Col.lecció d'Exercicis Resolts de Programació Lineal & Programació Lineal Entera

Esteve Codina Sancho

Departament d' Estadística i Investigació Operativa
Secció d'Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya

.

Contents

Exercicis de Programació Lineal.

1 Enunciats.

1. Donat el problema de Programació Lineal i les functions objectiu 1) a 5):

$$
\begin{array}{lllll}
Max & c^\top x & & & \\
 & & & & \\
s.a: & x_1 - x_2 & \leq 1 & (R1) & \\
 & x_1 - \frac{1}{3}x_2 & \geq -1 & (R2) & \\
 & x_1 - \frac{2}{3}x_2 & \geq -4 & (R3) & \\
 & x_1, \; x_2 \geq 0 \;\; (R4), (R5) & & &
\end{array}
\tag{1}
$$

$$
\begin{array}{ll}
1) \; c^\top x = 4x_1 - 4x_2 & 3) \; c^\top x = 4x_1 + 6x_2 \\
2) \; c^\top x = 10x_1 + 10x_2 & 4) \; c^\top x = -x_1 - x_2 \\
 & 5) \; c^\top x = -2x_1 + \frac{1}{3}x_2
\end{array}
\tag{2}
$$

(a) Representar gràficament la regió factible de les restriccions. Es acotada o no ?

(b) Trobar tots els extrems del poliedre que constitueix la regió factible i determinar els òptims corresponents a les f. objectius 1) a 5). En quins casos el problema és acotat ?

(c) Repetir els apartats anteriors si:
a) La restricció (R3) és ara $x_1 - \frac{5}{3}x_2 \geq -4$
b) (R1) a (R5) no s'alteren i s'afageix (R6): $x_1 \leq 8$
c) (R1), (R2), (R4), (R5) no s'alteren però (R3) és ara: $x_1 - \frac{5}{3}x_2 \geq 4$

2. Transformeu els següents problemes de Programació Lineal a la forma standard:

$$
\begin{array}{lll}
Max & x_1 - 3x_2 - 4x_3 & \\
 & & \\
s.a: & -x_1 - x_2 - x_3 & \geq -5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq 6 \\
 & x_2, \; x_3 \geq 0 &
\end{array}
\tag{3}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
 & & \\
s.a: & -x_1 - 2x_2 - x_3 & \geq 5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\
 & x_3 \geq 0 &
\end{array}
\tag{4}
$$

3. Identifiqueu les solucions bàsiques factibles dels següents conjunts de restriccions:

(a)

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 & = 1 \\
x_1, \; x_2 \geq 0 &
\end{array}
\tag{5}
$$

(b)

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = \ 1 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \ \geq 0 & \end{array} \tag{6}$$

(c)

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = \ 1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = \ 1 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \ \geq 0 & \end{array} \tag{7}$$

(d)

$$\begin{array}{ll} x_1 + \frac{8}{3}x_2 & \leq \ 4 \\ x_1 + x_2 & \leq \ 2 \\ 2x_1 & \leq \ 3 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 & \geq \ 0 \end{array} \tag{8}$$

4. Calculeu mitjançant pivotacions la solució bàsica (no factible) corresponent als índexos bàsics $I_B = \{4, 2, 6\}$ pel conjunt de restriccions en forma estàndard:

$$\begin{array}{ll} x_1 \quad + x_4 + x_5 - x_6 & = \ 5 \\ x_2 \quad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 & = \ 3 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 & = \ 1 \\ x_i \ \geq 0 & (\, i \, = \, 1, \ldots 6 \,) \end{array} \tag{9}$$

5. Calculeu les solucions bàsiques factibles del conjunt de restriccions:

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_3 & = \ 1 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = \ 1 \\ -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 & = \ 4 \\ x_i \ \geq 0 & (\, i \, = \, 1, \ldots 5 \,) \end{array} \tag{10}$$

partint de la base $I_B = \{ 3, 4, 5 \}$.

6. Pel problema:

$$\begin{array}{lll} Min & x_1 - \frac{4}{3}x_2 & \\ s.a: & x_1 - x_2 + x_3 & = \ 1 \\ & -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = \ 1 \\ & -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 & = \ 4 \\ & x_i \ \geq 0 & (\, i \, = \, 1, \ldots 5 \,) \end{array} \tag{11}$$

partint de la solució bàsica $I_B = \{ 3, 2, 5 \}$ efectueu un canvi de base que disminueixi la funció objectiu. Té sentit intentar trobar la solució del problema?

7. Partint de la base $I_B = \{ 3, 4, 5 \}$, resoldre:

$$\begin{array}{lll} Min & -300x_1 - 250x_2 & \\ s.a: & x_1 + 2x_2 + x_3 & = \ 150 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 & = \ 300 \\ & 2x_1 + x_5 & = \ 100 \\ & x_i \ \geq 0 & (\, i \, = \, 1, \ldots 5 \,) \end{array} \tag{12}$$

8. Calculeu una solució inicial factible pel problema i resoleu-lo:

$$
\begin{array}{lll}
Min & 18x_1 + 20x_2 + 22x_3 & \\
s.a: & 90x_1 + 65x_2 + 45x_3 & \geq 60 \\
 & 80x_1 + 40x_2 + 10x_3 & \leq 50 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\
 & x_i \geq 0 & (\, i = 1, \ldots 3 \,)
\end{array} \tag{13}
$$

9. Trobeu una solució inicial factible pel problema:

$$
\begin{array}{lll}
Min & -20a - 30c & \\
s.a: & a & \leq 60 \\
 & a + c & \geq 70 \\
 & a + 2c & \leq 120 \\
(P) & a, c \geq 0 &
\end{array} \tag{14}
$$

mitjançant el métode de les variables artificials i, partint de la solució factible trobada determinar amb el símple primal una solució de (P).

10. Pel problema de l'exercici 8 considereu l'addició d'una nova variable x_7 amb cost $c_7 = 19$, essent $a_{1,7} = 70$, $a_{2,7} = 55$, $a_{3,7} = 1$. La base óptima del problema era la $I_B^* = \{\, 2, 1, 4 \,\}$. a) Canviarà aquesta pel nou problema a l'afegir-se la nova variable ? b) Entre quins límits pot estar el cost de les variables no bàsiques a l'óptim ? c) Calculeu els límits entre els que pot estar el terme de la dreta de la segona restricció.

11. Donat el problema:

$$
\begin{array}{lll}
Min & 2x_1 - x_2 & \\
s.a: & x_1 - x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 - \frac{1}{3}x_2 & \geq -1 \\
 & x_1 - \frac{2}{3}x_2 & \geq -4 \\
 & x_1, \ x_2 \geq 0 &
\end{array} \tag{15}
$$

partint de la base $I_B = \{3, 2, 5\}$ efectueu una passa de l'algorisme símplex primal en la seva forma revisada i, en el nou punt trobat, analitzeu el punt i la regió factible i formeu la taula del símplex per la nova base.

12. Resoldre mitjançant el símplex dual el problema:

$$
\begin{array}{ll}
Min & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 = b_1 \quad R1 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 = b_2 \quad R2 \\
 & x_i \geq ,0
\end{array}
$$

   (a) Considereu el canvi $b_1 = 6$ en el terme de la dreta i, posteriorment el canvi $b_1 = 7$. Quin dels dos canvis en el terme de la dreta comporta una nova base òptima?.

   (b) Per la base òptima corresponent al terme de la dreta $b_1 = 7$, determineu el marge d'estabilitat dels coeficients de cost c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 (x_4, x_5 variables d'excés de les restriccions).

(c) Pel coeficient $c_2 = 5$ i $b_1 = 7$ calculeu la base òptima.

(d) En el cas del coeficient $c_2 = 4$ i $b_1 = 7$ s'afageix una nova restricció al problema: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 3$. Calculeu, en aquest cas, la nova base òptima.

(e) En el cas del coeficient $c_2 = 4$ i $b_1 = 7$ s'afageix una nova restricció al problema: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 20$. Calculeu, també en aquest cas, la nova base òptima.

13. Pel problema següent se sap que la base òptima és la formada pels índexos $I_B = \{2,3,5\}$ i que les variables bàsiques prenen el valor: $x_B^\top = (x2, x_3, x_5) = (1/2, 1/2, 15)$

$$Min \quad 16x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 11x_4$$

$$\begin{array}{rl} 180x_1 + 1202x_2 + 90x_3 + 60x_4 & \leq 90 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 & \geq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 & = 1 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \; i \ldots 4$$

(x_5, x_6 folga i excés de les restriccions primera i segona.)

Calculeu les variables duals òptimas usant el teorma de folga complementària.

