3. SKAITINIS INTEGRAVIMAS (angl. NUMERICAL INTEGRATION)

dr. Aurelija Kasparavičiūtė

aurelija.kasparaviciute@vgtu.lt

3.1. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Įvadinės pastabos

Nagrinėsime skaitinio integravimo formules, skirtas apytiksliam žemiau pateikto apibrėžtinio integralo apskaičiavimui

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Jei žinome pointegralinės funkcijos $f(x)$ pirmykštę $F'(x)$ = $f(x)$, tai galime taikyti Niutono-Leibnico formulę

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1 pavyzdys

Apskaičiuokime apibrėžtinį integralą

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x} dx.$$

Čia pirmykštė funkcija yra

$$F(x) = \ln |x|.$$

Pagal Niutono – Leibnico formulę, gausime

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3.$$

Pavyzdžio sprendimas su Matlab pateiktas faile integralaspirmas.m

Kodėl nagrinėjamas skaitinio integravimo uždavinys

Apibrėžtinio integralo apytikslės reikšmės radimas yra svarbus praktinis uždavinys.

- Daugelio funkcijų pirmykštė funkcija neišreiškiama elementariosiomis funkcijomis. Tokių integralų pavyzdžiai

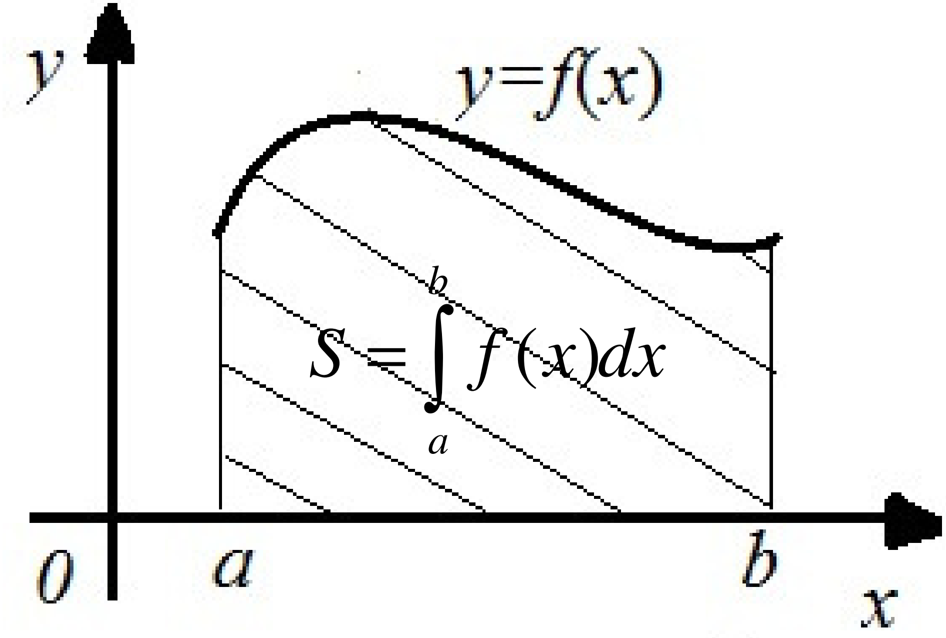
$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln(x)}, \quad \int_a^b \sin^2(x)dx, \ldots .$$

- Funkcija $f(x)$ apibrėžta lentele.

Skaitinio integravimo formulių sudarymas

Skaitinio integravimo formulės sudaromos remiantis matematinės analizės faktais.

➢ Apibrėžtinio integralo geometrinė interpretacija. Apibrėžtinis integralas lygus kreivinės trapecijos, apribotos tiesėmis $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ir kreive $y = f(x)$, plotui



Skaitinio integravimo formulių sudarymas

- Apibrėžtinio integralo pointegralinės funkcijos pakeitimas paprastesne ir artima funkcija, pavyzdžiui, N tos eilės interpoliaciniu daugianariu. Tokios skaitinio integravimo formulės vadinamos *interpoliacinėmis*.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_N(x)dx$$

Plačiausiai naudojamas skaitinio integravimo formulių sudarymo būdas

- Apibrėžtinio integralo reikšmė išreiškiama integruojamos funkcijos reikšmių tiesine kombinacija

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_N = \sum_{i=0}^{N} c_i f\left(x_i\right).$$

Ši apytikslė lygybė yra vadinama skaitinio integravimo formule (kvadratūrine formule). Čia c_i - tam tikru būdu nustatomi skaitiniai koeficientai, kurie vadinami kvadratūrinės formulės koeficientais, o $x_i, i = \overline{0, N}$ yra nagrinėjamo intervalo taškai - kvadratūrinės formulės (integravimo) mazgai.

- Kvadratūrinės formulės paklaida

$$R_N = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{N} c_i f\left(x_i\right).$$

Taikomieji pavyzdžiai

- Figūru plotas, tūris;
- Kreivės lanko ilgis;
- Kintamos jėgos darbas;
- Nevienalyčių strypų masė;
- Statiniai momentai ir masės centro koordinatės;
- Inercijos momentai;
- Slėgio apskaičiavimo uždaviniai;
- Skysčio ištekėjimas per mažą angą;
- Taško nueitas kelias;
- Materialiojo taško kinetinė energija;
- Radioktyvusis skilimas;
- Šilumos kaita.

Taikomųjų uždavinių ekonomikoje pavyzdžiai

- Gaminio ribiniai bendrieji kaštai per dieną yra

$$MC(x) = 0.000009x^2 - 0.009x + 8,$$

čia x yra gaminių kiekis. Gaminio pastovieji kaštai per dieną yra 200 Lt. Kokie yra pirmųjų 400 gaminių bendrieji kaštai per dieną?

- Darbo našumas per 8 val. pamainą keičiasi pagal empirinę formulę

$$p(x) = -0.1x^2 + 0.8x + 2.$$

Apskaičiuokite pagamintos produkcijos kiekį per paskutiniąsias 2 pamainos valandas.

- Išankstinio tyrimo duomenimis prognozuojama, kad iš naujai atrasto naftos telkinio bus išgaunama

$$R(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + 0,5; \quad 0 \le x \le 20,$$

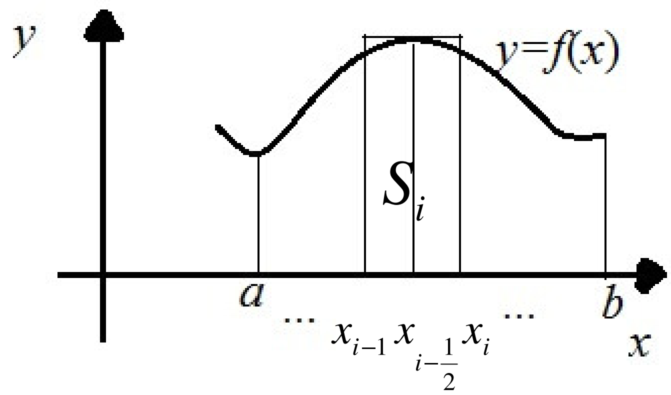
tūkstančių barelių naftos per metus, čia x – gavybos metai. Apskaičiuokite naftos kiekį, kuris bus išgautas per pirmuosius 5 gavybos metus.

