(2.c) RESOLUCIÓN DE MODELOS LINEALES. ALGORITMO DEL SIMPLEX

- **FORMA CANÓNICA DE UN SISTEMA Ax = b**
  - **Forma Standard y Base factible (repaso).**
  - **Expresión de las v. básicas en función de las no básicas.**
  - **Forma tabular.**
- **CAMBIO DE BASE CON CONSERVACIÓN DE LA FACTIBILIDAD.**
  - **Casos singulares. Región no acotada.**
  - **Cambio degenerado de base.**
- **CONCEPTO DE COSTE REDUCIDO.**
  - **Cambio de base con disminución de la f.obj.**
  - **Cálculo de los costes reducidos.**
- **ALGORITMO DEL SÍMPLEX**
  - **Forma tabular. Fórmulas matriciales. Ejemplos**
- **INICIALIZACIÓN DEL ALGORITMO. (fase 0)**
  - **Método de las variables artificiales.**

Cap. 3 Luenberger D.G."Linear and Nonlinear Programming" Addison-Wesley 1984
Cap. 4 Hillier F.S., Lieberman G.J. "Introduction to Operations Research" Holden day Inc. 1986

1-PROGRAMACIÓN LINEAL

- **Semana 1**

  1. Sesión de teoría. 2h.
     - (1.a) El concepto de Investigación Operativa. Presentación y desarrollo del curso. Normas de evaluación de la asignatura. Introducción a la I.O. y ciclo metodológico. Presentación de un caso de estudio.
     - 2^a hora. **(2.a) Introducción a la formulación de modelos lineales**. Hipótesis de modelización en programación lineal. Ejemplos de problemas de producción, de mezclas, problema de la mochila. Estructura de los problemas de programación lineal. Conceptos básicos en el lenguaje de modelización AMPL. Declaración de parámetros y dimensionado del problema. Variables, restricciones y función objetivo.
  2. Sesión de teoría y problemas. 1+1h.
     - (2.b) Propiedades de los modelos lineales. Estudio gráfico de un problema lineal en dos variables. Región factible. Conjuntos convexos. Optimos. Problemas no factibles. Problemas no acotados. Optimos alternativos. Concepto de solución básica. Soluciones básicas factibles y vértices.
     - (2^a hora)Problemas de modelización (colección de enunciados).

- **Semana 2**

  1. Sesión de teoría. 2h.
     - (2.c) Resolución de modelos lineales. Algoritmo del símplex. Forma standard de los problemas de programación lineal. Forma canónica de un sistema de ecuaciones lineales. Cambio de base con conservación de la factibilidad. Ejemplos. Identificación de regiones factibles no acotadas.
  2. Sesión de teoría y problemas 1+1h.
     - Concepto de coste reducido asociado a una base. El algoritmo del símplex. Forma tabular.
     - (2^a hora) Resolución de problemas de programación lineal. Uso de hojas de cálculo.

- **Semana 3**

  1. Sesión de teoría y problemas. 1+1h.
     - (2.c) Resolución de modelos lineales. Algoritmo del símplex. (continuación) Inicialización del algoritmo del símplex: Método de las dos fases. Ejemplos.
     - 2^a hora. Sesión de problemas. Resolución de problemas de programación lineal.
  2. Sesión de laboratorio. 2h.
     - Práctica 1. Seguimiento de las iteraciones hacia una solución básica óptima según LINDO.

- **Semana 4**

  1. Sesión de teoría. 2h.
     - (2.d) Dualidad y análisis de sensibilidad. Problema dual. Introducción al algoritmo del símplex dual. Análisis de sensibilidad. Reoptimización tras pérdida de factibilidad primal por cambios en el término de la derecha y por adición de restricciones. Ejemplos.
  2. Sesión de problemas. 2h.
     - Resolución y reoptimización de algunos modelos simples de programación lineal usando hojas de cálculo.

- **Semana 5**

  1. Sesión de teoría. 2h.
     - (2.e) Modelos en programación lineal. Conceptos básicos en programación multiobjetivo. Introducción de un caso de estudio. Modelos de análisis del peor caso posible. Modelos lineales de programación por objetivos. Múltiples objetivos con prioridad. Restricciones duras y blandas.
  2. Sesión de laboratorio. 2h. `Entrega de cuestionario`
     - Práctica 2. Desarrollo y resolución de un modelo relacionado con la anterior sesión de teoría mediante AMPL.

FORMA STANDARD DE UN P.P.L.

Tras transformaciones, todo P.P.L. puede expresarse de la forma:

$$
\begin{aligned}
Min_x \quad & c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \\
s.a: \quad & a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
& a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0, \ \ldots x_n \geq 0
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
Min_x \quad & c^\top x \\
s.a: \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$(m \leq n)$

- Todas las variables x_i están sujetas a $x_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots n$
- Todos los términos de la derecha b_i son no negativos: $b_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots m$
- La matriz de coeficientes A es de pleno rango:

Hay m columnas de A tales que al formar una matriz B con ellas, ésta es inversible.

Todos los paquetes para P.L. convierten automáticamente a la forma Standard

DEFINICIÓN DE BASE FACTIBLE

Sistema $Ax = b,\ x \geq 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \qquad (\ i = 1, \ldots 5\ )$$

$$\longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN: B **es base factible si:** $\boxed{B^{-1}b \geq 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

B **es una base asociada al conjunto de índices {1, 4, 5}**

Sistema $Ax = b,\ x \geq 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

B **base asociada a $I_B = \{1, 4, 5\}$**

$$x_i \geq 0 \qquad (\, i = 1, \ldots 5 \,)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x_{Reord} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(P)\quad \begin{array}{ll} Min & c^{\top}x \\ s.a: & Ax = b \qquad \longleftarrow \; F \text{ en F.S.} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema Fundamental de la P.L.

1. Si $F \neq \emptyset \Rightarrow$ existe al menos una s.b.f.
2. Si (P) posee solución entonces hay una solución de (P) que es s.b.f.

Una estrategia para resolver el P.P.L. consiste en:

1. **Determinar si $F = \emptyset$.**
2. **En caso contrario, determinar una s.b.f. (vértice) de F inicial**
3. **Visitar s.b.f's hasta encontrar una que sea solución de (P)**
4. **Determinar si la s.b.f. solución es única o existen otras soluciones.**

En este tema:

- **Se desarrolla un método para saltar de una s.b.f. a otra vecina. (CONSERVACIÓN DE LA FACTIBILIDAD).**
- **En cada salto se mejora la función objetivo.**
- **Se detecta si se alcanza una solución de (P) o bien si el problema es no acotado.**
- **Finalmente, se desarrolla un método para encontrar una s.b.f. inicial o bien detectar que $F=\varnothing$.**

$$\Downarrow$$

ALGORITMO DEL SÍMPLEX

FORMA CANÓNICA DE UN SISTEMA LINEAL $Ax=b$

Respecto del conjunto de índices $I_B = \{1, 4, 5\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B \; x_B \; + \; N \; x_N \; = \; b$$

$$B^{-1} (B \; x_B \; + \; N \; x_N) \; = \; B^{-1} b$$

$$x_B \; + \; B^{-1} N \; x_N \; = \; B^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_B \; + \; Y \; x_N \; = \; y_0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{-2}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

forma tabular

1	4	5	2	3	
1	0	0	-1	1	1
0	1	0	$-2/3$	1	2
0	0	1	$-1/3$	1	5

FORMA CANÓNICA DE UN SISTEMA LINEAL $Ax=b$

Para el conjunto de índices asociados a una base B, $I_B=\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$

$$x_B + Y x_N = y_0$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_{n-m}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
i_1 & \ldots & i_m & j_1 & \ldots & j_{n-m} & 0 \\
\hline
1 & \ldots & 0 & y_{1,1} & \ldots & y_{1,n-m} & y_{1,0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 1 & y_{m,1} & \ldots & y_{m,n-m} & y_{m,0}
\end{array}$$

