Aula 3

2024-09-12

Função Quadrática ou Função do 2º Grau

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função do tipo $y = f(x)$, com $y = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

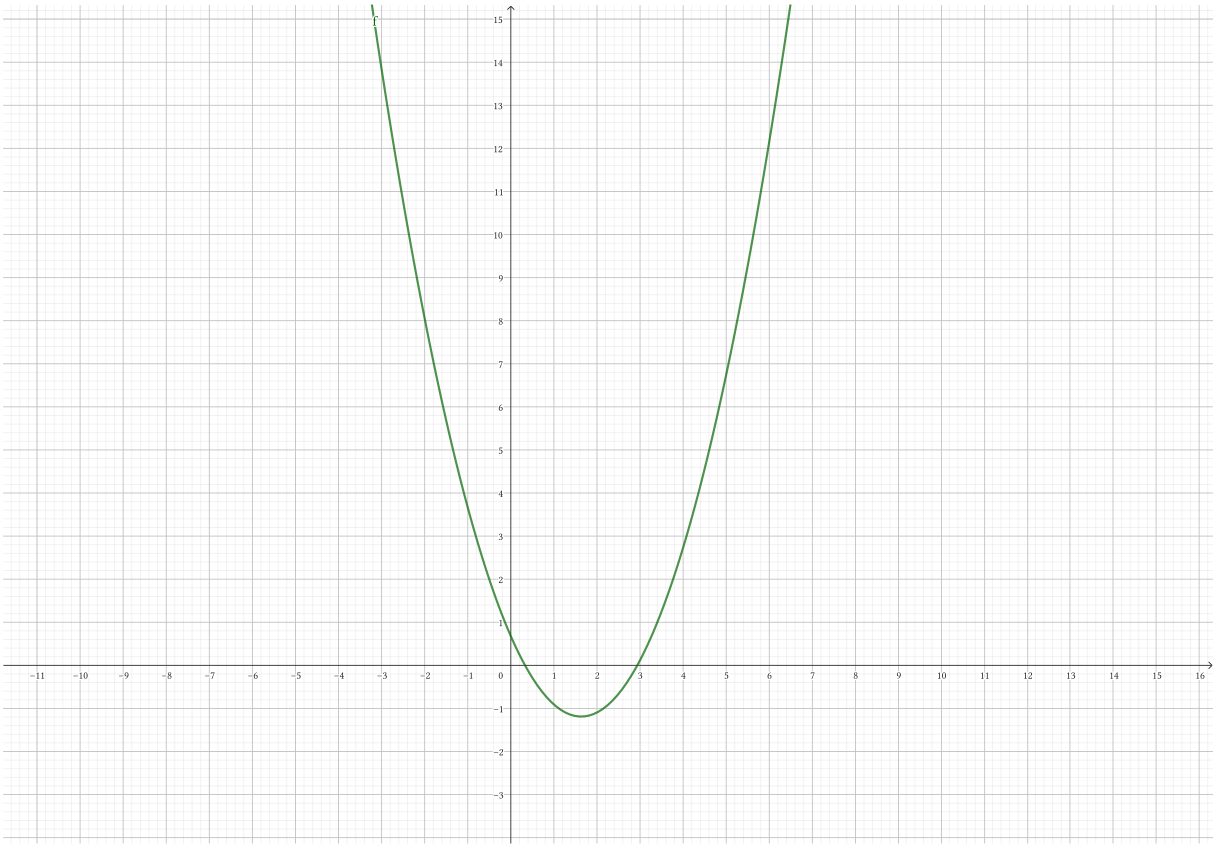
A representação gráfica da função do 2º grau é uma **parábola**, onde:

- $a > 0$ indica que a concavidade está voltada para cima ($\bigcup$)
- $a < 0$ indica que a concavidade está voltada para baixo ($\bigcap$)

Principais pontos da parábola

1º ponto de corte no eixo y (x$= 0$)

$P_1(0, c)$



$$y = ax^2 + bx + c$$
$$y = a0^2 + b0 + c$$
$$y = c$$

O ponto C sempre irá indicar a altura.