3.2. SKAITINIO INTEGRAVIMO FORMULĖS

3.2.1. STAČIAKAMPIŲ FORMULĖ (RECTANGLE METHOD)

Vidurio (bendrosios) stačiakampių formulės sudarymas

- Integravimo intervalas [a, b] skaidomas į dalinius intervalus [x_{i-1}, x_i], čia $h = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, N}$,



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \quad i = \overline{1, N}.$$

- Kiekviename daliniame intervale kreivinių trapecijų plotai apytiksliai keičiami stačiakampių plotais

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx S_i = hf(x_{i-\frac{1}{2}}), \text{čia } x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

- Taigi

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_N = h\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}}). \qquad (3.1)$$

Vidurio stačiakampių formulė

3.1. Apibrėžimas. Formulė, apibrėžta (3.1) lygybe, t.y.

$$S_N = h\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

yra vadinama vidurio (bendroji) stačiakampių formule, kuri skirta apytiksliam apibrėžtinio integralo

$$\int_a^b f(x)dx$$

apskaičiavimui.

Paklaidos teorinis įvertis

Vidurio stačiakampių formulės teorinis paklaidos įvertis yra apibrėžiamas nelygybe

$$\left|R_N\right| \le \frac{h^2 (b-a)}{24} M_2, \tag{3.2}$$

čia

$$h = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

Nuo ko priklauso paklaida?

Paklaida priklauso nuo:

- Funkcijos savybių $\left(M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|\right)$.

  Mažėjant maksimumui, mažės ir paklaida;

- Nuo intervalo ilgio b - a. Kuo intervalas didesnis tuo paklaida didesnė;

- Nuo integravimo mazgų išsidėstymo intervale. Jei žingsnis h bus pakankamai mažas, tai ir paklaida bus maža, t.y.

$$\text{Jei } h \to 0, \text{ tai } R_N \to 0, \text{ jei tik } M_2 < \infty, b - a < \infty.$$

Žinoma tam mazgų skaičių turime neribotai didinti, t.y. $N \to \infty$.

Paklaida yra $O(h^2)$ eilės dydis. Vidurio stačiakampių formulė yra antrosios tikslumo eilės kvadratūrinė formulė.

2 pavyzdys

Suraskite 1 pavyzdžio integralo artinį, naudodami skaitinio integravimo vidurio stačiakampių formulę, kai $N = 4$. Apskaičiuokite realią absoliutinę paklaidą ir teorinį paklaidos įvertį.

Pavyzdžio sprendimas su Matlab, kai N=4, 8, 16, 32, 64, pateiktas faile integralasantras.m

Sprendimas

- Vidurio stačiakampių formulė, kai $N = 4$

$$S_4 = h\sum_{i=1}^{4} f\left(x_{i-1/2}\right) = h\Big(f\left(x_{1/2}\right) + f\left(x_{3/2}\right) + f\left(x_{5/2}\right) + f\left(x_{7/2}\right)\Big).$$

- Pointegralinės funkcijos reikšmių apskaičiavimas vidurio taškuose

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \;\; x_0 = a, \;\; x_4 = b, \;\; x_i = x_{i-1} + h\,, \;\; i = \overline{0, N}.$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \;\; x_2 = x_1 + h = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2, \;\; x_3 = x_2 + h = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \;\; \Rightarrow \;\; x_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}+1}{2} = \frac{5}{4}, \;\; x_{\frac{3}{2}} = \frac{7}{4}, \;\; x_{\frac{5}{2}} = \frac{9}{4}, \;\; x_{\frac{7}{2}} = \frac{11}{4}.$$

$$f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}, \;\; f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{4}{7}, \;\; f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{4}{9}, \;\; f\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{4}{11}.$$

Tokiu būdu

$$S_4 = h\Big(f\left(x_{1/2}\right) + f\left(x_{3/2}\right) + f\left(x_{5/2}\right) + f\left(x_{7/2}\right)\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} + \frac{4}{9} + \frac{4}{11}\right) = \frac{3776}{3465} \approx 1.089755.$$

Sprendimas

- Absoliutinė realioji paklaida

$$|\varepsilon_4| = \left| \int_1^3 \frac{1}{x} dx - h \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_{i-1/2}} \right| = |1.098612\text{-}1.089755| \approx 0.008857.$$

- Teorinis paklaidos įvertis

$$|R_4| \le \frac{h^2 (b-a)}{24} M_2,\ M_2 = \max_{x\in[1,3]} \left| \left(\frac{1}{x} \right)'' \right|.$$

Kadangi

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}, \left(\frac{1}{x} \right)'' = \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x^3}, \text{ tai}$$

$$M_2 = \max_{x\in[1,3]} \left| \frac{2}{x^3} \right| = 2, \text{ be to}$$

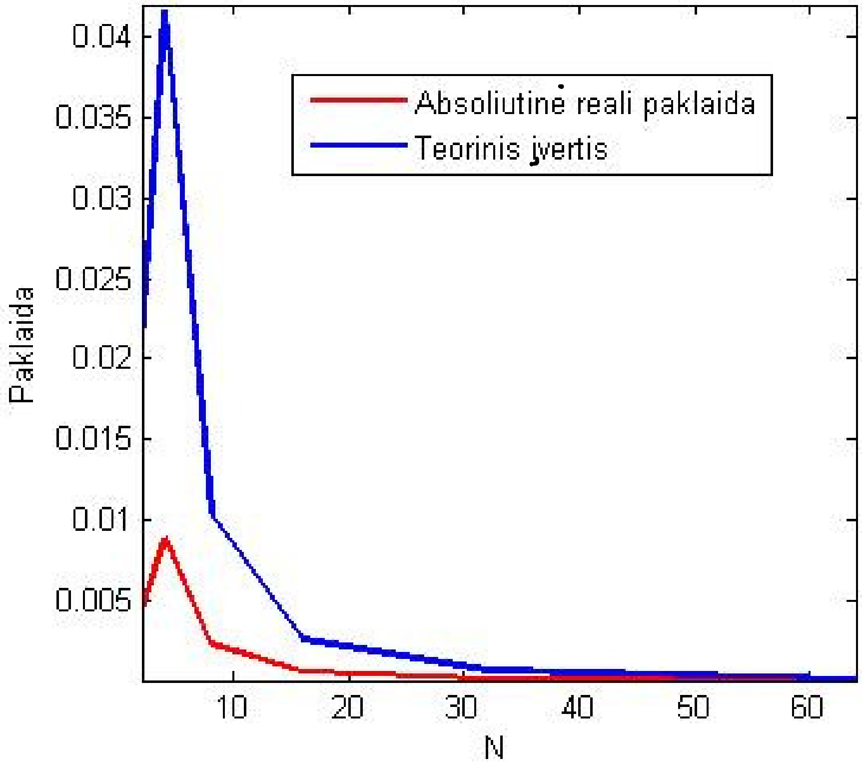
$$|R_4| \le \frac{\frac{1}{4} \cdot (3-1)}{24} \cdot 2 = \frac{1}{24} \approx 0.041667.$$

Rezultatai su Matlab

N	4	8	16	32	64
S_N	1.089755	1.096325	1.098035	1.098468	1.098576
ε_N	0.008858	0.002288	0.000577	0.000145	0.000036
$\lvert R_N \rvert$	0.041667	0.010417	0.002604	0.000651	0.000163

- Neribotai didindami N (mažindami h) mažiname paklaidą, tai yra artinių seka artėja prie tikrosios apibrėžtinio integralo reikšmės.