Columnas básicas

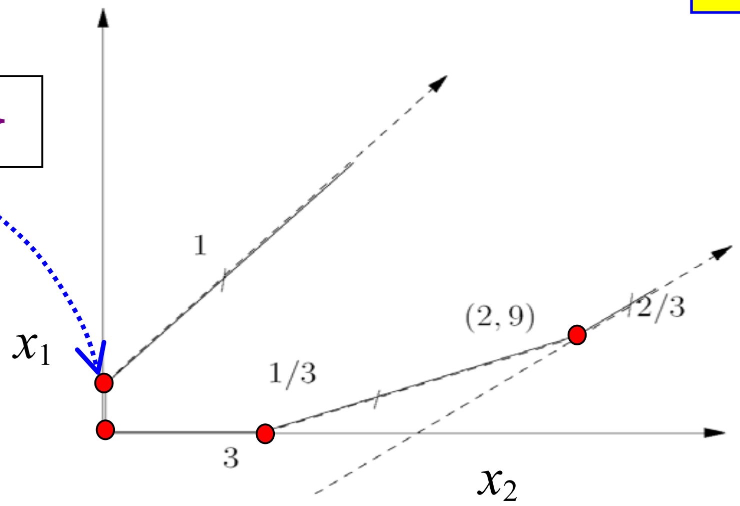
Columnas no básicas

≥ 0 si B es base factible

CAMBIO DE BASE CON CONSERVACION DE LA FACTIBLIDAD

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4 \\ x_i \geq 0 & \quad (\, i = 1, \dots 5 \,) \end{aligned}$$

$I_B = \{1, 4, 5\}$



La forma canónica expresa la dependencia de las variables x_B respecto de las x_N

$$x_B\,(x_N) = y_0 - Y\,x_N$$

Para $x_N = 0$, $x_B(0) = y_0$; el punto $x_R = (y_0\,, 0\,)$ es un vértice del Poliedro.

Si B es una base factible: $x_B(0) \geq 0$;

Incrementando x_N desde 0 encontraremos otros puntos $x_B\,(x_N) \geq 0$.

Se incrementa una sola v. No básica. El resto se mantienen a cero

CAMBIO DE BASE CON CONSERVACION DE LA FACTIBLIDAD

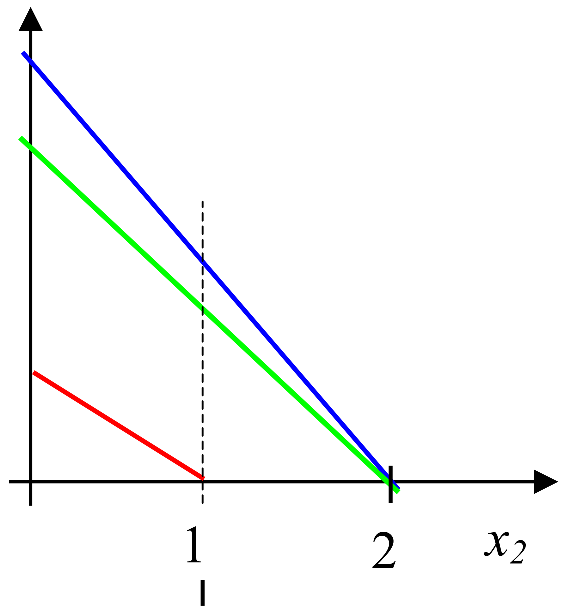
1	4	5	2	3	
1	0	0	4	-2	8
0	1	0	5	3	10
0	0	1	2	8	2

$$I_B = \{1,4,5\}$$
$$I_N = \{2,3\}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se fija $x_3 = 0, \;\; x_2 \uparrow$

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ 4x_2 \quad = 8 \\ x_4 \quad &+ 5x_2 \quad = 10 \\ x_5 \quad &+ 2x_2 \quad = 2 \end{aligned}$$



$$\hat{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_1 = Min \left\{ \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{2}{2} \right\} = 1$$

PIVOTACIÓN

$$
\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 4 & 5 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 8 \\
0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 2
\end{array}
$$

$$I_B = \{1, 4, 5\}$$
$$I_N = \{2, 3\}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_2 = Min \left\{ \frac{4}{8} , \frac{5}{10} , \frac{2}{2} \right\} = 1$$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 4 & 5 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 8 \\
0 & 1 & -5/2 & 0 & -17 & 5 \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & 4 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 4 & 5 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -18 & 4 \\
0 & 1 & -5/2 & 0 & -17 & 5 \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & 4 & 1
\end{array}
$$

$$I_B = \{1, 4, 2\}$$
$$I_N = \{5, 3\}$$

$$\hat{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CAMBIO DE BASE CON CONSERVACION DE LA FACTIBLIDAD

ENTRA VARIABLE NO BÁSICA -> SALE VARIABLE BÁSICA

$$
\begin{array}{ccc|ccc|c|cc|c}
i_1 & \ldots\ i_s\ \ldots & i_m & j_1 & & \ldots & q & \ldots & j_{n-m} & 0 \\
\hline
1 & \ldots & 0 & y_{1,1} & & \ldots & y_{1,q} & \ldots & y_{1,n-m} & y_{1,0} \\
\vdots & 1 & \vdots & \vdots & & & y_{s,q} & & \vdots & y_{s,0} \\
0 & \ldots & 1 & y_{m,1} & & \ldots & y_{m,q} & \ldots & y_{m,n-m} & y_{m,0}
\end{array}
$$

$$\hat{x}_{j_q} = Min \left\{ \left. \frac{y_{t,0}}{y_{t,q}} \right| y_{t,q} > 0 \right\}$$

Extraer i_s de I_B.

Sustituir por j_q

$$I_B = \{i_1, \ldots, i_s, \ldots i_m\}$$

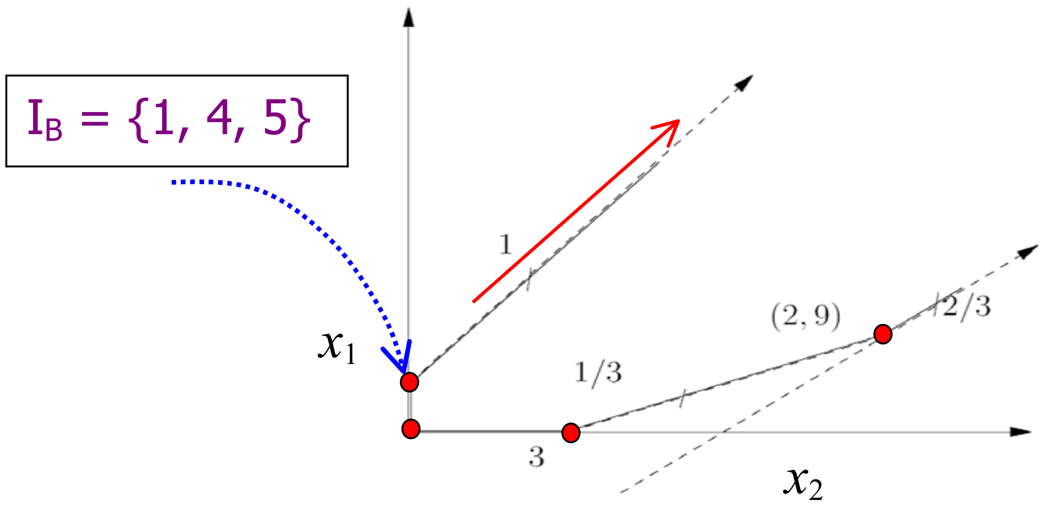
$$I'_B = \{i_1, \ldots, j_q, \ldots i_m\}$$

