Ingeniería de Informática. **MDIO 1. Examen Parcial. Noviembre del 2000**

P1) Una empresa de servicios informáticos debe decidir para los siguientes 4 años el tipo y la cantidad de proyectos que debe desarrollar. Para cada uno de los 5 tipos posibles de proyectos en los que la empresa puede competir conoce el beneficio esperado por proyecto y la inversión necesaria en equipo y licencias de software que debe efectuar para poder desarrollarlos. Si quiere desarrollar proyectos del tipo 1 o el tipo 2 debe comprar un conjunto de licencias de software de bases de datos valoradas en 60.000 ϵ y ya dispone del hardware necesario. Si quiere desarrollar proyectos de los restantes tipos 3, 4, 5 requerirá adquirir hardware específico para cada tipo de proyecto. Para los de tipo 3 la inversión ascenderá a 30.000ϵ. Para los de tipo 4 la inversión ascenderá a 25.000 ϵ y para los de tipo 5 la inversión será de 40.000ϵ.

La empresa no desea ampliar su plantilla y para el desarrollo de todos los proyectos dispone de 200.000 horas de programador y de 60.000 horas de analista. La siguiente tabla muestra los recursos necesarios en miles de horas de analista y de programador para cada proyecto según el tipo de éste, así como el beneficio por proyecto en miles de ϵ:

	1	2	3	4	5
h.analista	1	1	4	1	3
h.programador	10	5	6	4	6
beneficio	50	50	40	60	50

Si x_i es el número (entero) de proyectos de tipo i que desarrollará la empresa ($i = 1, 2, \ldots 5$), establecer un problema de programación lineal entera que maximize el beneficio total = beneficios por proyectos - inversiones, en este horizonte de cuatro años y mediante el cual se determine cuántos y qué tipo de proyectos deben lanzarse.

P2) Supongamos que la empresa del problema anterior puede recibir subvenciones que cubran los gastos de inversión en hardware y licencias de software y supongamos que esta empresa excluye a priori los proyectos de tipo 5. Admitiendo soluciones no enteras:

1. Cuántos proyectos de los tipos 1, 2, 3, 4 debe emprender la empresa y cuáles no deben emprenderse. Cuántas horas de analista y de programador quedarán libres ?. Cuál será el beneficio de la empresa ?
2. Formular el problema dual correspondiente al del apartado anterior. Cuál es el valor de las variables duales para la base óptima obtenida en el apartado anterior?. Y para la base $I_B = \{1, 2\}$?
3. Ha resultado adecuada la decisión de excluir los proyectos de tipo 5 ? (Sugerencia: añadir la columna correspondiente a los proyectos de tipo 5 a la tabla óptima obtenida en el apartado anterior e intentar hallar en esta nueva situación el beneficio óptimo.)
4. Finalmente y por cuestiones estratégicas los proyectos del tipo 5 deben ser excluidos. Por otra parte la administración decide mantener la subvención siempre y cuando el número total de proyectos sea superior o igual 60. Es posible satisfacer el hecho de mantener un número de proyectos $\geq$ 60 ? (Sugerencia: a) ampliar la tabla óptima encontrada en el apartado 1 con una nueva restricción y aplicar el algoritmo del símplex dual o alternativamente b) utilizar el método de variables artificiales para el problema formulado con la nueva restricción)

SOLUCIONES

P1 Variables x_i = cantidad de recursos de proyectos de tipo i. $i = 1,2,3,4,5.$:

Limitaciones por recursos:

$$\begin{array}{lllllll} R1 & x_1 + & x_2 & 4x_3 + & x_4 + & 3x_5 & \leq 60 \\ R2 & 10x_1 + & 5x_2 + & 6x_3 + & 4x_4 + & 6x_5 & \leq 200 \\ R3 & x_i \geq 0, & x_i \in Z, & & i = 1,2,3,4,5. & & \end{array}$$

$\Omega = \{ x \in R^n \,|\, x$ verifica R1, R2, R3 $\}$

Variables δ_i, $i = 1,2,3,4,5.$:

$$\delta_i = \begin{cases} = 1 & \text{Se emprenden proyectos tipo } i \\ = 0 & \text{No se emprenden proyectos tipo } i \end{cases}$$

Variables δ_{DB}:

$$\delta_{DB} = \begin{cases} = 1 & \text{Se compra la licencia de B.D.} \\ = 0 & \text{No se compra la licencia de B.D.} \end{cases}$$

Condiciones:

- Si se va a emprender algún proyecto de tipo i, entonces $\delta_i = 1$:

$$\begin{array}{c} x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i \geq 1 \\ -x_i \geq 0 \quad \text{ó} \quad \delta_i - 1 \geq 0 \quad \text{ó los dos} \end{array}$$

$$-\bar{x}_i = Min_{\,x \in \Omega} \; -x_i = \begin{cases} -20 \\ -40 \\ -Min\left\{ \dfrac{60}{4} \,,\, \dfrac{200}{6} \right\} = -15 \\ -50 \\ -20 \end{cases} \quad , \; i = 1,2,3,4,5.$$

$$\left.\begin{array}{r} -x_i \geq (-\bar{x}_i)\alpha_i \\ (\delta_i - 1) \geq (-1)(1-\alpha_i) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x_i \leq \bar{x}_i\alpha_i \\ \delta_i \geq \alpha_i \end{array}\right\} \Rightarrow x_i \leq \bar{x}_i\delta_i, \quad \alpha_i \in \{0,1\}, \; i = 1,2,3,4,5$$