- Padidinus mazgų skaičių 2 kartus paklaida sumažėja kažkur 4 kartus.



Dešiniųjų ir kairiųjų stačiakampių formulės

- Kairiųjų stačiakampių formulė

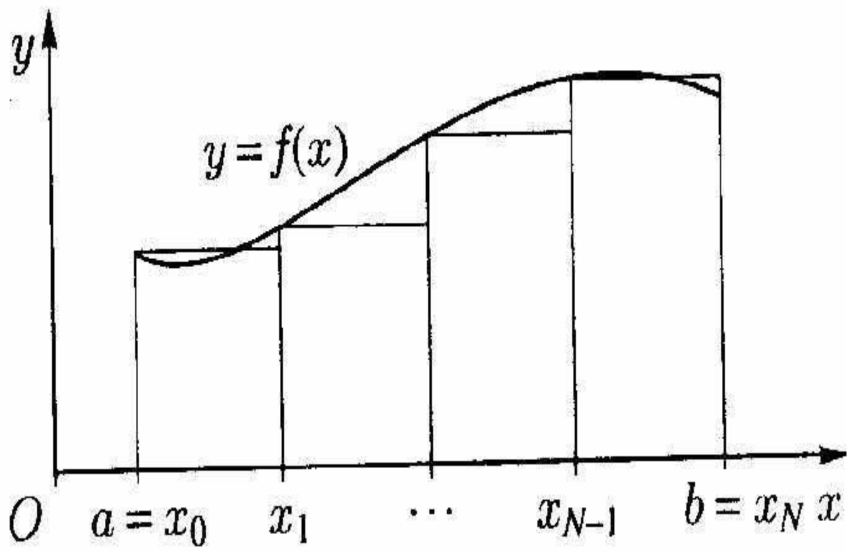
Kreivinės trapecijos, kurios pagrindas yra dalinis intervalas $[x_{i-1}, x_i]$ plotas apytiksliai

lygus įbrėžtinio stačiakampio su tuo pačiu pagrindu plotui:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \approx f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})h.$$

Tai kairiųjų stačiakampių formulė yra

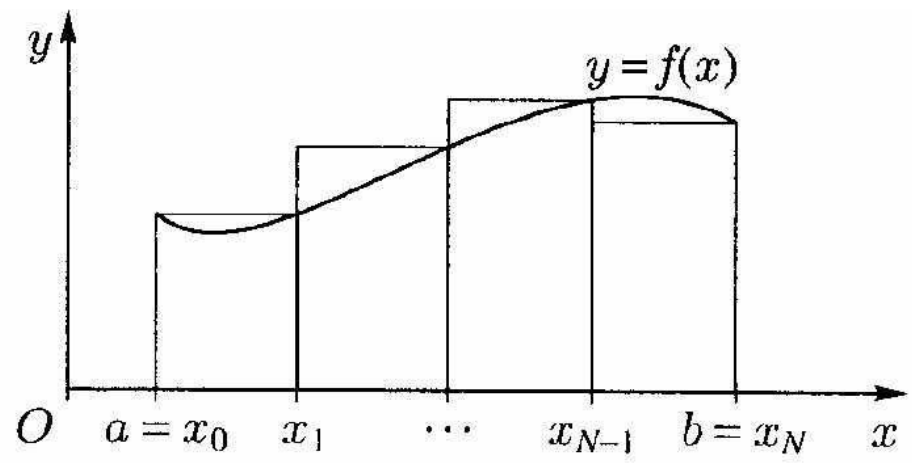
$$S_N = h\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}).$$



- Dešiniųjų stačiakampių formulė

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \approx f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i)h,$$

$$S_N = h\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

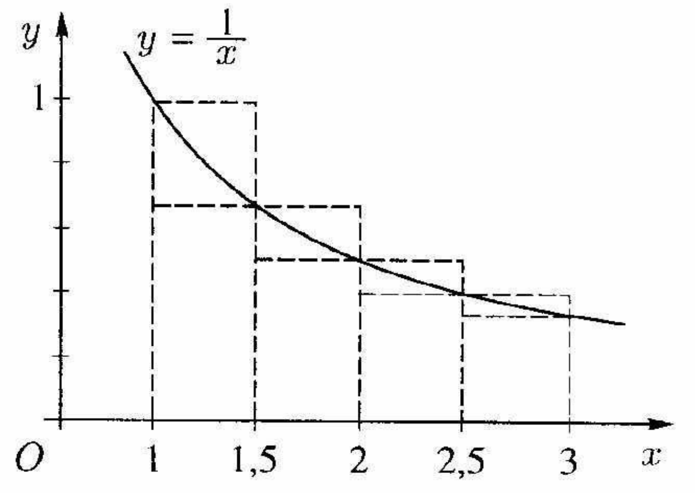


Dešiniųjų ir kairiųjų stačiakampių formulių paklaidos įvertis

- Panašiai, kaip ir bendrosios stačiakampių formulės atveju atveju įrodoma, kad

$$\left|R_N\right| \le \frac{h(b-a)}{2} M_1, \qquad M_1 = \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|.$$

- Dešiniųjų ir kairiųjų stačiakampių formulių atveju, paklaida yra tik *O(h)* eilės tikslumo.



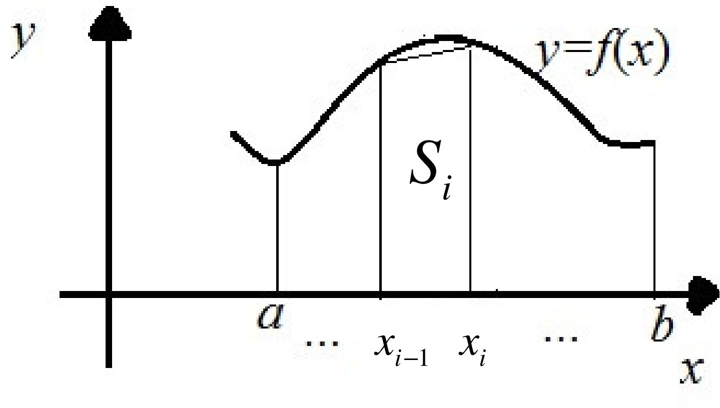
- Atlikdami 2 pavyzdį kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių formulių aveju, nesunkiai pastebėtume, kad kairiųjų stačiakampių atveju, gaunamas integralo artinys yra didesnis už tikslią reikšmę, o dešiniųjų – mažesnis, nes monotoniškai mažėjančioms funkcijoms kairiųjų stačiakampių metodas yra perteklinis, o dešiniųjų - trūkstamasis.

