Aula 8

2024-10-24

Introdução à Derivada

Inicialmente, vamos considerar a derivada como o coeficiente angular da reta tangente a uma função em um ponto qualquer do domínio.

Interpretação Geométrica

Consideremos uma função $y = f(x)$, definida em um domínio $]a, b[$.

Sobre a função, marcamos dois pontos, a saber $P(x, f(x))$ e $Q(x + h, f(x + h))$.

Passando por P e Q existe uma única reta r secante à função.

O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m_\mu = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Note que h é um incremento, ou seja, uma distância considerada a partir da abscissa do primeiro ponto.

Conforme fazemos $P \to Q$, vamos obtendo outras retas secantes. Ao se aproximar usando a ideia de limite, temos $h \to 0$, ou seja, a reta tenderá à reta tangente à função $y = f(x)$ em um dado ponto do domínio. Com isso, conhecendo-se a função e um ponto x_0 do domínio, é possível determinar a equação dessa reta, dada por $y = mx + b$, onde m e $b \in \mathbb{R}$.

Note que o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

O coeficiente angular da tangente é definido comoa derivada da função em um dado ponto x_0 da tangência.

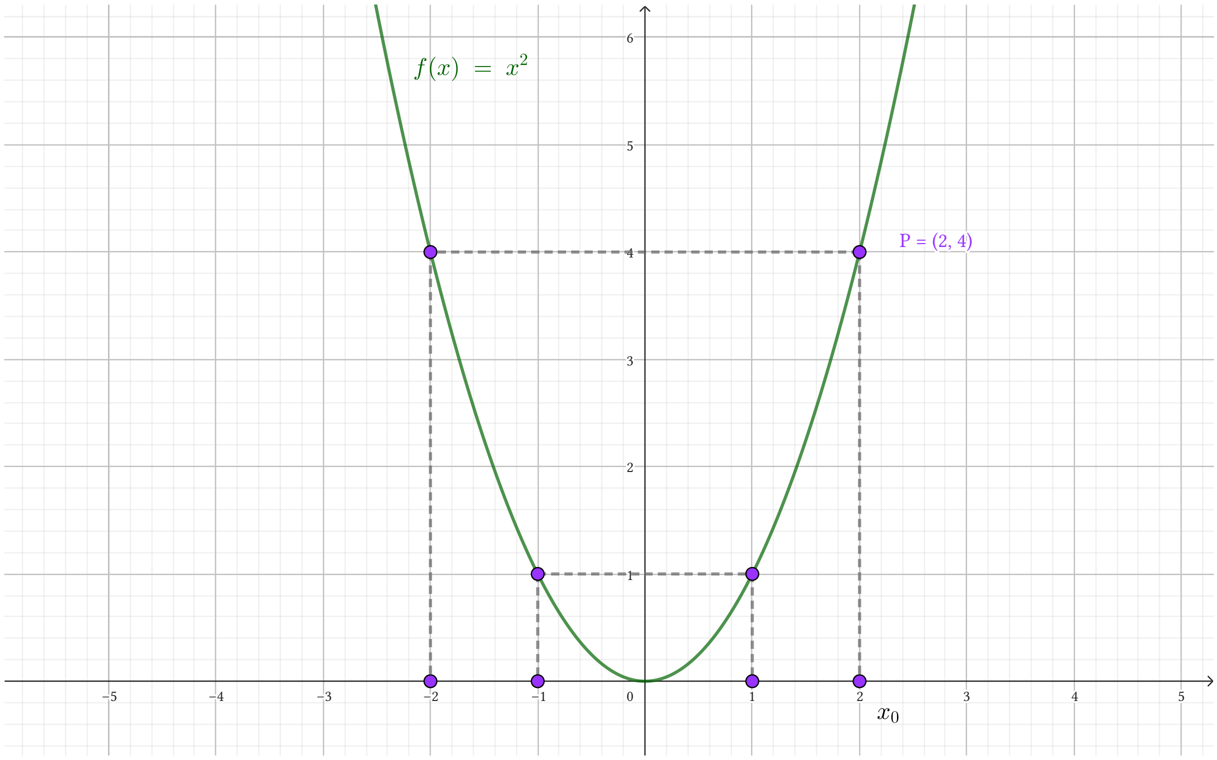
$$m = f'(x_0) \text{ lê-se "} f \text{ linha de } x_0 \text{"}$$

