**Examen Final de I.O. Grau d'Enginyeria Informàtica. Curs 2019-20**

**P1. [4 punts]** Una companyia publicitària segueix un mètode bf basat en la programació lineal per a distribuïr de forma òptima les quantitats invertides en publicitat d'un client. N'hi ha prou en identificar les audiències a les que vol dirigir-se el client, com per exemple adolescents, matrimonis joves, majors d'edat etc. Suposem que l'índex $i$ representa l'audiència $i$-èssima. Llavors, el client ha d'especificar el número esperat de compres $E_i$ per individu de l'audiència $i$ que vol aconseguir. Se suposa que s'ha avaluat prèviament l'efectivitat de cada mitjà publicitari $j$ en l'audiència $i$ i que aquesta efectivitat ve mesurada pel coeficient $a_{ij}$. És a dir, si s'inverteixen 1 euro en el mitjà $j$, llavors l'audiència $i$ presenta un increment de compres $a_{ij}$ per individu. Se suposa que en cas de que no hi hagi cap inversió publicitària la quantitat de compres per part de l'audiència $i$ és $E_i^0$ (se suposa que el client el coneix per un estudi estadístic i que és un nivell de compres molt baix.)

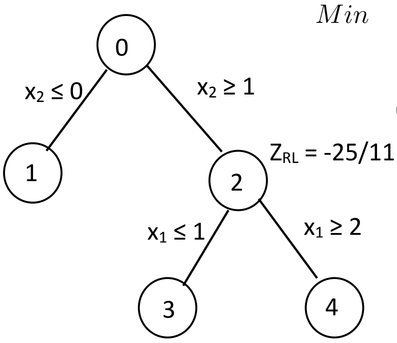
Suposem que la variable nonegativa $x_j$ representa la quantitat de diners invertida en publicitat en el mitja $j$. L'objectiu consisteix en minimitzar la quantitat total de diners invertida en el total de mitjans publicitaris, de forma que quedin garantits, com mínim els nivells de compres $E_i$. Suposeu 4 audiències i 5 mitjans publicitaris i plantejeu el corresponent problema de programació lineal.

**P2. [6 punts]** Determina per al problema següent:

$$\begin{array}{lll} Min & -x_1 - x_2 & \\ & 5x_1 + 16x_2 & \geq 18 \\ & 11x_1 + 16x_2 & \leq 30 \\ & x_i \geq 0 & \end{array}$$

1. [3 punts] Pel mètode de variables artificials determineu una base inicial factible.
2. [3 punts] Partint de la base $2, 4$ resoleu el problema.

**P3. [6 punts]** Per al següent problema de programació lineal entera, la solució de la relaxació del nus 0 és




$$\begin{array}{lll} Min & -x_1 - x_2 & \\ & 5x_1 + 16x_2 & \geq 18 \\ & 11x_1 + 16x_2 & \leq 30 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \in Z & \end{array}$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $-11/96$ | $-5/96$ | $1/2$ |
| 1 | 0 | $1/6$ | $1/6$ | 2 |
| 0 | 0 | $5/96$ | $11/96$ | $5/2$ |

1. [4 punts] L'ordre d'exploració ha estat 0,1,2,3,4. Amb el símplex dual calculeu la relaxació lineal del nus 2.
2. [2 punts] Indiqueu com ha estat trobada la solució als nusos 1, 3 i 4 i on està la solució del problema.

**P4. [4 punts]** Considereu el graf complet donat per la següent taula simètrica de costs:

| | $B$ | $D$ | $F$ | $K$ | $W$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 91 | 80 | 259 | 70 | 121 |
| $B$ | | 77 | 175 | 27 | 84 |
| $D$ | | | 232 | 47 | 29 |
| $F$ | | | | 189 | 236 |
| $K$ | | | | | 55 |

1. [2 punts] Determineu un tour de cost el més baix possible usant la heurística de Christofides.
2. [2 punts] Partint del subtour que passa pels tres nusos A, B, D, determineu un tour de cost el més baix possible usant la heurística d'insercio del vei més proper.