- Monotoniškai didėjančiom funkcijom turėtume atvirkštinį teiginį.

3.2.2. TRAPECIJŲ FORMULĖ (TRAPEZOIDAL METHOD)

Formulės sudarymas

- Integravimo intervalas $[a, b]$ skaidomas į dalinius intervalus $[x_{i-1}, x_i]$, čia $h = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, N}$. Tada



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \quad i = \overline{1, N}.$$

- Kiekviename daliniame intervale kreivinių trapecijų plotai apytiksliai keičiami stačiakampių trapecijų plotais

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx S_i = \frac{f\left(x_{i-1}\right) + f\left(x_i\right)}{2} h, \text{ taigi}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_N = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right). (3.3)$$

Formulės sudarymas

Pastebėkime, kad pointegralinė funkcija, kiekviename daliniame intervale $[x_{i-1}, x_i]$ pakeičiama tiesiniu interpoliaciniu daugianariu

$$L_{1,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f_i = \frac{x - x_{i-1}}{h} f_i - \frac{x - x_i}{h} f_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Taigi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h} f_i dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_i}{h} f_{i-1} dx$$

$$= \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h} f_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{(x - x_i)^2}{2h} f_{i-1} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{f_{i-1} + f_i}{2} h.$$

Vidurio stačiakampių formulė

3.3. Apibrėžimas. Formulė, apibrėžta (3.3) lygybe, t.y.

$$S_N = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right),$$

yra vadinama trapecijų formule, kuri skirta apytiksliam apibrėžtinio integralo

$$\int_a^b f(x)dx$$

apskaičiavimui.

Paklaidos teorinis įvertis

Trapecijų formulės teorinis paklaidos įvertis yra apibrėžiamas nelygybe

$$\left|R_N\right| \le \frac{h^2(b-a)}{12} M_2, \qquad (3.4)$$

čia

$$h = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

Nuo ko priklauso paklaida?

- Funkcijos savybių;
- Nuo intervalo ilgio;
- Nuo integravimo mazgų išsidėstymo intervale;
- $M_2 < \infty, b - a < \infty,$

$$h \to 0 \Rightarrow R_N \to 0.$$

Paklaida yra $O(h^2)$ eilės dydis.

Trapecijų formulės paklaida 2 kartus didesnė, nei vidurio stačiakampių metodu.

3 pavyzdys

Suraskite 1 pavyzdžio integralo artinį, naudodami skaitinio integravimo trapecijų formulę, kai $N = 4$. Apskaičiuokite realią absoliutinę paklaidą ir teorinį paklaidos įvertį.

Pavyzdžio sprendimas su Matlab, kai N=4, 8, 16, 32, 64, pateiktas faile integralastrecias.m

Sprendimas

Naudodami, 2 pavyzdyje, gautus rezultatus ir (3.3) trapecijų formulę, kai N = 4, gauname

$$S_4 = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{4-1} f\left(x_i\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{2}+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right) = \frac{67}{30} \approx 1.116667.$$

$$\varepsilon_4 = \left|\int_1^3 \frac{1}{x}dx - h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{3} f\left(x_i\right)\right)\right| =$$

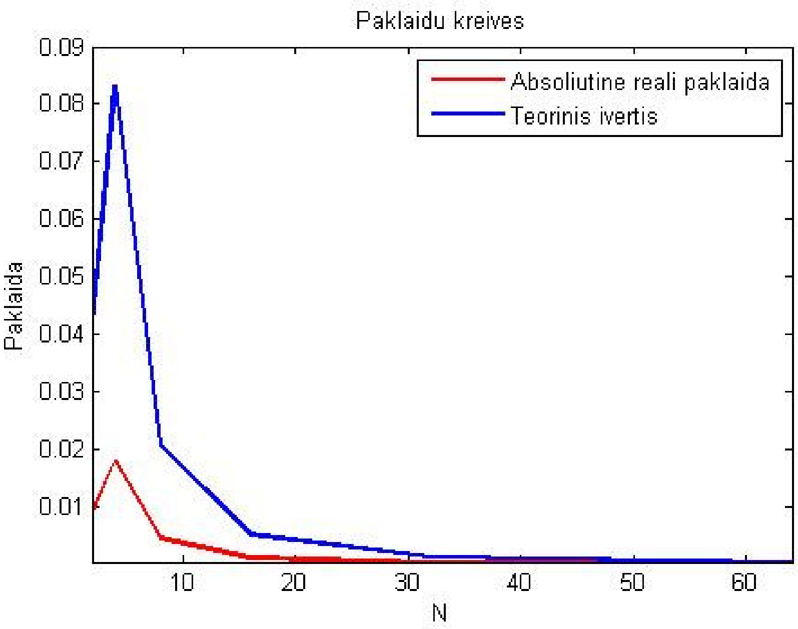
$$= \left|1.098612\text{-}1.116667\right| \approx 0.01805.$$

$$\left|R_4\right| \le \frac{h^2(b-a)}{12}M_2 = \frac{\frac{1}{4}\cdot(3-1)}{12}\cdot 2 = \frac{1}{12} \approx 0.08333.$$

Rezultatai su Matlab

N	4	8	16	32	64
S_N	1.11667	1.1032	1.09977	1.09890	1.09869
ε_N	0.01805	0.00460	0.00116	0.00029	0.00007
$\lvert R_N \rvert$	0.08333	0.02083	0.00521	0.00130	0.00033

- Vidurių (bendriosios) stačiakampių formulės atveju gauname tikslesnius rezultatus, nes čia paklaidos 2 kartus didesnės.
- Tačiau, kaip ir bendrosios stačiakampių formulės atveju, padidinus mazgų skaičių du kartus, paklaida sumažėja maždaug keturis kartus.
- Trapecijų formulė yra kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių formulės aritmetinis vidurkis.

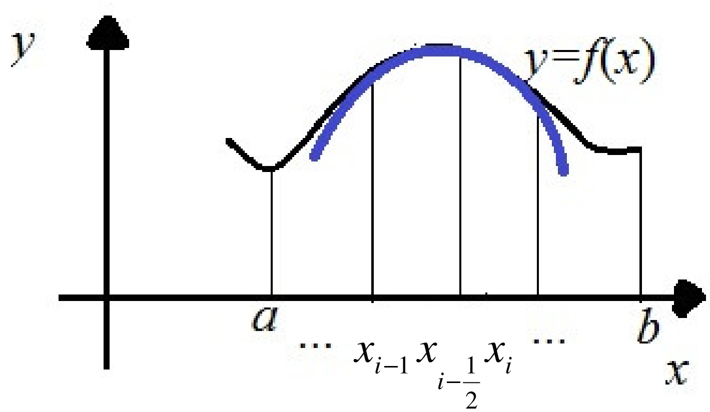


3.2.3. SIMPSONO (PARABOLIŲ) FORMULĖ

Formulės sudarymas

- Integravimo intervalas $[a, b]$ skaidomas į dalinius intervalus $[x_{i-1}, x_i]$, čia $h = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, N}$. Tada