14. Determinar les solucions del problema de programació lineal entera:

$$\begin{array}{llll} Min & -x_1 - x_2 - x_3 & & \\ s.a: & 3x_2 + 12x_3 & \leq 139 & R1 \\ & 5x_1 + \quad +5x_3 & \leq 150 & R2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 & \leq 130 & R3 \\ & x_1 & \leq 30 & R4 \\ & x_i \geq 0, \; x_i \in Z, & (i = 1, \ldots 3) & NN \end{array} \tag{16}$$

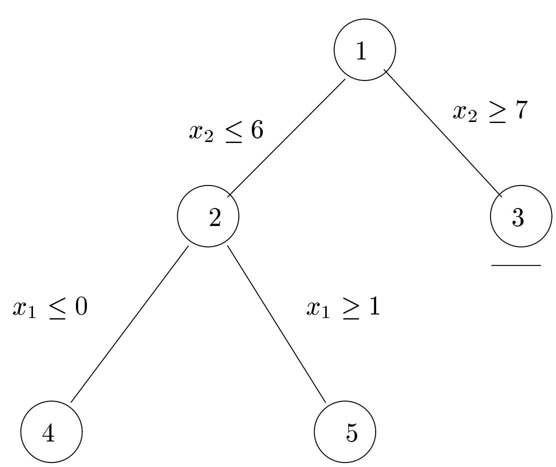
15. S'està emprant l'algorisme de B & B per determinar alguna de les solucions enteres óptimes del problema:

$$Max \quad x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{rll} 6x_1 + 7x_2 & \leq 44 & (R1 \\ 9x_1 + x_2 & \leq 36 & (R2 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \; x_i \in Z$$

En un moment determinat l'arbre d'exploració és el següent:



L'ordre en que han estat explorats els nusos és: 1), 2), 4), 3). Anomenem x_3, x_4 a la folga de les restriccions R1, R2. Se sap que la base óptima del Nus 1 és la $I_B = \{2,4\}$ i que la solució del nus 4 és la $(x_1, x_2) = (0,6)$.

1) Determineu la solució del nus 2 mitjançant l'ús del símplex dual, reproduïnt inicialment la solució bàsica òptima del nus 1.

2) El nus 3 acaba d'examinar-se i l'hem marcat. Per quina raó ?. L'únic nus obert en l'arbre és el nus 5. Tenint en compte que al resoldre'l sortirà $x_1^* = 1$, serà necessari efectuar una separació del nus 5 i continuar l'explansió de l'arbre ?. D'acord amb les vostres respostes, podriau donar una solució del PLE plantejat ?

3) La base òptima del nus 2 és la $I_B = \{2,4,1\}$.

(a) Plantejeu el propblema dual del problema corresponent al nus 2.

(b) Entre quins valors pot oscil.lar $b_1 = 44$ (terme de la dreta de la 1^a restricció) per mantenir $I_B = \{2,4,1\}$ òptima.

(c) Quin rang de valors pot pendre el coeficient de cost $c_2 = 5$.

2 Resum de conceptes teòrics.

$$\begin{array}{rrl} Min_{\ x} & c^\top x & \\ s.a & Ax = & b \\ & x \geq 0 & \end{array} \tag{17}$$

Per a problemes de petita dimensió acostuma a usar-se la forma de *tableau*, efectuant-se els canvis de base mitjançant pivotació gausiana. Una disposició típica dels elements d'un *tableau* és la següent:

$$\begin{array}{c|c|c} I & Y & Y_0 \\ \hline 0 & r_D & -z_0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} Y & = B^{-1}D \\ Y_0 & = B^{-1}b \\ r_D & = c_D - D^\top B^{-\top} c_B \\ z_0 & = c_B^\top B^{-1} b \end{array} \tag{18}$$

(tableau en forma canònica. Les fòrmules de la dreta constitueixen les fòrmules matricials bàsiques en que es basen els algorismes del símplex primal i dual)

(Algorisme SIMPLEX primal en absència de degeneració)

0) Inicialització. Determinar una base inicial $B_{(0}$ factible i calcular els costs reduïts o bé problema infactible; $i = 0$.
1) **Mentre** $(\exists j,\ r_j < 0,\ j \in I_{D_{(i}})$

Sel.leccionar q tal que $r_q = Min\ \{\ r_j \mid j \in I_{D_{(i}}\ \}$
Si $(y_{i,q} < 0,\ \ \forall i)$ **llavors** Problema no acotat
Altrament
Determinar $I_q^+ \triangleq \{\ j \in I_{B_{(i}} \mid y_{j,q} > 0\ \}$
Determinar $\hat{x}_q = Min\ \{\ \dfrac{y_{i,0}}{y_{i,q}} \mid i \in I_q^+\ \}$ i la variable p de sortida de la base $B_{(i}$
Realitzar el canvi de base $B_{(i+1} = B_{(i} \cup \{q\} - \{p\}$
$i \leftarrow i + 1$.
Calcular els costs reduïts $r_{D_{(i}} \triangleq c_{D_{(i}} - D_{(i}^\top B_{(i}^{-\top} c_{B_{(i}}$
Fi si
Fi Mentre

(Algorisme SIMPLEX dual en absència de òptims alternatius de (P))

0) Inicialització. Determinar una base inicial $B_{(0}$ factible del problema dual $(r_j \geq 0\ \forall j \in I_{D_{(0}})$ i calcular les variables bàsiques primals. $i = 0$.
1) **Mentre** $(\exists j,\ (B_{(i}^{-1}b)_j < 0,\ j \in I_{B_{(i}})$ (infactibilitat primal)

Sel.leccionar p tal que $x_p = Min\ \{\ x_j \mid j \in I_{B_{(i}}\ \}$
Si $(y_{p,i} \geq 0,\ \ \forall i)$ **llavors** Problema dual no acotat (problema primal no factible)
Altrament
Determinar $I_p^- \triangleq \{\ j \in I_{D_{(i}} \mid y_{p,j} < 0\ \}$
Determinar $\hat{\sigma}_p = Min\ \{\ \dfrac{r_j}{y_{p,j}} \mid j \in I_p^-\ \}$ i la variable q d'entrada a la base $B_{(i}$

Realitzar el canvi de base $B_{(i+1} = B_{(i} \cup \{q\} - \{p\}$
$i \leftarrow i+1$.
Calcular les variables primals $x_{B_{(i}} \triangleq B_{(i}^{-1} b$
Fi si
Fi Mentre

(Algorisme B&B per al problema PLE)

0) Inicialització. Resoldre la relaxació lineal PL (arrel de $\mathcal{T}$).
Incumbent $z_0 \leftarrow \infty$.
1) **Mentre** ($\mathcal{T} \neq \emptyset$):

Sel.leccionar un $(\text{PLE})_\ell$ no marcat i sigui G el seu conjunt factible.
Resoldre la relaxació $(\text{PL})_\ell$. Sigui $x^*_{PL\ell}$ una solució d'aquesta.

Si *(* $(\text{PL})_\ell$ infactible o $\lceil z^*_{PL\ell} \rceil \geq z_0$ *)* **llavors** marcar la fulla ℓ.

Si *(* $x^*_{PL\ell} \in Z^n$ & $(\text{PLE})_\ell$ no marcat *)* **llavors**
Si *(* $\lceil z^*_{PL\ell} \rceil < z_0$ *)* **llavors**
$x^*_{PLE} \leftarrow x^*_{PL\ell}$ (candidat a l'òptim)
$z_0 \leftarrow \lceil z^*_{PLj} \rceil$
Fi si

Marcar $(\text{PLE})_\ell$
Fi si

Si *(* $(\text{PLE})_\ell$ no marcat *)* **llavors**
Sigui $(x^*_{PL\ell})_j = \omega \notin Z$. Efectuar una separació de $G = \underline{G}_j(\omega) \cup \bar{G}_j(\omega)$
(Afegir la restricció $x_j \leq \lfloor \omega \rfloor$ per formar un nus successor del ℓ
i la $x_j \geq \lceil \omega \rceil$ per formar l'altre nus successor.)

Fi si
Fi Mentre
3) Solució: x^*_{PLE}

Us de les fòrmules matricials en els algorismes símplex primal, dual i l'algorisme B & B per programació lineal entera.

1. Canvi de base:

   Sigui B_k, matriu de $m \times m$, la base a l'iteració k-èssima corresponent als índexos bàsics $I_{B_k} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_p}, \ldots, x_{i_m}\}$. Suposem el canvi de base $p \leftrightarrow q$ (entra x_q i surt la p-èssima variable x_{i_p} de la base I_B.