CAMBIO DE BASE CON CONSERVACION DE LA FACTIBLIDAD

CASOS SINGULARES:

$$y_{t,q} \leq 0$$

1	2	3	4	5	
1	-1	1	0	0	1
0	$-2/3$	1	1	0	2
0	$-1/3$	1	0	1	5



Incrementando x_2 al menos una v. básica crece indef.

$$d^\top = (d_1, d_4, d_5, d_2, d_3) = (1, 2/3, 1/3, 1, 0)$$

Se detecta dirección de crecimiento ilimitado de la región factible

CAMBIO DE BASE CON CONSERVACION DE LA FACTIBLIDAD

CASOS SINGULARES:

$$\exists y_{t,0} = 0 \ \ \& y_{t,q} > 0$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1	4	5	2	3	
1	0	0	4	−2	8
0	1	0	5	3	0
0	0	1	2	8	2

$I_B = \{1, 4, 5\}$

$I_N =$

Se obtiene el mismo punto

1	4	5	2	3	
1	−4/5	0	0	−22/5	8
0	1/5	0	1	3/5	0
0	−2/5	1	0	−34/5	2

$I_B = \{1, 2, 5\}$

$I_N = \{4, 3\}$

5. Calculad las soluciones básicas factibles para el conjunto de restricciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\
-x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 &= 1 \\
-x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0 \qquad (\ i = 1, \ldots 5\ )$$

Partiendo de la base $I_B = \{\ 3, 4, 5\ \}$.

3	4	5	1	2	
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	-1	$1/3$	1
0	0	1	-1	$2/3$	4

$$I_2^+ = \{i_4 = 2, \;\; i_5 = 3\}$$

$$\hat{\varepsilon} = Min_{\; i \in I_2^+} \left\{ \frac{y_{i,0}}{y_{i,2}} \right\} = Min\left\{ \frac{1}{1/3} , \frac{4}{2/3} \right\} = \frac{1}{1/3} = 3 \Rightarrow i_p = 2 \Rightarrow p = 4$$

Sale la variable x_4.

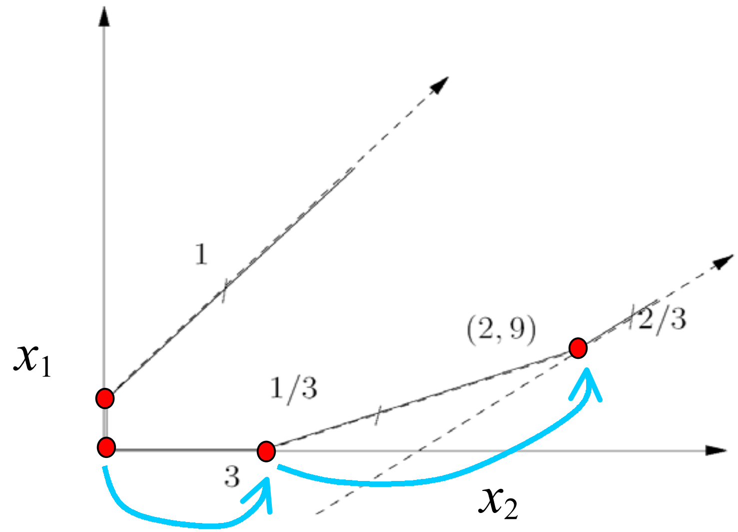
$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Nueva base $I_B = \{3, 2, 5\}$

$$I_1^+ = \{i_5 = 3\}$$

$$\hat{\varepsilon} = Min_{\ i \in I_1^+} \left\{ \frac{y_{i,0}}{y_{i,2}} \right\} = Min\left\{ \frac{2}{1} \right\} = 2 \Rightarrow$$



$$I_B = \{3, 2, 1\}$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\
0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 9 \\
0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2
\end{array}$$

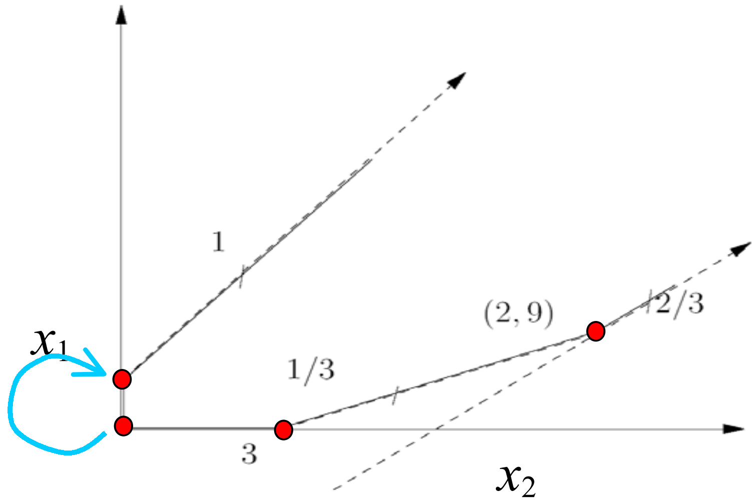
$$d^\top = (d_3, d_2, d_1, d_4, d_5) = (1, 3, 2, 1, 0)$$

1	2	3	4	5	
1	-1	1	0	0	1
-1	$1/3$	0	1	0	1
-1	$2/3$	0	0	1	4

Entra $x_1 \Rightarrow$ **Sale** $x_3 \Rightarrow$

1	2	3	4	5	
1	-1	1	0	0	1
0	$-2/3$	1	1	0	2
0	$-1/3$	1	0	1	5

$$d^\top = (d_1, d_4, d_5, d_2, d_3) = (1, 2/3, 1/3, 1, 0)$$



RESOLUCIÓN DE MODELOS LINEALES. ALGORITMO DEL SIMPLEX

Semana 2. Sesión 2

- **Concepto de coste reducido.**
  - Expresión de las v. básicas en función de las no básicas.
  - Cambio de base con disminución de la f.obj.
  - Cálculo de los costes reducidos.

- **ALGORITMO DEL SÍMPLEX**
  - Forma tabular. Fórmulas matriciales. Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B \quad x_B \quad + \quad N \quad x_N \quad = \quad b}$$

$$\boldsymbol{B^{-1} (B \quad x_B \quad + \quad N \quad x_N) \quad = B^{-1} b}$$

$$\boldsymbol{x_B \quad + B^{-1} N \quad x_N \quad = B^{-1} b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{-2}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_B (x_N) = y_0 - Y x_N}}$$

$$\boldsymbol{x_B \quad + \quad Y \quad x_N \quad = \quad y_0}$$

CAMBIOS DE BASE DIMINUYENDO EL VALOR DE LA F.OBJETIVO

Se quieren encontrar las soluciones del problema de P.L.

$$\begin{array}{ll} Min_x & c^\top x \\ s.a: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Para una base $I_B = \{i_1, ..., i_m\}$ → $\hat{x} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} i_1 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{n-m} & 0 \\ \hline 1 & \cdots & 0 & y_{1,1} & \cdots & y_{1,n-m} & y_{1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & y_{m,1} & \cdots & y_{m,n-m} & y_{m,0} \end{array}$$

Valor de la f. obj.: $z_0 = c^\top \hat{x} = (c_B^\top, c_N^\top) \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_B^\top y_0$

$$x_B(x_N) = y_0 - Yx_N \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_{n-m}} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c^\top x &= c_B^\top x_B + c_N^\top x_N = \\ &= c_B^\top (Y_0 - Yx_N) + c_N^\top x_N = \\ &= c_B^\top Y_0 + (c_N - Y^\top c_B)^\top x_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{obj}(x_N) &= c_B^\top Y_0 + (c_N - Y^\top c_B)^\top x_N = \\ &= z_0 + r^\top x_N = \\ &= z_0 + r_1 x_{j_1} + \ldots + r_{n-m} x_{j_{n-m}} \end{aligned}$$

$$f_{obj}(x_N) = z_0 + r_1 x_{j_1} + \ldots + r_{n-m} x_{j_{n-m}}$$

- Si $r \geq 0$ I_B es una base óptima.
  - $\exists r_\ell = 0 \;\Rightarrow$ hay <u>óptimos alternativos</u>.
  - $r > 0 \;\Rightarrow$ la solución para la base I_B es la <u>única solución</u> del problema.
- $\exists q$ tal que $r_q < 0$: <u>disminuir la función objetivo</u> incrementando el valor de x_{j_q}.