2º ponto de corte no eixo x ($y = 0$)

$y = ax^2 + bx + c = 0$

Para determinar a eficiência de pontos, calculamos o delta ou discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ temos 2 raízes reais
- Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ temos 2 raízes reais e iguais
- Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ não temos soluções reais

Se $\Delta \geq 0$, então teremos raízes que podem ser determinadas pela **fórmula de Bháskara**,

$$x = b \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou pelo **método da soma e do produto** (Relações de Girard), ou seja,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Exemplos de aplicação da soma e produto

1º Exemplo

$$y = x^2 - 6x + 8$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$P_2(2, 0)$$
$$P_3(4, 0)$$

2º Exemplo

$$y = x^2 - 12x + 20$$
$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{20}{1} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

$$P_2(2, 0)$$
$$P_3(10, 0)$$

3º Exemplo

$$y = x^2 - 7x = 10$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$P_2(2, 0)$$
$$P_3(5, 0)$$

4º Exemplo

$$y = x^2 - x + 12$$
$$-x^2 - x + 12 = 0$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-1)}{-1} = -1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{-1} = -12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$
$$P_2(3, 0)$$
$$P_3(-4, 0)$$

5º Exemplo

$$y = x^2 + 9x + 18$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -9 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$
$$P_2(-3, 0)$$
$$P_3(-6, 0)$$

6º Exemplo

$$y = x^2 + 4x + 4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$
$$P_2(-2, 0) = P_3(-2, 0)$$

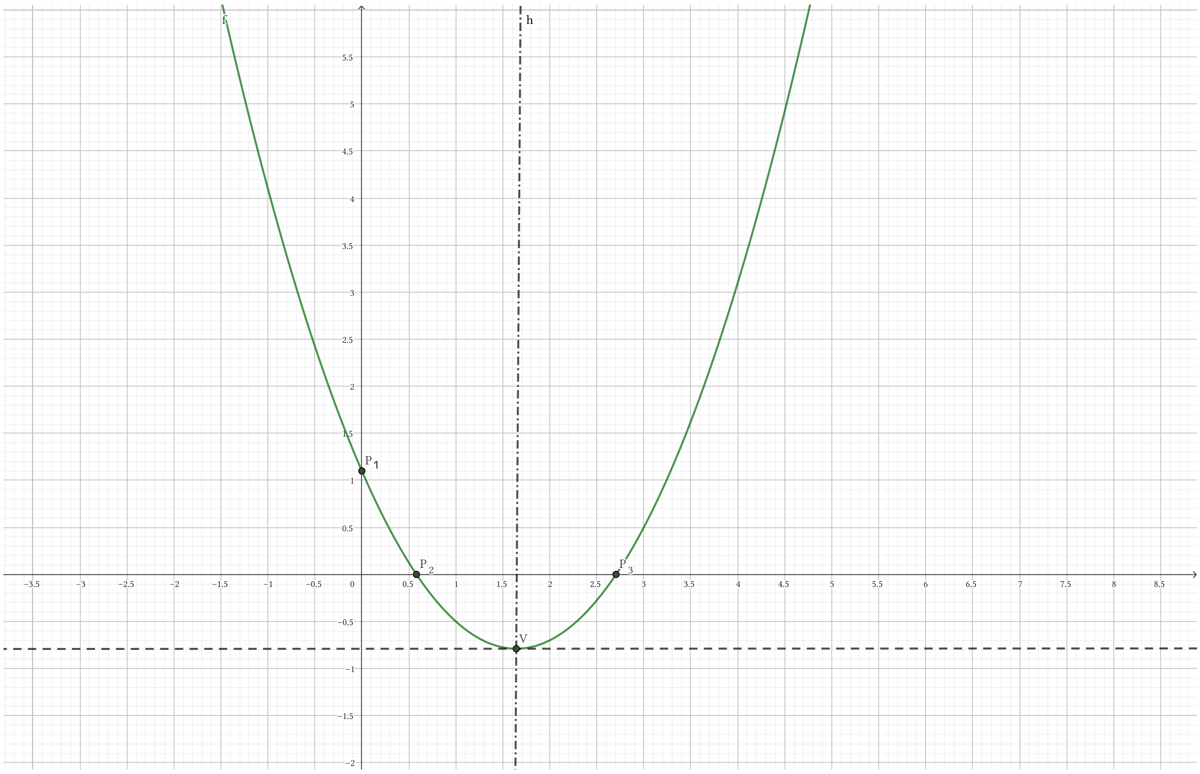
7º Exemplo

$$y = -2x^2 - 6x + 80$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{-2} = -3 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{80}{-2} = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$
$$P_2(5, 0)$$
$$P_3(8, 0)$$

3º Ponto de Inflexão (Vértice)

Indica o ponto de máximo ou de mínimo da função. Por ele passa o eixo de simetria da função.

