Aula 11

2024-11-14

Exemplo de exercício da prova

Encontre a derivada para $x^2 - 3$ usando a definição de limite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h} \end{aligned}$$

Definições

Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor máximo absoluto em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c) \text{ para qualquer } x \text{ em } D$$

e um valor mínimo absoluto em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c) \text{ para qualquer } x \text{ em } D$$

- **Mínimo absoluto**: O menor valor de f. Também é um mínimo local
- **Máximo local**: Não há na vizinhança valor de f maior que este
- **Máximo absoluto**: O maior valor de f. Também é um máximo local
- **Mínimo local**: Não há na vizinhança
- **Mínimo local**: Não há na vizinhança valor de f menor que este

Se uma função f possui valores máximo ou mínimo locais em um ponto c interior de seu domínio e se f existe em c então:

$$f'(c) = 0$$

Um ponto de uma função f onde $f' = 0$ ou f' não existe é um ponto crítico de f'.

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2, 1]$.

Solução:

A função é derivável em todo o seu domínio, portanto o único ponto crítico é aquele em que $f'(x) = 2x = 0$, ou seja, em $x = 0$. Precisamos verificar os valores da função em $x = 0$ e nas extremidades $x = -2$ e $x = 1$.

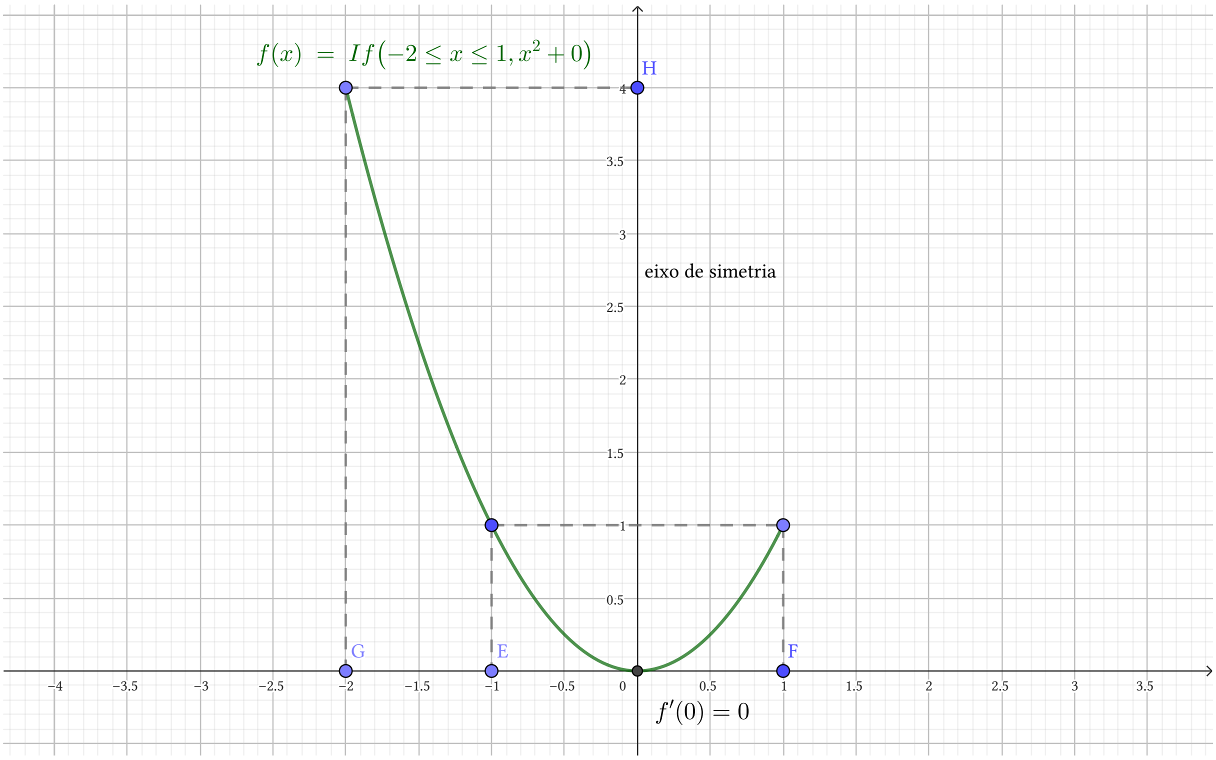
$$\text{Valor do ponto crítico: } f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Valor nas extremidades: } & f(-2) = 4 \\ & f(1) = 1 \end{aligned}$$

A função apresenta um valor máximo absoluto de 4 em $x = -2$ e um mínimo absoluto de 0 em $x = 0$.

1

$$f(x) = x^2 + 0 \quad ; \quad D = [-2, 1]$$



$f'(x) = 0 \longrightarrow$ buscar os pontos críticos

$$f'(x) = (x^2)' \qquad = 2x = 0x = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

Pontos Críticos

1º) $x = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f(0) = 0^2 = 0 \longrightarrow$ mínimo absoluto

2º) $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^2 = 4 \longrightarrow$ máximo absoluto

3º) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 = 1$

2

$$y = 10x \cdot (2 - \ln x) \;\; ; \;\; D = [1, e^2]$$

$$y' = 10 \cdot (2 - \ln x) + 10x \cdot \left(0 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 10 \cdot (2 - \ln x) + 10\cancel{x} - \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= 10 \cdot (2 - \ln x) - 10$$

$$= 10 \cdot (2 - \ln x - 1)$$

$$= 10 \cdot (1 - \ln x) = 0$$

$$= 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Pontos críticos

1º) $x = e \Rightarrow f(e) = 10e(2 - \ln e) = 10e(2 - 1) = 10e$

2º) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 10 \cdot 1(2 - \ln 1) = 10 \cdot 2 = 20$

3º) $x = e^2 \Rightarrow f(e^2) = 10e^2(2 - \ln e^2)$

$$\begin{aligned} &= 10e^2 \cdot (2 - 2\ln e) \\ &= 10 \cdot e^2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{2}{3}} \\ f'(x) &= \frac{2}{3}x^{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} \\ &= \frac{2}{3}x \\ &= \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \longrightarrow \text{ponto crítico}$$

Pontos Críticos

1º) $x = 0 \Rightarrow f(0) = \sqrt[3]{0^2} = \sqrt[3]{0} = 0 \longrightarrow$ mínimo

2º) $x = -2 \Rightarrow f(-2) = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4} \cong 1,59$

3º) $x = 3 \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \cong 2,08 \longrightarrow$ máximo

4

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$4 - x^2 = 0? \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]' = \left[(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2} - 1 = \frac{2}{2}} \cdot (-\cancel{2}x) = x \cdot (4 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Ponto crítico

$$f'(x) = \frac{x}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{4 - 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$