  $\Rightarrow$ <u>Entrar la variable</u> x_{j_q} y formar nueva base.

CÁLCULO DE LOS COSTES REDUCIDOS

$$Min \quad x_1 - \tfrac{4}{3}x_2$$

$$\begin{array}{lll} s.a: & x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ & -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 & = 1 \\ & -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 & = 4 \\ & x_i \geq 0 & (\ i = 1, \ldots 5\ ) \end{array}$$

$$I_B = \{1, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4/3 & -0 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{r = c_N - Y^\top c_B}$$

$$r = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-z_0 = -y_0^\top c_B = -(1 \ \ 1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1 & -1 \end{array}$$

DISPOSICIÓN EN FORMA TABULAR Y FÓRMULAS MATRICIALES.

$$\begin{array}{lll} Min_{\ x} & c^\top x & \\ s.a & Ax = & b \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} I & Y & Y_0 \\ \hline 0 & r_N & -z_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Y &= B^{-1}N \\ Y_0 &= B^{-1}b \\ r_N &= c_N - N^\top B^{-\top} c_B \\ z_0 &= c_B^\top B^{-1} b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} i_1 & \dots & i_m & j_1 & \dots & j_{n-m} & 0 \\ \hline 1 & \dots & 0 & y_{1,1} & \dots & y_{1,n-m} & y_{1,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & y_{m,1} & \dots & y_{m,n-m} & y_{m,0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & r_1 & \dots & r_{n-m} & -z_0 \end{array}$$

$\boxed{\textbf{0) Inicialización}.\ \text{Determinar s.b.f. inicial } B_{(0}.\ k=0}$

1) Calcular costes reducidos para $B = B_{(k}$:

$r_N = c_N - Y^\top c_B = c_N - N^\top B^{-\top} c_B$

2) Si $r_N \geq 0 \Rightarrow B_{(k}$ **base óptima. STOP.**

3) Si $\exists\, q$ $t.q.$ $(r_N)_q < 0$ & $y_{iq} \leq 0$ $(1 \leq i \leq m) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Problema no Acotado. STOP.**

4) Seleccionar variable no básica de entrada x_{j_q}.

(q tal que $r_q = Min\,\{\, r_\ell \mid 1 \leq \ell \leq n-m \,\}$)

5) Encontrar variable básica de salida x_{i_s} y **Efectuar cambio de base** .

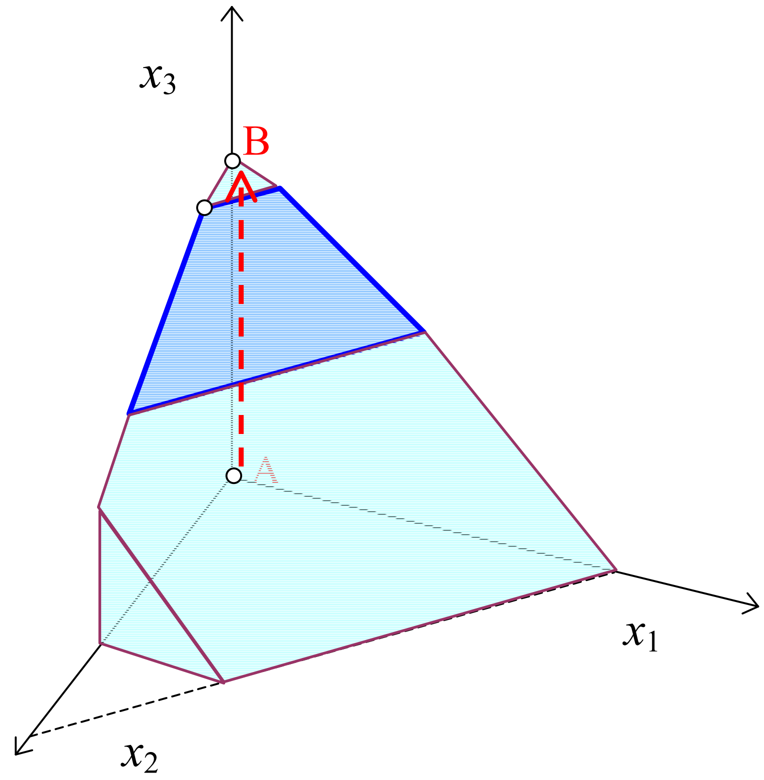
Determinar $p = i_s \in I_B$ según:

$$\hat{x}_{j_q} = \frac{y_{s,0}}{y_{s,q}} = Min\{\ \frac{y_{t,0}}{y_{t,q}} \mid y_{tq} > 0\ \}$$

$$I_{B_{(k+1}} = I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$$

6) $k \leftarrow k+1$. Volver a 1)

UPC

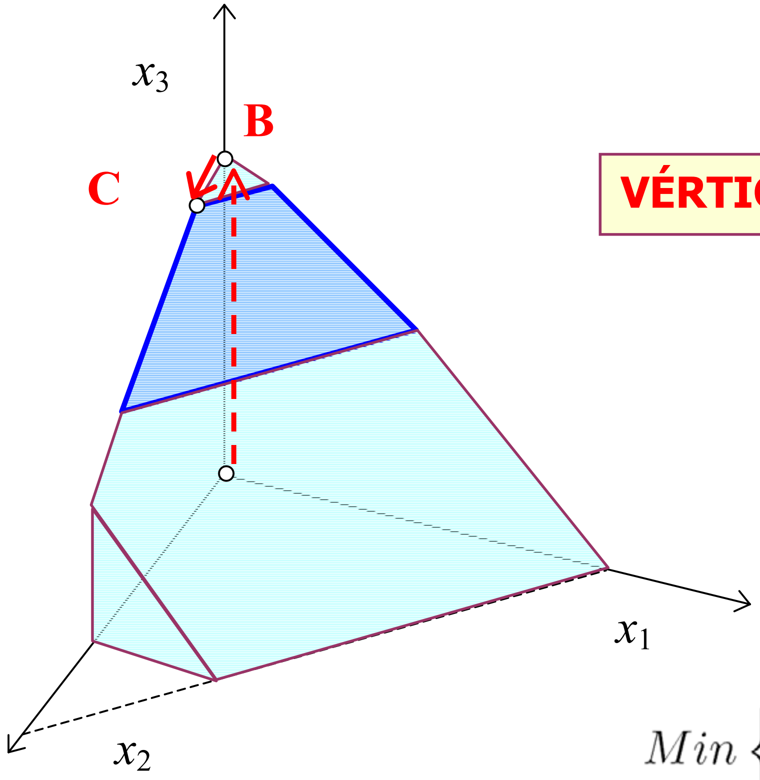


$$
\begin{array}{lrrrl}
Min & -12x_1 & -12x_2 & -16x_3 & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1 \\
 & x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & \leq 11/9 \\
 & x_1 & +x_2 & +5/3x_3 & \leq 53/36 \\
 & -1/2x_1 & x_2 & & \leq 2/3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

