Aula 9
2024-10-31

Regras de Derivação
A seguir, são apresentadas algumas regras gerais, obtidas sempre a partir da definição usando o limite. São elas:

1ª

$$f(x) = k; k \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{df(x)}{dx} = 0$$

- $f'(x) \to$ linha dex
- $\frac{df(x)}{dx} \to$ derivada da f em relação a x

2ª

$$f(x) = x, \text{ então}$$

$$f'(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{df(x)}{dx} = 1$$

3ª

$$f(x) = x^n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{então} \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \text{ou}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ g'(x) &= 2x^{2-1} \\ &= 2x \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$h(x) = x^{-7}, \text{ então}$$

$$h'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$$

4ª

$$h(x) = f(x) \pm g(x), \text{ então}$$

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

5ª

$$f(x) = \sin x, \text{ então}$$

$$f'(x) = \cos x$$

6ª

$$f(x) = \cos x, \text{ então}$$
$$f'(x) = -\sin x$$

7ª

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \text{ então } f'(x) = \sec^2 x$$

Lembrando que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

8ª

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \text{ então } \quad f'(x) = \csc^2 x$$
$$\text{onde} \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

9ª

$$f(x) = \sec x, \text{ então } \quad f'(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$$

10ª

$$f(x) = \csc x, \text{ então}$$
$$f'(x) = -\csc x \cdot \operatorname{ctg} x \quad ; \; \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

11ª

$$f(x) = e^x, \text{ então } \quad f'(x) = e^x$$

e = número de Euler

12ª

$$f(x) = a^x, \text{ então}$$
$$f'(x) = a^x \cdot lna$$

13ª

$$f(x) = lnx, \text{ então}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

14ª

$$f(x) = \log_a^x, \text{ então}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot lna$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos x = u \cdot v \\
u &= e^x \Rightarrow u' = e^x \\
v &= \cos x \Rightarrow v' = -\sin x \\
(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
&= e^x \cos x + e^x \cdot (-\sin x) \\
&= e^x \cdot (\cos x - \sin x)
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^4 \cdot lnx = u \cdot v \Rightarrow \\
u &= x^4 \Rightarrow u' = 4x^{4-1} = 4x^3 \\
v &= lnx \Rightarrow v' = \frac{1}{x} \\
(u \cdot v)' &= u'v + u.v' \\
&= 4x^3 \cdot lnx + x^4 \cdot \frac{1}{x} \\
&= 4x^3 \cdot lnx + x^3 \\
&= x^3 \cdot (4lnx + 1)
\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$h(x) = \sin(2x) = \underbrace{2\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} = u.v$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = c \cdot f(x) \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \\ f'(x) = cf'(x) \end{array}\right\} \text{regra}$$

$$\begin{aligned}
u &= 2\sin x \Rightarrow u'2 \cdot \cos x \\
v &= \cos x \Rightarrow v' = -\sin x \\
(u \cdot v)' &= u'v + u \cdot v' \qquad (\cos x)^2 \\
&= 2\cos x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \\
&= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x \\
&= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= 2\cos(2x)
\end{aligned}$$

$$* \quad \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$* \quad \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Exemplo 4

$$m(x)\underbrace{\operatorname{ctg} x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} = \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} \cdot \cancel{\sin x} = \cos x$$

$$u = \operatorname{ctg} x \Rightarrow u' = -\csc^2 x$$

$$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$$

$$\begin{aligned} m(x) &= u \cdot v \\ '(x) = (u \cdot v)' &= u'v + u \cdot v' \\ &= -\csc^2 x \cdot \sin x + \operatorname{ctg} x \cdot \cos x \\ &= -\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 \cdot \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x \\ &= -\frac{1}{\sin^{\cancel{2}} x} \cdot \cancel{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \\ &= \frac{-1}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \\ &= \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x} \\ &= \frac{-\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}} = -\sin x \end{aligned}$$

Regra do Quociente

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que se definem uma função quociente $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$.

Para derivar funções desse tipo usamos a seguinte regra:

$$q'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Usando como variáveis auxiliares $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2} \quad ; \quad v \neq 0$$

Exemplo 1

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

Usando a Regra do Quociente

$$
\begin{aligned}
u = 1 &\Rightarrow u' = 0 \\
u = 1 \cdot x^0 &\Rightarrow u' = 1 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0 \\
v = x^2 &\Rightarrow v' = 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2} \\
&= \frac{0 \cdot \cancel{x^2}^{0} - 1 \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} \\
&= \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x^4}^{3}} \\
&= \frac{-2}{x^3}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$
\begin{aligned}
u = \sin x &\Rightarrow u' = \cos x \\
v = \cos x &\Rightarrow v' = -\sin x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v} \Rightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \\
&= (\sec x)^2 \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}
$$

Resolução da Lista

Exercício 1

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 3 \\
y' &= -2x + 0 = -2x \\
y'' = (-2x)' = -2 \cdot (x)' &= -2 \cdot 1 = -2
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{y''}_{y \text{ 2 linhas}} \equiv \frac{d^2 f}{\underbrace{dx^2}_{\substack{\text{derivada segunda} \\ \text{de } f \text{ em relação} \\ \text{a } x}}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$