

Examen Parcial 1 de I.O. Grau d'Enginyeria Informàtica. Curs 2014-15

P1[4.0 punts] : Una consultora pot emprendre projectes de diversos tipus (fins a 6 tipus). Per realitzar-los disposa de personal de tres categories: analistes (AN), programadors (PR) i enginyers (IN). La següent taula dona: a) el benefici unitari per projecte (en milers de \$) b) la quantitat total de recursos (temps expressat en setmanes) de cada tipus de personal i c) les quantitats requerides de cada tipus de personal per tipus de projecte (en setmanes de temps)

--	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Setmanes
AN	10	8	6	12	16	5	400
PR	100	120	200	500	80	95	8500
IN	300	100	120	100	100	115	10500
Benef	100	120	30	140	150	120	--

Al Racó trobareu aquest model AMPL (fitxer `projectes.mod`) per decidir quins i quines quantitats de projectes (variable x) ha de triar la consultora de forma que es maximitzi el seu benefici. El fitxer `projectes.dat` conté les dades de la taula anterior.

Model AMPL

```

set proj;
set pers;
param a{pers,proj} default 0;
param b{proj}; # benefici unitari per projecte
param p{pers}; # r de personal tipus p in pers
var x{proj} >=0, integer;
subject to recurs{i in pers}: sum{j in proj} a[i,j]*x[j] <= p[i];
maximize benefici: sum{j in proj} b[j]*x[j];

```

1. En aquestes condicions i amb l'ús de l'AMPL calculeu el valor òptim de x i el benefici que se n'obtindrà. quins i quants projectes es realitzaran?
2. Es vol millorar el negoci contractant setmanes extra dels tres tipus de personal pagant-se a 1.2 la setmana de analista, 0.8 la setmana de programador i a 0.7 la setmana d'enginyer (expressats en milers de \$). Modifiqueu el model anterior (.mod, .dat) a conveniència per reflectir la incorporació d'aquest personal temporal extern i resoleu el model que plantegeu mostrant el valor de la f.objectiu i de totes les variables de decisió; s'aconsegueix incrementar els beneficis contractant personal extern?
3. Després de negociacions amb el comitè d'empresa s'arriba a l'acord de que les quantitats de personal extern no podran ser superiors a: 20 % del total en cas dels analistes, 10 % en el cas de programadors i 25 % en el cas d'enginyers. Afecta aquest acord als resultats econòmics que s'esperaven obtenir amb l'estratègia de contractació externa de personal?, quins beneficis s'obtindran ara? quines seran les quantitats de setmanes extra a contractar de cada tipus ? quins i quants projectes es realitzaran?

Lliureu: a) via Racó, els fitxers .mod .dat per a cada apartat per separat; un fitxer word, amb el vostre nom i cognoms, i amb snapshots de pantalla on es mostrin els valors de les variables de decisió després de resoldre's el model en cada apartat. (ALT+ImprPant) b) en paper: la formulació del model (apartat 1) i de les variants del model inicial per als apartats 2 i 3.

P2[3.5 p] **En full d'examen.** Considereu el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{rcllclcl}
 \text{Min} & & -2x_2 & & +4x_4 & & -3x_6 & \\
 \text{s.t.} & & -14x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +x_5 & -9x_6 & = 13 \\
 & & -9x_2 & +3x_3 & +3x_4 & & -6x_6 & = 9 \\
 & x_1 & -2x_2 & +x_3 & +4x_4 & & -x_6 & = 7 \\
 & & & & x_i & \geq 0 & &
 \end{array}$$

1. (2p) La base $I_B = \{5, 3, 1\}$, és una base factible per al problema?
2. (1.5p) Partint de l'anterior base, efectueu una única iteració de l'algorisme del simplex, seguint el criteri de selecció del cost reduït més negatiu. Analitzeu el punt que obteniu després d'aquesta única iteració.

P3[2.5p] **En full d'examen.** Partint del punt $x = (1, 0, 0)$ i usant el mètode de conjunts actius, resoleu:

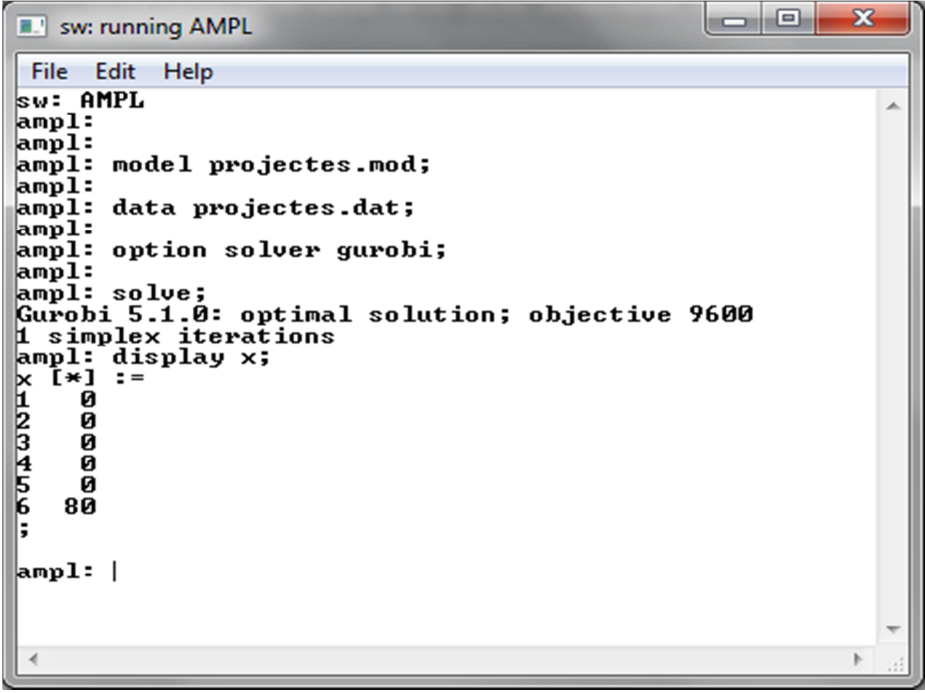
$$\begin{array}{rcl}
 \text{Min} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \lambda \\
 R1 & x_1 \geq 0 & \mu_1 \\
 R2 & x_2 \geq 0 & \mu_2 \\
 R3 & x_3 \geq 0 & \mu_3
 \end{array}$$

Per P3, en cas que decidiu auxiliar-vos amb AMPL, lliureu també al Racó el fitxer .mod usat

```

1)
set proj;
set pers;
param a{pers,proj} default 0;
param b{proj}; # benefici unitari per projecte
param p{pers}; # r de personal tipus p in pers
var x{proj} >=0, integer;
subject to recurs{i in pers}:sum{j in proj} a[i,j]*x[j] <= p[i];
maximize benefici: sum{j in proj} b[j]*x[j];

```



```

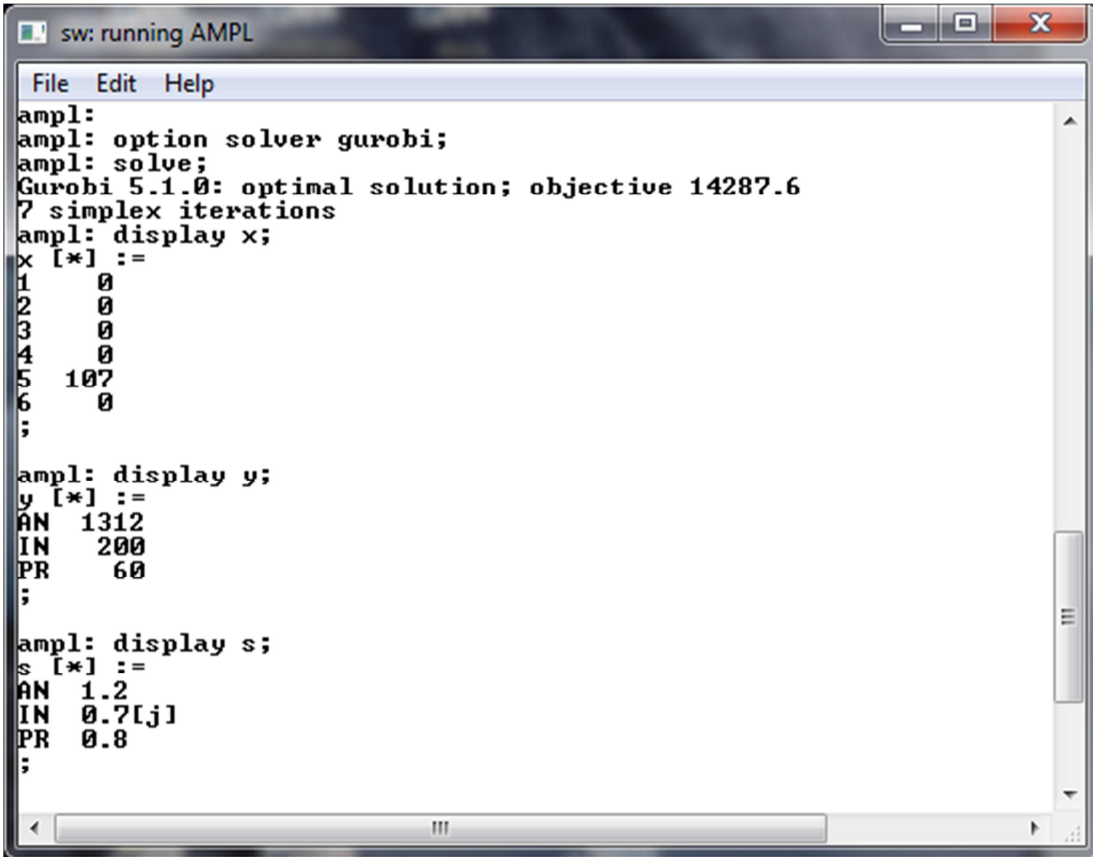
sw: running AMPL
File Edit Help
sw: AMPL
ampl:
ampl:
ampl: model projectes.mod;
ampl: data projectes.dat;
ampl: option solver gurobi;
ampl: solve;
Gurobi 5.1.0: optimal solution; objective 9600
1 simplex iterations
ampl: display x;
x [*] :=
1      0
2      0
3      0
4      0
5      0
6     80
;
ampl: |