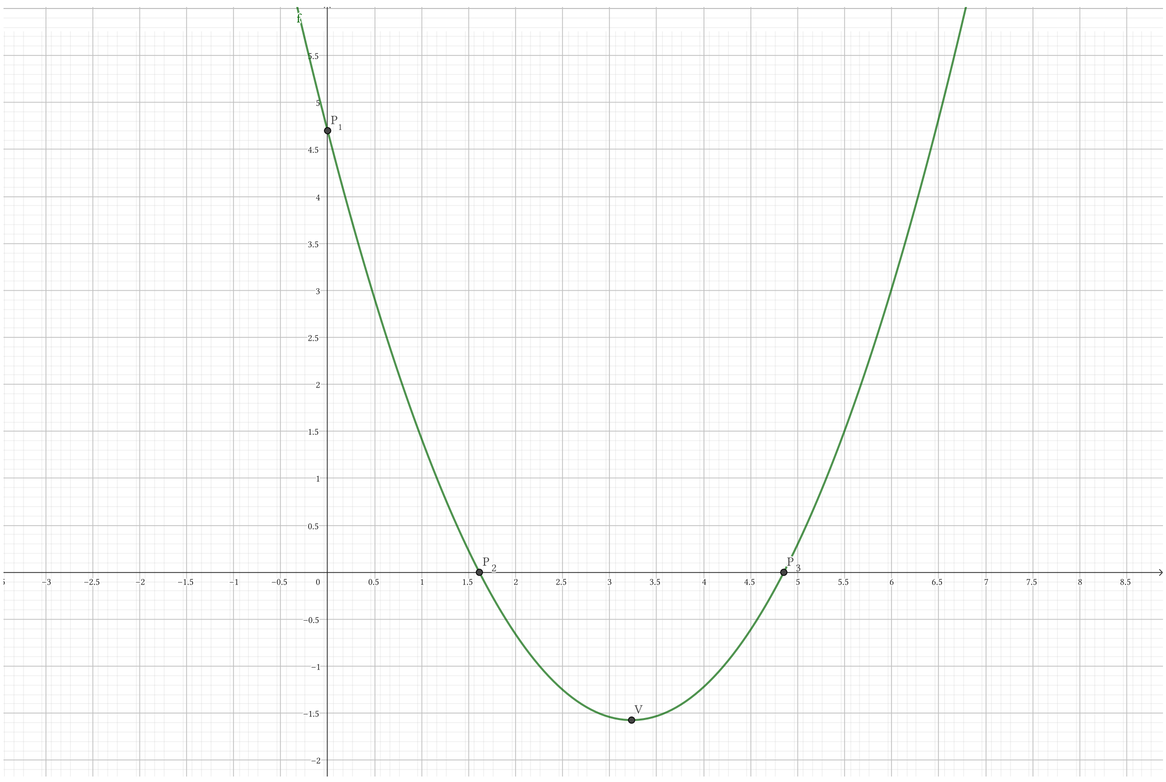
$$x_v = \frac{-b}{2a} \ ; \ y = \frac{-\Delta}{4a}$$



