(2.a) INTRODUCCIÓN A LA FORMULACIÓN DE MODELOS LINEALES

Cap. 2,3 "AMPL: A Modeling Language for M.P." Fourer, Gay, Kernighan
Cap 3 "Introduction to Operations Research" Hillier, Lieberman

- **PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.**
  Función objetivo y restricciones.
- **HIPÓTESIS DE MODELIZACIÓN.**
  Ejemplos: problema de producción, problema de dietas.
- **INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO AMPL.**
  Características del lenguaje.
  Declaración de parámetros, variables, restricciones y función objetivo.
  El entorno AMPL Plus.

Ciclo metodológico de la I.O.

SISTEMA REAL

Identificar el problema

Planificación del estudio

Recogida de datos

Implementar las soluciones

MODELO(s)

Formular e Implementar el modelo

Pruebas del modelo

Validar el modelo

Ensayo de alternativas

Análisis de resultados

Resultados Insatisfactorios

Modelo Matemático; Optimización

Max (Min): $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ función objetivo

s. a: $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$

$\vdots$

$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ restricciones

$\vdots$

$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

- $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lineal, no lineal
- x_i continua o discreta (entera) $\forall$i

variables de decisión

Función objetivo: $f_0(x_1, ..., x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$, lineal.

Restricciones: $f_j(x_1, ..., x_n) = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n - b_j$, afines. $j = 1, 2, ..., m$.

$$
\begin{array}{ll}
Min_x & c_1x_1 + ... + c_nx_n \\
s.a: & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& \dots \\
& a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n \geq b_p \\
& d_{11}x_1 + ... + d_{1n}x_n \leq e_1 \\
& \dots \\
& d_{q1}x_1 + ... + d_{qn}x_n \leq e_q \\
& g_{11}x_1 + ... + g_{1n}x_n = h_1 \\
& \dots \\
& g_{r1}x_1 + ... + g_{rn}x_n = h_r
\end{array}
$$

NOTACIÓN MATRICIAL

$$
\begin{array}{ll}
Min_x & c^\top x \\
s.a: & Ax \geq b \\
& Dx \leq e \\
& Gx = h
\end{array}
$$

Problema de producción

Se deben decidir las cantidades $x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n$ a producir de n productos.

El beneficio unitario de cada producto es $c_i,\ i = 1, ..., n$.

Beneficio total: $c_1 x_1 + ... + c_n x_n$ (maximizar)

Se dispone de m recursos en cantidades $b_j,\ j = 1, 2, ..., m$.

Cada unidad del producto i consume a_{ij} unidades del recurso j:

Consumo de recurso j= $a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n \leq b_j$ = Cantidad de recurso j

$$\begin{array}{ll} Max_x & c_1x_1 + ... + c_nx_n \\ s.a: & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & ... \\ & a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, ..., x_n \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max_x & c^\top x \\ s.a: & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

HIPÓTESIS BÁSICAS en P.P.L.

En el problema de producción:

ADITIVIDAD:

F.obj: el beneficio total es la suma de los beneficios parciales por cada producto.

Restricciones: el consumo total de un recurso es la suma de los consumos parciales por cada producto.

PROPORCIONALIDAD:

F.obj: cada beneficio parcial $c_i\, x_i$ es proporcional a la cantidad de producto x_i.

Restricciones: el consumo parcial $a_{ji}\, x_i$ de un recurso j por la cantidad x_i es proporcional a x_i

Fabricación de pienso para ganado

Se debe fabricar alimento para ganado con unos requerimientos mínimos de m nutrientes básicos. (vitaminas, hidratos de carbono, sales, etc.)

b_j- cantidad mínima del nutriente básico j.

Se deben comprar n alimentos en cantidades x_i, $i = 1, 2, ..., n$.
El precio unitario del alimento i es c_i.

Desembolso total: $c_1 x_1 + ... + c_n x_n$ (minimizar)

La cantidad de nutriente básico j del alimento i es a_{ij}.

Cantidad de □ nutriente básico en la mezcla $= a_{j1} x_1 + ... + a_{jn} x_n \geq b_j =$ Cantidad mínima de nutriente básico

$$
\begin{array}{ll}
Min_x & c_1 x_1 + ... + c_n x_n \\
s.a: & a_{11} x_1 + ... + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
 & ... \\
 & a_{m1} x_1 + ... + a_{mn} x_n \geq b_m \\
 & x_1, ..., x_n \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Min_x & c^\top x \\
s.a: & Ax \geq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

LENGUAJES ALGEBRAICOS PARA OPTIMIZACIÓN: AMPL

- Los lenguajes algebraicos permiten formular modelos de optimización comúnmente usados en I.O.
- Están orientados al desarrollo de modelos.
- Las formulaciones son: inteligibles por otros usuarios y fácilmente ampliables y modificables.
- Utilizan otros programas para resolver los modelos (SOLVERS)
- Proporcionan entornos (AMPL Plus) que permiten manipular, controlar y depurar los modelos.
- El lenguaje AMPL es uno de los mejor surtidos en cuanto a potencialidades. Otros lenguajes: GAMS, CAMPS, LINGO.

