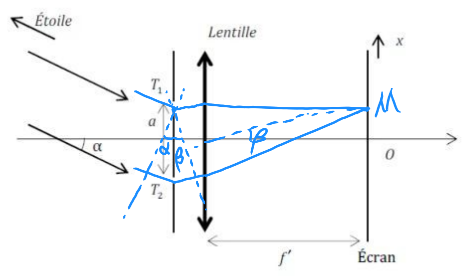
Exercice 3-1 : Séparation d'une étoile double

On considère un télescope dont l'objectif est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ m. On place devant l'objectif un écran percé de deux trous identiques distants de a.



1. On dirige l'ensemble vers une étoile quasi ponctuelle émettant une radiation monochromatique ($\lambda_0 = 550$ nm). Décrire le phénomène observé dans le plan focal de l'objectif. Calculer l'intensité $I(x)$. Si la direction de l'étoile fait l'angle α avec l'objectif, que devient $I(x)$?
2. L'étoile visée est maintenant une étoile double (deux étoiles quasi ponctuelles très proches) distantes angulairement de α. Calculer $I(x)$ et représenter la fonction dans les cas suivants : $\alpha = \frac{\lambda_0}{8a}, \frac{\lambda_0}{4a}, \frac{3\lambda_0}{8a}, \frac{\lambda_0}{2a}$.
3. I_{max} et I_{min} désignant respectivement le maximum et le minimum de $I(x)$, calculer le contraste défini par : $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ (en fonction de a, α et λ_0).
4. La distance a est variable, et on constate que l'éclairement est uniforme pour une valeur minimale a_0 de a. Déterminer a_0 si α= 2" (2 secondes d'arc). Quelle devrait être la valeur de a0 pour pouvoir évaluer le diamètre apparent d'une étoile double valant 8×10^{-3} seconde d'arc ?

1. On suppose $I_0 = I_1 = I_2$

Formule de Fresnel $I(M) = 2I_0[1 + \cos\Delta\varphi_{2/1}(M)]$

avec $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1}(M) + \boxed{\Delta\varphi_{sup}}$

$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = n_{air}(a\sin\alpha + a\sin\beta)$

$\simeq n_{air}\, a(\alpha+\beta)$

$\delta_{2/1}(M) \simeq n_{air}\cdot a\cdot(\alpha + \frac{x}{f'})$

$I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_{air}\, a\left(\alpha + \frac{x}{f'}\right)\right)\right)$ $\alpha \neq 0$

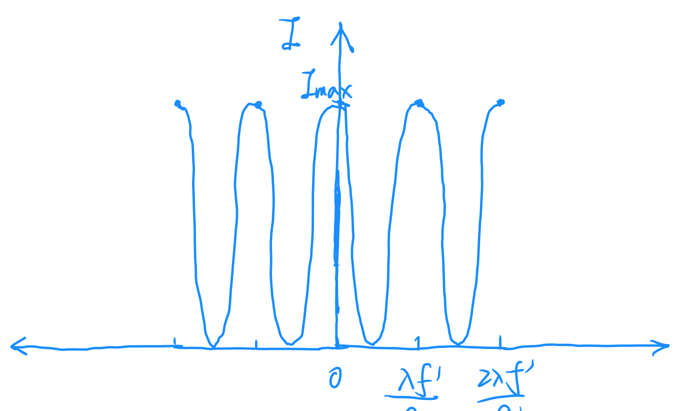
$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_{air}}$

$I(M)_{(\alpha=0)} = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} a\frac{x}{f'}\right)\right)$ $\alpha = 0$

Frange d'ordre 0

$p = 0 = \frac{\Delta\varphi_{2/1}(M)}{2\pi} = \frac{\delta_{2/1}(M)}{\lambda_0} \Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\alpha f'$

Pour $\alpha = 0$



2. Pour $\alpha = \frac{\lambda_0}{8a}$ $\frac{\lambda_0}{4a}$ $\frac{3\lambda_0}{8a}$ $\frac{\lambda_0}{2a}$

$I_{max} = 4I_0[1+|V|]$

$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = |V| = \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|$

$I_{min} = 4I_0[1-|V|]$

$(E_1) + (E_2) = I_{tot}(M)$ car incohérent $\Rightarrow$ on additionne les intensité

$I_{tot}(M) = I_{E_1}(M) + I_{E_2}(M)$

$= 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} a\frac{x}{f'}\right)\right] + 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} a\left(\alpha + \frac{x}{f'}\right)\right)\right]$

$= 4I_0 + 4I_0\cos\left(a\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{x}{f'}\right)\right)$

$I_{tot}(M) = 4I_0\left[1 + V\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} a\left(\frac{x}{f'} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$

$\alpha =$	$\frac{\lambda_0}{8a}$	$\frac{\lambda_0}{4a}$	$\frac{3\lambda_0}{8a}$	$\frac{\lambda_0}{2a}$
$\lvert V\rvert$	0,9239			0
I_{max}	$7,695I_0$			$4I_0$
I_{min}	$0,304I_0$			$4I_0$

3. $V = \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|$

4. Eclairement uniforme $I_{max} = I_{min} = 4I_0$

$\alpha = \frac{\lambda_0}{2a_0} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{\lambda_0}{2\alpha}}$

π rad $= 180°$

$1° = 3600''$

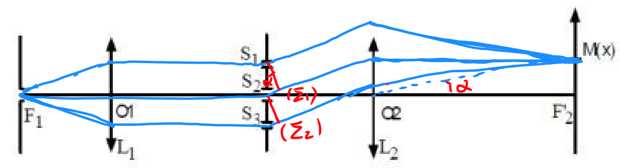
AN $a_0 = \frac{550\times10^{-9}}{2\times\left(\frac{2\times\pi}{3600\times180}\right)} = 2,8$ cm

Eclairement uniforme $\Rightarrow$ le franges brillants de (E_1) correspondant aux frange sombres de (E_2)

Pour $\alpha = (8\times10^{-3})'' \Rightarrow a_0 = 7,1$ m

Exercice 3-5 : Expérience de Young avec trois trous

On considère le dispositif ci-dessous. (L_1) et (L_2) sont deux lentilles convergentes. F_1 est le foyer objet de (L_1), F_2' le foyer image de (L_2). S_1, S_2, S_3 sont trois fentes parallèles équidistantes. $S_1S_2 = d$. La fente F_1 est éclairée par une onde monochromatique (λ). Les deux lentilles ont la même distance focale f'.