Esboços gráficos

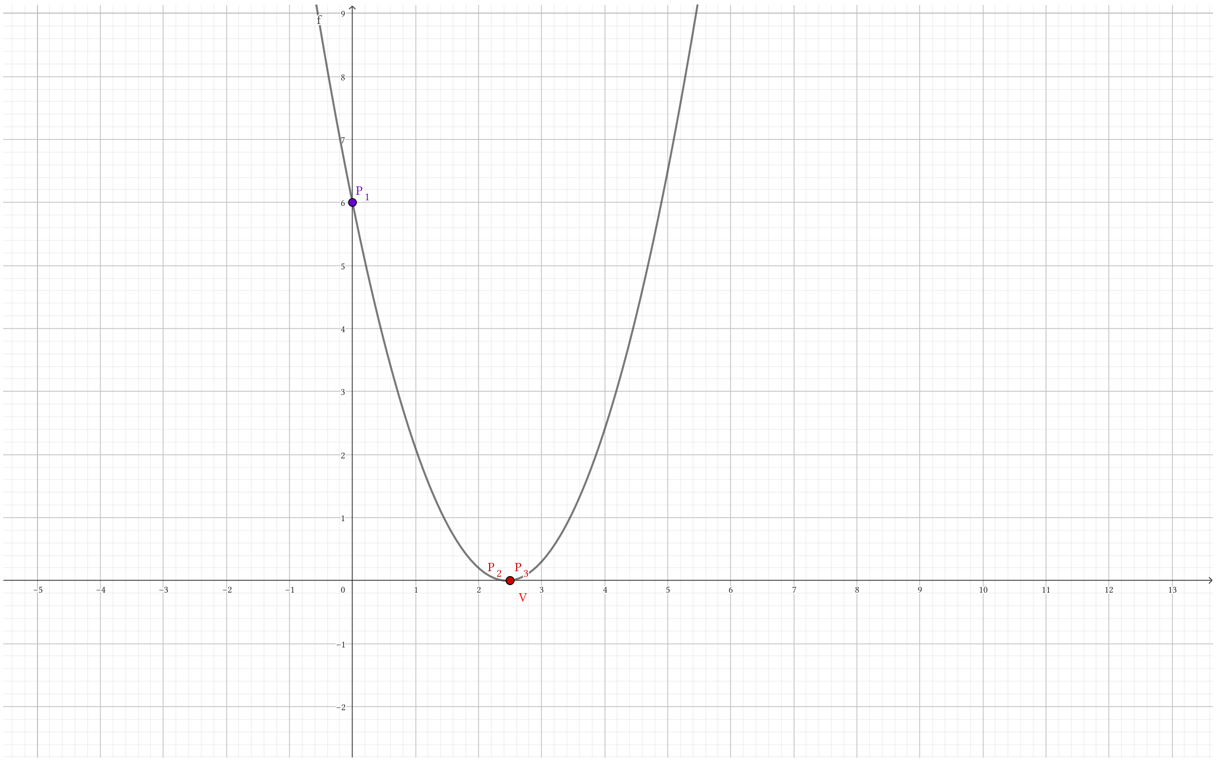
1º Esboço

$$a > 0$$
$$\Delta > 0$$



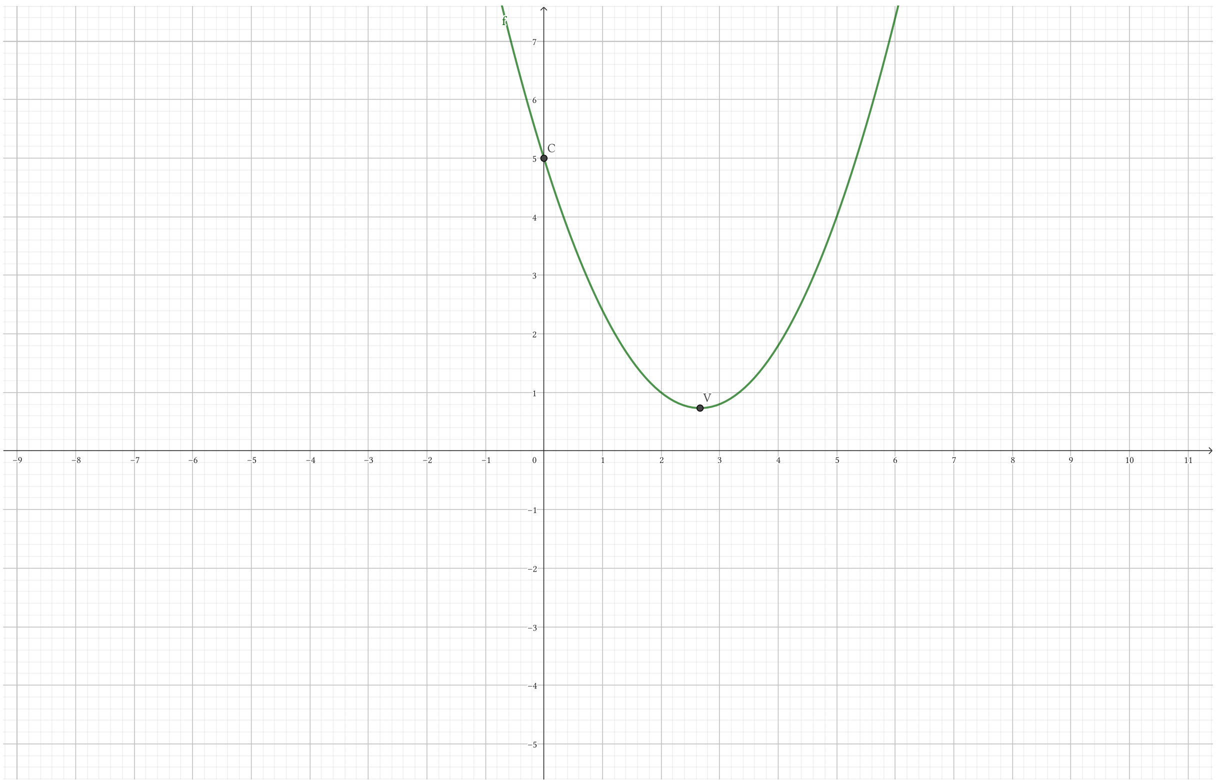
2º Esboço

$$a > 0$$
$$\Delta = 0$$



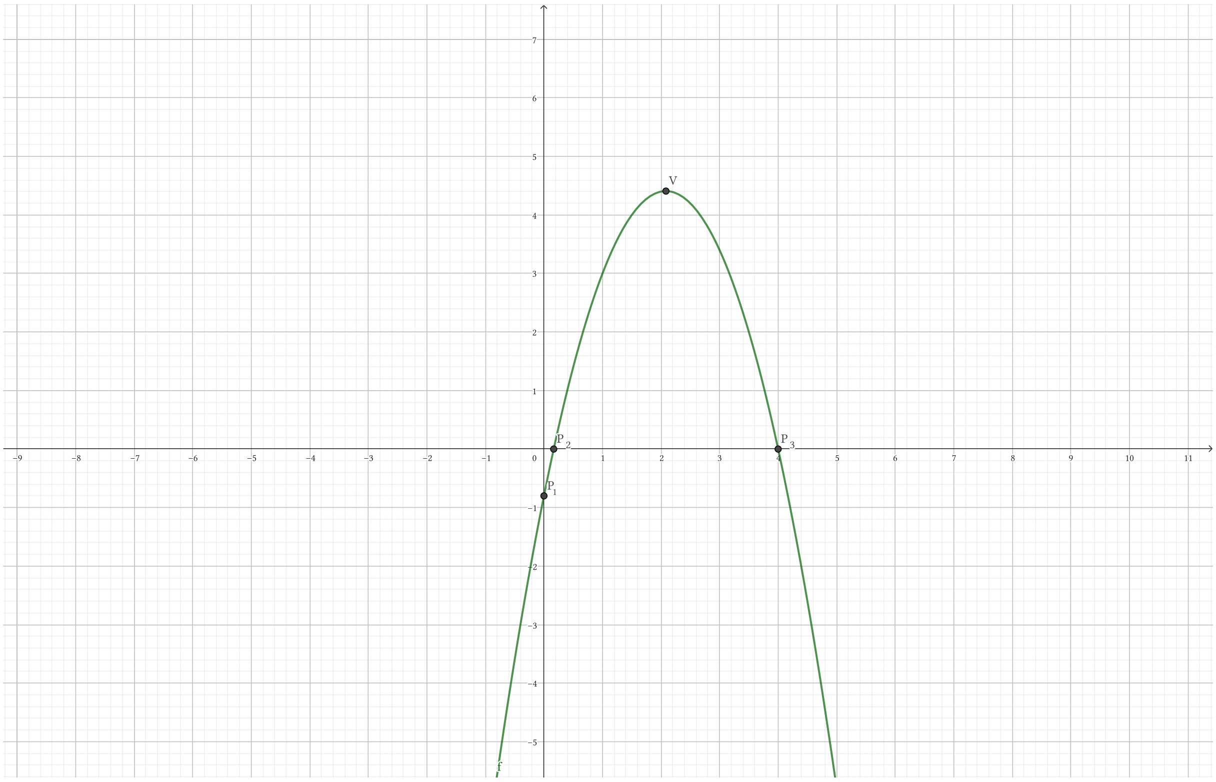
3º Esboço

$$a > 0$$
$$\Delta < 0$$



4º Esboço

$$a < 0$$
$$\Delta > 0$$



Exemplo

1º Exemplo

Representa graficamente a função $y = 1x^2 - 5x + 6$

1º Ponto de corte em y (x=0)