- Sea la variable $\delta_{12} \triangleq \delta_1 + \delta_2$:

$$\delta_{12} > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{BD} \geq 1$$

$$-\delta_{12} \geq 0 \quad \text{ó} \quad \delta_{BD} - 1 \geq 0, \quad \text{o los dos.}$$

$Min\,(-\delta_{12}) = -2$, $Min\,\delta_{BD} - 1 = -1$

$$\left.\begin{array}{r} -\delta_{12} \geq (-2)\alpha \\ (\delta_{BD} - 1) \geq (-1)(1-\alpha) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \delta_{12} \leq 2\alpha \\ \delta_{BD} \geq \alpha \end{array}\right\} \rightarrow \delta_{12} \leq 2\delta_{BD}$$

Finalmente:

$$\delta_1 + \delta_2 \leq 2\delta_{BD}$$

Modelo final:

$$
\begin{array}{lllllll}
Max_{\ (x,\delta_{DB},\delta)} & 50x_1+ & 50x_2+ & 40x_3+ & 60x_4+ & 50x_5 & - \\
 & & & -60\delta_{BD} & -30\delta_3 & -25\delta_4 & -40\delta_5 \\
s.a: & x_1+ & x_2 & 4x_3+ & x_4+ & 3x_5 & \leq 60 \\
 & 10x_1+ & 5x_2+ & 6x_3+ & 4x_4+ & 6x_5 & \leq 200 \\
 & \delta_1+\delta_2 & \leq 2\delta_{DB} & & & & \\
 & x_1 \leq & 2\delta_1 & & & & \\
 & x_2 \leq & 20\delta_2 & & & & \\
 & x_3 \leq & 40\delta_3 & & & & \\
 & x_4 \leq & 15\delta_4 & & & & \\
 & x_5 \leq & 20\delta_5 & & & & \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_i \geq 0,\quad x_i \in Z,\quad \delta_i \in \{0,1\},\quad i = 1,2,3,4,5.\quad \delta_{DB} \in \{0,1\}}
\end{array}
$$

P2

1. x_5, x_6 variables de holgura en este problema:

1	2	3	4	5	6	0
1	1	4	1	1	0	60
10	5	6	4	0	1	200
-5	-5	-4	-6	0	0	0

Se utilizará el símplex primal. Entra x_4, sale x_6:

1	2	3	4	5	6	0
$-6/4$	$-1/4$	$5/2$	0	1	$-1/4$	10
$10/4$	$5/4$	$3/2$	1	0	$1/4$	50
10	$10/4$	5	0	0	$6/4$	300

Únicamente deben emprenderse proyectos tipo 4. Sobran 10000 horas de analista y 0 horas de programador.

2.

$$
\begin{array}{llllllll}
Max_{\ (x)} & 50x_1+ & 50x_2+ & 40x_3+ & 60x_4+ & & & \\
s.a: & x_1+ & x_2 & 4x_3+ & x_4+ & x_5 & & = 60 \\
 & 10x_1+ & 5x_2+ & 6x_3+ & 4x_4+ & & x_6 & = 200 \\
(P) & x_i \geq 0, & & & & & & i = 1,2,3,4,5,6
\end{array}
$$

Problema dual de (P):

$$
\begin{array}{llll}
Max_{\ \lambda} & 60\lambda_1 & +200\lambda_2 & \\
s.a: & \lambda_1+ & 10\lambda_2 & \leq -5 \\
 & \lambda_1+ & 5\lambda_2 & \leq -5 \\
 & 4\lambda_1+ & 6\lambda_2 & \leq -4 \\
 & \lambda_1+ & 4\lambda_2 & \leq -6 \\
 & \lambda_1 & & \leq 0 \\
 & & \lambda_2 & \leq 0
\end{array}
$$

Variables duales para la base óptima del problema anterior: $I_B^* = \{5,4\}$ $\lambda = (0, -6/4)$. Basta sólo fijarse en la fila de costes reducidos de la tabla óptima.

Puede calcularse también mediante:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = B^{-\top} c_B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

3. Se introduce una nueva variable x_7(cantidad de proyectos de tipo 5) y se comprueba si para la tabla óptima obtenida en el apartado 1 tendrá coste reducido negativo:

$$r_7 = c_7 - a_7^\top \lambda = -50 - (3,6)(0,-15) = 40$$

   Por lo tanto no resultaría rentable emprender proyectos de tipo 5.

4.

1	2	3	4	5	6	7	0
-1	-1	-1	-1	0	0	1	-60
$-6/4$	$-1/4$	$5/2$	0	1	-1	0	10
$10/4$	$5/4$	$3/2$	1	0	$1/4$	0	50
10	$10/4$	5	0	0	$6/4$	0	300

Se utilizará el símplex dual: Sale x_7, Entra x_4:

1	2	3	4	5	6	7	0
1	1	1	1	0	0	-1	60
$-6/4$	$-1/4$	$5/2$	0	1	-1	0	10
$3/2$	$1/4$	$1/2$	0	0	$1/4$	1	-10
10	$10/4$	5	0	0	$6/4$	0	300

Dual no acotado: problema primal infactible. Al añadir la nueva restricción el problema se torna infactible. No es posible satisfacer la exigencia de la administración.