Outras notações

$$\frac{df}{dx} \text{ (Notação de Leibniz)}$$

$$D_x f(x)$$

Exemplo: Determine a equação da reta tangente à função $y = x^2$ no ponto $x_0 = 2$.



Qual é a equação da reta tangente?

$$m = ?$$

$$y = mx + b$$
$$b = ?$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot h + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + \cancel{h})}{\cancel{h}} \\ &= 2x \end{aligned}$$

Logo, $m(x_0) = 2x$.

Para $x_0 = 2$ tem-se que

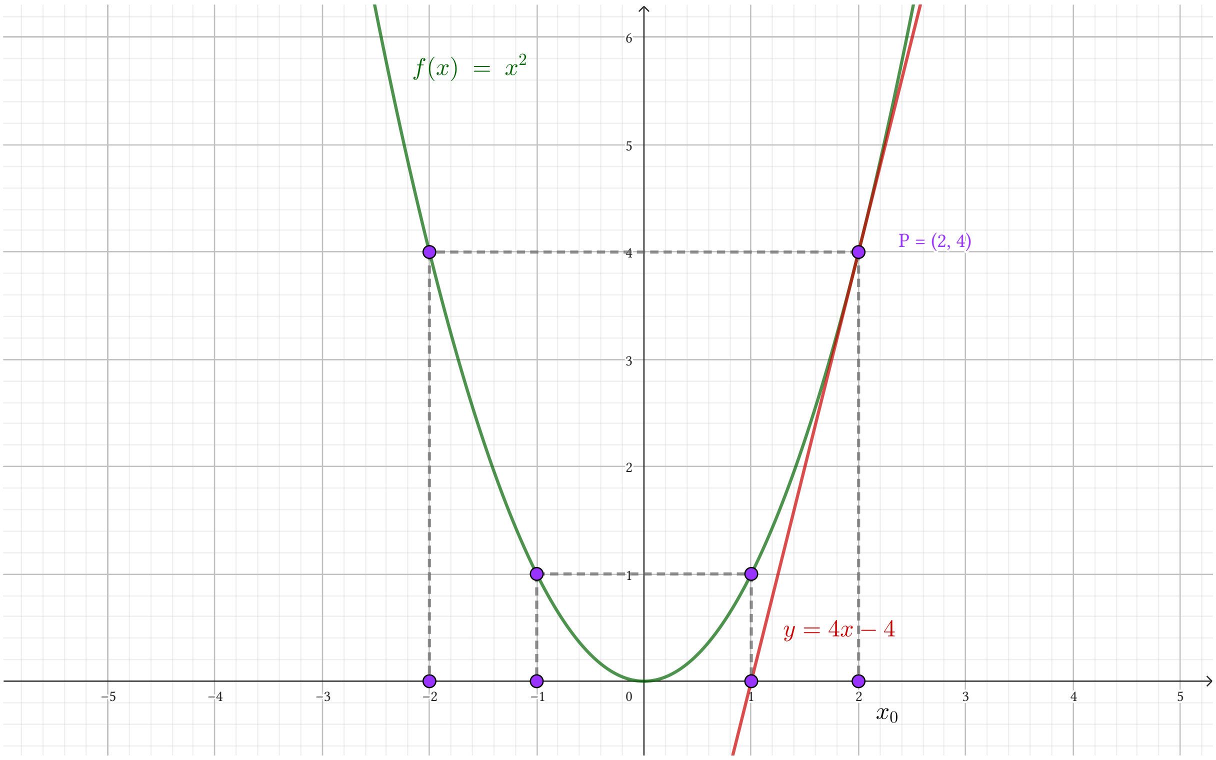
$$m(x_0) = 2x_0$$
$$m(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0 \Rightarrow \text{é crescente}$$