```

```

2)
set proj;
set pers;
param a{pers,proj} default 0;
param b{proj}; # benefici unitari per projecte
param p{pers}; # r de personal tipus p in pers
param s{pers}; # sous dels subcontractats
var x{proj} >=0, integer;
var y{pers} >=0, integer;
subject to recurs{i in pers}: sum{j in proj} a[i,j]*x[j] <= p[i]
+ y[i];
maximize benefici: sum{j in proj} b[j]*x[j] - sum{i in pers}
s[i]*y[i];

```



The screenshot shows a window titled "sw: running AMPL" with a menu bar (File, Edit, Help) and a text area containing the following text:

```

ampl:
ampl: option solver gurobi;
ampl: solve;
Gurobi 5.1.0: optimal solution; objective 14287.6
7 simplex iterations
ampl: display x;
x [*] :=
1      0
2      0
3      0
4      0
5  107
6      0
;

ampl: display y;
y [*] :=
AN  1312
IN  200
PR   60
;

ampl: display s;
s [*] :=
AN  1.2
IN  0.7[j]
PR  0.8
;

```

```

set proj;
set pers;
param a{pers,proj} default 0;
param b{proj}; # benefici unitari per projecte
param p{pers}; # r de personal tipus p in pers
param s{pers}; # sous dels subcontractats
param perc{pers};

var x{proj} >=0, integer;
var y{pers} >=0, integer;

subject to recurs{i in pers}: sum{j in proj} a[i,j]*x[j]<=p[i] +
y[i];
maximize benefici: sum{j in proj} b[j]*x[j] - sum{i in pers}
s[i]*y[i];

subject to LaborUnion{i in pers}: y[i]<=perc[i]*(y[i]+p[i]);

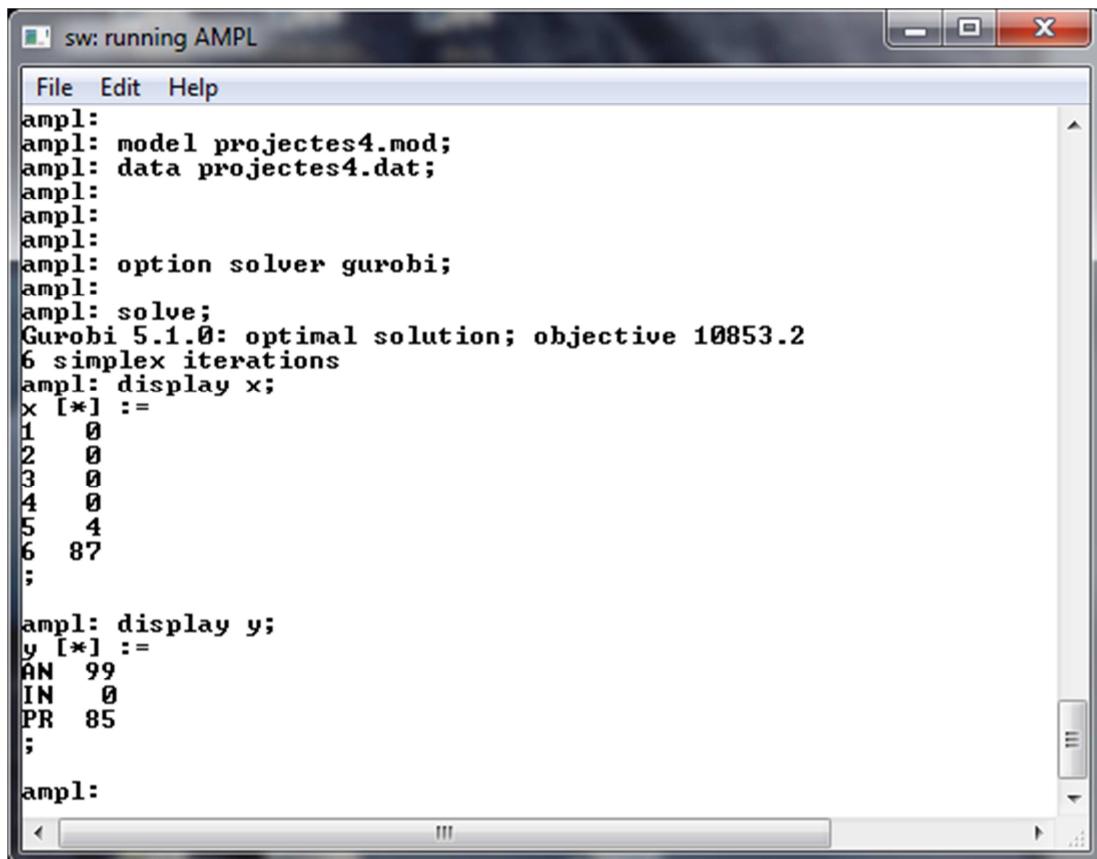
```

