proporciona nomès un sol tipus de grava. Els requeriments de les composicions de cada tipus de ciment venen donats en la següent taula:

	G_1	G_2	G_3	c_i (Eur/Ton)
C1	$= G_2$	$= G_1$	$\geq 60\,\%$	2
C2	$35\,\% - 70\,\%$	$\leq 10\,\%$	$\leq 50\,\%$	2
C3	$1/3$	$1/3$	$1/3$	3
U_k (Ton)	10,000	12,000	7,500	X
E_k (Eur/Ton)	5	2	3	X
π_i (Eur/Ton)	6	4	5	X

Les quantitats de ciment de tipus $C1, C2, C3$ es venen a K compradors, ofertant el comprador j un preu $p_{i,j}$ Euros per tona de ciment tipus C_i. Els costs de transport per tona de ciment tipus i al comprador $j = 1, 2, ...K$ són $t_{i,j}$. Les quantitats de grava restants que no puguin utilitzar-se per fer ciment es venen a un conjunt de minoristes, els quals compren a un preu de π_k Euros la tona de grava de tipus $G_k, k = 1, 2, 3$. Tècnicament, la capacitat anual d'extracció de cada tipus de grava és U_k i el cost de l'extracció és de E_k Eur/Ton. En la cimentera, el cost de produïr una tona de ciment tipus i és de c_i Els paràmetres anteriors venen donats numèricament en la taula anterior.

a) Representeu sobre una graf les variables i principals constricions del model.

b) Formuleu un problema de programació lineal utitlitzan les variables detallades abaix de forma que es maximitzi el benefici total anual de l'empresa.

$x_{k,i}$ quantitat total de grava tipus $k = 1, 2, 3$ usada per fabricar ciment tipus $i = 1, 2, 3$.

y_i quantitat total produïda de ciment tipus $i = 1, 2, 3$.

$z_{i,j}$ quantitat total de ciment tipus i transportada i venuda al comprador $j = 1, 2, 3, ..., K$.

m_k quantitat de grava tipus $k = 1, 2, 3$ venuda als minoristes.

P2 [3 punts] Pel problema:

$$
\begin{array}{ll}
Max_x & x_1 + x_2 \\
s.a: & x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) [1 punt] Determineu una solució bàsica inicial factible pel mètode de variables artificials en la forma tabular.

b) [2 punts] partint d'ella efectueu una iteració de l'algoritme del símplex en la seva forma revisada.

P3 [4 punts]: Considereu el Min-Cost Flow problem associat a la xarxa de la figura a l'inici de pàgina, en la que hi ha un límit de capacitat de $u_{i,j} = 9$ en tots els arcs. El cost unitari de transport en els arcs és 1, llevat dels arcs $(2,3)$ i $(7,8)$ on aquest cost val 3. Considereu solució bàsica factible determinada per $I_B = \{(1,4), (6,9), (4,5), (7,4), (5,6), (7,8), (4,2), (2,3)\}$, $I_{N+} = (1,2), (3,6), (8,9)$ i $I_{N-} =$ la resta d'arcs.

a) [1 punt] Determineu el valor dels fluxos coresponents a aquesta solució bàsica factible.

b) [1.5 punts] És una solució òptima? raoneu-ho usant arguments i càlculs basats en l'algoritme del símplex.

c) [1.5 punts] Determienu el canvi de base que conduïria a a una més gran reducció de la funció objectiu i efectueu-lo.

Solució

P1

$$f = -\sum_{k=1}^{3} E_k \sum_{i=1}^{3} x_{ki} - \sum_{i=1}^{3} c_i y_i - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} t_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} z_{ij} + \sum_{k=1}^{3} \pi_k m_k$$

$$\begin{array}{lll} Max_{x,y,z,m} & f & \\ & \sum_{i=1}^{3} x_{ki} + m_k \leq U_k & k=1,2,3 \\ & y_i = \sum_{k=1}^{3} x_{ki} & i=1,2,3 \\ & y_i = \sum_{j=1}^{3} z_{ij} & i=1,2,3 \\ & x_{11} = x_{21},\ x_{31} \geq 0{,}6 y_1 & \\ & 0{,}35 y_2 \leq x_{12} \leq 0{,}7 y_2, & \\ & x_{22} \leq 0{,}1 y_2,\ x_{32} \leq 0{,}5 y_2 & \\ & x_{13} = x_{23},\ x_{23} = x_{33} & \\ & x_{ki} \geq 0,\ m_k \geq 0,\ z_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