Equação da Reta

$$y = 4 \cdot x + b$$

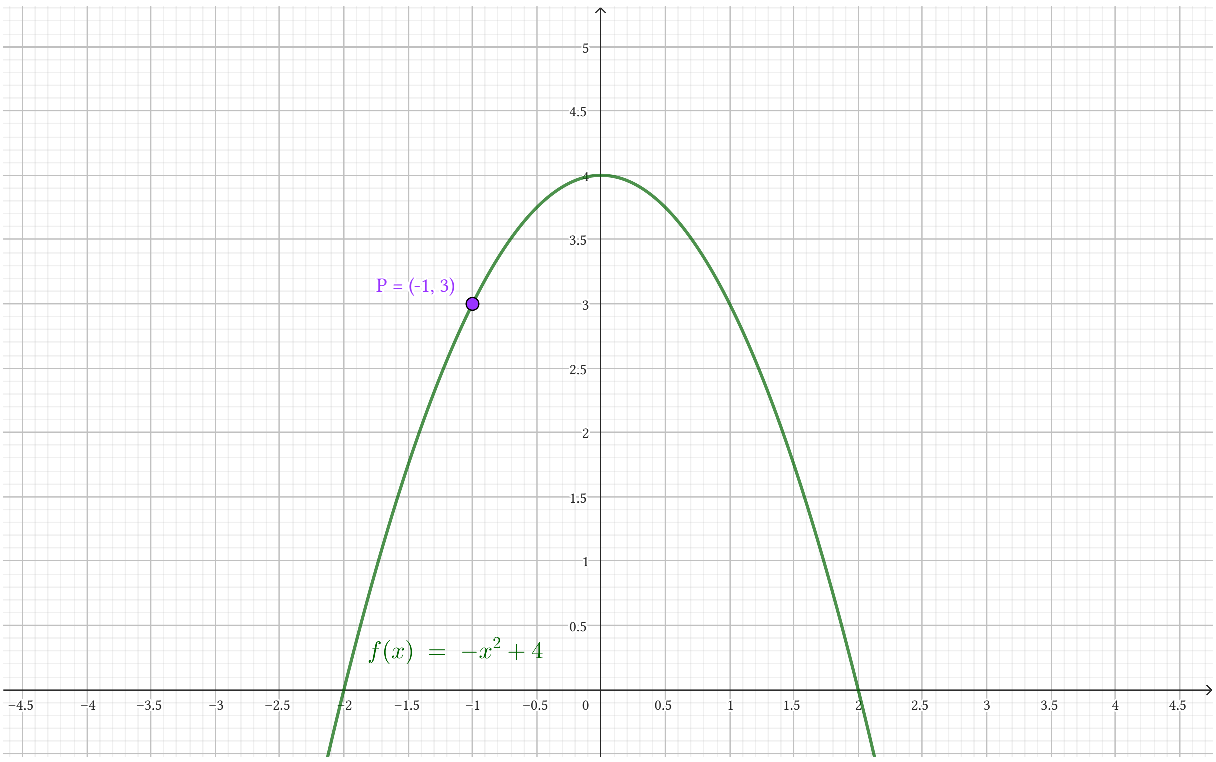
$$\begin{aligned} P(2, 4) \Rightarrow 4 &= 4 \cdot 2 + b \\ 4 - 8 &= b \Rightarrow b = -4 \end{aligned}$$

Logo, $y = 4x - 4$.



