Aula 4

2024-09-19

Função Exponencial

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função do tipo $y = f(x)$, com $y = a \cdot b^{x+c} + d$, onde a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Note que

$\Rightarrow$ b é chamado de **base**

$\Rightarrow$ O valor $x + c$, neste caso, é chamado de expoente.

"A base é um valor fixo e o expoente é variável."

Quando $b > 1$, a função é crescente.

A base da função exponencial determina o comportamento da função. Se $f(x) = a^x$, então $a > 0$ e $a \neq 1$.

$\Rightarrow$ Se $a > 1$, então a função f é **crescente**

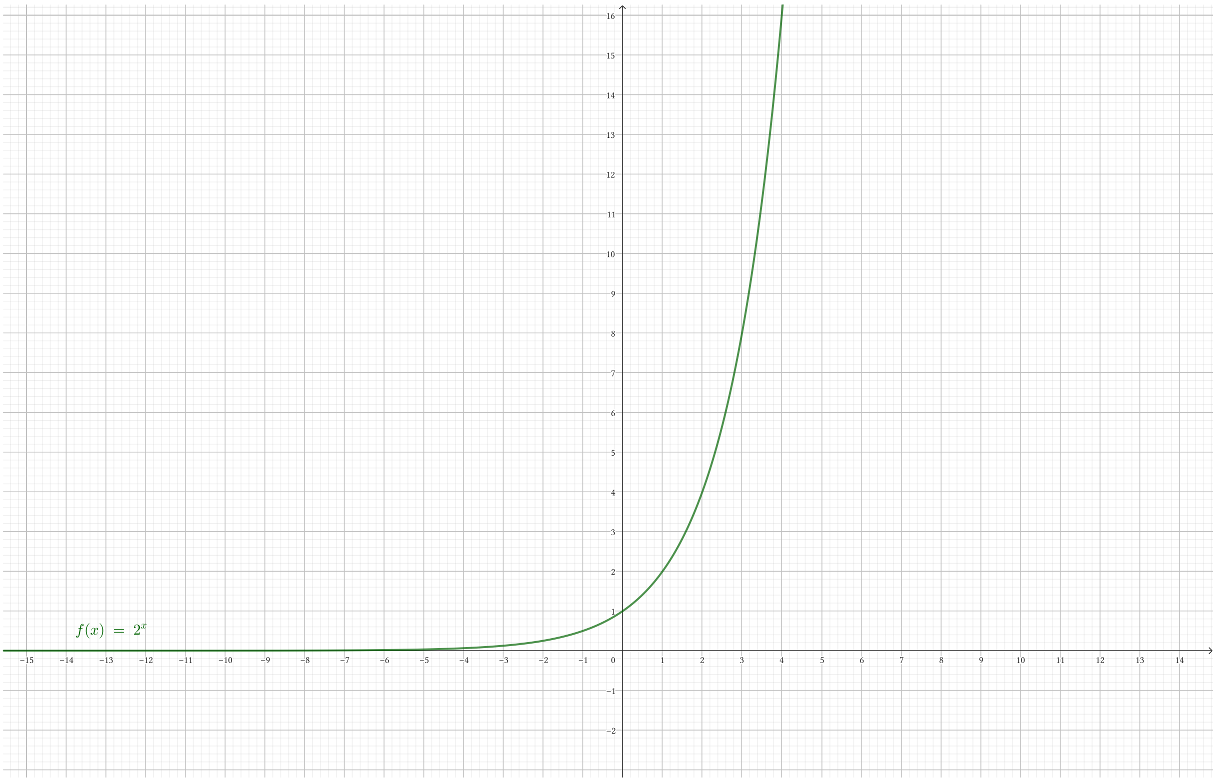
$\Rightarrow$ Se $0 < a < 1$, então a função f é **decrescente**

Por exemplo, $f(x) = 4^x + 5 \Rightarrow f$ é crescente. Já $g(x) = 2^{-2x} + 4 \Rightarrow g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 4 \Rightarrow$ g é decrescente. Em $g(x)$, a base (2) a princípio parece ser maior que 1, mas, pelo expoente negativo, este não é o caso.

Exemplo 1

$y = 2^x$

x	$y - 2^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$



$$D = \mathbb{R}$$
$$I = \mathbb{R}^*_+$$

Exemplo 2

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^{+3} = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Função Logarítmica

Antes de iniciar o estudo da função vamos entender algumas propriedades do **logaritmo**.

O logaritmo retorna o expoente ao qual uma base está sendo elevada.

Exemplos

Exemplo 1

Neste exemplo, a base é 2, o logaritmando é 4 e o logaritmo é x. Ou seja, busca-se saber o logaritmo de 4 na base 2.

$$\begin{aligned} \log_2^4 = x \Leftrightarrow 2^x &= 4 \\ \cancel{2}^x &= \cancel{2}^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\log_2^4 = 2$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} \log_3^{81} = x \Leftrightarrow 3^x &= 81 \\ \cancel{3}^x &= \cancel{3}^4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\log_5 \frac{1}{625} = x \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{625}$$

$$5^x = \frac{1}{5^4} \Rightarrow \cancel{5}^x = \cancel{5}^{-4} \Rightarrow x = -4$$

Propriedades do logaritmo

Se a é a base do logaritmo, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, então:

1) $\log_a^1 = x \Leftrightarrow \cancel{a}^x = 1 = \cancel{a}^0 \Rightarrow x = 0 \therefore \log_a^1 = 0$