VÉRTICE A

1	2	3	4	5	6	7	0
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	4/3	0	1	0	0	11/9
1	1	5/3	0	0	1	0	53/36
−1/2	1	0	0	0	0	1	2/3
−12	−12	−16	0	0	0	0	0

$$Min\left\{1/1,\ \frac{11/9}{4/3},\ \frac{53/36}{5/3}\right\} = Min\{1, 11/12, 53/60\}$$



VÉRTICE B

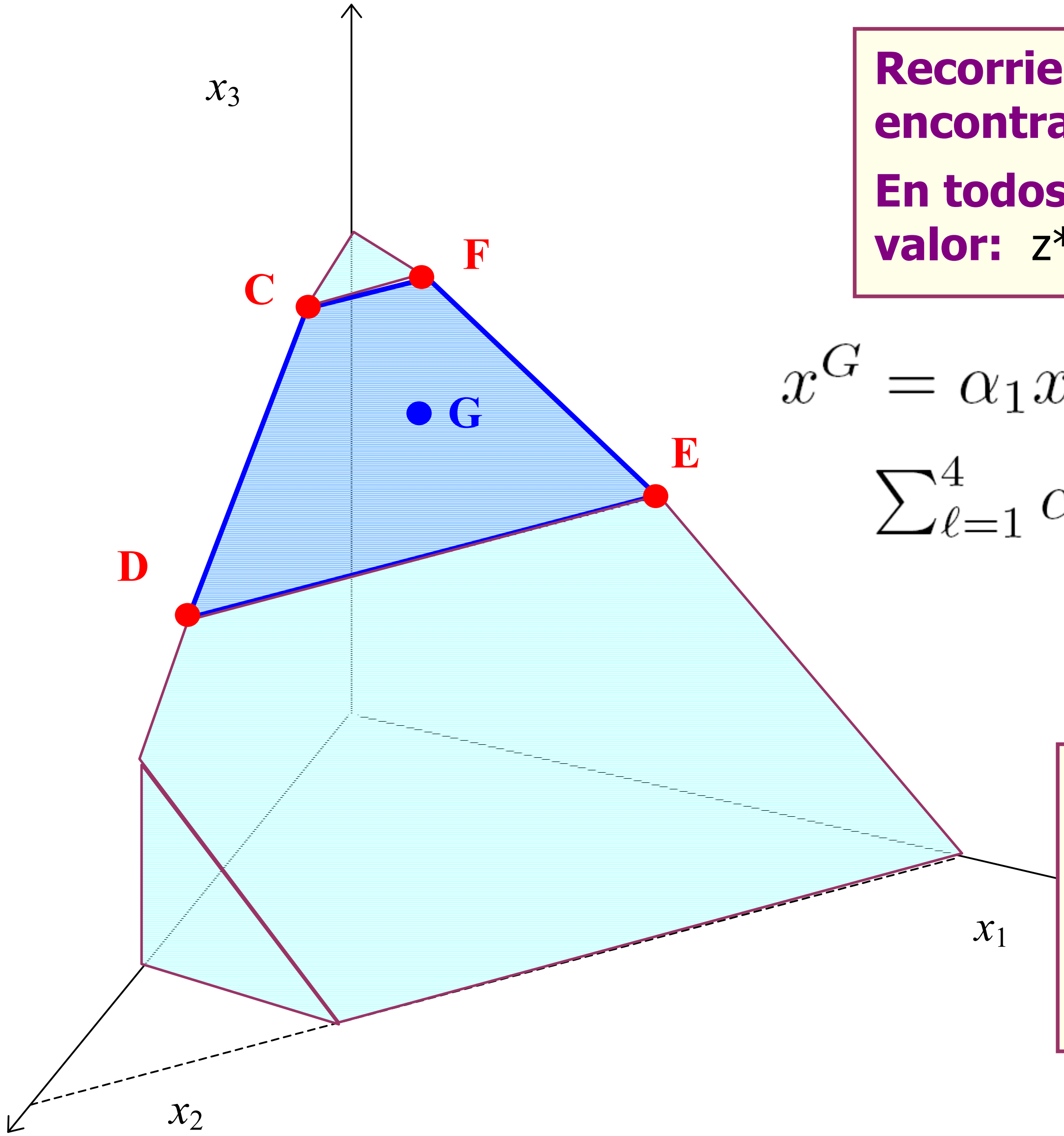
1	2	3	4	5	6	7	0
2/5	2/5	0	1	0	−3/5	0	7/60
1/5	1/5	0	0	1	−4/5	0	2/45
3/5	3/5	1	0	0	3/5	0	53/60
−1/2	1	0	0	0	0	1	2/3
−12/5	−12/5	0	0	0	48/5	0	212/15

$$Min\left\{\frac{7/60}{2/5},\frac{2/45}{1/5},\frac{53/60}{3/5},2/3\right\} = Min\{35/60, 10/45, 265/180, 2/3\}$$

VÉRTICE C

1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	0	1	−2	1	0	1/36
1	1	0	0	5	−4	0	2/9
0	0	1	0	−3	3	0	9/12
−3/2	0	0	0	−5	4	1	4/9
0	0	0	0	12	0	0	220/15

ÓPTIMOS ALTERNATIVOS



Recorriendo las diferentes bases encontraríamos los puntos C, D, E, F.

En todos ellos la f.obj. tiene igual valor: z* = 220/15.

$$x^G = \alpha_1 x^C + \alpha_2 x^D + \alpha_3 x^E + \alpha_4 x^F$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} \alpha_\ell = 1, \quad \alpha_\ell \geq 0, \ell = 1, 2, 3, 4$$

Cualquier punto G sobre la cara tendrá igual valor para la f.obj.

(COMPROBADLO)

EFICACIA DEL ALGORITMO SÍMPLEX

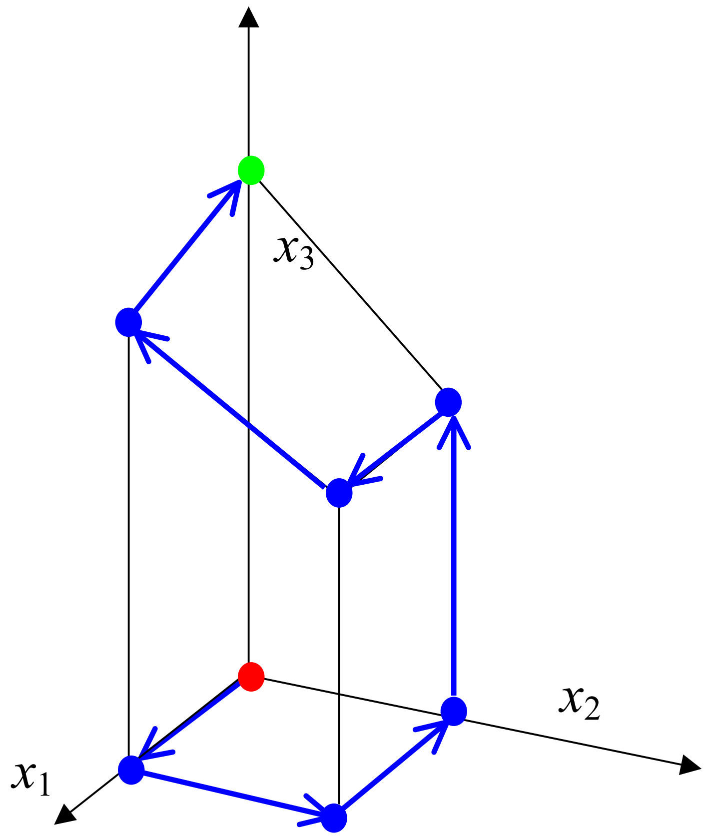
- En el ejemplo anterior se examinan **sólo 3 de los 9** vértices del poliedro**.**
- **Hay ejemplos en los que el algoritmo debe examinarlos TODOS (Klee-Minty, 1972). ⇒ PEOR CASO POSIBLE.**

Los Problemas de Klee-Minty

$$\begin{aligned} Max \quad & z = \textstyle\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} x_j \\ s.a: \quad & 2\textstyle\sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_i \le 100^{i-j} \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$m = 3$

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 100x_1 + 10x_2 + x_3 \\ s.a: \quad & x_1 \le 1 \\ & 20x_1 + x_2 \le 100 \\ & 200x_1 + 20x_2 + x_3 \le 10000 \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$



EFICACIA DEL ALGORITMO SÍMPLEX

$$\begin{aligned} Min \quad & z = c^\top x \\ s.a: \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

En los problemas reales con n=nºvar. >> m=nº restr. :

(A = $\boxed{\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad}$)

Nº medio de iteraciones ≈ $k\,m$, k entre 1 y 3 !!!!

