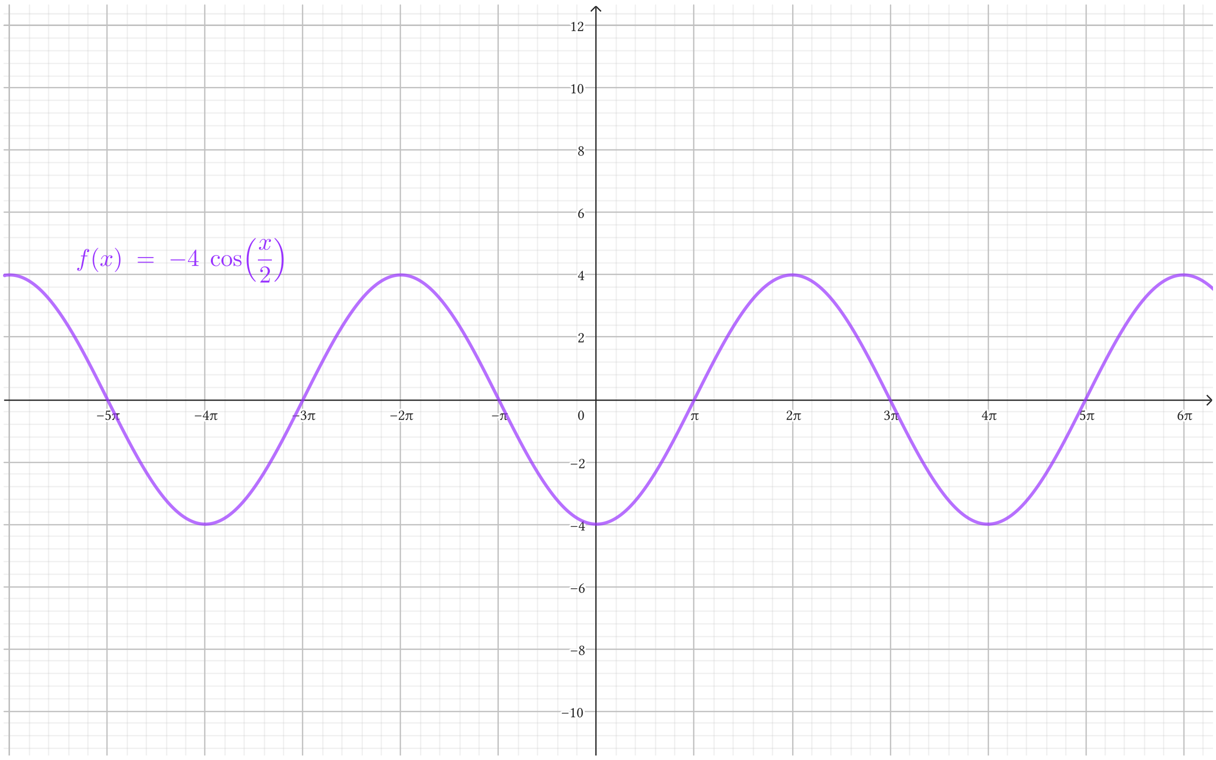
Aula 6

2024-10-03

Função Cosseno (continuação)

Exemplo: $y = -4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; $A = |-4| = 4$



Período:

$$P = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Para um x positivo ou negativo, o valor y correspondente em uma $f(x) = \cos(x)$ será o mesmo.

