Aula 10

2024-11-07

Funções Compostas

Compor funções é outra forma de operar combinando diferentes funções.

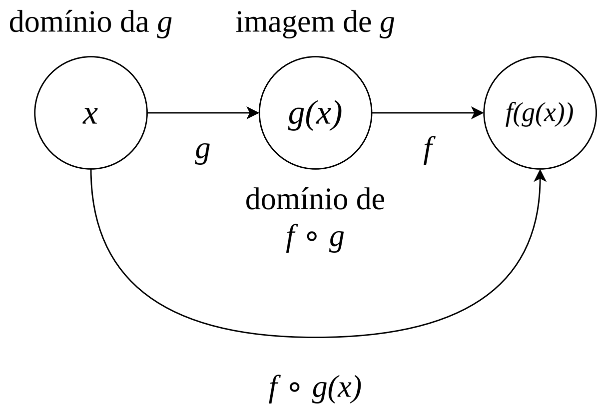
Definição: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções, a composta $f \circ g(x)$ (Lê-se “f composta com g”) é também escrita como

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

O domínio da função $f \circ g$ consiste nos números reais x que são do domínio de g e que garantem a existência da f.

Em outras palavras, podemos dizer que a imagem da g será o domínio da função f.

$$x \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(g(x))$$



Exemplo 1

Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 1$, determine:

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$, $D = [-1, +\infty[$

b) $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$, $D = [0, +\infty[$

c) $g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$

d) $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$

Exemplo 2

Sejam $f(x) = x^2 + 2x - 2$ e $g(x) = \sin x$, determine

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2 + 2 \cdot \sin x - 2 = \sin^2 x + 2 \sin x - 2$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x - 2) = \sin(x^2 + 2x - 2)$

c) $f \circ f(x) = f(x^2 + 2x - 2) = \left(x^2 + 2x - 2\right)^2 + 2(x^2 + 2x - 2) - 2$

d) $g \circ g(x) = g(\sin x) = \sin(\sin x)$

Regra da Cadeia

Agora que viramos especialistas em funções compostas, podem partir para a derivação dessas funções.

Exemplo 1

$$y = \frac{5x}{4} = \frac{1}{4}(5x) \to y' = \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{4}$$

$$u = 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 5 \\ &= \frac{5}{4} \text{ QED} \end{aligned}$$

Exemplo 2

Um objeto se desloca ao longo do eixo x, de modo que a sua posição em qualquer instante de tempo $t \geq 0$ é dada por $s(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determine a velocidade em função do tempo.

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} \Rightarrow v' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$S(t) = \cos(t^2) + 1) \Rightarrow S(u) = \cos u$$

$$\frac{dS}{du} = -\sin u$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

Aplicando-se a Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \underbrace{v}_{\substack{\text{velocidade} \\ \text{instantânea}}} &= \frac{ds}{dt} = s' = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\sin u \cdot 2t \\ &= -2t \cdot \sin u \\ &= -2t \cdot \sin \underbrace{(t^2 + 1)}_{\substack{\text{argumento} \\ \text{permanece} \\ \text{inalterado}}} \end{aligned}$$

$$a(t) = v'(t)$$

Definição Formal

Sejam f e g funções diferenciáveis, se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, então a função composta $f \circ g(x) = f(g(x))$ é derivável e sua derivada é:

$$[f \circ g(x)]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Usando-se a notação de Leibniz, temos $y = f(u)$ e $u = u(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$