P2 a) Problema amb variables artificials:

$$\begin{array}{lll} Min & x_5 & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 & = 1 \\ & x_1, ..., x_5 \geq 0 & \end{array}$$

1	2	3	4	5	
1	2	1	0	0	1
2	1	0	−1	1	1
0	0	0	0	1	0
−2	−1	0	1	0	−1

$I_B = \{3,4\},\ Entra\ x_1,\ surt\ x_5$
$\hat{x}_1 = min\{1/1,\ 1/2\} = 1/2$

1	2	3	4	5	
0	3/2	1	1/2	−1/2	1/2
1	1/2	0	−1/2	1/2	1/2
0	0	0	0	1	0

$I_B = \{3,1\},\ taula$ òptima

b) Per $I_B = \{3,1\}$:

$$B^{-1} = (\ .\quad .\ )$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ x_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},\ f.obj = -1$$

$$u = B^{-\top} c_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix},\ r_2 = -1 - (2,1)(0,-1/2)^\top = -1/2$$

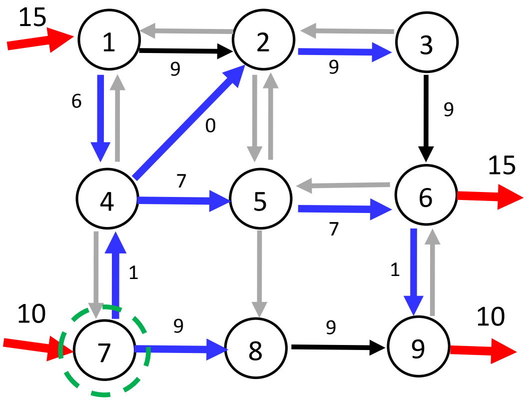
$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},\ \hat{x}_2 = min\{\frac{1/2}{3/2},\ \frac{1/2}{1/2}\} = 1/3,\ surt\ x_3$$

$$I_B = \{2,1\},\ f.obj = -1/2 + (-1/2)1/3 = -2/3$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

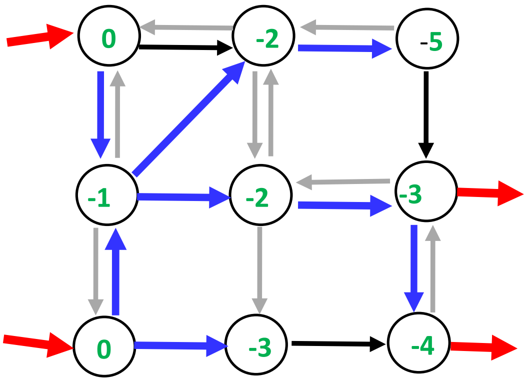
$$x'_B = \eta^{-1} x_B = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

P3



I_B = {(1,4), (6,9), (4,5), (7,4), (5,6), (7,8), (4,2), (2,3)}

I_{N+} = {(1,2), (3,6), (8,9)}; I_{N-} = the remaining links.



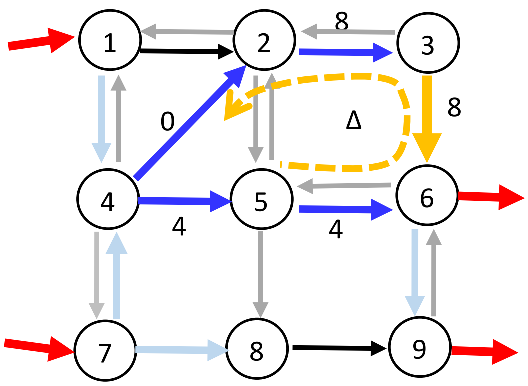
r_{12} = 1-(0+2) = -1, r_{21} = 1-(-2) = -3, r_{32} = 1-(-5+2) = 4