(`http://www.ampl.com/`)

LENGUAJE AMPL: Características principales

1. Separación entre definición del modelo y datos que parametrizan el modelo: dimensiones, valores de parámetros etc.
2. Definición de conjuntos de índices y de productos cartesianos de conjuntos de índices.
3. Declaración de parámetros del problema y condiciones sobre los valores que pueden tomar.
4. Declaración de variables de decisión del modelo, de la función objetivo y de las restricciones.
5. Reoptimización tras un cambio de valor de alguno de los parámetros.
6. Congelar parte de las variables de decisión en la optimización.
7. Declaración de variables como enteras.
8. Declaraciones `node`, `arc` para problemas de flujos en redes.
9. Uso de diferentes solvers.

$$\begin{aligned} &Max_x \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ &s.a: \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ &\qquad\quad 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max_x \quad c^\top x \\ &s.a: \quad a^\top x \leq b \\ &\qquad\quad 0 \leq x \leq u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max_x \quad \sum_{i \in P} c_i x_i \\ &s.a: \quad \sum_{i \in P} a_i x_i \leq b \\ &\qquad\quad 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i \in P \end{aligned}$$

$$P = \{1, 2, ..., n\}$$

$$P = \{\texttt{bandas, bobinas}\}$$

Parámetros:

c Vector de costes
a Vector de consumo de recursos
b cantidad de recursos
u vector de límites

Fichero `prod.mod`

```
set P;
param a {j in P};
param b;
param c {j in P};
param u {j in P};

var X {j in P};

maximize beneficio: sum {j in P} c[j] * X[j];

subject to tiempo: sum {j in P} a[j] * X[j]<=b;
subject to Limites {j in P}: 0 <= X[j] <= u[j];
```

$$Max_x \quad \sum_{i \in P} c_i x_i$$

$$s.a: \quad \sum_{i \in P} a_i x_i \leq b$$

$$0 \leq x_i \leq u_i, \quad i \in P$$

Fichero `prod.dat`

```
set P := bandas bobinas;
param:      a      c      u   :=
bandas   200    25    6000
bobinas  140    30    4000 ;
param b := 40;
```

```
set P := bandas bobinas;
param: a:= bandas   200 bobinas  140;
param: c:= bandas    25 bobinas   30;
param: u:= bandas  6000 bobinas 4000;
param b := 40;
```