   Sigui $\bar{y}$ la columna de la matriu Y corresponent a la variable x_q. Siguin $y_{p,q}$ l'element pivotal corresponent al canvi de base i $y_{i,q}$ qualsevol altre element del vector $\bar{y}$

   Llavors la matriu B_{k+1} per la nova base $I_{B_{k+1}} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_q, \ldots, x_{i_m}\}$ verifica l'expressió:

   $$B_{k+1} = B_k \eta$$

   essent η la matriu donada per:

$$\eta = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \bar{y} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \rightarrow \eta^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & \vdots & & & \\ & 1 & & -y_{iq}/y_{pq} & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1/y_{pq} & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & -y_{i'q}/y_{pq} & & 1 & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{array}\right)$$

$$F\grave{o}rmula\ d'actualitzaci\acute{o}\ de\ l'inversa:\ \ B_{k+1}^{-1} = \eta^{-1} B_k^{-1} \tag{19}$$

2. Actualització del valor de la funció objectiu:

$$z_{k+1} = z_k + r_q \cdot \hat{x}_q \tag{20}$$

3. Actualització del valor de les variables bàsiques:

$$x_{B_{k+1}} = \eta^{-1} x_{B_k} \tag{21}$$

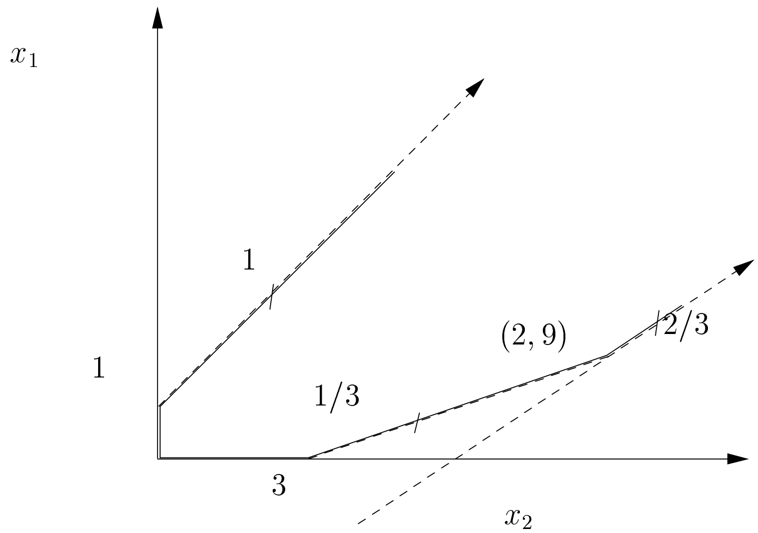
4. Variables duals i costs reduïts:

$$\lambda = B_k^{-\top} c_{B_k} \tag{22}$$

$$r_D = c_D - D^\top \lambda \tag{23}$$

3 Solucions.

3.1 Exercici 1



$$
\begin{array}{lrr}
x_1 - x_2 & \leq & 1 \\
x_1 - \frac{1}{3}x_2 & \geq & -1 \\
x_1 - \frac{2}{3}x_2 & \geq & -4 \\
x_1, \ \ x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Afegim folgues:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 - x_2 + x_3 & = \ 1 \\
-x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = \ 1 \\
-x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 & = \ 4 \\
x_i \ \geq \ 0 & (\ i \ = \ 1, \ldots 5 \ )
\end{array}
\tag{24}
$$

Solucions bàsiques possibles:

$$
\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \ = \ \frac{5\,!}{2\,! \cdot 3\,!} \ = \ 10
$$

Observant la representació gràfica s'observa que només hi han quatre extrems, per tant només podran haver-hi quatre bases factibles:

Primera base factible $I_B \ = \ \{3, 4, 5\} :$ *base de folgues* $B \ = \ I$
$x_B^\top \ = \ (x_3, x_4, x_5) \ = \ (1, 1, 4)$

Segona base factible $I_B \ = \ \{1, 4, 5\} :$

$$
x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \ = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Tercera base factible $I_B \ = \ \{1, 2, 3\} :$

$$
x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

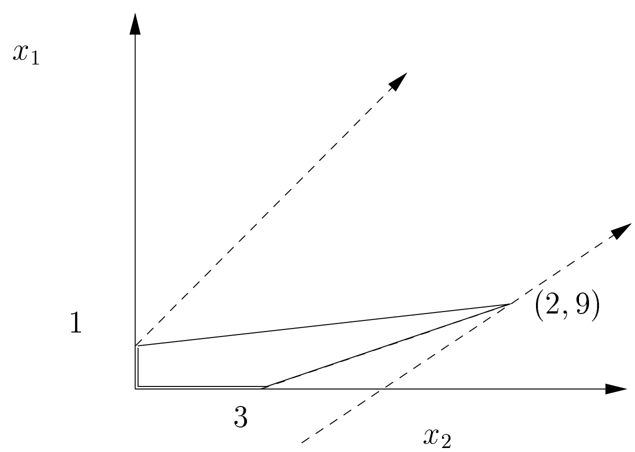
$$Quarta\ base\ factible\ I_B \,=\, \{2,3,5\}:$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La primera de les bases factibles es correspón amb l'extrem $\hat{x}_1 \,=\, (0,0)$, la segona amb el $\hat{x}_2 \,=\, (1,0)$, la tercera amb el $\hat{x}_3 \,=\, (2,9)$ i la quarta amb el $\hat{x}_4 \,=\, (0,3)$.

b) El polítop engendrat pels extrems o envolvent convexa dels quatre extrems, és el conjunt P representat gràficament:

$$P \,=\, \{\, x \,\in\, R^2 \;\mid\; x = \sum_{\ell=1}^{4} \lambda_\ell \cdot \hat{x}_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^{4} \lambda_\ell = 1,\ \lambda_\ell \,\geq\, 0 \,\}$$



Per la funció objectiu $c^\top x \,=\, 4x_1 - 4x_2$ el conjunt solució S és el:

$$S \,=\, \{\, x \,\in\, R^2 \;\mid\; x_1 - x_2 \,=\, 1,\ x_1, x_2 \,\geq\, 0\}$$
$$c^\top x \,=\, 4,\ \ \forall x \,\in\, S$$

Per les funcions objectiu $c^\top x \,=\, 10x_1 + 10x_2$ i la $c^\top x \,=\, 4x_1 + 6x_2$ el conjunt solució S és buit:

$$Problema\ no\ acotat \;\equiv\; S \,=\, \emptyset$$

Per la funció objectiu $c^\top x \,=\, -2x_1 + \frac{1}{3}x_2$ el conjunt solució S és el:

$$S \,=\, \{(0,3)\}$$
$$c^\top x \,=\, 1,\ \ \forall x \,\in\, S$$

3.2 Exercici 2

$$\begin{array}{lll} Min & -x_1+3x_2+4x_3 & \\ & & \\ s.a: & -x_1-x_2-x_3 & \geq -5 \\ & 2x_1+3x_2+x_3 & \geq 6 \\ & x_2,\ x_3 \geq 0 & \end{array} \tag{25}$$

Introduïm folgues i escreixos x_4, x_5:

$$\begin{array}{lll} Min & -x_1+3x_2+4x_3 & \\ & & \\ s.a: & -x_1-x_2-x_3-x_4 & = -5 \\ & 2x_1+3x_2+x_3 \quad -x_5 & = 6 \\ & x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 & \end{array} \tag{26}$$

Cal eliminar la variable x_1 doncs no està subjecta a no negativitats (variable *lliure*): $x_1 = 5-2x_2-x_3-x_4$. Per aquest métode obtindrem una reformulació del problema amb *menys* variables.

Substituïm en la funció objectiu: $c^\top x = -5+2x_2-x_3-x_4+3x_2+4x_3 = -5+5x_2+5x_3+x_4$. La funció objectiu apareix ara de la forma $c^\top + d$, és a dir amb una constant addicional. Aquesta pot suprimir-se ja que el conjunt de solucions del problema no es veu alterat si la funció objectiu està "desplaçada" per una constant. A més a més, per passar-ho a al forma standard s'ha de convertir en un problema de minimització.

Substituïm en l'altre restricció: $2(5-x_2-x_3-x_4)+3x_2+x_3-x_5 = 6 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow -x_2-x_3-2x_4-x_5 = -4$. Cal multiplicar l'equació per -1 ja que la forma standard exigeix que els termes de la dreta de les retriccions d'igualtat han de ser no negatius.

Per tant, en forma standard el problema queda:

$$\begin{array}{lll} Min & 5x_2+5x_3+x_4 & \\ & & \\ s.a: & x_2+x_3+2x_4+x_5 & = 4 \\ & x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 & \end{array} \tag{27}$$

Hi ha un altre mètode per passar a la forma standard un problema de programació lineal en el cas en que hi han variables de decisió no subjectes a nonegativitat. En aquest cas, *s'augmenta* el número de variables de decisió. Senzillament per cada variable *lliure* x_i, introduïm dues variables no negatives $u_i,\ v_i \geq 0$ de forma que: $x_i = u_i - v_i,\ \ u_i, v_i \geq 0$.