2) $\log_a^a = x \Leftrightarrow \cancel{a}^x = \cancel{a}^1 \Rightarrow x = 1 \therefore \log_a^a = 1$

3) $\log_a^{b \cdot c} = \log_a^b + \log_a^c$

4) $\log_a^{\left(\frac{b}{c}\right)} = \log_a^b - \log_a^c$

5) $\log_a^{b^n} = n \cdot \log_a^b$

Exercício

Considerando que $\log_a^b = 0,5$ e $\log_a^c = -2$, resolva:

$$\begin{aligned}
&\log_a \frac{a^3 \cdot b^5 \cdot c^4}{\sqrt{a} \cdot b^3 \cdot c^2} = \log_a \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^{\frac{1}{2}}} \\
&= \log_a(a^3 \cdot b^2 \cdot c^2) - \log_a a^{\frac{1}{2}} \\
&= \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a c^2 - \log_a a^{\frac{1}{2}} \\
&= 3\log_a a + 2\log_a b + 2\log_a c - \frac{1}{2}\log_a a \\
&= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot (-2) - \frac{1}{2} \cdot 1 \\
&= 3 + 1 - 4 - \frac{1}{2} \\
&= \cancel{3 + 1} \cancel{-4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Função logarítmica

Sobre a função logarítmica, saemos que se $y = f(x)$, com y = $\log_a x$, $a \in \mathbb{R}$ é a base e deve obedecer às seguintes condições:

$a > 0$ e $a \neq 1$. NO caso da função logarítmica $D = \mathbb{R}_+^*$ e $I = \mathbb{R}$.

Exemplos

Exemplo 1

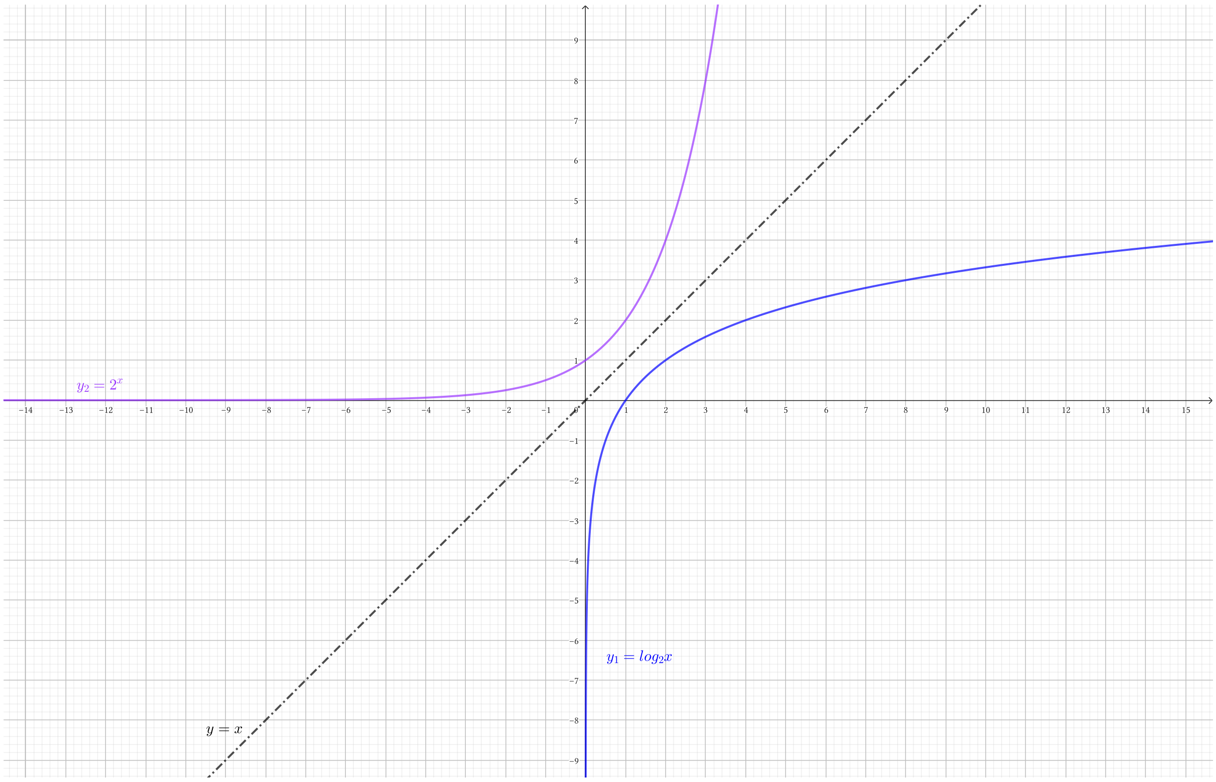
$y = \log_2 x$

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$

1	0
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$

Exemplo 2

Gráfico de $y_1 = \log_2 x$ e $y_2 = 2x$



Resolução do exercício 1 da lista de aplicação

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$N(28) = \frac{1}{2} \cdot N_0$$

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$N(28) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{28}{T}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{28}{T}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{28}{T}} \Rightarrow 1 = \frac{28}{T} = T = 28$$

Portanto, a regra fica como

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$$

$$t = ?\ \ N(t) = \frac{1}{4} N_0 \ (25\% \text{ de } N_0)$$

$$\frac{1}{4} \cdot \cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}^2 = \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{t}{28}}$$

$$a = \frac{t}{28}$$

$$t = 28 \cdot 2$$

$$t = 56 \text{ anos}$$