INDICES DOBLES

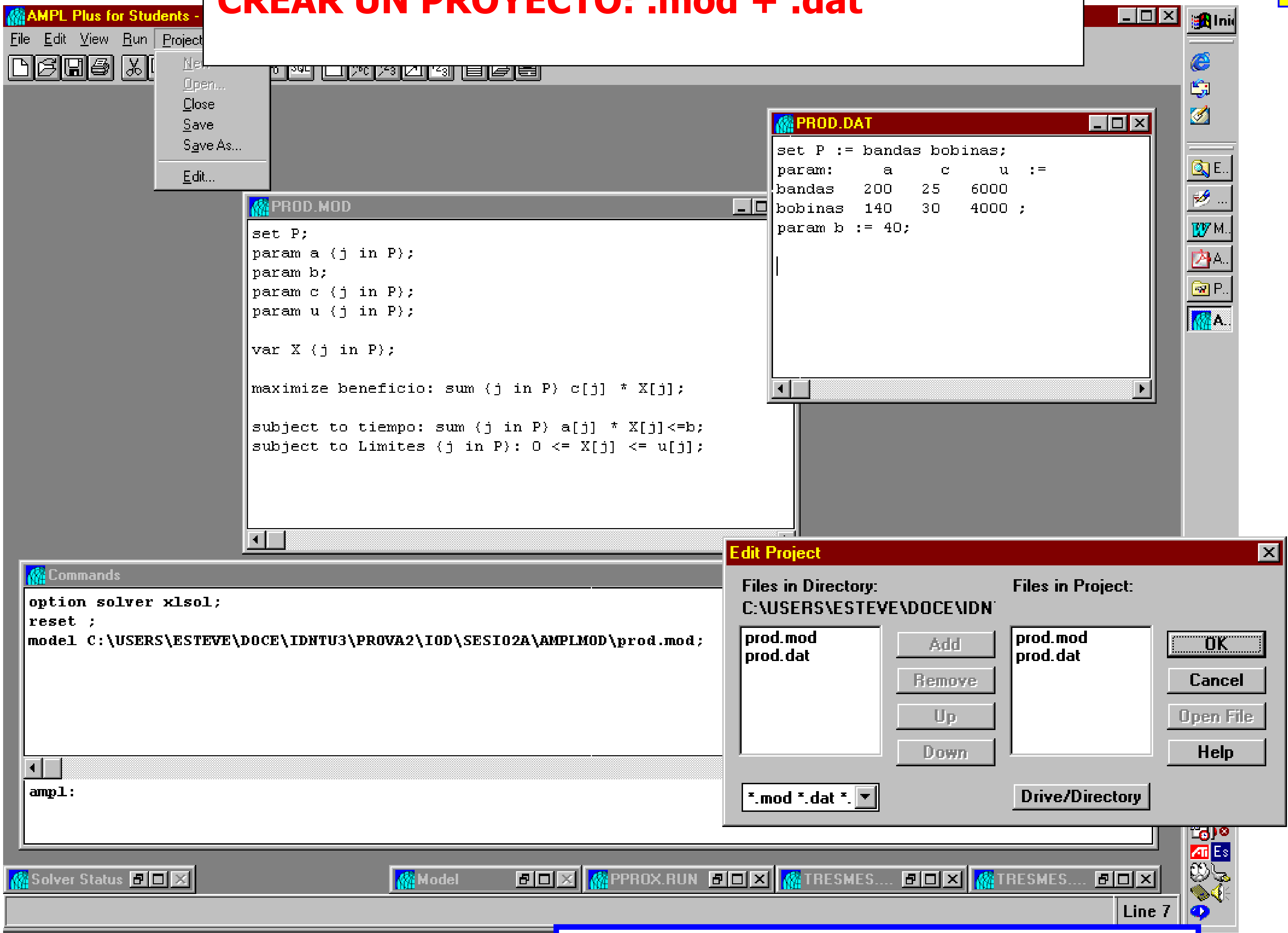
COTAS SOBRE LAS VARIABLES DE DECISIÓN

CONDICIONES SOBRE EL VALOR DE PARÁMETROS

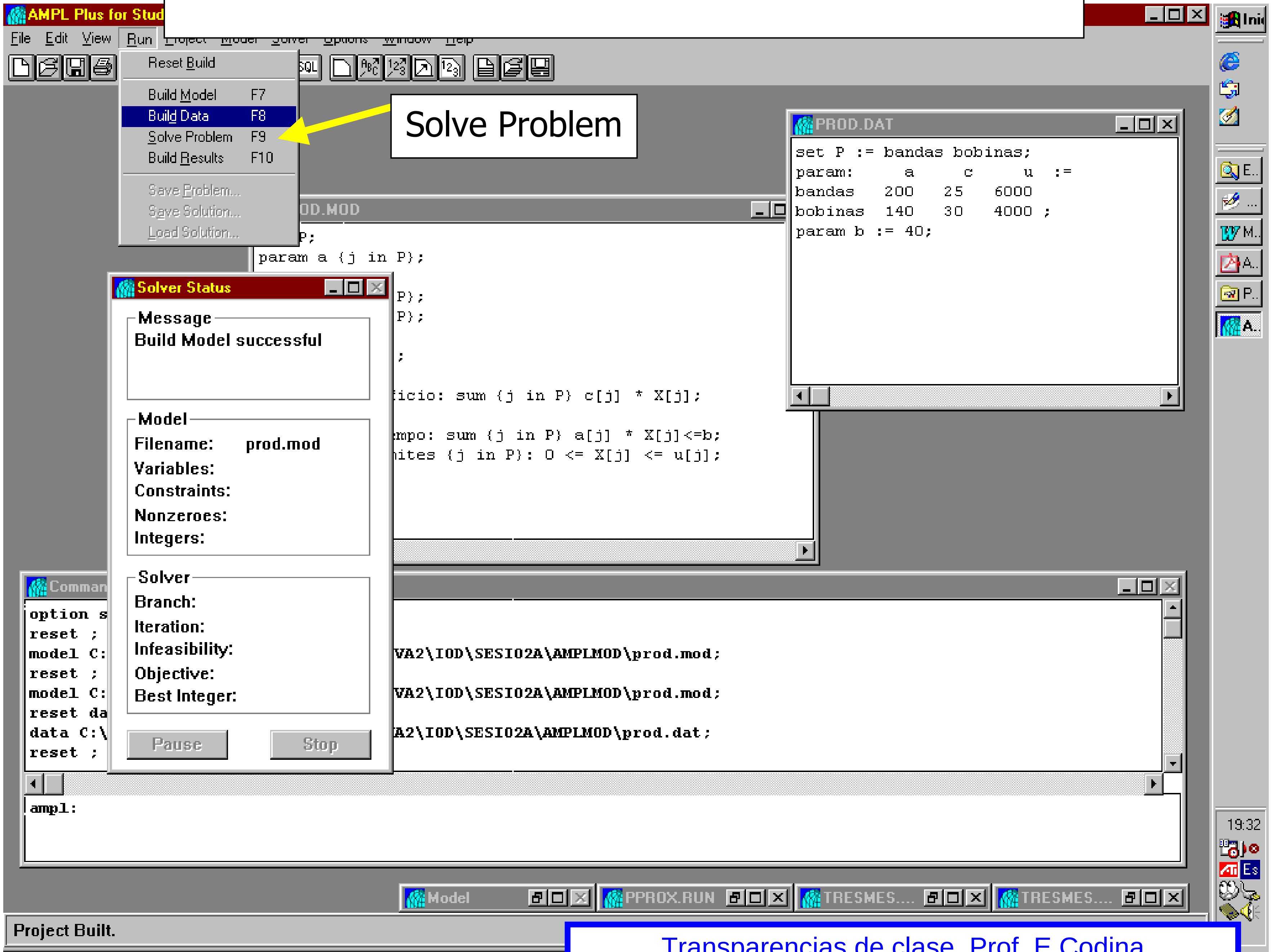
GRUPOS DE RESTRICCIONES INDEXADAS

```
set P;
set ETAPA;

param tasa{P,ETAPA} > 0;
param recurso{ETAPA} >= 0;
param benef_u{P};
param x_min{P} >= 0;
param x_mercado{P} >= 0;

var X {p in P} >= x_min[p], <= x_mercado[p];

maximize total_benef_u: sum {p in P} benef_u[p]*X[p];

subject to Tiempo {s in ETAPA}:
   sum {p in P} tasa[p,s]* X[p] <= recurso[s];
```