En aquest cas la funció objectiu es reescriu segons: $c^\top x = -u_i + v_i + 3x_2 + 4x_3$ i el problema queda en la forma:

$$\begin{array}{lll} Min & -u_1+v_1+3x_2+4x_3 & \\ & & \\ s.a: & u_1-v_1+2x_2+x_3+x_4 & = 5 \\ & 2u_1-2v_1+3x_2+x_3 \quad -x_5 & = 6 \\ & u_1,\ v_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 & \end{array} \tag{28}$$

Passarem ara el segón problema a la forma standard per eliminació de las variables lliures.

$$
\begin{array}{ll}
Min & x_1+3x_2+4x_3 \\
 & \\
s.a: & \begin{array}{lll} -x_1-2x_2-x_3-x_4 & = & 5 \\ 2x_1+3x_2+x_3 \quad\quad -x_5 & = & 6 \\ x_1+x_2+x_3 \quad\quad\quad\quad +x_6 & = & 1 \\ x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6 \geq 0 & & \end{array}
\end{array} \tag{29}
$$

La matriu de les restriccions d'igualtat és:

$$
\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}
$$

Caldrà escollir un menor de 2×2 sobre les columnes 1 i 2 no nul. Triem, per exemple, el corresponent a les files 1 i 2:

$$
\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3+4 = 1 \neq 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{31}
$$

Expressem ara les variables x_1, x_2 en funció de les x_3, x_4, x_5, x_6 segons les files primera i segona:

$$
\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{32}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{33}
$$

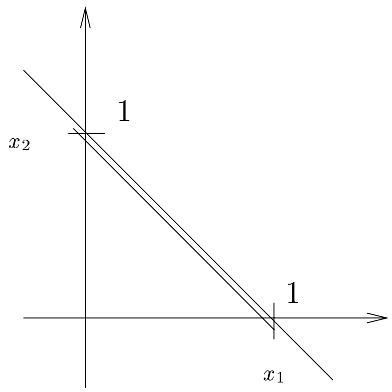
$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -27 \\ 16 \end{pmatrix} \tag{34}
$$

Substituïnt x_1, x_2 en la tercera restricció i en la funció objectiu aquestes resulten:
$-x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 10$, $c^\top x = 2x_3 - 3x_4 - x_5 - 21$.

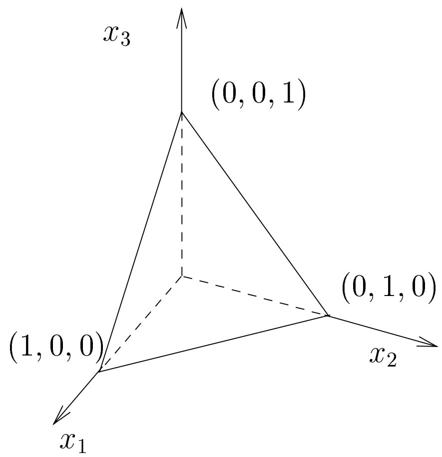
$$
\boxed{\begin{array}{ll}
Min & 2x_3-3x_4-x_5 \\
 & \\
s.a & \begin{array}{lll} -x_3-x_4-x_5-x_6 & = & 10 \\ x_3,\ x_4,\ x_5\, x_6 \geq 0 & & \end{array}
\end{array}}
$$

3.3 Exercici 3



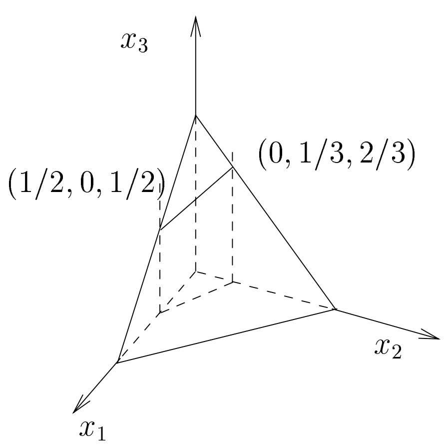
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Clarament els punts extrems són $(1,0),(0,1)$



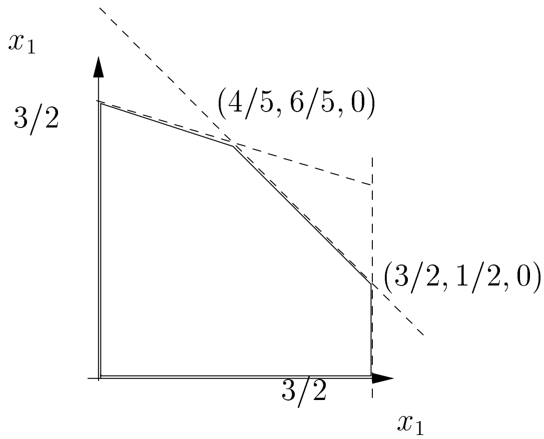
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Clarament els punts extrems són $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$



$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Els punts extrems són $(1/2, 0, 1/2), (0, 1/3, 2/3)$



$$\begin{array}{ll} x_1 + \frac{8}{3}x_2 & \leq 4 \\ x_1 + x_2 & \leq 2 \\ 2x_1 & \leq 3 \\ \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Solucions bàsiques possibles:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5\,!}{2\,! \cdot 3\,!} = 10$$

Només 5 d'elles són factibles.

$$\boxed{\begin{array}{ll} Min & 2x_3 - 3x_4 - x_5 \\ \\ s.a & -x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \;\; = \; 10 \\ & x_3,\ x_4,\ x_5\, x_6 \geq \; 0 \end{array}}$$

3.4 Exercici 4

$$
\begin{array}{l}
x_1 \qquad + x_4 + x_5 - x_6 \quad = 5 \\
\quad x_2 \quad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 \quad = 3 \\
\qquad x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 \quad = 1 \\
\\
x_i \geq 0 \qquad\qquad (\ i = 1, \ldots 6\ )
\end{array}
\tag{35}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -7 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -7 \\
-1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -3/2 & 1 & -6
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
1/2 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & -1 \\
-1/2 & 1 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & 11 \\
-1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -3/2 & 1 & -6
\end{array}
$$

$(x_4, x_2, x_6) = (-1, 11, -6)$

3.5 Exercici 5

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = 1 \\ -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 & = 4 \\ x_i \geq 0 & (\, i = 1, \ldots 5\,) \end{array} \tag{36}$$

Pot aprofitar-se la base de les folgues $I_B = \{3, 4, 5\}$.

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 4 \end{array} \tag{37}$$

Per anar recorrent les solucions bàsiques factibles podem fer entrar a la base la variable x_1 o la x_2 indistintament. Triem la x_2. Determinem el màxim valor que podrà pendre la variable x_2 en la nova base per mantenir les variables de la base en curs, x_3, x_4, x_5 no negatives:

$$I_2^+ = \{i_4 = 2,\ i_5 = 3\}$$

$$\hat{\varepsilon} = Min_{\ i \in I_2^+} \ \{ \frac{y_{i,0}}{y_{i,2}} \} = Min\{ \frac{1}{1/3} \,,\ \frac{4}{2/3} \} = \frac{1}{1/3} = 3 \Rightarrow i_p = 2 \Rightarrow p = 4$$

Surt la variable x_4.

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \qquad Nova\ base\ I_B = \{3, 2, 5\} \tag{38}$$

Fem entrar a la base la variable x_1. La única possibilitat es que surti la variable x_5 de la base.

$$I_1^+ = \{i_5 = 3\}$$

$$\hat{\varepsilon} = Min_{\ i \in I_1^+} \ \{ \frac{y_{i,0}}{y_{i,2}} \} = Min\{ \frac{2}{1} \} = 2 \Rightarrow i_p = 3 \Rightarrow p = 5$$

La nova base serà doncs la $I_B = \{3, 2, 1\}$

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \tag{39}$$

Observem que la columna no bàsica corresponent a la variable x_4 te totes les components ¡ 0. Estem en presència de un poliedre no acotat. Una de les direccións en les que el poliedre s'extén és la:

$$d^\top = (d_3, d_2, d_1, d_4, d_5) = (1, 3, 2, 1, 0)$$

Per continuar identificant extrems del poliedre podem tornar a partir de la base de les folgues inicial i triar l'altre variable no bàsica de la taula (37)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \quad \mathit{Entra}\, x_1 \Rightarrow \mathit{Surt}\, x_3 \Rightarrow \begin{array}{rrrrr|l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2/3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \tag{40}$$

Hem arribat a un punt bàsic factible pel que es detecta una direcció de creixement il.limitat ja que la columna corresponent a la variable x_2 és ≤ 0.

$$d^\top = (d_1, d_4, d_5, d_2, d_3) = (1, 2/3, 1/3, 1, 0)$$

3.6 Exercici 6

$$
\begin{array}{lll}
Min & x_1 - \frac{4}{3}x_2 & \\
s.a: & x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\
 & -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = 1 \\
 & -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 & = 4 \\
 & x_i \geq 0 & (\, i = 1, \ldots 5 \,)
\end{array}
\tag{41}
$$

Es reprodueixen els elements de la taula per la base $I_B = \{3, 2, 5\}$:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\tag{42}
$$

Càlcul dels costs reduïts: $r = c_N - N^\top B^{-\top} c_B = c_N - Y^\top c_B$:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Construïm la taula:

3	4	5	1	2	
1	2	3	2	−2	4
0	3	0	−3	1	3
0	−2	1	1	0	2
0	4	0	−3	0	4

$$
Entra\ x_1, \quad Min\ \{\ \frac{2}{1}\ \} = \frac{2}{1} \Rightarrow Surt\ x_5
\tag{44}
$$

Nova base $I_B = \{3, 2, 1\}$. La nova taula resulta:

3	4	5	1	2	
1	−1	2	0	0	8
0	−3	3	0	1	9
0	−2	1	1	0	2
0	−2	3	0	0	10

$$
La\ columna\ de\ x_4\ es\ < 0 \Rightarrow\ Problema\ no\ acotat
\tag{45}
$$

S'ha arribat a una solució básica factible a en la que es detecta una direcció de creixement il.limitat. La drirecció d de decreixement en R^5 és:

$$
d^\top = (d_3, d_2, d_1, d_4, d_5) = (1, 3, 2, 1, 0)
$$

3.7 Exercici 7

Es parteix de la base de les folques:

$$
\begin{array}{lll}
Min & -300x_1 - 250x_2 & \\
s.a: & x_1 + 2x_2 + x_3 & = 150 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 300 \\
 & 2x_1 \qquad\qquad\quad + x_5 & = 100 \\
 & x_i \geq 0 & (\ i = 1, \ldots 5\ )
\end{array}
\tag{46}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 150 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 300 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \\
\hline
-300 & -250 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
Min\{\frac{150}{1}, \frac{300}{3}, \frac{100}{2}\} = 50 \\
Entra\ x_1 \Rightarrow\ Surt\ x_5
\end{array}
\tag{47}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
0 & 2 & 1 & 0 & -1/2 & 100 \\
0 & 2 & 0 & 1 & -3/2 & 150 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 50 \\
\hline
0 & -250 & 0 & 0 & 150 & 15000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
Min\{\frac{150}{2}, \frac{100}{2}\} = 50 \\
Entra\ x_2 \Rightarrow\ Surt\ x_3
\end{array}
\tag{48}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/4 & 50 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 50 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 50 \\
\hline
0 & 0 & 125 & 0 & 175/2 & 27500
\end{array}
\qquad
Taula\ \acute{o}ptima.
\tag{49}
$$

S'ha trobat l'únic óptim del problema: $x_B = \{x_2, x_4, x_1\} = (50, 50, 50)$

3.8 Exercici 8

S'afageixen variables artificials x_6, x_7 per la primera i segona restricció. Problema associat amb variables artificials per la fase 1 del símplex:

$$\begin{array}{lllll} Min & x_6 + x_7 & & & \\ s.a: & 90x_1 + 65x_2 + 45x_3 - x_4 & + x_6 & = & 60 \\ & 80x_1 + 40x_2 + 10x_3 \quad + x_5 & & = & 50 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \quad + x_7 & = & 1 \\ & x_i \geq 0 & & & (\, i = 1, \dots 7\,) \end{array} \tag{50}$$

Per obtenir ràpidament els costs reduïts de la base inicial amb variables artificials i folgues pel problema associat substituïm la suma de variables artificials $x_6 + x_7$ de les restriccions primera i tercera on s'han afegit: $x_6 + x_7 = 61 - 91x_1 - 66x_2 - 46x_3 + x_4$. D'aquesta forma podem formar el tablau inicial:

1	2	3	4	5	6	7	
90	65	45	−1	0	1	0	60
80	40	10	0	1	0	0	50
1	1	1	0	0	0	1	1
−91	−66	−46	1	0	0	0	−61

$Min\{1, 5/8, 2/3\} = 5/8$
$Entra\ x_1 \Rightarrow\ Surt\ x_5$ (51)

Mostrarem només les columnes no bàsiques de la taula.

	5	2	3	4	
x_6	−9/8	20	135/4	−1	15/4
x_1	1/80	1/2	1/8	0	5/8
x_7	−1/80	1/2	7/8	0	3/8
	91/80	−41/2	−154/8	1	−33/8

$Min\{3/7, 5, 15/135\} = 1/9$
$Entra\ x_3 \Rightarrow\ Surt\ x_6$ (52)

	5	2	6	4	
x_3	−1/30	16/27	4/135	−4/135	1/9
x_1	1/60	23/54	−1/270	1/270	11/18
x_7	1/60	−1/54	−7/270	7/270	5/18
	−1/60	1/54	277/270	−7/270	−5/18

$Min\{75/7, 165\} = 1$
$Entra\ x_4 \Rightarrow\ Surt\ x_7$ (53)

	5	2	6	7	
x_3	−1/70	4/7	0	8/7	3/7
x_1	1/70	3/7	0	−1/7	4/7
x_4	9/14	−5/7	−1	270/7	75/7
	0	0	1	1	0

$Suma\ d'infactibilitats = 0$
$base\ inicial\ factible\ pel$
$problema\ original$
$I_B = \{3, 1, 4\}$ (54)

Variables duals per la base $I_B = \{3, 1, 4\}$:

$$\lambda = B^{-\top} c_B = \begin{pmatrix} 45 & 90 & 1 \\ 10 & 80 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 22 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/70 & 8/7 \\ 0 & 1/70 & -1/7 \\ -1 & 9/14 & 270/7 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 22 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/70 \\ 158/7 \end{pmatrix}$$

Costs reduïts:

$$\begin{pmatrix} r_5 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64 & 40 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/70 \\ 158/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/70 \\ -20/70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccr|cr|r} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1/70 & 4/7 & 0 & 8/7 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/70 & 3/7 & 0 & -1/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 9/14 & -5/7 & -1 & -270/7 & 75/7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4/70 & -20/70 & & & -138/7 \\ & & & & & v. & art. & \end{array} \quad Entra\ x_2 \quad Min\{4/3, 3/4\}\ Surt x_3 \tag{55}$$

Base óptima $I_B = \{2, 1, 4\}$

$$\begin{array}{ccccr|cr|r} 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1/40 & 7/4 & 0 & 2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/40 & -3/40 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & 5/4 & -1 & 40 & 45/4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/20 & 1/2 & 0 & 22 & -17 \\ & & & & & v. & art. & \end{array} \tag{56}$$

3.9 Exercici 9

Es tracta de trobar una solució bàsica factible pel problema:

$$
\begin{array}{ll}
Min & -20a - 30c \\[6pt]
s.a: & \begin{array}{ll} a & \leq\ 60 \\ a + c & \geq\ 70 \\ a + 2c & \leq\ 120 \end{array} \\[6pt]
(P) & a, c\ \geq\ 0
\end{array}
\tag{57}
$$

Introduïm variables artificials. Només cal introduïr una variable artificial a_0: la corresponent a la segona restricció:

$$
\begin{array}{ll}
Min & a_0 \\[6pt]
s.a: & \begin{array}{llll} a + s_2 & & & =\ 60 \\ a + c & - s_3 & + a_0 & =\ 70 \\ a + 2c + & s_4 & & =\ 120 \end{array} \\[6pt]
(P') & a, c, s_2, s_3, s_4, a_0\ \geq\ 0
\end{array}
\tag{58}
$$

Es reprodueixen els elements de la taula per la base $I_B = \{3, 6, 5\}$:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & a_0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 70 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & a_0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 70 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\
\hline
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -70
\end{array}
\tag{59}
$$

En la iteració en que la variable artificial a_0 surti de la base (passi a ser no bàsica) llavors haurem trobat una solució bàsica inicial pel problema (P). Si pel contrari resolem el problema (P') essent la variable artificial a_0 bàsica no degenerada llavors no existirà cap solució bàsica factible pel problema (P). ($\Rightarrow$ pel teorema fonamental de programació lineal no existeix cap solució factible pel problema (P) original: regió factible de (P) buida).

Hi ha "empat" entre les variables no bàsiques a entrar a la base: la a i la c àmbdues amb cost reduít -1. Escollim la variable a. $Min\{60/1, 70/1, 120/1\} = 60$. Surt s_2 de la base.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & a_0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\
\hline
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -10
\end{array}
\qquad Entra\ c;\quad Min\{\ \frac{10}{1}\ ,\ \frac{60}{2}\ \}\ =\ 10\ \ \Rightarrow Surt\ a_0
\tag{60}
$$

Ja que a_0 surt de la base pasarà a ser no básica i amb valor 0.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & a_0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 40 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\tag{61}
$$

Podem prescindir de la columna corresponent a la variable artificial emprada. Situem els coeficients de cost de (P) en la fila de costs reduïts de la taula i la passem a forma canònica:

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 40 \\
\hline
-20 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr|r}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 40 \\
\hline
0 & 0 & -10 & -30 & 0 & 1500
\end{array}
\tag{62}
$$

Entra s_3 a la base i surt s_4 de la base:

$$
\boxed{
\begin{array}{rrrrr|r}
a & c & s_2 & s_3 & s_4 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 30 \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 20 \\
\hline
0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 2100
\end{array}
}
$$

Taula óptima. Costs reduïts ≥ 0. Ja que són tots ells estrictament positius la solucó bàsica òptima trobada és la única. $x_B^\top = (a, c, s_3) = (60, 30, 20)$.