En la actualidad el SÍMPLEX continúa siendo un algoritmo presente en casi todos los paquetes de soft. para P.L.

SESIÓN DE PROBLEMAS

$$
\begin{array}{llcl}
Min & -300x_1 - 250x_2 & & \\
s.a: & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 150 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = & 300 \\
 & 2x_1 \quad\quad\quad + x_5 & = & 100 \\
 & x_i \geq 0 & & (i = 1, \ldots 5)
\end{array}
$$

1	2	3	4	5	
1	2	1	0	0	150
3	2	0	1	0	300
2	0	0	0	1	100
−300	−250	0	0	0	0

$Min\{\frac{150}{1}, \frac{300}{3}, \frac{100}{2}\} = 50$

Entra $x_1 \Rightarrow$ Sale x_5

1	2	3	4	5	
0	2	1	0	−1/2	100
0	2	0	1	−3/2	150
1	0	0	0	1/2	50
0	−250	0	0	150	15000

$Min\{\frac{150}{2}, \frac{100}{2}\} = 50$

Entra $x_2 \Rightarrow$ Sale x_3

1	2	3	4	5	
0	1	1/2	0	−1/4	50
0	0	−1	1	−1	50
1	0	0	0	1/2	50
0	0	125	0	175/2	27500

Tabla óptima

Óptimo único del problema: $x_B = \{x_2, x_4, x_1\} = (50, 50, 50)$

$\boxed{\textbf{0) Inicialización}.\ \text{Determinar s.b.f. inicial } B_{(0}.\ k = 0}$

1) Calcular costes reducidos para $B = B_{(k}$:

$r_N = c_N - Y^\top c_B = c_N - N^\top B^{-\top} c_B$

2) Si $r_N \geq 0 \Rightarrow B_{(k}$ **base óptima. STOP**.

3) Si $\exists\, q$ $t.q.$ $(r_N)_q < 0$ & $y_{iq} \leq 0$ $(1 \leq i \leq m) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Problema no Acotado. STOP.**

4) Seleccionar variable no básica de entrada x_{j_q}.

(q tal que $r_q = Min\,\{\, r_\ell \mid 1 \leq \ell \leq n - m \,\}$)

5) Encontrar variable básica de salida x_{i_s} y **Efectuar cambio de base** .

Determinar $p = i_s \in I_B$ según:

$$\hat{x}_{j_q} = \frac{y_{s,0}}{y_{s,q}} = Min\{\ \frac{y_{t,0}}{y_{t,q}} \mid y_{tq} > 0\ \}$$

$$I_{B_{(k+1}} = I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$$

6) $k \leftarrow k + 1$. Volver a 1)

SESIÓN DE PROBLEMAS

$$
\begin{array}{lll}
Min & x_1 - \frac{4}{3}x_2 & \\
s.a: & x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\
 & -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = 1 \\
 & -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 & = 4 \\
 & x_i \geq 0 & (\ i = 1, \ldots 5\ )
\end{array}
$$

Elementos de la tabla para la base $I_B = \{3, 2, 5\}$:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cálculo de los costes reducidos: $r = c_N - N^\top B^{-\top} c_B = c_N - Y^\top c_B$:

$$
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{array} \quad \mathit{Entra}\ x_1, \quad \mathit{Min}\ \{\ \frac{2}{1}\ \} = \frac{2}{1} \Rightarrow \mathit{Surt}\ x_5 \tag{44}$$

Nueva base $I_B = \{3, 2, 1\}$. La nueva tabla resulta:

$$\begin{array}{c|c|ccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 10 \end{array} \quad \mathit{La\ columna\ de}\ x_4\ \mathit{es} < 0 \Rightarrow \mathit{Problema\ no\ acotado} \tag{45}$$

Se llega a una s.b.f en la que se detecta una dirección d de crecimiento ilimitado de la región factible.

$$\boxed{d^\top = (d_3, d_2, d_1, d_4, d_5) = (1, 3, 2, 1, 0)}$$

USO DE HOJAS DE CÁLCULO. INTRODUCCIÓN

$$\text{MAX: } 350X_1 + 300X_2$$

$$\text{S.T.: } 1X_1 + 1X_2 \leq 200$$

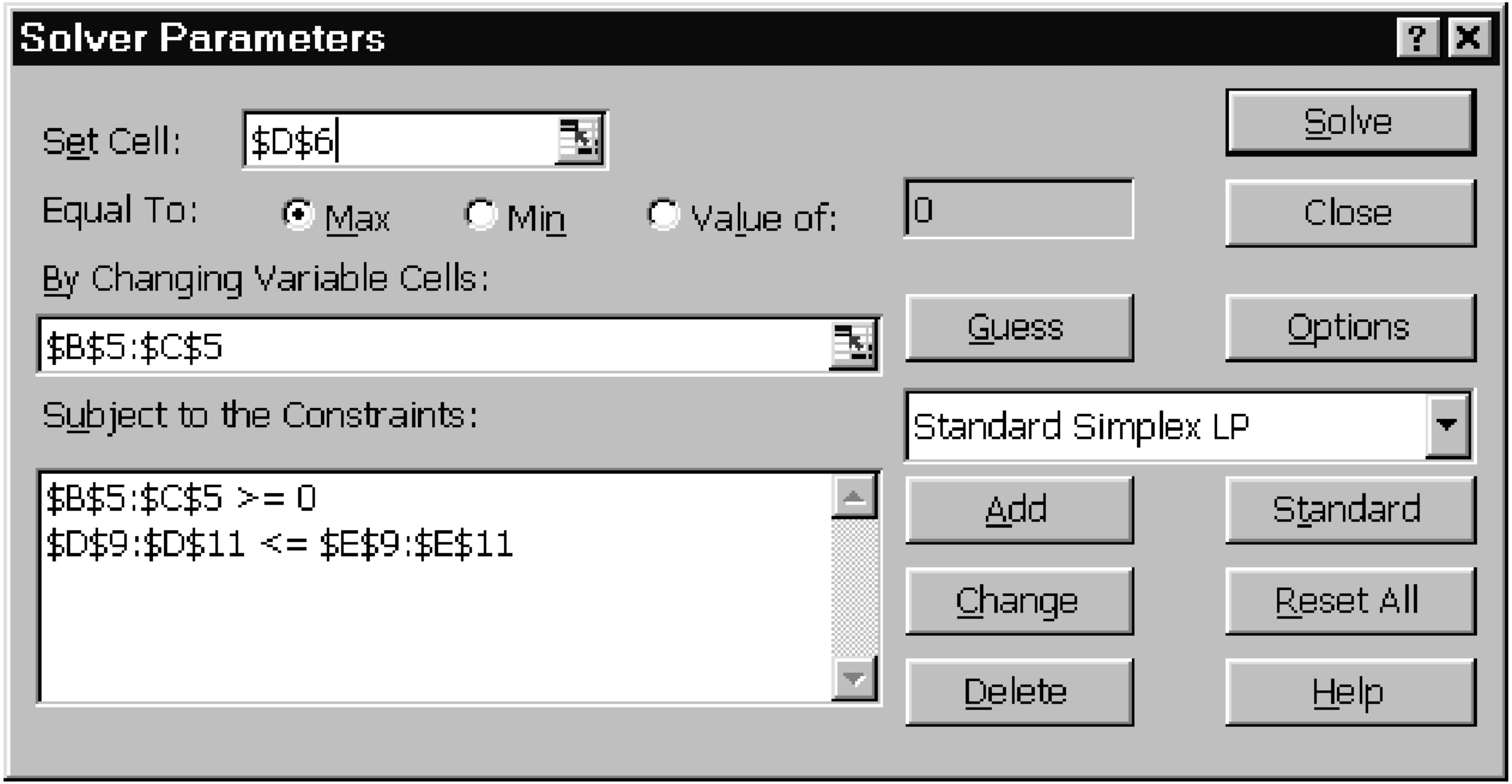
$$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$$