OPERACIONES EN EL ENTORNO AMPL Plus:
CREAR UN PROYECTO: .mod + .dat

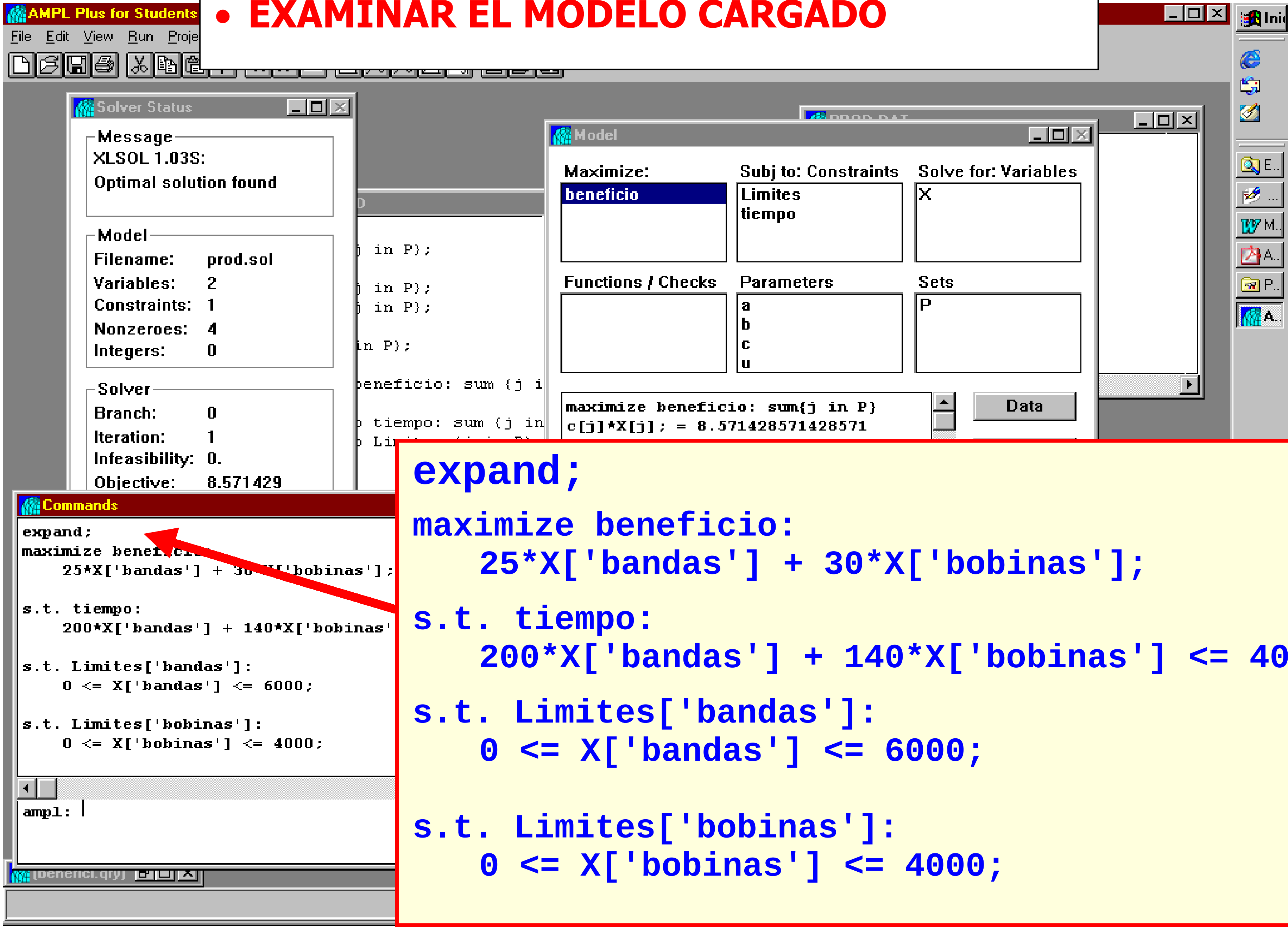


OPERACIONES EN EL ENTORNO AMPL Plus:
Cargar modelo, datos y resolver el problema

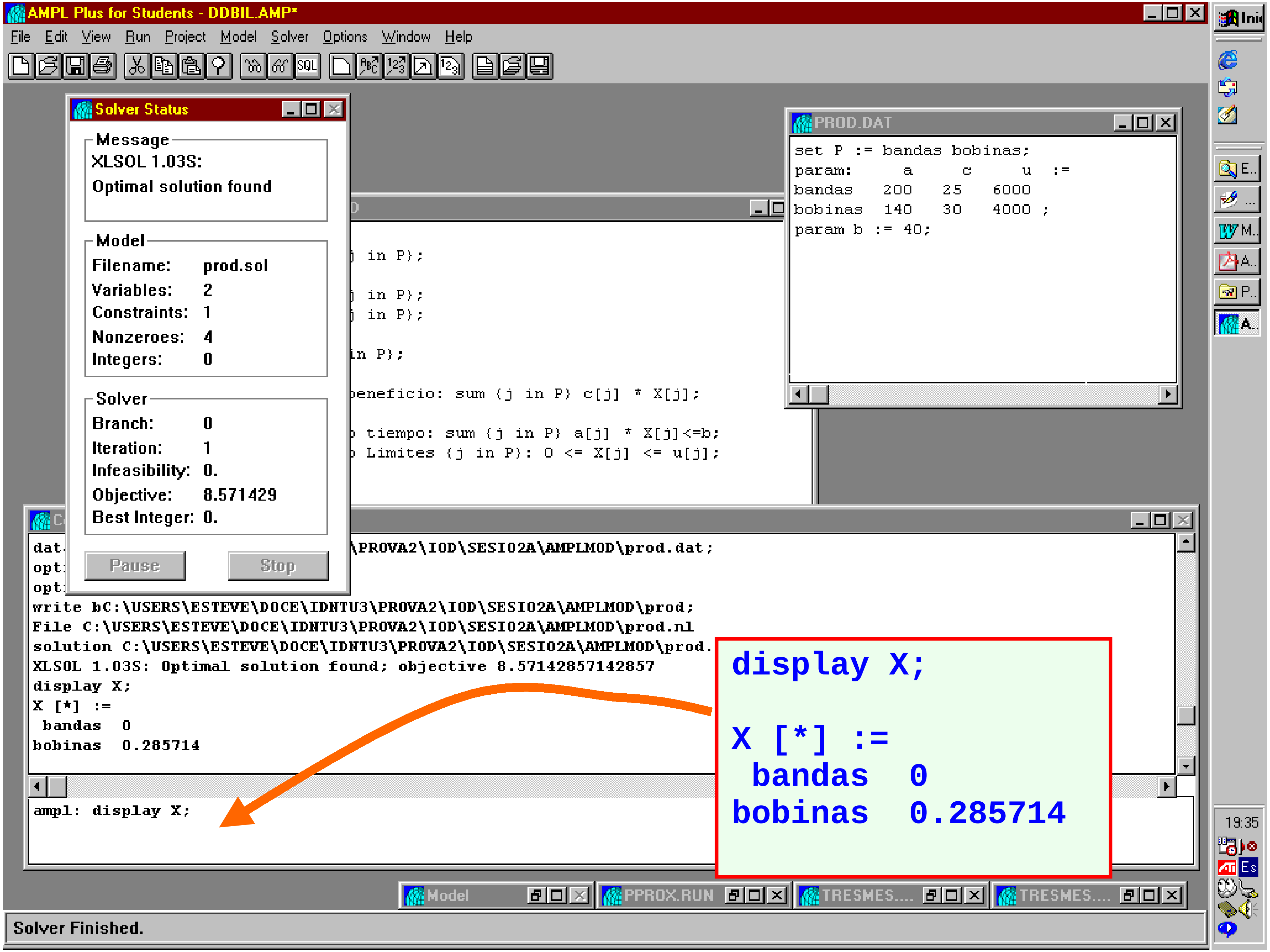


OPERACIONES EN EL ENTORNO AMPL Plus:

• EXAMINAR EL MODELO CARGADO




```
expand;
maximize beneficio:
   25*X['bandas'] + 30*X['bobinas'];
s.t. tiempo:
   200*X['bandas'] + 140*X['bobinas'] <= 40;
s.t. Limites['bandas']:
   0 <= X['bandas'] <= 6000;

s.t. Limites['bobinas']:
   0 <= X['bobinas'] <= 4000;
```