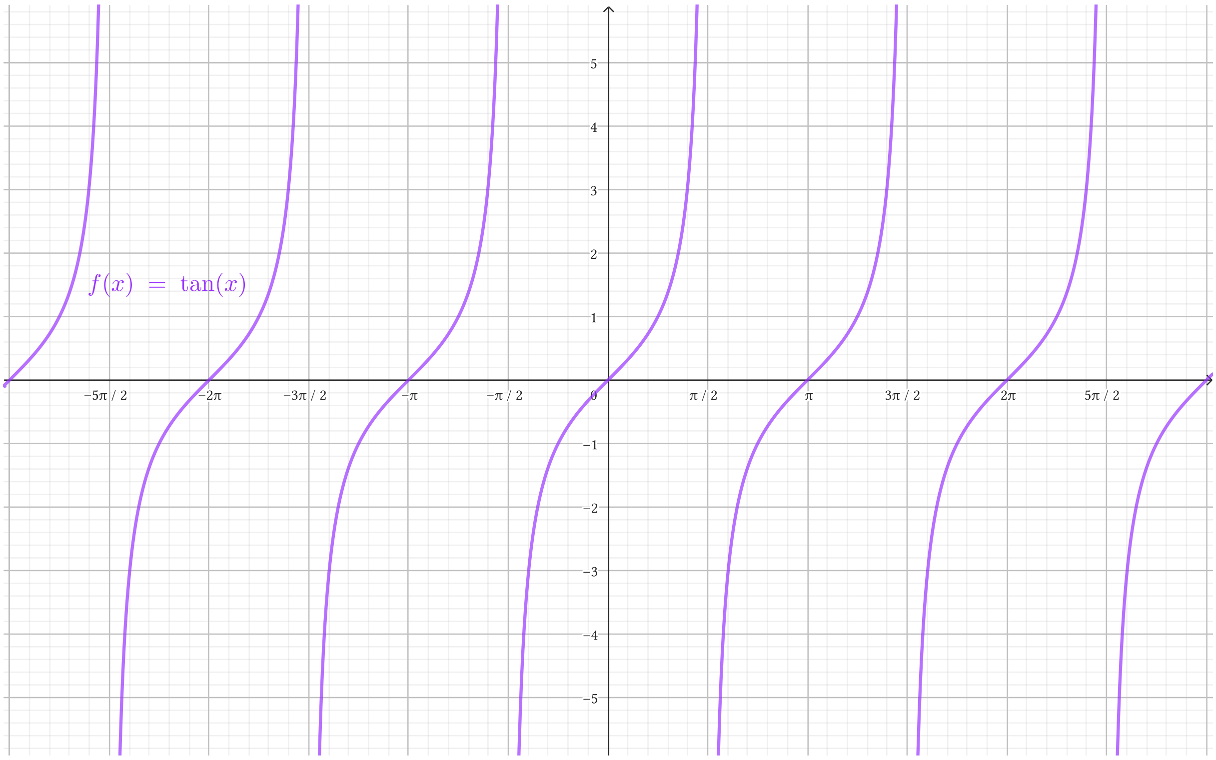
$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ (par)}$$
$$\sin(-x) = \sin(x) \text{ (ímpar)}$$

Função tangente

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função do tipo $y = f(x)$ com $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Note que temos a função $\cos(x)$ no divisor. Portanto, temos que

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$y = A \cdot \cos(bx + c) + d$$



Limite de uma função

Seja $f(x)$ uma função definida em um domínio $]a, b[$, onde a e b são os extremos do intervalo. Dizemos que esta função possui um limite se, ao nos aproximarmos de um determinado ponto $c \in]a, b[$, a imagem, ou seja, os valores $y = f(x)$ se aproximam de um valor $L \in \mathbb{R}$.

Notação:

$$\lim f(x) = L$$
$$x \to c$$

Dizer que uma função tem um limite significa dizer que, tanto pela direita quanto pela esquerda da função, os valores de y tendem, ou se aproximam de, um mesmo valor L.

Quando queremos dizer que estamos analisando a vizinhança de um ponto $c \in]a, b[$, temos que indicar usando a notação c^+, que significa "à direita de c".

No caso de a análise ser feita na vizinhança à esquerda de c, indicamos com c^-. Assim:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{é o limite à esquerda de } c$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \quad \text{é o limite à direita de } c$$

Note que os limites unilaterais precisam existir ou ser iguais para que o limite em um dado ponto exista.

$$\text{Se} \lim_{x \to c^-} f(x) = L \ \text{ e} \lim_{x \to c^+} f(x) = L,$$
$$\text{então} \lim_{x \to c} f(x) = L$$

Observação 1

As notações $+\infty$ e $-\infty$ não indicam valores numérios, mas sim sentidos dos números.

Observação 2

Se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, então o limite da função **não existe** ($\nexists$).

Exemplo 1:

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \text{tg}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \text{tg}(x)$

Exemplo 2:

$$\lim_{x \to 0} \cos x$$

$$\lim_{x \to 0^-} \cos x = 1 \land \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo 3

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq 0 \\ x^2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

$$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \therefore \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$