$$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	A	B	C	D	E
1					
2		Blue Ridge Hot Tubs			
3					
4		Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Number to Make	0	0	Total Profit	
6	Unit Profits	$350	$300	$0	
7					
8	Constraints			Used	Available
9	- Pumps Req'd	1	1	0	200
10	- Labor Req'd	9	6	0	1566
11	- Tubing Req'd	12	16	0	2880
12					
13					
14					
15					

“Herramientas->Solver”



RESOLUCIÓN DE MODELOS LINEALES. ALGORITMO DEL SIMPLEX

Semana 3.

- **ALGORITMO DEL SÍMPLEX (Repaso)**
  Forma tabular. Fórmulas matriciales.

- **Inicialización del algoritmo. (fase 0)**
  Objetivos. Detección de problemas infactibles.
  Método de las variables artificiales.
  Problema auxiliar. Casos. Ejemplos

0) Inicialización. Determinar s.b.f. inicial $B_{(0}$. $k = 0$

1) Calcular costes reducidos para $B = B_{(k}$:

$$r_N = c_N - Y^\top c_B = c_N - N^\top B^{-\top} c_B$$

2) Si $r_N \geq 0 \;\Rightarrow\; B_{(k}$ **base óptima. STOP**.

3) Si $\exists\, q$ $t.q.$ $(r_N)_q < 0$ & $y_{iq} \leq 0$ $(1 \leq i \leq m) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Problema no Acotado. STOP.**

4) Seleccionar variable no básica de entrada x_{j_q}.

(q tal que $r_q = Min\,\{ r_\ell \mid 1 \leq \ell \leq n - m \}$)

5) Encontrar variable básica de salida x_{i_s} y **Efectuar cambio de base** .

Determinar $p = i_s \in I_B$ según:

$$\hat{x}_{j_q} = \frac{y_{s,0}}{y_{s,q}} = Min\{ \frac{y_{t,0}}{y_{t,q}} \mid y_{tq} > 0 \}$$

$$I_{B_{(k+1}} = I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$$

6) $k \leftarrow k + 1$. Volver a 1)

IDENTIFICACIÓN DE BASES INICIALES FACTIBLES.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 \\
s.a: \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
& -x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_4 = 1 \\
& -x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + x_5 = 4 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots 5)
\end{aligned}
$$

→

3	4	5	1	2	
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	−1	1/3	1
0	0	1	−1	2/3	4

$$
\begin{aligned}
Min_x \quad & 5x_1 + x_2 - 7x_3 \\
s.a: \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 3 \\
& 2x_1 + 4x_2 \quad s_2 = 5 \\
& x_1 + 5x_2 - 4x_3 \quad -y_1 = 10 \\
& x_1 + x_2 \quad -y_2 = 6 \\
& x_2 + x_3 = 16 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0, \quad s_1, \quad s_2, \quad y_1, \quad y_2 \quad \geq 0
\end{aligned}
$$

→

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	y_1	y_2	
1	1	3	1	0	0	0	3
2	4	0	0	1	0	0	5
1	5	−4	0	0	−1	0	10
1	1	0	0	0	0	−1	6
0	1	1	0	0	0	0	16
1	1	1	0	0	0	0	5

No es posible identificar una base inicial factible

UPC

IDENTIFICACIÓN DE BASES INICIALES FACTIBLES.

VARIABLES ARTIFICIALES Y PROBLEMA AUXILIAR:

Se construye un "problema auxiliar" con las mismas variables y coeficientes en las restricciones que en el problema original.

Se añaden las variables artificiales (≥ 0):

- **Una por cada fila con una variable de exceso.**
- **Una por cada fila sin variable de exceso ni de holgura.**

La función objetivo del problema auxiliar es la suma de las Variables artificiales.

$$
\begin{array}{lllllll}
Min_x & 5x_1 + x_2 - 7x_3 & & & & & \\
s.a: & x_1 + x_2 + 3x_3 & +s_1 & & & & = 3 \\
 & 2x_1 + 4x_2 & & s_2 & & & = 5 \\
 & x_1 + 5x_2 - 4x_3 & & & -y_1 & & = 10 \quad \longleftarrow a_3 \\
 & x_1 + x_2 & & & & -y_2 & = 6 \quad \longleftarrow a_4 \\
 & \quad x_2 + x_3 & & & & & = 16 \quad \longleftarrow a_5 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & & & & & = 5 \quad \longleftarrow a_6 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0, & s_1, & s_2, & y_1, & y_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Min_x & a_3 + a_4 + a_5 + a_6 & & & & & & & & & \\
s.a: & x_1 + x_2 + 3x_3 & +s_1 & & & & & & & & = 3 \\
 & 2x_1 + 4x_2 & & +s_2 & & & & & & & = 5 \\
 & x_1 + 5x_2 - 4x_3 & & & +a_3 & & & & -y_1 & & = 10 \\
 & x_1 + x_2 & & & & +a_4 & & & & -y_2 & = 6 \\
 & \quad x_2 + x_3 & & & & & +a_5 & & & & = 16 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & & & & & & +a_6 & & & = 5 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0, & s_1, & s_2, & y_1, & y_2 & \geq 0 & & & & \\
 & a_3, a_4, a_5, a_6 & \geq 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	y_1	y_2	
1	1	3	1	0	0	0	3
2	4	0	0	1	0	0	5
1	5	-4	0	0	-1	0	10
1	1	0	0	0	0	-1	6
0	1	1	0	0	0	0	16
1	1	1	0	0	0	0	5

Para el problema auxiliar se obtiene una base inicial factible de forma inmediata

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_3	a_4	a_5	a_6	y_1	y_2	
1	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	3
2	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
1	5	-4	0	0	1	0	0	0	-1	0	10
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	6
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	16
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	5

SOLUCIÓN del PROBLEMA AUXILIAR

Casos:

a) El problema auxiliar presenta una solución óptima con las variables artific. $a_i = 0$

- Se obtiene una base inicial factible para el problema original.

$\Rightarrow$ El problema original tiene **REGIÓN FACTIBLE no vacía**.

b) El problema auxiliar presenta una solución óptima con alguna variable artific. $a_i > 0$

- **No** se puede hallar base inicial factible para el problema original.

$\Rightarrow$ El problema original tiene **REGIÓN FACTIBLE vacía**.