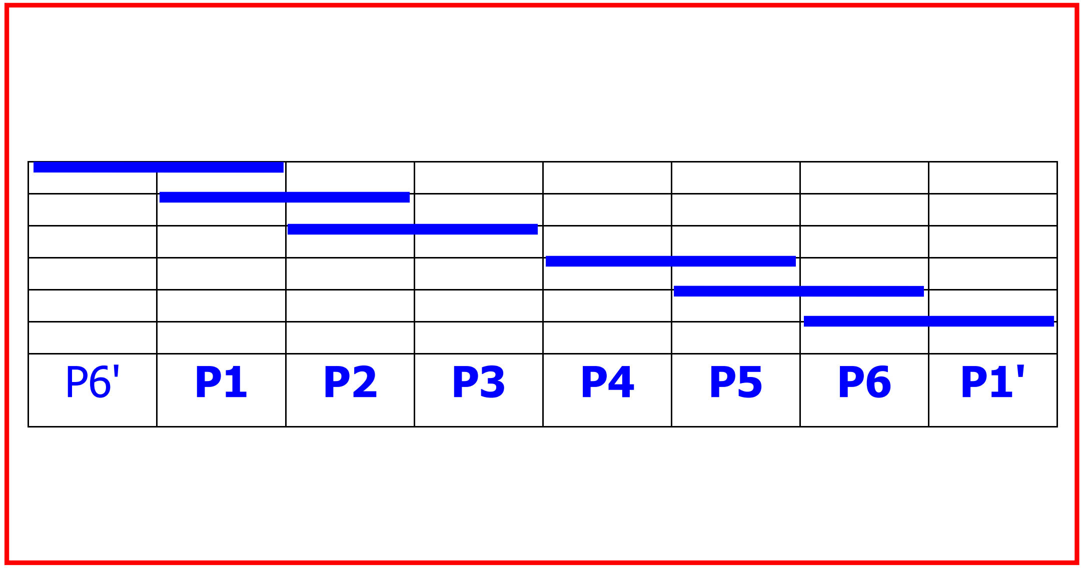

AMPL Plus for Students - DDBIL.AMP*
File Edit View Run Project Model Solver Options Window Help
Solver Status
Message
XLSOL 1.03S:
Optimal solution found
Model
Filename: prod.sol
Variables: 2
Constraints: 1
Nonzeroes: 4
Integers: 0
Solver
Branch: 0
Iteration: 1
Infeasibility: 0.
Objective: 8.571429
Best Integer: 0.
Pause
Stop
PROD.DAT
set P := bandas bobinas;
param: a c u :=
bandas 200 25 6000
bobinas 140 30 4000 ;
param b := 40;
j in P};
j in P};
j in P};
in P};
beneficio: sum {j in P} c[j] * X[j];
tiempo: sum {j in P} a[j] * X[j]<=b;
Limites {j in P}: 0 <= X[j] <= u[j];
\PROVA2\IOD\SESIO2A\AMPLMOD\prod.dat;
write bC:\USERS\ESTEVE\DOCE\IDNTU3\PROVA2\IOD\SESIO2A\AMPLMOD\prod;
File C:\USERS\ESTEVE\DOCE\IDNTU3\PROVA2\IOD\SESIO2A\AMPLMOD\prod.nl
solution C:\USERS\ESTEVE\DOCE\IDNTU3\PROVA2\IOD\SESIO2A\AMPLMOD\prod.
XLSOL 1.03S: Optimal solution found; objective 8.57142857142857
display X;
X [*] :=
bandas 0
bobinas 0.285714
ampl: display X;
display X;
X [*] :=
bandas 0
bobinas 0.285714
Model
PPROX.RUN
TRESMES....
TRESMES....
Solver Finished.
19:35

SESION DE PROBLEMAS

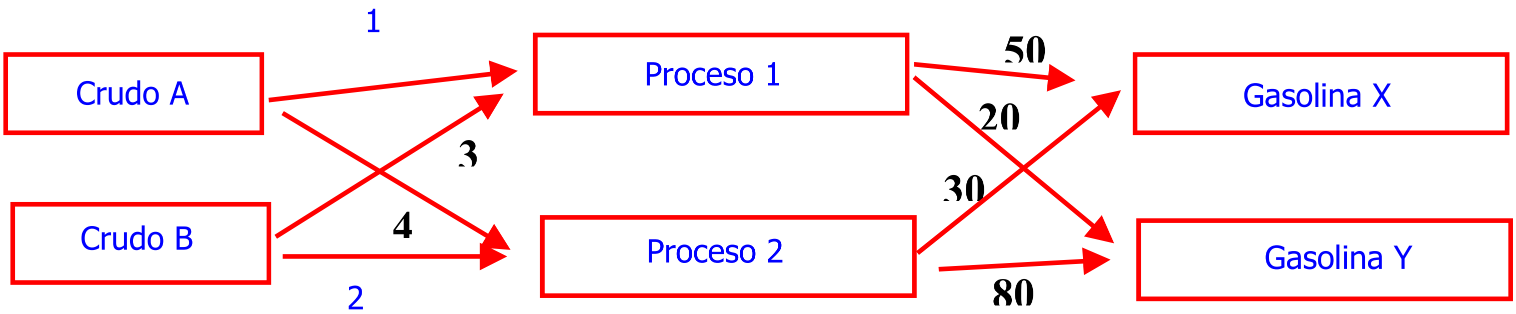
En una empresa hay las siguientes necesidades de personal:

i	1	2	3	4	5	6
Período	2 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 18	18 – 22	22 – 2
N. mínimo	22	55	88	110	44	33

Cada persona trabaja 8 h consecutivas. Determinar el número de personas x_i, $i = 1, 2, ..., 6$ que deben iniciar su turno en el período i de forma que el número total sea mínimo.



$$
\begin{array}{lrcrl}
Min_x & \multicolumn{4}{l}{\sum_{i=1}^{6} x_i} \\
s.a: & x_6 + x_1 & \geq & 22 & \text{Per. } 1 \\
 & x_1 + x_2 & \geq & 55 & \text{Per. } 2 \\
 & x_2 + x_3 & \geq & 88 & \text{Per. } 3 \\
 & x_3 + x_4 & \geq & 110 & \text{Per. } 4 \\
 & x_4 + x_5 & \geq & 44 & \text{Per. } 5 \\
 & x_5 + x_6 & \geq & 33 & \text{Per. } 6 \\
 & x_i \geq 0 & & &
\end{array}
$$



p_i Beneficio unitario por proceso $i = 1, 2$

$x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}$ =Cantidades de crudo A,B a proceso 1, 2

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 =$ Gasolinas X, Y producidas por los Procesos 1,2

Disponibilidad de Crudo A, B: $x_{A1} + x_{A2} \leq 120, \; x_{B1} + x_{B2} \leq 180$

Producción mínima de gasolina X,Y: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \geq 2800, \; \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \geq 2200$

