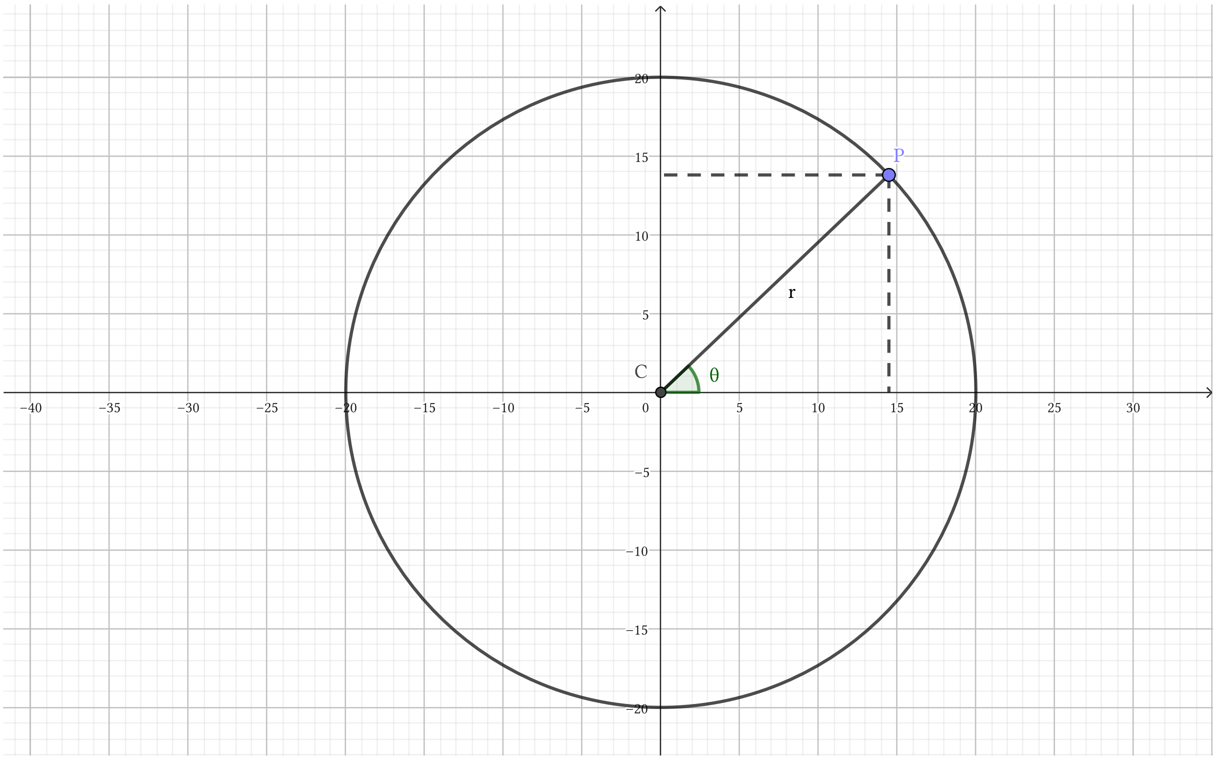
Aula 5

2024-09-26

Ciclo Trigonométrico

- Circunferência (linha): $C = 2\pi r$ (unidades de comprimento)
- Círculo (área): $A_0 = \pi r^2$ (unidades de área)

Seja uma circunferência com centro na origem. Para cada ponto P da circunferência existe um ângulo θ associado a essa posição. Vejamos como é a representação no plano cartesiano.