afegit al .dat

```

param perc:=
AN 0.2
PR 0.1
IN 0.25;

```



```

sw: running AMPL
File Edit Help
ampl:
ampl: model projectes4.mod;
ampl: data projectes4.dat;
ampl:
ampl:
ampl: option solver gurobi;
ampl:
ampl: solve;
Gurobi 5.1.0: optimal solution; objective 10853.2
6 simplex iterations
ampl: display x;
x [*] :=
1 0
2 0
3 0
4 0
5 4
6 87
;
ampl: display y;
y [*] :=
AN 99
IN 0
PR 85
;
ampl:

```

(P1)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \max_x \quad & \sum_{j \in P} b_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in P} a_{ij} x_j \leq p_i, i \in \Pi \\ & x \geq 0, x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\begin{array}{ll} P & \text{conjunt projectes} \\ \Pi & \text{" classes de personal} \end{array}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \max_x \quad & \sum_{j \in P} b_j x_j - \sum_{i \in \Pi} s_i y_i \\ & \sum_{j \in P} a_{ij} x_j \leq p_i + y_i, i \in \Pi \\ & x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

s_i - sons del personal tipus i

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \max_x \quad & \sum_{j \in P} b_j x_j - \sum_{i \in \Pi} s_i y_i \\ & \sum_{j \in P} a_{ij} x_j \leq p_i + y_i, i \in \Pi \\ & y_i \leq \alpha_i (y_i + p_i), i \in \Pi \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

α_i = fracció de personal extern.

P2

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} > 0 \text{ si és base factible.}$$

1	2	3	4	5	6	
0	-4	4	4	1	-9	13
0	-9	3	3	0	-6	9
1	-2	1	4	0	-1	7
0	-2	0	4	0	-3	0

← No està en forma canònica.

1	2	3	4	5	6	
0	-2	0	0	1	-1	1
0	-3	1	1	0	-2	3
1	1	0	3	0	1	7
0	-2	0	4	0	-3	0
1	2	3	4	5	6	
1	-1	0	3	1	0	5
2	-1	1	7	0	0	11
1	1	0	3	0	1	4
3	1	0	13	0	0	12

Entren x_6

Sunt x_1

$$\hat{x}_6 = \left\{ \frac{4}{1} \right\} = 4$$

← s'arriba a l'òptim en 1 iteració.

(P3)

Punt inicial $x^0 = (1, 0, 0)$

$$A(x^0) = \{1, 3, 4\}$$

$$\text{Min}_x \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad | \quad \lambda$$

$$x_2 = 0 \quad | \quad s_2$$

$$x_3 = 0 \quad | \quad s_3$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{per forçar})$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda = 2 \\ s_2 = -2 \\ s_3 = -2 \end{matrix}$$

per $x = (1, 0, 0)$

Com que $s_2 < 0$, $s_3 < 0$, s'exclouen del conjunt actiu els índexos 3 i 4, $\Rightarrow A = \{1\}$

$$\text{Min}_x \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad | \quad \lambda$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \rightarrow x_i = \lambda/2 \Rightarrow x_i = 1/3, \lambda = 2/3$$

$x_i = 1/3 > 0$ efectivament
é complementari
amb

$$\text{Solució } x = (1/3, 1/3, 1/3)$$

$$(s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0)$$