Exercício

Encontre a equação da reta que tangencia $f(x) = 4 - x^2$ no ponto $x_0 = -1$. Represente os dois gráficos.



$$-x^2 \pm c$$
$$4 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

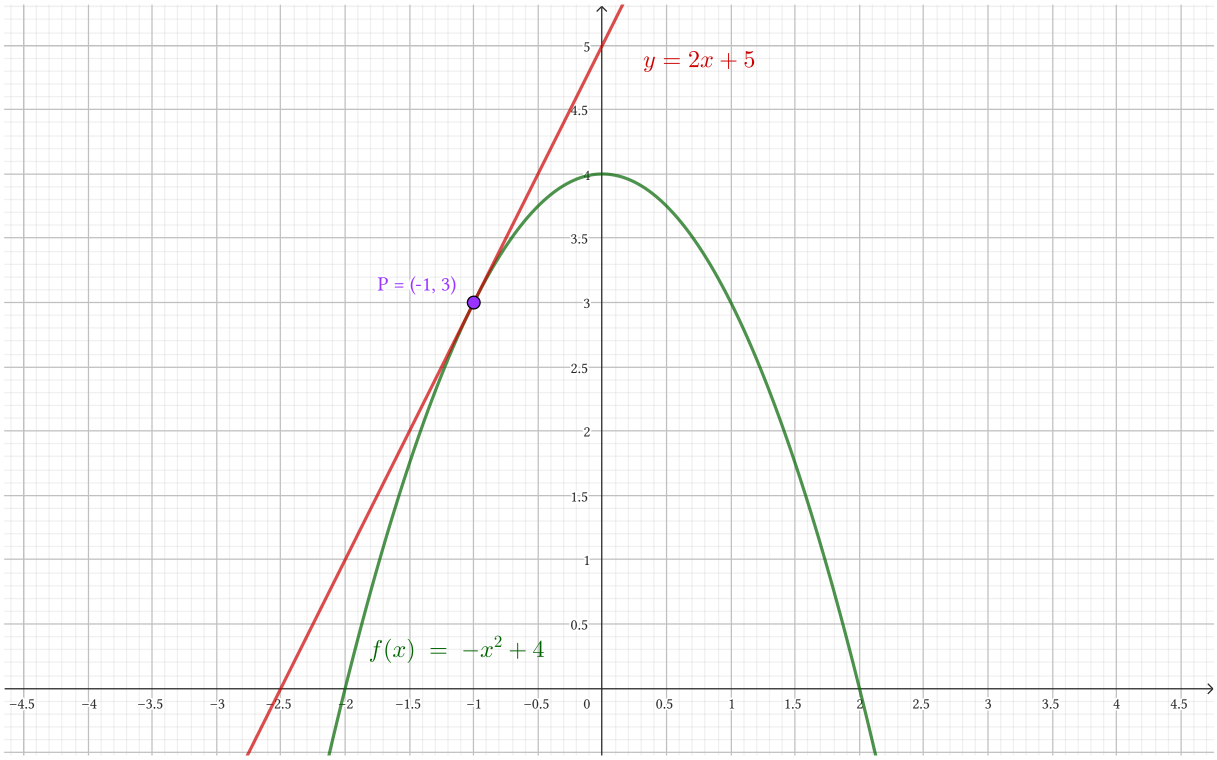
$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\lim_{h \to 0} \frac{4 - (x+h)^2 - (4 - x^2)}{h} \\ &\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} - (\cancel{x^2} + 2xh + h^2) \cancel{-4} \cancel{+x^2}}{h} \\ &\lim_{h \to 0} \frac{-2xh - h^2}{h} \\ &\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-2x - \cancel{h})}{\cancel{h}} = -2x \\ &m = -2x \end{aligned}$$

$$m(x_0) = -2x_0$$
$$m(-1) = -2 \cdot (-1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{função crescente}$$

Equação da reta

$$y = mx + b$$
$$y = 2x + b$$
$$P(-1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot (-1) + b$$
$$3 = -2 + b$$
$$b = 3 + 2$$
$$b = 5$$

Logo, a equação da reta é $y = 2x + 5$.



$y = 2x + 5$
P = (-1, 3)
$f(x) = -x^2 + 4$