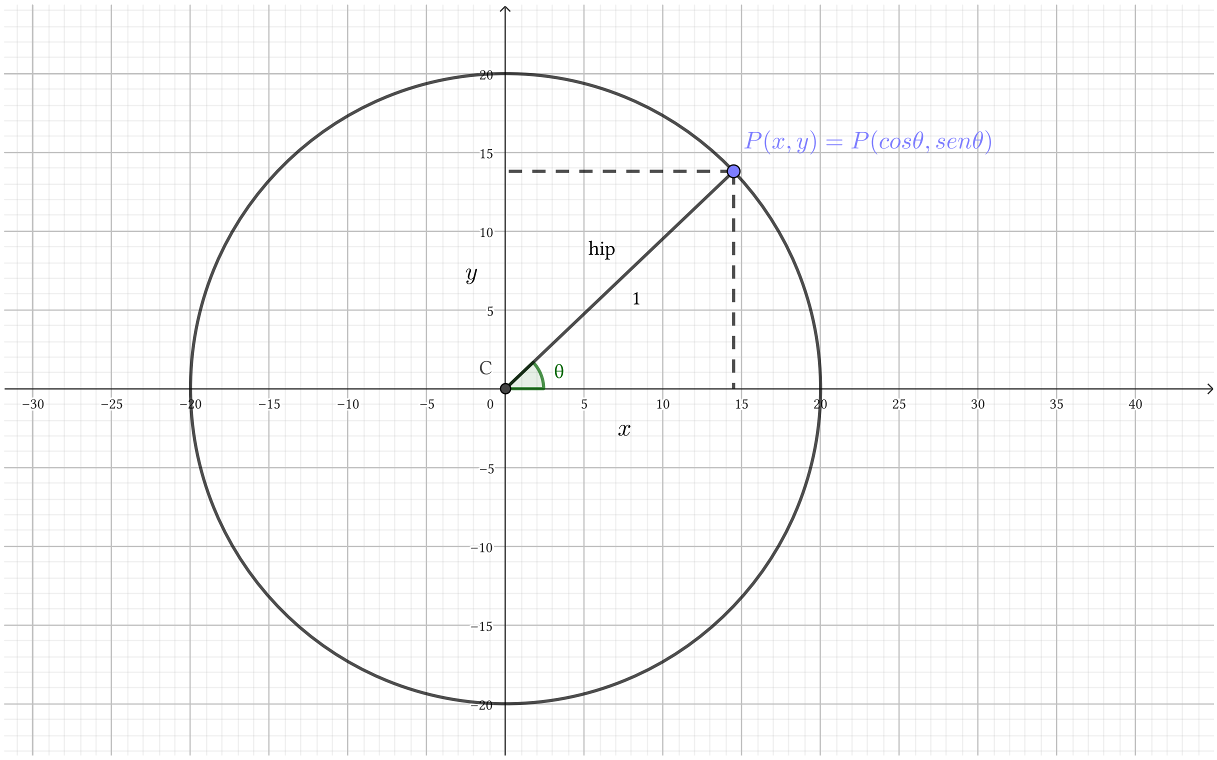
Uma volta completa é igual a 2π rad. Logo, cada quadrante de um círculo cujo centro está em $C(0, 0)$ será equivalente a $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$C = 2\pi r \cong 2 \cdot 3.,14r = 6,28r$$

Isso significa que, em toda circunferência, cabem $6,28$ raios, formando o comprimento total.

Um radiano é o comprimento ao longo da circunferência equivalente a um raio.

$$\begin{aligned} 0° &\equiv 0 \text{ rad} \equiv 2\pi \text{ rad} \\ 90° &\equiv \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ \pi \text{ rad} &\equiv 180° \\ 270° &\equiv \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\text{co}}{\text{hip}} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\theta$$

Tabela de seno, cosseno e tangente

$\theta(°)$	$\theta(\text{rad})$	y $\sin\theta$	x $\cos\theta$	$\text{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Não existe $\nexists$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$

Para $\theta = 30°$:

$$\begin{aligned} h^2 &= c_1^2 + c_2^2 \\ 1^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 \\ 1 &= \frac{1}{4} + x^2 \\ 1 &= -\frac{1}{4} \\ x^2 &= 1\frac{-1}{4} \\ x^2 &= \frac{3}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Para $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad:

Será formado pelo conjunto de dois triângulos com ângulos de $45°$ um triângulo com um ângulo de $90d°$, onde se poderá obter a diagonal pelo teorema de Pitágoras:

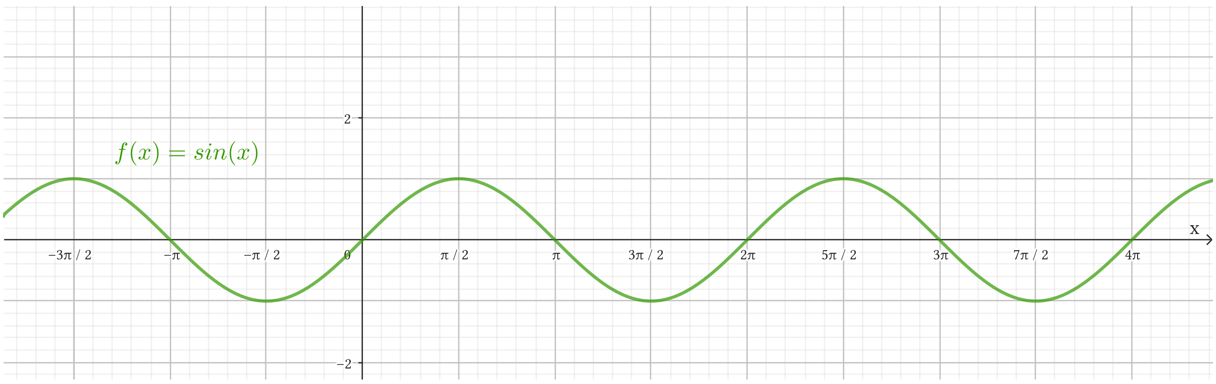
$$\begin{aligned} d^2 &= l^2 + l^2 \\ d^2 &= 2l^2 \\ d &= \sqrt{2l^2} \\ d &= l\sqrt{2} \end{aligned}$$

Funções Trigonométricas

Função Seno

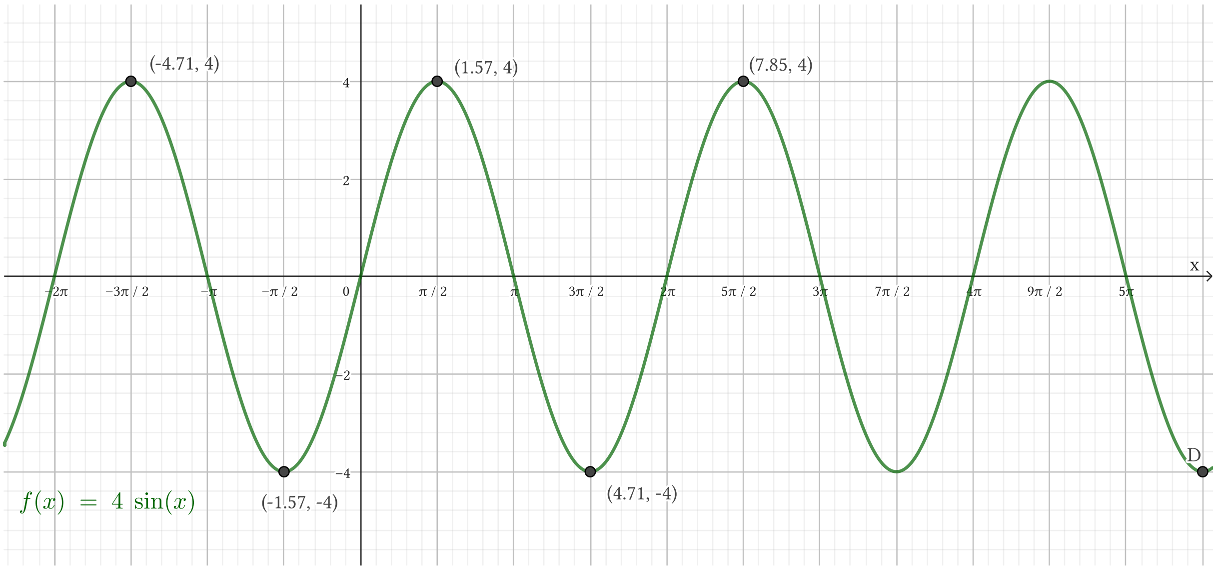
Seja $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, uma função $y = f(x)$ tal que $y = \sin(x)$. Vamos construir o gráfico da função com base no ciclo trigonométrico.

Note que, neste caso, x faz o papel do ângulo ou do argumento.