r_{36} = 1-(-5+3) = 3, r_{52} = 1-(-2+2) = 1, r_{25} = 1,

r_{41} = 1-(-1-0) = 2, r_{47} = 1-(-1+0) = 2, r_{58} = 1-(-2+3) = 0

r_{96} = 1-(-4+3) = 2

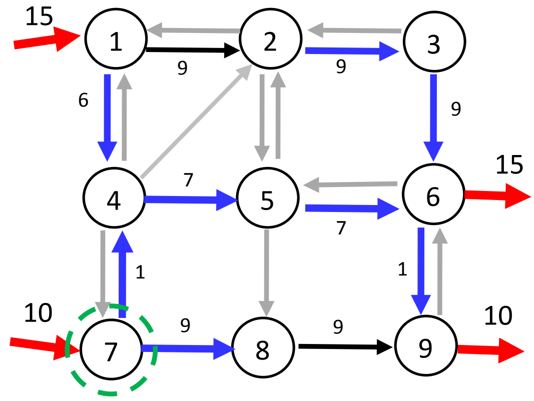
Observeu que, ja que (3,6) $\in I_{N+}$ amb cost reduït positiu, llavors (3,6) és un candidat per abandonar I_{N+} i entrar a I_{N-} or I_B . Ja que (3,6) està a capacitat la única possibilitat és decreixer el seu flux:



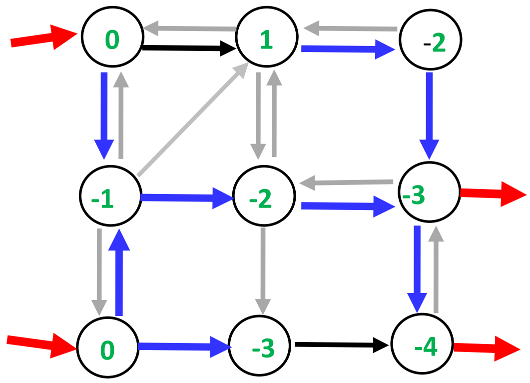
Δ = Min { 9, 9, 0, 2, 2 } = 0

No hi ha canvi en els fluxos; només en els índexos.

(4,2) surt de I_B i entra a I_{N-} , llavors (3,6) entra a I_B



I_B = {(1,4), (6,9), (4,5), (7,4), (5,6), (7,8), (2,3), (3,6)} I_{N+} = {(1,2), (8,9)}; I_{N-} = la resta (incloent (4,2))



No hi ha canvi en els fluxos.

Càlcul de variables duals i costs reduïts r_{ij} :

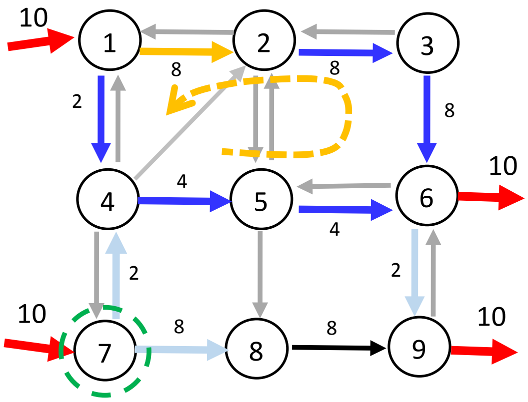
r_{12} = 1-(0-1) = 2, r_{21} = 1-(1-0) = 0, r_{32} = 1-(-5+2) = 4

r_{52} = 1-(-2-1) = 4, r_{25} = 1 – (1+2) = -2,

r_{42} = 1-(-1+1) = 1, r_{41} = 1-(-1+0) = 2, r_{58} = 1-(-2+3) = 0

r_{96} = 1-(-4+3) = 2, r_{47} = 1-(-1+0) = 2, r_{89} = 1-(-3+4) = 0

Es tria l'arc (1,2)



Δ = Min { 9, 3, 2, 2, 9, 9 } = 2

Sí hi ha canvi de flux. El decrement de la funció objectiu serà:

New obj.F -Old obj.F. = r_{12} (-Δ) = -2 × 2 = -4

Entrar l'arc (2,5) no fa canviar a f.obj.