**P1**

$$
\begin{array}{lll}
Min_x & \sum_{j=1}^{5} x_j & \\
s.a: & \sum_{j=1}^{5} a_{i,j}x_j + E_i^0 & \geq E_i,\ 1 \leq i \leq 4 \\
 & x_j \geq 0 &
\end{array}
$$

**P2** 1. Variable artificial per a la $1^a$ constricció: $x_5$

$$
\begin{array}{lllll}
Min & x_5 & & & \\
 & 5x_1 + 16x_2 - x_3 & & + x_5 & = 18 \\
 & 11x_1 + 16x_2 & + x_4 & & = 30 \\
 & x_i \geq 0 & & &
\end{array}
$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 16 | $-1$ | 0 | 1 | 18 |
| 11 | 16 | 0 | 1 | 0 | 30 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$\longrightarrow$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 16 | $-1$ | 0 | 1 | 18 |
| 11 | 16 | 0 | 1 | 0 | 30 |
| $-5$ | $-16$ | 1 | 0 | 0 | $-18$ |

Entra $x_2$
$\hat{x}_2 = Min\{\mathbf{\frac{18}{16}}, \frac{30}{16}\} = \frac{9}{8}$
Surt $x_5$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 16 | $-1$ | 0 | 1 | 18 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | $-1$ | 12 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$\longrightarrow$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{16}$ | 1 | $\frac{-1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{9}{8}$ |
| 6 | 0 | 1 | 1 | $-1$ | 12 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Base inicial $\{2, 4\}$

2.

| 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{16}$ | 1 | 0 | $\frac{-1}{16}$ | $\frac{9}{8}$ |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 12 |
| $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 |

$\longrightarrow$

| 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{16}$ | 1 | $\frac{-1}{16}$ | 0 | $\frac{9}{8}$ |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 12 |
| $\frac{-11}{16}$ | 0 | $\frac{-1}{16}$ | 0 | $\frac{9}{8}$ |

Entra $x_1$
$\hat{x}_1 = Min\{\frac{9/8}{5/16}, \mathbf{\frac{12}{6}}\} = 2$
Surt $x_4$

| 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{-11}{96}$ | $\frac{-5}{96}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 2 |
| 0 | 0 | $\frac{5}{96}$ | $\frac{11}{96}$ | $\frac{5}{2}$ |

**P3** 1. $x_2 \geq 1,\ \ x_2 - x_5 = 1,\ x_5 \geq 0$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{-11}{96}$ | $\frac{-5}{96}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $-1$ | 1 |
| 0 | 0 | $\frac{5}{96}$ | $\frac{11}{96}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ |

$\longrightarrow$

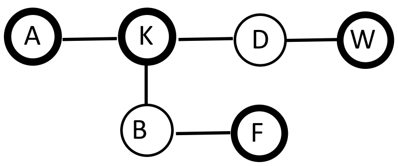
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{-11}{96}$ | $\frac{-5}{96}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 2 |
| 0 | 0 | $\frac{-11}{96}$ | $\frac{-5}{96}$ | 1 | $\frac{-1}{2}$ |
| 0 | 0 | $\frac{5}{96}$ | $\frac{11}{96}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ |

$Max\{\mathbf{\frac{-5}{11}}, \frac{-11}{5}\} = \frac{-5}{11}$
Surt excès $x_5$; Entra $x_3$

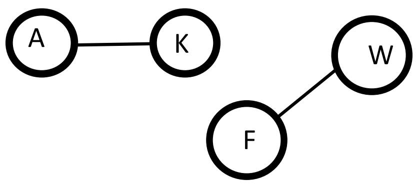
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | $-1$ | 1 |
| 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{11}$ | $\frac{16}{11}$ | $\frac{14}{11}$ |
| 0 | 0 | 1 | $\frac{5}{11}$ | $\frac{-96}{11}$ | $\frac{48}{11}$ |
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{25}{11}$ |