3.10 Exercici 10

Base óptima $I_B = \{2, 1, 4\}$

$$\begin{array}{ccccc|cc|c} 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1/40 & 7/4 & 0 & 2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/40 & -3/40 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & 5/4 & -1 & 40 & 45/4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/20 & 1/2 & 0 & 22 & -17 \\ & & & & & v. & art. & \end{array} \tag{63}$$

Variables duals per la base óptima:

$$\lambda = B^{-\top} c_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/40 & 1/40 & 5/8 \\ 2 & -1 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/20 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Es calcula el cost reduït per la nova variable, $r_t = c_7 - a_7^\top \lambda$:

$$r_7 = 19 - (70, 55, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1/20 \\ 22 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}$$

Els límits dels costos de les variables no bàsiques a l'òptim és ve donat per $c'_j - c_j + r_j \geq 0$:

$$c'_3 - 22 + \frac{1}{2} \geq 0, \quad c'_5 + \frac{1}{20} \geq 0$$

Els termes de la dreta poden sofrir una variació Δb, la qual mantindrà la base B òptima sempre que es mantingui $x'_B = B^{-1}(b + \Delta b) = x_B + B^{-1}\Delta b \geq 0$.

$$\begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 45/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/40 & 2 \\ 0 & 1/40 & -1 \\ -1 & 5/8 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{3}{4} - \frac{1}{40}\Delta b_2 & \geq 0 \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{40}\Delta b_2 & \geq 0 \\ \frac{45}{4} + \frac{5}{8}\Delta b_2 & \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Max\{-10, -18\} = -10 \leq \Delta b_2 \leq 30 = Min\{30\}$$

3.11 Exercici 11

Calculem les variables básiques primals:

$$x_B^{(1} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Calculem les variables duals λ:

$$\lambda = B^{-\top}c_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

i els costs reduïts. Les variables no básiques són x_1, x_4:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{66}$$

es calcula la columna de la matriu Y corresponent a la variable no bàsica x_1

$$y_{j_q} = B^{-1}a_q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{Entra } q = 1 \textit{ i surt } p = 5 \tag{67}$$

Nous índexos bàsics $I_B = \{3, 2, 1\}$. Càlcul de la inversa de la base pels nous índexos bàsics segons: $B_{k+1}^{-1} = \eta^{-1}B_k^{-1}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tag{68}$$

$$\rightarrow B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$x_B^{(1} = \eta^{-1}x_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$\lambda = B_1^{-\top}c_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$\begin{pmatrix} r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow o.\,\textit{únic} \tag{72}$$

El punt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 9, 8, 0, 0)$ es l'únic òptim ja que $r > 0$. Calculem els elements de la taula del símplex:

$$y_1 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$y_2 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

ja que $y_1 \leq 0$ la regió factible és il.limitada. Valor de la funció objectiu: $z_0 = c_B^\top x_B = -5$. La taula per la base $I_B = \{ 3, 2, 1 \}$ resulta:

1	2	3	4	5	
0	0	1	−1	2	8
0	1	0	−3	3	9
1	0	0	−2	1	2
0	0	0	1	1	5

3.12 Exercici 12

$$Min \qquad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 5 \quad R1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 6 \quad R2 \end{aligned}$$

$$x_i \geq ,0$$

Anomenem x_4, x_5 a les variables d'excés de les restriccions R1, R2.

1	2	3	4	5	
−1	−2	−3	1	0	−5
−2	−2	−1	0	1	−6
3	4	5	0	0	0

Tal i com es mostra a la fila de costs reduïts la base formada per les variables d'excés es factible dual ja que la fila de costs reduïts, de fet, es el vector de folgues del problema dual. La columna de més a la dreta ens mostra la infactibilitat primal de la base.

Sel.leccionem una variable bàsica negativa qualsevol. Triarem x_5 per ser la més negativa.

1	2	3	4	5	
−1	−2	−3	1	0	−5
−2	−2	−1	0	1	−6
3	4	5	0	0	0

$$Surt\ x_5 \Rightarrow Max\ \{ \frac{3}{-2}, \frac{4}{-2}, \frac{5}{-1}, \} = \frac{3}{-2}\ Entra\ x_1$$

1	2	3	4	5	
0	−1	−5/2	1	−1/2	−2
1	1	1/2	0	−1/2	3
0	1	7/2	0	3/2	−9

$$Surt\ x_4 \Rightarrow Max\ \{ \frac{3/2}{-1/2}\ \frac{7/2}{-5/2}\ \frac{1}{-1} \} = \frac{1}{-1}\ Entra\ x_2$$

1	2	3	4	5	
0	1	5/2	−1	1/2	2
1	0	−2	1	−1	1
0	0	1	1	1	−11

Taula factible primal i factible dual $\Rightarrow$ *base optima :* $I_B = \{2,1\}$

Variables duals óptimas corresponents a la base $I_B = \{2,1\}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};\ \lambda = B^{-\top} c_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixem-nos, a més a més en que coincideixen el valor de la funció objectiu dual z_D i el valor de la funció objectiu primal z_P per la base óptima:

$$z_D = b^\top \lambda = (5,6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 11$$

$$z_P = c_B^\top x_B = (3,4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 11$$

(a) Canvis en els termes de la dreta. Primer canvi, $b_1 = 6$.

Per la mateixa base $I_B = \{2,1\}$ el valor de les variables primals serà ara:

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \textit{Factibilitat primal} \tag{75}$$

Segón canvi, $b_1 = 7$:

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \quad \Rightarrow \textit{Infactibilitat primal} \tag{76}$$

En els dos canvis del terme de la dreta els costs reduïts queden inalterats per lo que hi ha factibilitat dual. En el primer canvi continua matenint-se la factibilitat primal per lo que la base $I_B = \{2,1\}$ continua essent òptima. El valor de la funció objectiu però sí que ha canviat. Al mantenir-se la base podem fer ús de la relació: $\Delta f = \lambda^\top \Delta b$:

$$\Delta f = \lambda^\top \Delta b = (1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$f_{(b_1 = 6)} = f_{(b_1 = 5)} + \Delta f = 11 + 1 = 12$$

Pel segón canvi, $b_1 = 7$, no es manté la factibilitat primal, per lo que per determinar la base óptima a partir de la base $I_B = \{2,1\}$ farem ús del símplex dual.

El valor de la funció objectiu dual és ara $\lambda^\top b = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 6 = 13$.

Formem la taula corresponent a la base $I_B = \{2,1\}$ i pel terme de la dreta $b_1 = 7$:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 0 & 1 & 5/2 & -1 & 1/2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -13 \end{array} \qquad \begin{array}{l} Min\{ \frac{-1}{-2}, \frac{-1}{-1} \} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \textit{Surt } x_1, \textit{ Entra } x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 5/4 & 1 & 0 & 1/4 & -3/4 & 11/4 \\ -1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -27/2 \end{array} \qquad Taula\ \grave{o}ptima \tag{77}$$

(Valor de les variables duals:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ (B^{-1})^\top = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = (B^{-1})^\top c_B = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad)$$

(b) Determinació dels marges d'estabilitat pels costs $c_1 \dots c_5$:

Les variables x_1, x_4, x_5 són no bàsiques i per mitjançant simple observació dels costs reduïts de la taula òptima (84) podrem escriure:

$$\begin{array}{l} c_1 \in [\,3 - \frac{1}{2},\ \infty\,[\\ c_4 \in [\,4 - \frac{3}{2},\ \infty\,[\\ c_5 \in [\,5 - \frac{1}{2},\ \infty\,[\end{array}$$

Les variables x_2, x_1 són bàsiques.

Si anomenem δ_2 el marge de variació admissible pel coeficient c_2, llavors els costs reduïts ρ' per la base $I_B = \{2, 1\}$ mantenint-se inalterat el coeficient $c_1 = 3$ i valent el coeficient de cost $c_2 = 4 + \delta_2$ obeeixen a l'expressió:

$$\rho' = \rho - \delta_2 y^{(2}$$

on $y^{(2}$ és un vector format pels elements no bàsics de la fila corresponent a la variable bàsica 2 de la taula (84):

$$\begin{pmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_4 \\ \rho'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \delta_2 \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} \geq 0$$

Per mantenir-se simultàniament la no negativitat de $(\rho'_1, \rho'_4, \rho'_5)$ els marges per δ_2 hauran de ser:

$$\underline{\delta} = Max\{ -\frac{1}{2}/\frac{3}{4}\} = -\frac{2}{3} \leq \delta_2 \leq \hat{\delta} = Min\{\frac{1}{2}/\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}/\frac{1}{4}\} = \frac{2}{5} \tag{78}$$

$$c_2 \in [\,4 - \frac{2}{3},\ 4 + \frac{2}{5}\,] \tag{79}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_4 \\ \rho'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \delta_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Per mantenir-se simultàniament la no negativitat de $(\rho'_1, \rho'_4, \rho'_5)$ els marges per δ_3 hauran de ser:

$$\underline{\delta} = Max\{ \frac{1}{2}/(\frac{-1}{2}),\ \frac{3}{2}/(\frac{-1}{2})\} = -1 \leq \delta_3 \leq \hat{\delta} = Min\{1\} = 1 \tag{80}$$

$$c_3 \in [\,4 - 1,\ 4 + 1\,]$$

(c) Solució pel cas $c_2 = 5$, $b_1 = 7$.