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \quad i = \overline{1, N}.$$



- Kiekviename daliniame intervale $[x_{i-1}, x_i]$ pointegralinė funkcija pakeičiama kvadratiniu interpoliaciniu daugianariu ir tokiu būdu, gaunama (3.5) lygybė:

$$L_{2,i}(x) = 2 \cdot \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{h^2} f_{i-1} - 4 \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h^2} f_{i-1/2}$$

$$-2 \cdot \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{h^2} f_i, \quad i = \overline{i, N},$$

$$\int_a^b f(x) \approx S_N = \frac{h}{6} \sum_{i=1}^{N} \Big(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i) \Big). \tag{3.5}$$

Simpsono formulė

3.4. Apibrėžimas. Formulė, apibrėžta (3.5) lygybe, t.y.

$$S_N = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N}\Big(f\left(x_{i-1}\right) + 4f\left(x_{i-1/2}\right) + f\left(x_i\right)\Big),$$

yra vadinama Simpsono formule, kuri skirta apytiksliam apibrėžtinio integralo

$$\int_a^b f(x)dx$$

apskaičiavimui.

Dažnai vietoje (3.5) formulės yra naudojama žemiau pateikta lygybė

$$S_N = \frac{h}{6}\Big(f(a) + f(b) + 2\big(f\left(x_2\right) + f\left(x_4\right) + \ldots + f\left(x_{2N-2}\right)\big)$$

$$+4\big(f\left(x_1\right) + f\left(x_3\right) + \ldots + f\left(x_{2N-1}\right)\big)\Big),\ x_i = a + \frac{h}{2}i, i = 0,1,\ldots(2N-1), 2N.$$

Paklaidos teorinis įvertis

Simpsono formulės teorinis paklaidos įvertis yra apibrėžiamas nelygybe

$$\left|R_N\right| \leq \frac{h^4 (b-a)}{2880} M_4, \tag{3.6}$$

čia

$$h = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(IV)}(x) \right|.$$

Nuo ko priklauso paklaida?

- Funkcijos savybių;
- Nuo intervalo ilgio;
- Nuo integravimo mazgų išsidėstymo intervale;
- $M_4 < \infty, b - a < \infty,$

$$h \to 0 \Rightarrow R_N \to 0.$$

Paklaida yra $O(h^4)$ eilės dydis.

Simpsono formulė, lyginant su prieš tai nagrinėtomis, yra tiksliausia.

4 pavyzdys

Suraskite 1 pavyzdžio integralo artinį, naudodami skaitinio integravimo Simpsono formulę, kai $N = 4$. Apskaičiuokite realią absoliutinę paklaidą ir teorinį paklaidos įvertį.

Pavyzdžio sprendimas su Matlab, kai N=4, 8, 16, 32, 64, pateiktas faile integralasketvirtas.m

Sprendimas

Naudodami, 2 ir 3 pavyzdyje, gautus rezultatus ir (3.5) Simpsono formulę, kai N = 4, gauname

$$S_4 = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{4}\left(f\left(x_{i-1}\right)+4f\left(x_{i-1/2}\right)+f\left(x_i\right)\right)=\frac{h}{6}\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right.$$

$$\left.+4\left(f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_{3/2}\right)+f\left(x_{5/2}\right)+f\left(x_{7/2}\right)\right)+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right)$$

$$=\frac{h}{6}\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_4\right)+2\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right)+4\left(f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_{3/2}\right)+f\left(x_{5/2}\right)+f\left(x_{7/2}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{3}+2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}+\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\right)\right)=\frac{9137}{8316}\approx 1.098725.$$

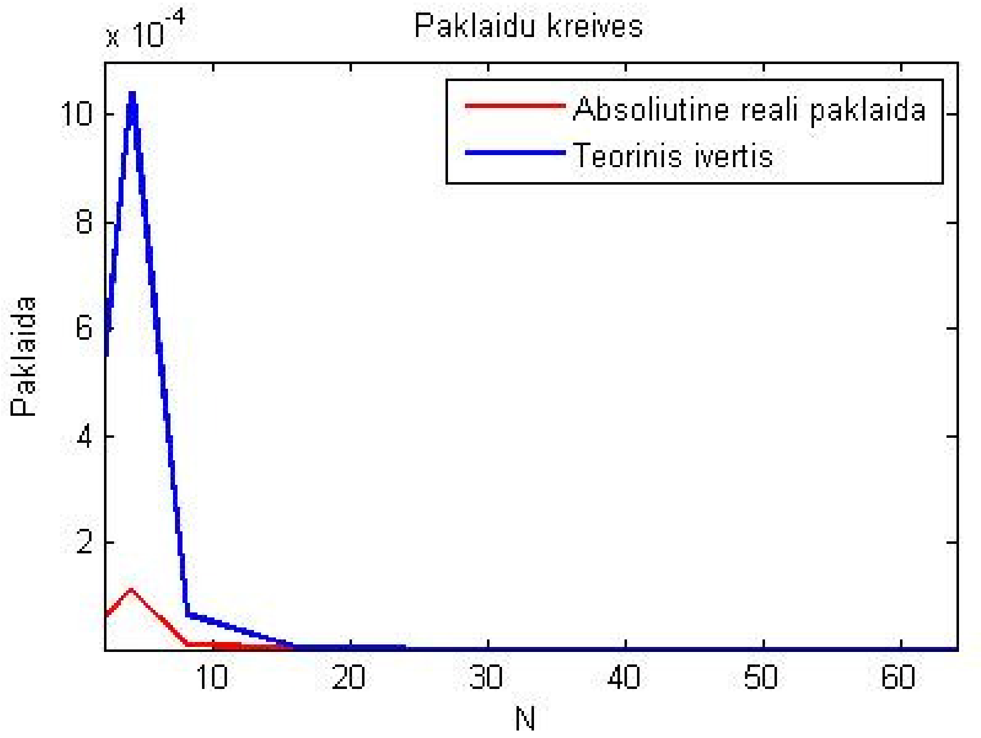
$$\varepsilon_4 = \left|\int_1^3 \frac{1}{x}dx - \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{4}\left(f\left(x_{i-1}\right)+4f\left(x_{i-1/2}\right)+f\left(x_i\right)\right)\right| =$$

$$= \left|1.098612\text{-}1.098725\right| \approx 0.000113.$$

$$\left|R_4\right| \le \frac{h^4(b-a)}{2880}M_4 = \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{2880}\cdot 24 = \frac{1}{960}\approx 0.001042.$$

Rezultatai su Matlab

N	4	8	16	32	64
S_N	1.098725	1.098620	1.098613	1.098612	1.098612
ε_N	0.000113	0.000008	0.0000005	0.00000003	0.000000002
$\lvert R_N \rvert$	0.001042	0.000065	0.000004	0.0000003	0.00000002



- Matome, kad su Simpsono formule gautų artinių seka prie tikrosios apibrėžtinio integralo reikšmės artėja greičiausiai.