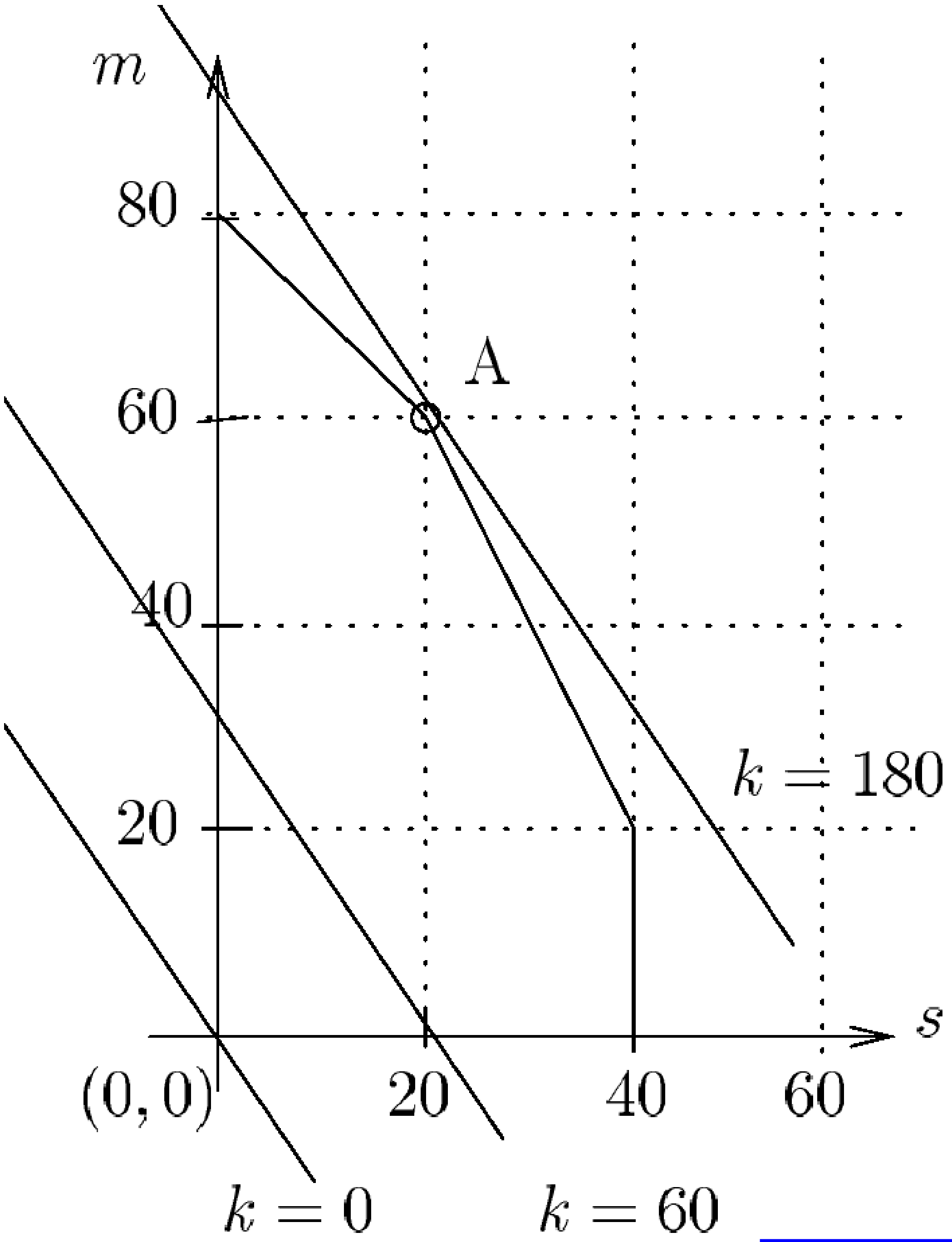
$$3x_{A1} = x_{B1}, \; 2x_{B2} = x_{A2}$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{50}{70}\frac{70}{4}(x_{A1} + x_{B1}), \; \mathbf{y}_1 = \frac{20}{70}\frac{70}{4}(x_{A1} + x_{B1}),$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{30}{110}\frac{110}{6}(x_{A2} + x_{B2}), \; \mathbf{y}_2 = \frac{80}{110}\frac{110}{6}(x_{A2} + x_{B2})$$

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 50x_{A1} + 15x_{B2}, \; \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = 20x_{A1} + 40x_{B2}$$

$$\begin{array}{ll} Max_x & p_1 70x_{A1} + p_2 55x_{B2} \\ s.a: & 50x_{A1} + 15x_{B2} \geq 2800 \\ & 20x_{A1} + 40x_{B2} \geq 2200 \\ & x_{A1} + 2x_{B2} \leq 120 \\ & 3x_{A1} + x_{B2} \leq 180 \\ & x_{A1}, x_{B2} \geq 0 \end{array}$$



Para valores de k > 180 las curvas de nivel de la f.obj. no intersectan la región factible:

k=180 es el mayor valor que puede alcanzar la f.obj. en la región factible.

Este valor se obtiene en el punto x_A =(20,60) :

ÓPTIMO (SOLUCIÓN) DE (P)

CONVEXIDAD de la REGIÓN FACTIBLE

Definición: Dados dos puntos x_1, x_2, el segmento abierto $\overline{x_1 x_2}$ son los puntos x t.q.:

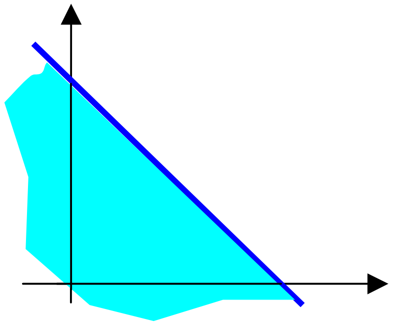
$$x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, \quad 0 < \alpha < 1$$

Definición de conjunto convexo. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si, $\forall\, x_1, x_2 \in C$, el segmento abierto $\overline{x_1 x_2} \subset C$

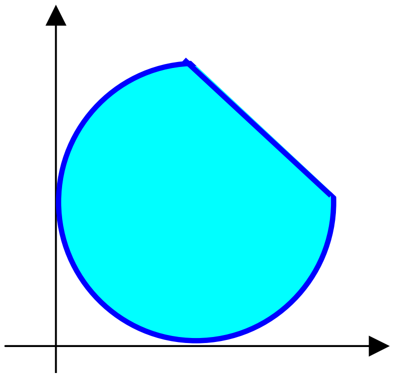
Supongamos $F = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b \,\}$, (o $Ax \leq b$, o $Ax = b$)