El valor $c_2 = 5$ cau fora de l'interval d'estabilitat (refstab2) per la base $I_B = \{2, 1\}$ lo qual comportarà l'aparició de costs reduïts negatius:

$$\begin{pmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_4 \\ \rho'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Cal recordar que al sortir els coeficients de cost dels intervals d'estabilitat calculats es perdrà la factibilitat dual, mantenint-se la factibilitat primal. Ja que el coeficient és bàsic el canvi en el seu coeficient de cost comportarà el canvi de valor de la funció objectiu: $5 \cdot 11/4 + 5 \cdot 1/2 = 65/4$

1	2	3	4	5	
5/4	1	0	1/4	−3/4	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	1/2
−3/4	0	0	5/4	5/4	−65/4

(81)

La variable x_1 entra a la base sortint la variable x_2. Nova taula:

1	2	3	4	5	
1	4/5	0	1/5	−3/5	11/5
0	2/5	1	−2/5	−4/5	8/5
0	3/5	0	11/10	4/5	−292/20

Taula òptima (82)

(d) Afegim a la taula òptima (84) la restricció $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 3$.

S'afageix la restricció a la taula directament i es passa aquesta a forma canònica:

1	2	3	4	5		
5/4	1	0	1/4	−3/4	0	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	0	1/2
−1	−5	−2	0	0	1	−3
1/2	0	0	3/2	1/2	0	−27/2

(83)

1	2	3	4	5		
5/4	1	0	1/4	−3/4	0	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	0	1/2
21/4	0	−2	5/4	−15/4	1	43/4
1/2	0	0	3/2	1/2	0	−27/2

$\rightarrow$

1	2	3	4	5		
5/4	1	0	1/4	−3/4	0	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	0	1/2
17/4	0	0	1/4	−11/4	1	47/4
1/2	0	0	3/2	1/2	0	−27/2

Una vegada s'ha passat a la forma canònica no s'observa pèrdua de factibilitat primal ni dual per lo que al afegir-se la restricció no es perd l'optimalitat de la base $I_B = \{2, 3\}$

(e) Si s'afageix la restricció $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 20$.

Es passa la taula a la forma canònica:

1	2	3	4	5		
5/4	1	0	1/4	−3/4	0	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	0	1/2
−1	−5	−2	0	0	1	−20
1/2	0	0	3/2	1/2	0	−27/2

(84)

1	2	3	4	5		
5/4	1	0	1/4	−3/4	0	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	0	1/2
21/4	0	−2	5/4	−15/4	1	−25/4
1/2	0	0	3/2	1/2	0	−27/2

$\rightarrow$

1	2	3	4	5		
5/4	1	0	1/4	−3/4	0	11/4
−1/2	0	1	−1/2	1/2	0	1/2
17/4	0	0	1/4	−11/4	1	−21/4
1/2	0	0	3/2	1/2	0	−27/2

Hi ha factibilitat dual i infactibilitat primal. Només hi ha un element negatiu a la fila corresponent a la variable x_6 (variable d'excés de la nova restricció). Surt x_6 de la base i entra x_5:

1	2	3	4	5		
1/11	1	0	8/44	0	−12/44	184/44
12/44	0	1	−10/22	0	2/11	−20/44
−17/11	0	0	−1/11	1	−4/11	21/11
14/11	0	0	34/22	0	2/11	−159/11

Es manté la infactibilitat primal. Surt x_3 i entra x_4:

1	2	3	4	5		
5/121	1	−2/11	0	0	−37/121	176/44
−6/10	0	−11/5	1	0	−2/5	1
−176/110	0	−1/5	0	1	−2/5	2
242/110	0	17/5	0	0	4/5	−16

Taula òptima

3.13 Exercici 13

$$Min \quad 16x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 11x_4$$

$$\begin{array}{ll} 180x_1 + 1202x_2 + 90x_3 + 60x_4 & \leq 90 \; R1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 & \geq 4 \; R2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 & = 1 \end{array}$$

$$x_i \geq, 0, \; i \ldots 4$$

(x_5, x_6 folga i excés de les restriccions primera i segona.)

$$Min \quad 16x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 11x_4$$

$$\begin{array}{ll} 180x_1 + 1202x_2 + 90x_3 + 60x_4 + x_5 & = 90 \; R1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 - x_6 & = 4 \; R2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 & = 1 \end{array}$$

$$x_i \geq, 0, \; i \ldots 4$$

Problema dual en forma simètrica:

$$Max \quad 90\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\begin{array}{ll} 180\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \leq 16 \\ 120\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & \leq 12 \\ 90\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 & \leq 10 \\ 60\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 & \leq 11 \\ \lambda_1 & \leq 0 \\ -\lambda_2 & \leq 0 \end{array}$$

Si anomenem $(\rho_1, \ldots \rho_6)$ les folques del problema dual

$$x_5 = 15 > 0 \Rightarrow \rho_5 = 0 \Rightarrow (1,0,0)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

D'igual forma tindrem:

$$x_2 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \rho_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \rho_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 180 & 3 & 1 \\ 120 & 2 & 1 \\ 90 & 6 & 1 \\ 60 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 10 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 12 \\ 6\lambda_2 + \lambda_3 = 10 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En definitiva s'acaba plantejant el sistema $\lambda = B^{-\top} c_B$. Podem ara comprovar el valor de les funcions objectiu primal i dual:

$$12 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 15 = 90 \cdot 0 + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 13 = 11$$

3.14 Exercici 14 (PLE)

$$\begin{array}{llcll} Min & -x_1 - x_2 - x_3 & & & \\ s.a: & \quad 3x_2 + 12x_3 & \leq & 139 & R2 \\ & 5x_1 + \quad +5x_3 & \leq & 150 & R3 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 & \leq & 130 & R4 \\ (PLE) & x_1 & \leq & 30 & R5 \\ & x_i \geq 0, \ x_i \in Z, & (i = 1, \ldots 3) & & NN \end{array} \tag{85}$$

Anomenarem s_2 a la folga de la restricció R2, s_3 a la folga de la restricció R3, etc.

Sigui F_0 la regió factible de la relaxació del PLE:

$$F_0 \triangleq \{ x \in R^3 \mid x \; verifica \; R2, R3, R4, R5, NN \}$$

D'aquesta forma el problema PLE podría expresar-se segons:

$$\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in F_0 \cap Z^3 \end{array}$$

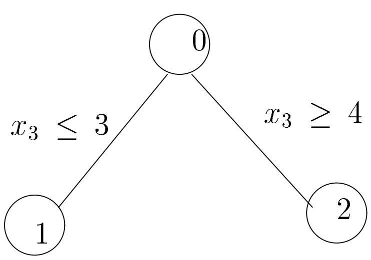
i la relaxació del PLE segons:

$$\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in F_0 \end{array}$$

Solució de la relaxació inicial: $x_3 = 3.45$, $x_2 = 32.53$, $x_1 = 26.55$, $s_5 = 3.45$. Valor de la funció objectiu de la relaxació = 86.66 . Cap de les variables de la relaxació té solució entera. Podem triar qualsevol d'elles per establir una partició de la regió factible. Triem la x_3. Les particions de la regió factible F_0 quedan fixades per:

$$F_1 \triangleq F_0 \cap \{ x \in R^3 \mid x_3 \leq 3\}$$
$$F_2 \triangleq F_0 \cap \{ x \in R^3 \mid x_3 \geq 4\}$$

Podem afegir a l'arbre d'exploració dos fills, el nus 1 i el nus 2, dels nus arrel 0.



Dels nusos per explorar (l'1 o el 2) en triem un d'ells. Triem el nus 1. La relaxació lineal corresponent al nus 1 consta de la restricció $x_3 \leq 3$, amb folga s_6. Aquesta restricció ocasionarà que la solució bàsica trobada al explorar el nus 0 sigui infactible per la regió F_1.