RESOLVER

$$
\begin{array}{lll}
Min & -20a - 30c & \\
s.a: & a & \leq 60 \\
 & a + c & \geq 70 \\
 & a + 2c & \leq 120 \\
(P) & a, c \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & a_0 & \\
s.a: & a + s_2 & = 60 \\
 & a + c \quad - s_3 \qquad + a_0 & = 70 \\
 & a + 2c + \qquad s_4 & = 120 \\
(P') & a, c, s_2, s_3, s_4, a_0 \geq 0 &
\end{array}
$$

a	c	s_2	s_3	s_4	a_0	
1	0	1	0	0	0	60
1	1	0	−1	0	1	70
1	2	0	0	1	0	120
0	0	0	0	0	1	0

$\rightarrow$

a	c	s_2	s_3	s_4	a_0	
1	0	1	0	0	0	60
1	1	0	−1	0	1	70
1	2	0	0	1	0	120
−1	−1	0	1	0	0	−70

a	c	s_2	s_3	s_4	a_0	
1	0	1	0	0	0	60
0	1	−1	−1	0	1	10
0	2	−1	0	1	0	60
0	−1	1	1	0	0	−10

$$Entra\ c; \quad Min\{\frac{10}{1}, \frac{60}{2}\} = 10$$

a	c	s_2	s_3	s_4	a_0	
1	0	1	0	0	0	60
0	1	−1	−1	0	1	10
0	0	1	2	1	−2	40
0	0	0	0	0	1	0

a	c	s_2	s_3	s_4	a_0	
1	0	1	0	0	0	60
0	1	-1	-1	0	1	10
0	0	1	2	1	-2	40
0	0	0	0	0	1	0

a	c	s_2	s_3	s_4	
1	0	1	0	0	60
0	1	-1	-1	0	10
0	0	1	2	1	40
-20	-30	0	0	0	0

$\rightarrow$

a	c	s_2	s_3	s_4	
1	0	1	0	0	60
0	1	-1	-1	0	10
0	0	1	2	1	40
0	0	-10	-30	0	1500

a	c	s_2	s_3	s_4	
1	0	1	0	0	60
0	1	$-1/2$	0	$1/2$	30
0	0	$1/2$	1	$1/2$	20
0	0	5	0	15	2100

0) Inicialización. Determinar s.b.f. inicial $B_{(0}$. $k = 0$

1) Calcular costes reducidos para $B = B_{(k}$:

$r_N = c_N - Y^\top c_B = c_N - N^\top B^{-\top} c_B$

2) Si $r_N \geq 0 \;\Rightarrow\; B_{(k}$ **base óptima. STOP**.

3) Si $\exists\, q$ $t.q.$ $(r_N)_q < 0$ & $y_{iq} \leq 0$ $(1 \leq i \leq m) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Problema no Acotado. STOP.**

4) Seleccionar variable no básica de entrada x_{j_q}.

(q tal que $r_q = Min\,\{\, r_\ell \mid 1 \leq \ell \leq n-m \,\}$)

5) Encontrar variable básica de salida x_{i_s} y **Efectuar cambio de base** .

Determinar $p = i_s \in I_B$ según:

$$\hat{x}_{j_q} = \frac{y_{s,0}}{y_{s,q}} = Min\{ \frac{y_{t,0}}{y_{t,q}} \mid y_{tq} > 0 \}$$

$$I_{B_{(k+1}} = I_{B_{(k}} \cup \{j_q\} - \{i_s\}$$

6) $k \leftarrow k+1$. Volver a 1)

RESOLVER

$$\begin{array}{lll} Min & 18x_1 + 20x_2 + 22x_3 & \\ s.a: & 90x_1 + 65x_2 + 45x_3 & \geq 60 \\ & 80x_1 + 40x_2 + 10x_3 & \leq 50 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ & x_i \geq 0 & (i = 1, \dots 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} Min & x_6 + x_7 & \\ s.a: & 90x_1 + 65x_2 + 45x_3 - x_4 + x_6 & = 60 \\ & 80x_1 + 40x_2 + 10x_3 + x_5 & = 50 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 & = 1 \\ & x_i \geq 0 & (i = 1, \dots 7) \end{array}$$

$$x_6 + x_7 = 61 - 91x_1 - 66x_2 - 46x_3 + x_4$$

1	2	3	4	5	6	7	
90	65	45	−1	0	1	0	60
80	40	10	0	1	0	0	50
1	1	1	0	0	0	1	1
−91	−66	−46	1	0	0	0	−61

$$Min\{1, 5/8, 2/3\} = 5/8$$

$$Entra\ x_1 \Rightarrow\ Surt\ x_5$$

	5	2	3	4	
x_6	$-9/8$	20	$135/4$	-1	$15/4$
x_1	$1/80$	$1/2$	$1/8$	0	$5/8$
x_7	$-1/80$	$1/2$	$7/8$	0	$3/8$
	$91/80$	$-41/2$	$-154/8$	1	$-33/8$

$$Min\{3/7, 5, 15/135\} = 1/9$$

$$Entra\ x_3 \Rightarrow\ Surt\ x_6$$

	5	2	6	4	
x_3	$-1/30$	$16/27$	$4/135$	$-4/135$	$1/9$
x_1	$1/60$	$23/54$	$-1/270$	$1/270$	$11/18$
x_7	$1/60$	$-1/54$	$-7/270$	$7/270$	$5/18$
	$-1/60$	$1/54$	$277/270$	$-7/270$	$-5/18$

$$Min\{75/7, 165\} = 1$$

$$Entra\ x_4 \Rightarrow\ Surt\ x_7$$

	5	2	6	7	
x_3	$-1/70$	$4/7$	0	$8/7$	$3/7$
x_1	$1/70$	$3/7$	0	$-1/7$	$4/7$
x_4	$9/14$	$-5/7$	-1	$270/7$	$75/7$
	0	0	1	1	0

$$Suma\ d'infactibilitats = 0$$

$$base\ inicial\ factible\ pel$$
$$problema\ original$$
$$I_B = \{3, 1, 4\}$$

$$B^{-\top}c_B = \begin{pmatrix} 45 & 90 & 1 \\ 10 & 80 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 22 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/70 & 8/7 \\ 0 & 1/70 & -1/7 \\ -1 & 9/14 & 270/7 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 22 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/70 \\ 158/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_5 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64 & 40 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4/70 \\ 158/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/70 \\ -20/70 \end{pmatrix}$$

3	1	4	5	2	
1	0	0	$-1/70$	$4/7$	$3/4$
0	1	0	$1/70$	$3/7$	$4/7$
0	0	1	$9/14$	$-5/7$	$75/7$
0	0	0	$4/70$	$-20/70$	$-138/7$

$Entra\ x_2 \quad Min\{4/3, 3/4\}\ Surt x_3$

2	1	4	5	3	
1	0	0	$-1/40$	$7/4$	$3/4$
0	1	0	$1/40$	$-3/40$	1/112
0	0	1	$5/8$	$5/4$	$45/4$
0	0	0	$1/20$	$1/2$	-17

Base óptima $I_B = \{2, 1, 4\}$

PRÁCTICA 1

Seguimiento de las iteraciones del SÍMPLEX mediante LINDO

```
MAX       3 X1 + 2 X2
  SUBJECT TO
         2)    2 X1 + X2 <=    100
         3)    X1 + X2 <=    80
         4)    X1 <=    40
  END
```

LINDO

```
:3)   x1        <= 40
:end


:bat
: piv
      X2 ENTERS AT VALUE    80.000      IN ROW    3 OBJ. VALUE=  160.00

: tab

THE TABLEAU
     ROW   (BASIS)           X1          X2   SLK     2   SLK     3
       1 ART             -1.000        .000        .000       2.000
       2 SLK     2        1.000        .000       1.000      -1.000
       3         X2       1.000       1.000        .000       1.000
       4 SLK     4        1.000        .000        .000        .000


     ROW    SLK     4
       1         .000    160.000
       2         .000     20.000
       3         .000     80.000
       4        1.000     40.000

:
```