A fundamentação teórica fundamental para modelagem de ROV é descrita em Fossen (Fossen, 2021), onde é demonstrado o modelo matemático para uma embarcação marítima com 6 DOFs. As equações de movimento adotadas do modelo dinâmico de Fossen contam com a equação de cinemática, equação 1, e a equação de cinética, equação 2.

$$\dot{\eta} = J(\eta)v \tag{1}$$

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau \tag{2}$$

Onde:

- $J(\eta)$ – É a matriz de transformação entre Body e NED;
- M – É a matriz de massa total;
- C – É a matriz de Coriolis;
- D – É a matriz de amortecimento hidrostático;
- g – É o vetor geral de restauração de força;

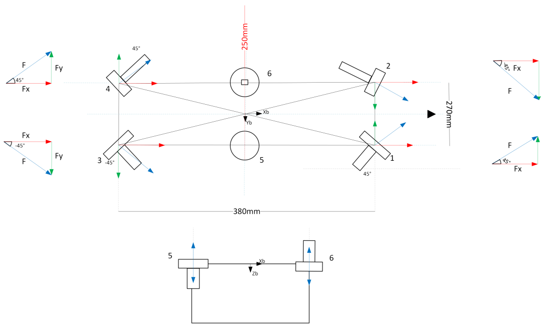
A equação 1 representa a cinemática do sistema, descrevendo assim os aspectos geométricos da movimentação do ROV em relação a diferentes coordenadas, enquanto a equação 2 representa a cinética do modelo, que consiste na análise de forças e momentos incluídas no ROV durante o movimento.

Baseando-se nas equações de cinemática e cinética para 6 DOFs é possível modelar o sistema do BlueROV light, que só é capaz de se movimentar em 4 DOFs. Dessa forma, os graus de liberdade que não são acessados pelo robô são zerados nas matrizes.

0.1 Modelo e Alocação de Thruster

O modelo de ROV utilizado (BlueRov2 light) conta com 6 thrusters, como é possível visualizar na figura 1, sendo esses 4 horizontais e 2 verticais, tendo sua configuração ilustrada também na figura 1. Dessa forma, os thrusters dianteiros (1 e 2) giram no sentido anti-horário e os traseiros (3 e 4) giram no sentido horário.

Figura 1: Diagrama de thruster e forças.



Fonte: Autores.

Apesar da configuração física atípica dos thrusters, posicionados em direções opostas, a alocação de forças foi corretamente realizada graças à rotação em sentidos contrários. Caso todos os thrusters rotacionassem no mesmo sentido, essa disposição geraria forças opostas, comprometendo o controle do sistema. No entanto, como evidenciado na Figura 1, a rotação alternada dos thrusters soluciona esse problema, permitindo a geração das forças desejadas.

Conforme apresentado por (WU, 2018), o modelo de um thruster pode ser apresentado de forma linear pela equação 1. Onde a força do thruster é representada pelo vetor 4, os inputs de controle são representados por 5, e os coeficientes de thruster são representados pela matriz diagonal 6.

$$F = Ku \tag{3}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_n \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & ... & K_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

Considerando o vetor de força f em 7 e o vetor de momentos r em 8, podemos calcular as forças e momentos em 6 DOFs pela seguinte fórmula:

$$f = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T \tag{7}$$

$$r = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} f \\ r \times f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_z l_y - F_y l_z \\ F_x l_z - F_z l_x \\ F_y l_x - F_x l_y \end{bmatrix} \tag{9}$$

Considerando a limitação do BlueROV para somente 4 DOFs, é possível ajustar as equações 8 e 9 para obter as forças em 4 DOFs como desejado. Sendo necessário zerar os momentos que não serão aplicados ao ROV, tendo como resultado então:

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_z \end{bmatrix}^T \tag{10}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} f \\ r \times f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_y l_x - F_x l_y \end{bmatrix} \tag{11}$$

A alocação de controle é então modelada por:

$$\tau = T(\alpha)F = T(\alpha)Ku \tag{12}$$

Onde T é a matriz de alocação, onde $T \in \mathbb{R}^{4\times6}$ e α é o vetor de ângulos de rotação dos thrusters, onde $\alpha \in \mathbb{R}^6$. Como consequência, a matriz de configuração de thruster T pode ser calculada usando a equação 11. Uma vez determinadas as forças e momentos dos thrusters, é possível formalizar o problema da alocação, cujo objetivo é distribuir corretamente os esforços para os propulsores, para realizar a ação de controle desejada.

0.2 Alocação de controle

(WU, 2018) define a alocação de controle como o processo que computa o sinal de entrada do controle u e o aplica nos thrusters, de forma que o controle geral de forças τ possa ser gerado. Partindo da equação 11, é possível calcular o vetor de entradas de controle através da seguinte equação:

$$u = K^{-1}T^{-1}\tau \tag{13}$$

Contudo, levando em conta que a matriz T é uma matriz não quadrática, é aplicada a Moore-Penrose pseudo-inversa T^{+}, dada por:

$$T^{+} = T^{T}(TT^{T})^{-1} \tag{14}$$

Assim, podemos obter o vetor de entradas do controle por:

$$u = K^{-1}T^{+}\tau \tag{15}$$

0.3 Formulação da Otimização

Em (JOHANSEN; FOSSEN; TØNDEL, 2005) é sugerida uma formulação de otimização para o problema de alocação de controle. É considerado então o seguinte problema de otimização:

$$min_{u,s,\tilde{u}}(s^{T}Qs + u^{T}Wu + \beta\tilde{u}) \tag{16}$$

A equação 16 está sujeita ao seguinte:

$$Tu = \tau + s \tag{17}$$

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \tag{18}$$

$$-\tilde{u} \leq u_1, u_2, ..., u_N \leq \tilde{u} \tag{19}$$

A variável s é o termo que garante a constrição proposta em 18, que faz com que o resultado da força generalizada Bu desvie das especificações de τ caso seja necessário. O segundo termo do critério corresponde ao critério de mínimos quadrados, enquanto o terceiro termo minimiza a maior força entre os atuadores, devido a 19. O parâmetro $\beta \geq 0$ controla a ponderação relativa desses dois critérios, permitindo que sejam tratados os compromissos entre o uso médio e o pior caso do controle.