Resolució de la relaxació corresponent al nus 1:

$$\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in F_1 \end{array}$$

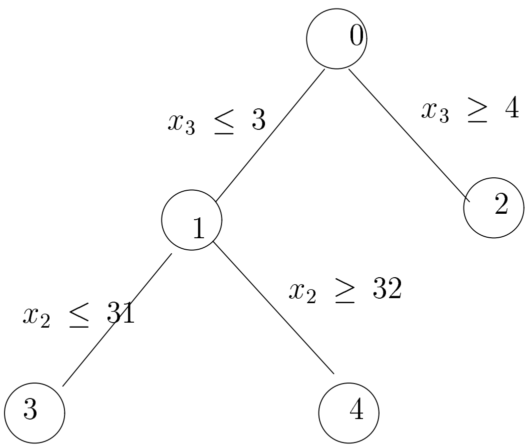
1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
0	0	0	1	4/10	−1	0	−20	9
1	0	0	0	1/5	0	0	−1	27
0	1	0	0	−4/30	1/3	0	8/3	94/3
0	0	0	0	−1/5	0	1	1	3
0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	1/15	1/3	0	8/3	184/3

(86)

Triem d'entre les components básiques de la solució trobada alguna amb solució no entera. Només està la x_2. Les particions de la regió factible F_1 quedan fixades per:

$$F_3 \triangleq F_1 \cap \{\, x \in R^3 \mid x_2 \leq 31\}$$
$$F_4 \triangleq F_1 \cap \{\, x \in R^3 \mid x_2 \geq 32\}$$

Podem afegir a l'arbre d'exploració dos fills del nus 1, el nus 3 i el nus 4.



Nusos oberts de l'arbre: nus 3, nus 4, nus 2. Triem per explorar qualsevol d'ells, per exemple el nus 3.

Mostrarem ara l'addició sobre la taula de la restricció $x_2 \leq 31$ i la reoptimització segons el símplex dual per tal de resoldre la relaxació:

$$\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in F_3 \end{array}$$

1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
0	0	0	1	4/10	−1	0	−20	0	9
1	0	0	0	1/5	0	0	−1	0	27
0	1	0	0	−4/30	1/3	0	8/3	0	94/3
0	0	0	0	−1/5	0	1	1	0	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
0	1	0	0	0	0	0	0	1	31
0	0	0	0	1/15	1/3	0	8/3	0	184/3

(87)

Ho passem a la forma canònica per comprobar la infactibilitat primal:

1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
0	0	0	1	4/10	−1	0	−20	0	9
1	0	0	0	1/5	0	0	−1	0	27
0	1	0	0	−4/30	1/3	0	8/3	0	94/3
0	0	0	0	−1/5	0	1	1	0	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	4/30	−1/3	0	−8/3	1	−1/3
0	0	0	0	1/15	1/3	0	8/3	0	184/3

$Surt\ s_7\ \Rightarrow$

$\Rightarrow Max\ \{\ \dfrac{8/3}{-8/3}\ ,\ \dfrac{1/3}{-1/3}\ \}\ =\ -1$

$Empat:\ es\ pot\ fer\ entrar\ s_4\ o\ s_6$

(88)

1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
0	0	0	1	0	0	0	−12	−3	10
1	0	0	0	1/5	0	0	−1	0	27
0	1	0	0	0	0	0	0	1	31
0	0	0	0	−1/5	0	1	1	0	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	−4/10	1	0	8	−3	1
0	0	0	0	1/5	0	0	0	1	61

$Soluci\acute{o}\ factible\ primal$
$i\,factible\ dual\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ optim\ de\ la\ relaxaci\acute{o}$ (89)

Atenció: al resoldre una relaxació lineal pot passar que el valor de la funció objectiu sigui enter mentre que les components bàsiques de la solució no. En aquest cas, si $\lceil z_\ell^* \rceil = z_\ell^* \geq z_0$ llavors haurem de marcar el nus com de no posterior exploració i examinar l'existencia d'óptims alternatius enters. (penseu que, en cas d'existir un òptim enter alternatiu del nus, un óptim del problema pot ser el corresponent al nus)

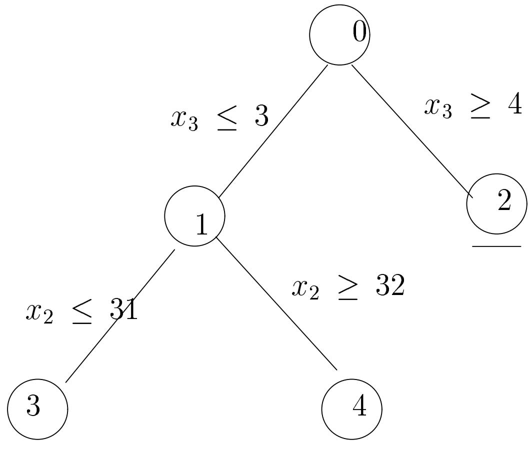
Al solucionar el nus 3 aquest dona solució entera tal i com mostra la taula. La funció objectiu del nus 3, $z_3^* = -61$. Actualitzem per primera vegada l'incumbent z_0 amb el valor enter trobat: $z_0 = -61$. Es marca el nus per no ramificarlo ni explorar-lo posteriorment (fathoming). Els nusos que queden oberts per continuar explorant són el 2 i el 4.

Triem el nus 2. Després de resoldre'l la seva solució resulta ser:

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) = (26,\ \frac{91}{3}\ , 4, 0, 0, 11, 4, 0,\ \frac{2}{3}\ )$$

$$\lceil z_2^* \rceil = \lceil -181/3 \rceil = -60 > z_0 = -61$$

Per tant qualsevol solució entera continguda dins la regió factible del nus 2 donarà encara un valor de la funció objectiu encara superior, per lo que no cal continuar explorant els fills del nus 2 i el marquem per no explorar-lo més.



L'únic nus que queda per explorar és el nus 4. La solució del problema corresponent:

$$\begin{array}{rl} Min & c^\top x \\ & x \in F_4 \end{array}$$

és:

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) = (26, 32, 3, 7, 5, 0, 4, 0, 0)$$

$$z_4^* = -61 = z_0 = -61$$

Marquem el nus 4 per no explorar-lo posteriorment. En aquest punt el número de nusos oberts dins de l'arbre és zero. Per tant les solucions enteres del problema són:

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5) = (26, 32, 3, 7, 5, 0, 4) \;\; (\textit{trobada al nus } 4)$$

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5) = (27, 31, 3, 10, 0, 1, 3) \;\; (\textit{trobada al nus } 3)$$

Ambdues amb valor de la funció objectiu = -61.

3.15 Exercici 15 (PLE)

Forma revisada:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 \end{pmatrix},\ x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 44 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{7} \\ \frac{208}{7} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = B^{-\top}c_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{7} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{90}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-5}{7} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix} \geq 0 \tag{91}$$

Nova restricció $x_2 \leq 6$, o equivalentment, $x_2 + x_5 = 6$. Es considera la base $I_{\tilde{B}} = \{2, 4, 5\}$.

$$\tilde{B}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \hline \frac{-1}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{92}$$

$$\tilde{\lambda} = \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \frac{-5}{7} \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right), \quad \tilde{\rho} = \rho = \left(\begin{array}{c} \frac{23}{7} \\ \hline \frac{5}{7} \end{array}\right) \tag{93}$$

$$x_{\tilde{B}} = \left(\begin{array}{c} x_B \\ \hline \xi \end{array}\right) = \tilde{B}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ \hline \frac{-1}{7} & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 44 \\ 36 \\ 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \frac{44}{7} \\ \frac{208}{7} \\ \hline \frac{-2}{7} \leftarrow \end{array}\right)$$

Infactibilidad primal. Elements $y_{p,j}$ corresponents a la tercera component de la base

$$Y = \tilde{B}^{-1}\tilde{N} = \tilde{B}^{-1}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_3) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \hline \frac{-1}{7} & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{57}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

$$Max \left\{ \begin{array}{cc} \frac{23/7}{-6/7} & \frac{5/7}{-1/7} \end{array} \right\} = -\frac{23}{6};\ Surt\ 5 \Rightarrow Entra\ 1 \tag{94}$$

Forma tabular:

$$Y = B^{-1}N = B^{-1}(a_1, a_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{57}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix},\ z_0 = -\frac{220}{7}$$

1	2	3	4	5	
6/7	1	1/7	0	0	44/7
57/7	0	−1/7	1	0	208/7
0	1	0	0	1	6
23/7	0	5/7	0	0	220/7

⇒

1	2	3	4	5	
6/7	1	1/7	0	0	44/7
57/7	0	−1/7	1	0	208/7
−6/7	0	−1/7	0	1	−2/7 ←
23/7	0	5/7	0	0	220/7

$$Max \left\{ \frac{23/7}{-6/7} \quad \frac{5/7}{-1/7} \right\} = -\frac{23}{6} \; ; \; Surt\ 5 \Rightarrow Entra\ 1$$

1	2	3	4	5	
0	1	0	0	1	6
0	0	$-3/2$	1	$19/2$	$189/7$
1	0	$1/6$	0	$-7/6$	$1/3$ ←
0	0	$7/42$	0	$23/6$	$91/3$

Base òptima $I_B = \{2, 4, 1\}$.