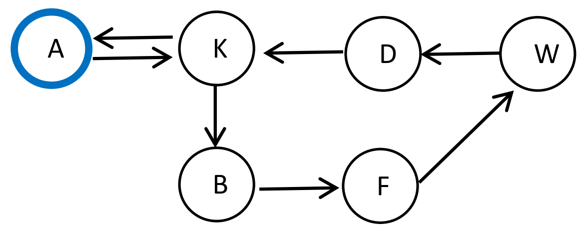
2. Al nus 1 ha de ser $x_2 = 0$, per lo que no hi ha valor possible per a $x_1$; el nus 1 es marca per infactible. Al nus 3, $x_1$ no pot ser 0, ja que existeix, per $x_1 = 1$, solució factible. Per $x_1 = 1$, llavors $x_2 \leq 1$ per lo que $x_2 = 1$. Per tant en el nus 3 está una solució entera, la $x_1 = 1, x_2 = 1$ i totes les seves veines o son infactibles o donen pitjor valor de la funció objectiu. Això no prova que la relaxació lineal corresponent al nus 3 sigui entera (que sí ho és), però sí demostra que $x_2 = 1, x_1 = 1$ és la millor i única soució entera, per lo que l'incumbent s'actualitza a -2 i el nus 3 pot marcar-se. De resoldre's la relaxació del nus 3, aquesta donaria entera i el nus 3 es marcaria per solució entera. El nus 4 és infactible. La solució está al nus 3.

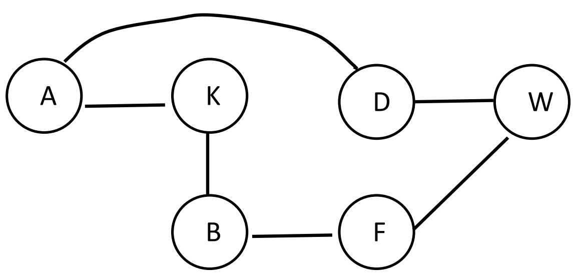
A) Arbre de recobriment de cost mínim (348) obtingut pel mètode de Prim:




Es cerca 2-matching de cost mínim (306) per als nusos de grau senar A, K, F, W



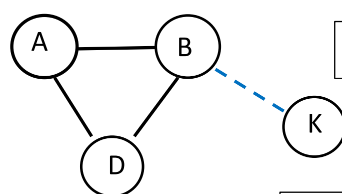



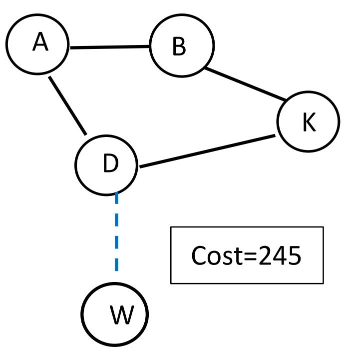

Cost=617

B) Heurística d'inserció:

d(F,C)=80
**d(K,C)=27**
d(W,C)=29



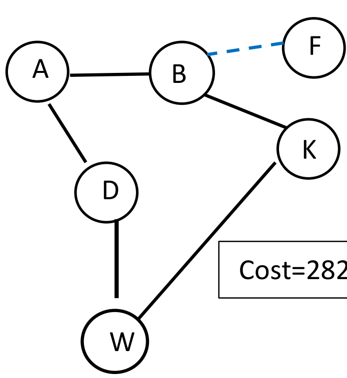

Cost=248




Cost=245

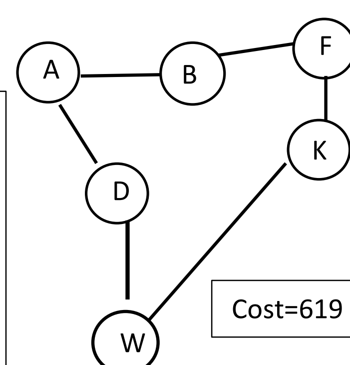
d(F,C)=80
**d(W,C)=29**
**Inserció:**
Per DK: 29+55-47=37
Per AD: 29+121-80=70
Per AB: 121 +84-91=114
Per BK: 84+55-27=112

Per AB: 27+70-91=6
**Per BD: 27+47-77=-3**
Per AD: 70+47-80=37




Cost=282

**Inserció:**
Per BK: 175+189-27=337
Per AB: 175+259-91=343
Per KW: 189+236-55=370
Per DW: 232+236-29=439
Per AD: 259+232-80=411




Cost=619