3.2.1. BENDROSIOS PASTABOS APIE SKAITINIO INTEGRAVIMO FORMULIŲ PAKLAIDAS

Pastabos

Nagrinėtos skaitinio integravimo formulės gaunamos pakeitus pointegralinę funkciją tam tikros eilės interpoliaciniu daugianariu $L_n(x)$:

- Vidurio stačiakampių – 0 eilės,
- Trapecijų – 1 eilės,
- Simpsono – 2 eilės.

Kintant n, paklaidų įverčių eilė kinta neproporcingai skaičiui n.

- Kai $n = 0$ ar 1, tai paklaidų įverčių eilė yra 2. Į paklaidų įverčius įeina dydžiai h^2 ir M_2.
- Jei $n = 2$, tai paklaidų įverčių eilė yra 4. Į paklaidų įverčius įeina dydžiai h^4 ir M_4.

Pastabos

Dydžiuose h^k ir M_k skaičius k priklauso ne tik nuo n, bet ir nuo to, ar n lyginis, ar nelyginis:

- Jei interpoliacinio daugianario eilė n yra lyginis skaičius, tai kvadratūrinė formulė tiksli neaukštesnio, kaip $(n + 1)$-ojo laipsnio daugianariams.

- Jei interpoliacinio daugianario eilė n yra nelyginis skaičius, tai kvadratūrinė formulė tiksli visiems neaukštesnio, kaip *n* - tojo laipsnio daugianariams

3.3. APOSTEORINIS SKAITINIO INTEGRAVIMO FORMULĖS PAKLAIDOS ĮVERTINIMAS

Problemos formulavimas

- Skaitinio integravimo formulių paklaidos priklauso ne tik nuo h (N), bet ir nuo pointegralinės funkcijos $f(x)$ glodumo (M_2, M_4). Problemos:
  - M_2, M_4 įvertinti sudėtinga,
  - M_2, M_4 įverčiai netikslūs,
  - M_2, M_4 tikslias reikšmes gauti praktiškai neįmanoma,
  - Nežinoma $f(x)$ analizinė išraiška.
- Vertindami paklaidas pagal nelygybes (3.2), (3.4) ir (3.6) neatsižvelgiam į galimą paklaidų kompensavimą.

Rungės taisyklė

Jeigu apytiksliai apskaičiavus integralą gaunama per didelė paklaida, tai ją galima sumažinti pratęsus skaičiavimus su mažesniu h. Tam reikia mokėti aposteoriškai įvertinti paklaidą. Aposteorinis paklaidos įvertis, gaunamas remiantis Rungės principu.

$$R_{2N} \approx \frac{S_{2N} - S_N}{2^m - 1},$$

$$|R_{2N}| \le \frac{|S_{2N} - S_N|}{2^m - 1},$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{2N} + R_{2N},$$

čia S_{2N}, S_N - apibrėžtinio integralo artiniai apskaičiuoti, esant skirtingiems žingsniams. m - formulės tikslumo laipsnis:

- Kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių formulės m = 1;
- Vidurio (bendroji) stačiakampių ir trapecijų formulės m = 2;
- Simpsono (parabolių) formulė m = 4.

5 pavyzdys

Apskaičiuokite apibrėžtinį integralą

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2(2x)}dx$$

apytiksliai su 0.001 tikslumu.

Pavyzdžio sprendimas su Matlab pateiktas faile integralapenktass.m

Sprendimas

Naudosime Simpsono formulę, nes šiuo atveju gaunami tiksliausi rezultatai. Pradedame skaičiuoti artininius, kai $N = 1$ ir $N = 2$.
Kai N = 1, tai

$$h = \frac{\pi}{2}, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, \, x_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4},$$
$$f(x_0) = \sqrt{1 + \sin^2(2 \cdot 0)} = 1, \; f(x_1) = \sqrt{1 + \sin^2(\pi)} = 1,$$
$$f(x_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}.$$

Tai pagal Simpsono formulę

$$S_1 = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N}\Big(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)\Big),$$

gausime

$$S_1 = \frac{h}{6}\Big(f(x_0) + 4f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_1)\Big) = \frac{\pi}{12}\left(1 + 4\sqrt{2} + 1\right) = \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi$$
$$\approx 2.0045598,$$

Sprendimas

Kai N = 2

$$h = \frac{\pi}{4}, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}, \ x_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}, x_{\frac{3}{2}} = = \frac{3\pi}{8},$$

$$f(x_0) = 1, \ f(x_1) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}, \ f(x_2) = 1,$$

$$f(x_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \tfrac{\sqrt{6}}{2}, \ f(x_{\frac{3}{2}}) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \tfrac{\sqrt{6}}{2}.$$

Tai

$$S_2 = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{2}\Big(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)\Big) \approx 1.9145895.$$

Vertinkime paklaidą

$$|R_2| \leq \frac{|S_2 - S_1|}{2^4 - 1} = \frac{|1.9145895 - 2.0045598|}{15} \approx 5.\,998 \times 10^{-3} > 10^{-3}.$$

Tikslumas nepakankamas, todėl didinkime integravimo mazgų skaičių.

Sprendimas

Kai N = 4

$$h = \frac{\pi}{8}, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{8}, x_4 = \frac{\pi}{2},$$
$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{16}, x_{\frac{3}{2}} = \frac{3\pi}{16}, x_{\frac{5}{2}} = \frac{5\pi}{16}, x_{\frac{7}{2}} = \frac{7\pi}{16}.$$
$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2},\ f(x_2) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2},$$
$$f(x_3) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}, f(x_4) = 1,$$
$$f(x_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \approx 1.070722,\ f(x_{\frac{3}{2}}) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)} \approx 1.361453,$$
$$f(x_{\frac{5}{2}}) \approx 1.361453,\ f(x_{\frac{7}{2}}) \approx 1.070722.$$

Sprendimas

Taigi

$$S_4 = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{4}\Big(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)\Big) \approx 1.910141.$$