$P_1(0, 6)$

$a = 1 > 0 \Rightarrow \bigcup$

2º Ponto de corte em x (raízes em $y = 0$)

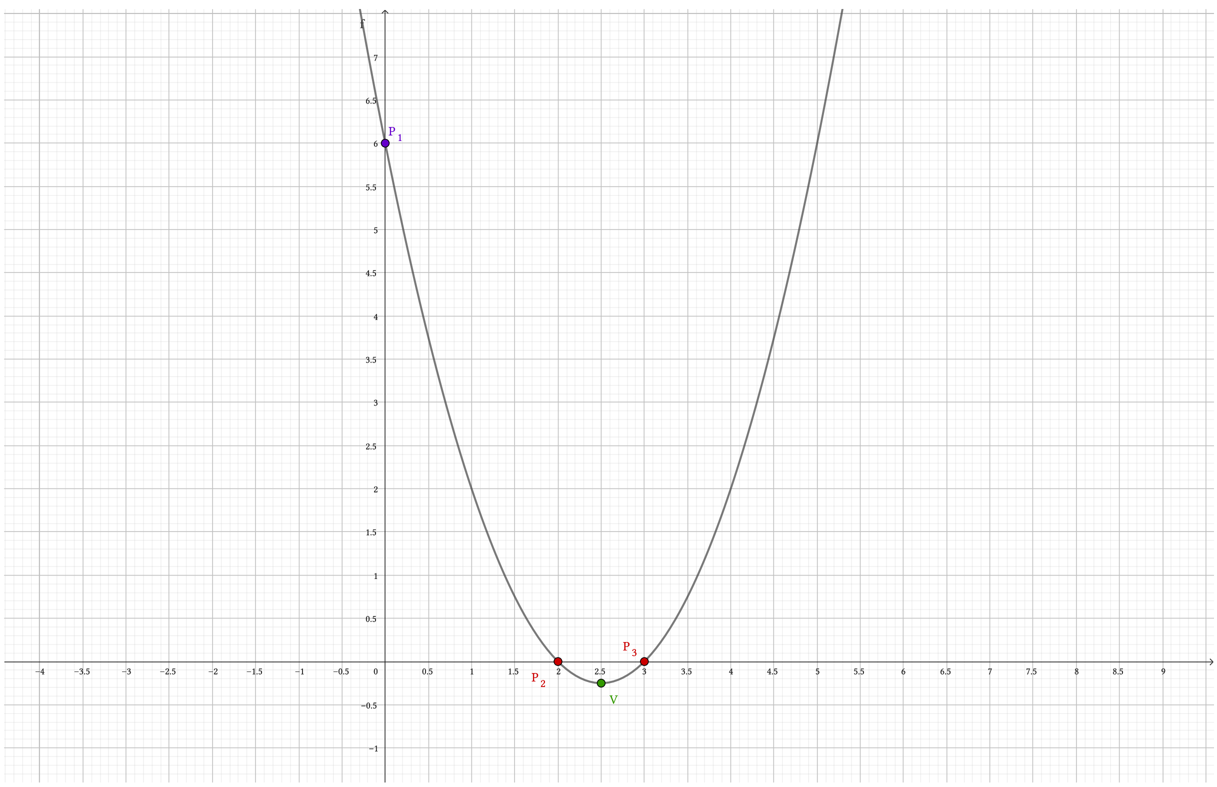
$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \\ &= 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & P_2(2, 0) \\ x_2 = 3 & P_3(3, 0) \end{cases}$$

3º Vértice

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{4,1} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

$$V(2,5; -0,25)$$


f
P 1
P 2
P 3
V