1. Calculer la différence de marche $(S_2M) - (S_1M)$ des ondes issues de deux fentes voisines interférant en $M(x)$ sur l'écran.
2. On note I_0 l'éclairement que produirait en M la fente S_1 si elle était seule. Calculer l'éclairement en M en fonction de x dans les deux cas suivants :
   (a) Les trois fentes ont la même largeur (noter l'éclairement $I_1(x)$). Prévoir avec très peu de calcul la valeur de l'éclairement maximal. En raisonnant sur les représentations géométriques des amplitudes complexes, prévoir simplement les positions des zéros d'éclairement.
   (b) S_2 a une largeur double de S_1 et S_3, ce qui entraîne que l'onde émise a une amplitude double (noter l'éclairement $I_2(x)$). Prévoir avec très peu de calcul la valeur de l'éclairement maximal.
3. Rappeler l'expression de l'éclairement $I_3(x)$ que produirait sur l'écran deux fentes distantes de d (fentes d'Young).
4. À l'aide de Python, Matlab ou autre logiciel, tracer sur un même graphe les fonctions $I_1(x), I_2(x), I_3(x)$ et commenter.

1. $\delta_{2/1}(M) = d\sin\alpha\, n_{air}$

$= d\,\alpha\, n_{air}$

$\boxed{\delta_{2/1}(M) = \frac{dx}{f'} n_{air}}$

2.

(a). $I_{S_1} = I_0 = I_{S_2} = I_{S_3}$

Amplitudes complexe

$\underline{A}_1 = a(M)e^{-j\varphi_1}$

$\underline{A}_2 = a(M)e^{-j\varphi_2}$ $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$

$\underline{A}_3 = a(M)e^{-j\varphi_3}$ $\Delta\varphi_{3/2} = \varphi_3 - \varphi_2 = \Delta\varphi$

S_1, S_2 et S_3 sont cohérentes $\Rightarrow$ les amplitudes complexe s'additionnent

$\underline{A}_{tot} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3$

$= a(M)[e^{-j\varphi_1} + e^{-j\varphi_2} + e^{-j\varphi_3}]$

Méthode 1 (cours)

$\underline{A}_{tot} = a(M)e^{-j\varphi_1}[1 + e^{-j(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{-j(\varphi_3-\varphi_1)}] = a(M)e^{-j\varphi_1}[1 + e^{-j\Delta\varphi} + e^{-j2\Delta\varphi}]$

$\underline{A}_{tot} = a(M)e^{-j\varphi_1}\frac{e^{-j3\frac{\Delta\varphi}{2}}}{e^{-j\frac{\Delta\varphi}{2}}}\cdot\left[\frac{\sin\left(3\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]$

$I_{tot} = |\underline{A}_{tot}|^2 = a^2(M)\frac{\sin^2\left(\frac{3\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{3\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = I_1(x)$

Méthode 2

$\underline{A}_{tot} = a(M)e^{-j\varphi_2}[e^{-j(\varphi_1-\varphi_2)} + 1 + e^{-j(\varphi_3-\varphi_2)}]$

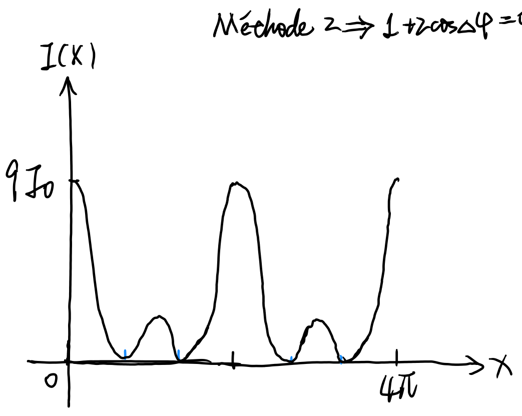
$= a(M)e^{-j\varphi_2}[e^{j\Delta\varphi} + 1 + e^{-j\Delta\varphi}]$

$= a(M)e^{-j\varphi_2}[1 + 2\cos\Delta\varphi]$

$I_{tot} = |\underline{A}_{tot}|^2 = a^2(M)[1+2\cos\Delta\varphi]^2 = \boxed{I_0[1+2\cos\Delta\varphi]^2 = I_1(x)}$

zéros d'éclairement Méthode 1 $\Rightarrow \sin\left(\frac{3\Delta\varphi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\Delta\varphi}{2} = m\pi$ avec $m \neq k\times3$

Méthode 2 $\Rightarrow 1 + 2\cos\Delta\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\Delta\varphi = -\frac{1}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$



(b). $\underline{A}_{tot} = a(M)e^{-j\varphi_2}[e^{j\Delta\varphi} + 2 + e^{-j\Delta\varphi}]$

$= a(M)e^{-j\varphi_2}[2 + 2\cos\Delta\varphi]$

$I_{tot} = |\underline{A}_{tot}|^2 = 4I_0[1+\cos\Delta\varphi]^2 = I_2(x)$