Vertiname

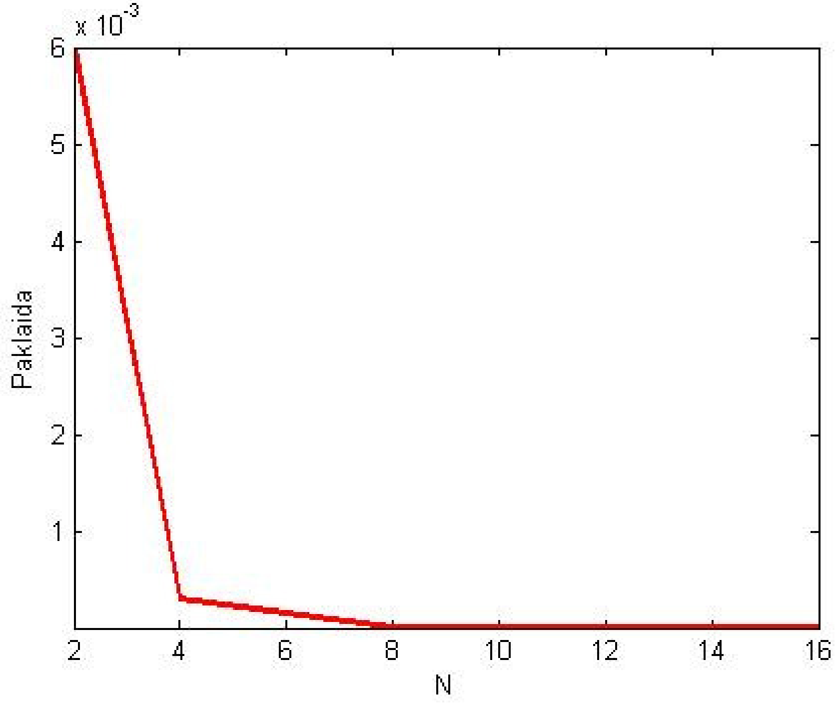
$$|R_4| \leq \frac{|S_4 - S_2|}{2^4 - 1} = \frac{|1.910141 - 1.9145895|}{15} = 2.9657 \times 10^{-4} < 10^{-3}.$$

Tikslumas tinkamas, tai

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2(2x)}dx \approx 1.910141 - 2.9657 \times 10^{-4} \approx 1.9098.$$

Rezultatai su Matlab su 10^{-10} tikslumu

N	1	2	4	8	16
S_N	2.004560	1.914589	1.910141	1.910099	1.910099
$\lvert R_{2N} \rvert$	-	0.005998	0.000297	0.000003	$8 \cdot 10^{-10}$
$S_{2N} + R_{2N}$	-	1.908591	1.909845	1.910096	1.910099



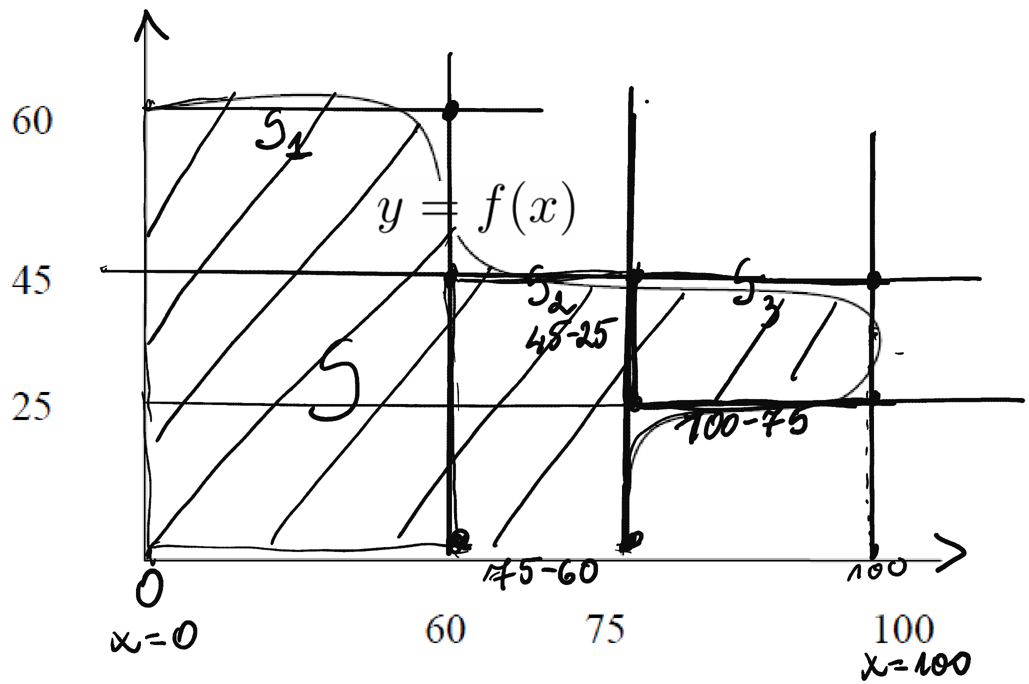
Skaitinio integravimo įrašų metu išspręstos užduotys

1 pavyzdys

Atsižvelgdami į apibrėžtinio integralo geometrinę interpretaciją, apytiksliai intervale [0, 100] suintegruokite brėžinyje pateiktą funkciją.

$$\int_0^{100} f(x)\,dx = S \approx S_1 + S_2 + S_3 = 60\cdot 60 + 45\cdot 15 + 20\cdot 25$$
$$= \boxed{4775\ (\text{kv. v}).}$$

Ats.: $\int_0^{100} f(x)\,dx \approx 4775.$



2 pavyzdys

Apskaičiuoti apibrėžtinio integralo

$$\int_0^1 x^4 dx$$

artinius su $N = 2$, $N = 4$, taikant vidurio (bendroji) stačiakampių metodą. Apskaičiuokite realias paklaidas.

Sprendimas

Vidurio stačiakampių formulė:

$$I_N = h\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}}),\quad \text{čia } f(x)=x^4.$$

Integravimo taškų apskaičiavimas

$$h=\frac{b-a}{N},\quad x_0=\underset{0}{\underset{\|}{a}},\quad x_N=\underset{1}{\underset{\|}{b}},\quad x_i=x_{i-1}+h,\ i=\overline{1,N},\quad x_{i-\frac{1}{2}}=\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\ i=\overline{1,N}.$$

Jei $N=2$, tai $h=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$, $x_0=0$, $x_1=x_0+h=\frac{1}{2}$, $x_2=x_1+h=1$,

$$x_{\frac{1}{2}}=\frac{x_0+x_1}{2}=\frac{1}{4},\quad x_{\frac{3}{2}}=\frac{x_1+x_0}{2}=\frac{3}{4},$$

$$f(x_{\frac{1}{2}})=\{x^4\}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256},\quad f(x_{\frac{3}{2}})=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}.$$

Taigi, kai $N=2$:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$x_{i-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
$f(x_{i-\frac{1}{2}})$	$\frac{1}{256}$	$\frac{81}{256}$	

Kai $N=4$, $h=\frac{1}{4}$

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$x_{i-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	
$f(x_{i-\frac{1}{2}})$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{81}{4096}$	$\frac{625}{4096}$	$\frac{2401}{4096}$	

Taigi $\boxed{\int_0^1 x^4\,dx}$ artiniai yra

$$I_2=h\cdot\left(f(x_{\frac{1}{2}})+f(x_{\frac{3}{2}})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{256}+\frac{81}{256}\right)=\frac{41}{256}\approx 0{,}160156,$$

$$I_4=h\left(f(x_{\frac{1}{2}})+f(x_{\frac{3}{2}})+f(x_{\frac{5}{2}})+f(x_{\frac{7}{2}})\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4096}+\frac{81}{4096}+\frac{625}{4096}+\frac{2401}{4096}\right)$$

$$=\frac{777}{4096}\approx 0{,}189697.$$

Sprendimas

$$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

Realios absoliutinės paklaidos

$$\varepsilon_N = |f(x) - I_N|$$

Kai $N = 2$,

$$\varepsilon_2 = \left|0.2 - \frac{41}{256}\right| \approx \underline{0.0398},$$

sumažėjo 4 kartus

Kai $N = 4$,

$$\varepsilon_4 = \left|0.2 - \frac{777}{4096}\right| \approx \underline{0.0103}.$$

3 pavyzdys

Kokie teoriniai paklaidų įverčiai padaromi, skaičiuojant apibrėžtinį integralą

$$\int_0^1 x^4 dx$$

apytiksliai taikant vidurio (bendrąją) stačiakampių formulę, kai $N = 2$ ir $N = 4$?