Exemplo 1

$y = 4\sin(x)$



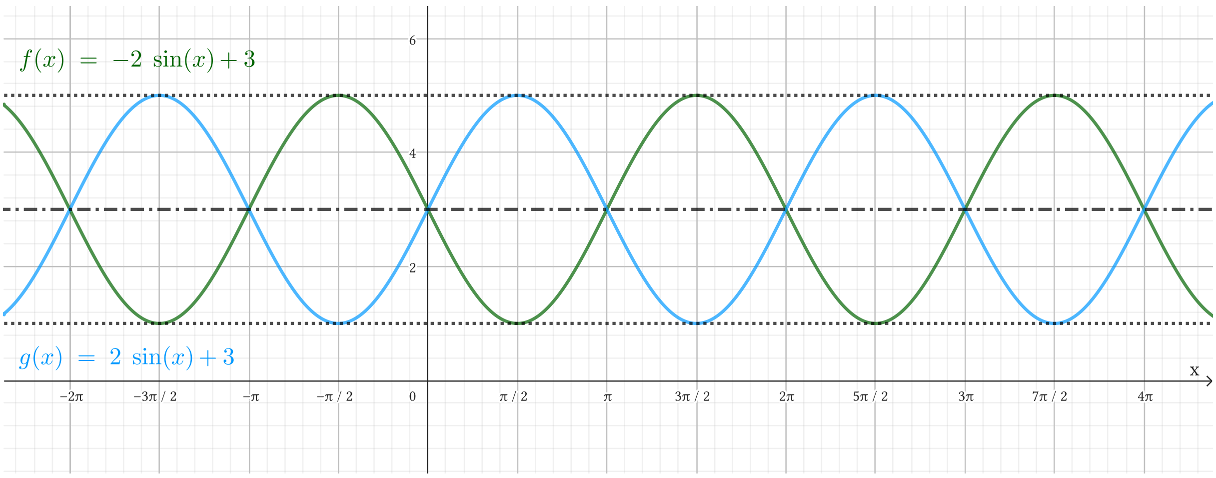
O período da função P é quanto a função leva para repetir seu comportamento após atravessar seu ponto máximo e mínimo e voltar ao valor inicial. Para este exemplo, $P = 2\pi$.

A amplitude A é quanto a função muda em relação ao seus pontos extremos e pode ser obtida por $A = \frac{\max - \min}{2}$ ou olhando para o termo que multiplica $\sin x$. Para este exemplo, $A = \frac{4 - -4}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Exemplo 2

$y = -2\sin x + 3$

$$\begin{aligned} I &= [-1, 1] \times (-2) \\ & \quad [-2, 2] + 3 \text{ (sempre o menor à esquerda)} \\ I_* &= [1, 5] \end{aligned}$$

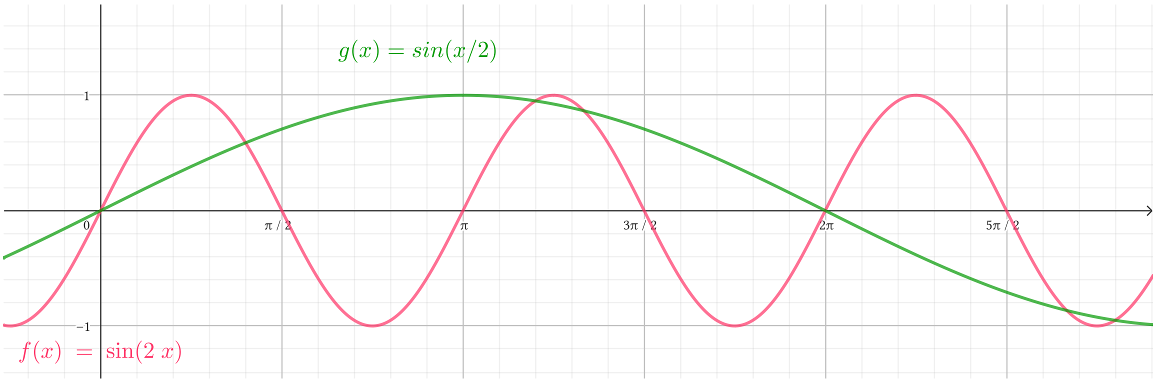


Exemplo 3

$y = \sin(2x)$

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$P = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



Quando um valor multiplica x, isso altera a velocidade da função.

Alterando a frequência

Antes de visualizarmos um caso concreto, vamos entender como é a representação geral da função seno.

$$y = A \cdot \sin(bx + c) + d$$

$$\begin{aligned} A &= \text{amplitude} \\ d &= \text{deslocamento vertical} \\ b &= \text{altera a frequência} \end{aligned}$$

$$f = \frac{1}{p}\ ;\ p = \frac{2\pi}{|b|}$$

Função cosseno

Seja $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ uma função $y = f(x)$, com $y = \cos(x)$. A representação gráfica é dada abaixo.