<u>F es un conjunto convexo</u>

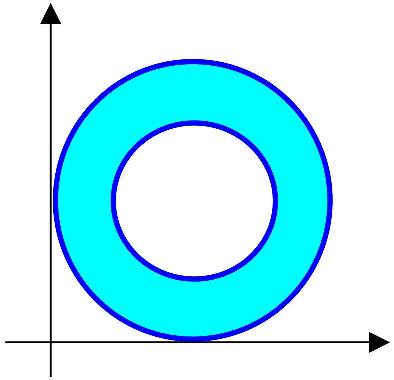
$$\left.\begin{array}{l} Ax^1 \geq b \\ Ax^2 \geq b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) = \\ \qquad = \alpha A x^1 + (1-\alpha) A x^2 \geq \alpha b + (1-\alpha) b = b, \quad (\leq, =) \end{array}$$



$x_1 + x_2 \leq 1$



$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1$
$x_1 + x_2 \leq \frac{29}{10}$

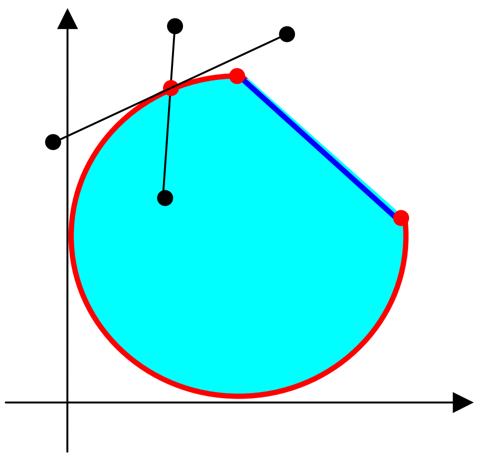


$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1$
$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \geq \frac{1}{2}$

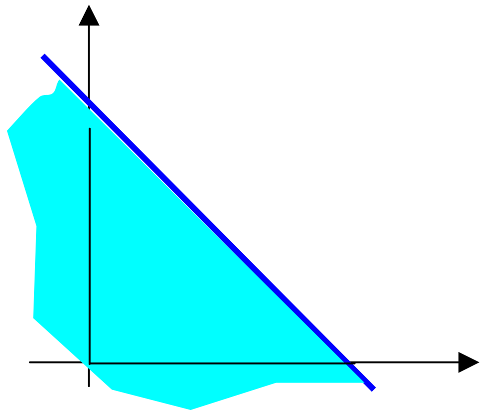
Vértices de un conjunto convexo

$\hat{x}$ es un vértice de $C \subset \mathbb{R}^n$, convexo, si $\forall\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $\hat{x} \in \overline{x_1 x_2}$:

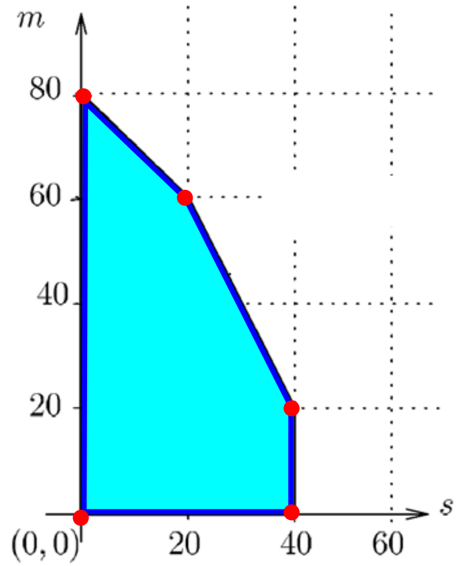
$$x_1 \notin C, \ \text{o}\ x_2 \notin C, \ \text{o ambos}$$



$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \le 1$$
$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \ge \tfrac{1}{2}$$



$$x_1 + x_2 \le 1$$



NO TODOS LOS CONVEXOS TIENEN VÉRTICES

FORMA STANDARD DE UN P.P.L.

Tras transformaciones, todo P.P.L. puede expresarse de la forma:

$$
\begin{aligned}
Min_x \quad & c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n \\
s.a: \quad & a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
& a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\
& \dots \\
& a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0, \ \dots x_n \geq 0
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
Min_x \quad & c^\top x \\
s.a: \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$(m \leq n)$

- Todas las variables x_i están sujetas a $x_i \geq 0, \ i = 1, 2, \dots n$
- Todos los términos de la derecha b_i son no negativos: $b_i \geq 0, \ i = 1, 2, \dots m$
- La matriz de coeficientes A es de pleno rango:

Hay m columnas de A tales que al formar una matriz B con ellas, ésta es inversible.

Todos los paquetes para P.L. convierten automáticamente a la forma Standard

$$(P)\quad \begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ s.a: & Ax = b \qquad \longleftarrow \; F \text{ en F.S.} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema Fundamental de la P.L.

1. Si $F \neq \emptyset \Rightarrow$ existe al menos una s.b.f.
2. Si (P) posee solución entonces hay una solución de (P) que es s.b.f.

Una estrategia para resolver el P.P.L. consiste en:

1. **Determinar si $F=\emptyset$.**
2. **En caso contrario, determinar una s.b.f. (vértice) de F inicial**
3. **Visitar s.b.f's hasta encontrar una que sea solución de (P)**
4. **Determinar si la s.b.f. solución es única o existen otras soluciones.**