Sprendimas

Teorinis įvertis

$$|R_N| \le \frac{h^2(b-a)}{24} \cdot M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Išvestinių apskaičiavimas

$$f(x) = x^4, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = (4x^3)' = 12x^2.$$

Tai

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |12x^2| = 12.$$

Jei $N=2$, tai $h = \frac{1}{2}$, jei $N=4$, tai $h = \frac{1}{4}$.

Vadinasi

$$|R_2| \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1}{24} \cdot 12 = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

$$|R_4| \le \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 1}{24} \cdot 12 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Pastaba $|R_2| = 4 \cdot |R_4| = 4 \cdot 0{,}03125.$

4 pavyzdys

Apskaičiuoti apibrėžtinio integralo

$$\int_0^1 x^4 dx$$

artinius su $N = 2$, $N = 4$, taikant trapecijų metodą. Apskaičiuokite realias paklaidas.

Sprendimas

Trapecijų formulė:

$$I_N = h\left(\frac{\overset{=0}{f(a)}+\overset{=1}{f(b)}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right), \quad f(x)=x^4.$$

Naudodami 3 pavyzdžio skaičiavimus, gauname

jei $N=2$, $h=\frac{1}{2}$,

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{16}$	1

jei $N=4$, $h=\frac{1}{4}$

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{81}{256}$	1

Vadinasi

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{0+1}{2} + \frac{1}{16}\right) = \frac{9}{32} \approx 0,28125,$$

$$I_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{256} + \frac{1}{16} + \frac{81}{256}\right) = \frac{113}{512} \approx 0,220703$$

Realios absoliutinės paklaidos

$$|\varepsilon_2| = |f(x) - I_2| = \left|\frac{1}{5} - \frac{9}{32}\right| \approx 0.081,$$

$$|\varepsilon_4| = \left|\frac{1}{5} - \frac{113}{512}\right| \approx 0.021,$$ Pastaba $|\varepsilon_2| \approx 4\cdot|\varepsilon_4|$.

Sprendimas

Vidurio stačiakampių metode

$|E_4| \approx 0.0103$, t. y. ≈ 2 kartus tiksliau nei su

trapecijų metodu.

5 pavyzdys

Kokie teoriniai paklaidų įverčiai padaromi, skaičiuojant apibrėžtinį integralą

$$\int_0^1 x^4 dx$$

apytiksliai, taikant trapecijų formulę, kai $N = 2$ ir $N = 4$?

Sprendimas

Teorinis paklaidos įvertis

$$|R_n| \le \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot M_2 .$$

Taikydami 4 pavyzdžio skaičiavimus, gauname

Jei $N=2$, $|R_2| \le \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1}{12} \cdot 12 = \dfrac{1}{4}$ (stačiakampių metodu $\frac{1}{16}$)

Jei $N=4$, $|R_4| \le \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 1}{12} \cdot 12 = \dfrac{1}{16}$ (— " — " — " — $\frac{1}{32}$)

Tikrai $|R_2| = 4 \cdot |R_4|$,

šiuo atveju $|R_2|$, $|R_4|$ yra du kartus didesni nei

gautieji ~~4~~ 3 pavyzdyje.

6 pavyzdys

Apskaičiuoti apibrėžtinio integralo

$$\int_0^1 x^4 dx$$

artinius su $N = 2$, $N = 4$, taikant Simpsono metodą. Apskaičiuokite realias paklaidas.

Sprendimas

Simpsono formulė

$$I_N = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)\right).$$

Taikydami 3 ir 6 pavyzdžio skaičiavimus

Jei $N=2$

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{16}$	1
$x_{i-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
$f(x_{i-\frac{1}{2}})$	$\frac{1}{256}$	$\frac{81}{256}$	

Jei $N=4$

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{81}{256}$	1
$x_{i-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	
$f(x_{i-\frac{1}{2}})$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{81}{4096}$	$\frac{625}{4096}$	$\frac{2401}{4096}$	

Jei $N=2$, tai

$$I_2 = \frac{h}{6}\Big(\overbrace{f(x_0) + 4f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_1)}^{i=1} + \overbrace{f(x_1) + 4f(x_{\frac{3}{2}}) + f(x_2)}^{i=2}\Big)$$

$$= \frac{h}{6}\Big(f(x_0) + f(x_2) + 2f(x_1) + 4\big(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{3/2})\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{12}\Big(0 + 1 + 2\cdot\frac{1}{16} + 4\Big(\frac{1}{256} + \frac{81}{256}\Big)\Big) = \frac{77}{384} \approx 0{,}200521,$$

Jei $N=4$,

$$I_4 = \frac{h}{6}\Big(f(x_0) + f(x_4) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) + 4\big(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + f(x_{\frac{5}{2}}) + f(x_{\frac{7}{2}})\big)\Big) = \frac{1229}{6144} \approx 0.2000326.$$

Sprendimas

Absoliutinės realios paklaidos.

$$|\varepsilon_2| = |f(x) - I_2| = \left|\frac{1}{5} - \frac{77}{384}\right| \approx 5{,}2\cdot 10^{-4},$$

$$|\varepsilon_4| = \left|\frac{1}{5} - I_4\right| = \left|\frac{1}{5} - \frac{1229}{6144}\right| \approx 3{,}3\cdot 10^{-5}.$$

Taigi šiuo atveju rezultatai tikslesni, nei 2 ir 4 pavyzdžio atveju.

7 pavyzdys

Kokie teoriniai paklaidų įverčiai padaromi, skaičiuojant apibrėžtinį integralą

$$\int_0^1 x^4 dx$$

Apytiksliai, taikant Simpsono formulę, kai $N = 2$ ir $N = 4$?

Sprendimas

Teorinis paklaidos įvertis

$$|R_N| \le \frac{h^4(b-a)}{2880} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(IV)}(x)|.$$

4 pavyzdyje gavome $f''(x) = 12x^2$, todėl

$$f^{(III)}(x) = (12x^2)' = 24x, \quad o \quad f^{(IV)}(x) = (24x)' = 24.$$

Taigi

$$M_4 = 24.$$

Vadinasi

$$|R_2| \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 1}{2880} \cdot 24 = \frac{1}{1920} \approx 5.2 \cdot 10^{-4},$$

$$|R_4| \le \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot 1}{2880} \cdot 24 = \frac{1}{30720} \approx 3.3 \cdot 10^{-5}.$$

Taigi Simpsono metodas, iš nagrinėtų metodų, yra tiksliausias.