

A fundamentação teórica fundamental para modelagem de ROV é descrita em *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control* (FOSSEN, 2021), onde é demonstrado o modelo matemático para uma embarcação marítima com 6 DOFs. As equações de movimento adotadas do modelo dinâmico apresentado por Fossen contam com a equação de cinemática, Equação 1, e a equação de cinética, Equação 2.

$$\dot{\eta} = J(\eta)v \quad (1)$$

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau \quad (2)$$

Onde:

- $J(\eta)$  – É a matriz de transformação entre Body e NED;
- $M$  – É a matriz de massa total;
- $C$  – É a matriz de Coriolis;
- $D$  – É a matriz de amortecimento hidrostático;
- $g$  – É o vetor geral de restauração de força;

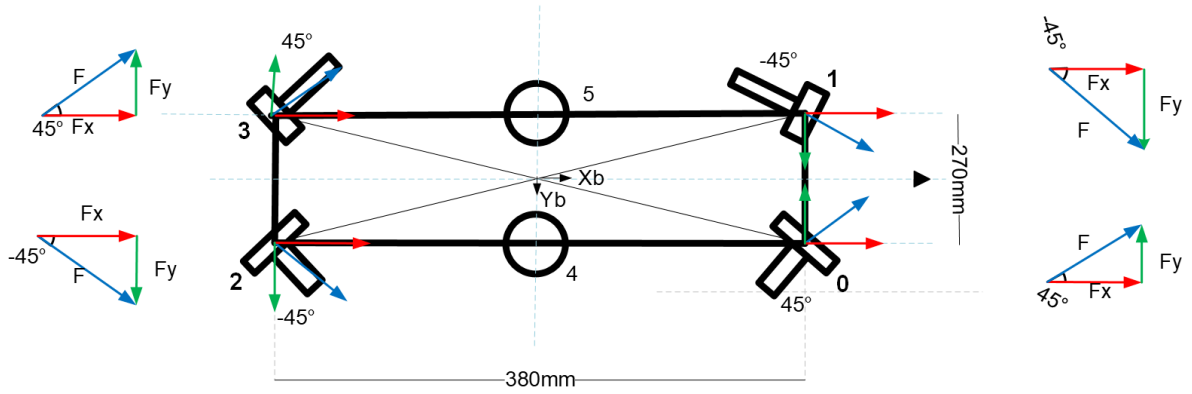
As transformações em *Body* e *NED* (Norte, Leste, Descer) são essenciais para a modelagem de veículos subaquáticos, pois permitem a conversão entre diferentes sistemas de coordenadas utilizados na navegação e controle do ROV. Essas transformações são cruciais para garantir que os cálculos de movimento e controle sejam precisos e consistentes, independentemente do referencial adotado. Sendo *Body* o referencial atrelado ao veículo, e *NED* o referencial fixo ao solo. A Equação 1 representa a cinemática do sistema, descrevendo assim os aspectos geométricos da movimentação do ROV em relação a diferentes coordenadas, enquanto a Equação 2 representa a cinética do modelo, que consiste na análise de forças e momentos incluídas no ROV durante o movimento.

Baseando-se nas equações de cinemática e cinética para 6 DOFs, é possível modelar o sistema do *BlueROV2 Standard*, que só é capaz de se movimentar em 4 DOFs. Dessa forma, os graus de liberdade que não são acessados pelo robô são zerados nas matrizes.

## 0.1 Modelo e Alocação de *Thruster*

O modelo de ROV utilizado (BlueROV2 standard) conta com 6 *thrusters*, como é possível visualizar na Figura 1, sendo 4 horizontais e 2 verticais, tendo sua configuração ilustrada também na Figura 1. Dessa forma, os *thrusters* dianteiros (0 e 1) giram no sentido anti-horário e os traseiros (2 e 3) giram no sentido horário.

Figura 1: Diagrama de *thruster* e forças, vista superior dos *thrusters*



Fonte: Autores.

Apesar da configuração física atípica dos *thrusters*, posicionados em direções opostas, a alocação de forças é corretamente realizada graças à rotação em sentidos contrários. Caso todos os *thrusters* rotacionassem no mesmo sentido, essa disposição geraria forças opostas, comprometendo o controle do sistema. No entanto, como evidenciado na Figura 1, a rotação alternada dos *thrusters* soluciona esse problema, permitindo a geração das forças desejadas.

Conforme apresentado por Wu (2018), o modelo de um *thruster* pode ser apresentado de forma linear pela Equação 3. Onde a força do *thruster* é representada pelo Vetor 4, os *inputs* de controle são representados pelo Vetor 5, e os coeficientes de *thruster* são representados pela Matriz diagonal 6.

$$F = Ku \quad (3)$$

$$F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n]^T \quad (4)$$

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T \quad (5)$$

$$K = \text{diag} [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n] \quad (6)$$

Considerando o Vetor de força  $f$  em 7 e o Vetor de momentos  $r$  em 8, podemos calcular as forças e momentos em 6 DOFs pela seguinte fórmula:

$$f = [f_x \ f_y \ f_z]^T \quad (7)$$

$$r = [l_x \ l_y \ l_z]^T \quad (8)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} f \\ r \times f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_z l_y - F_y l_z \\ F_x l_z - F_z l_x \\ F_y l_x - F_x l_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

Considerando a limitação do BlueROV2 standard para somente 4 DOFs, é possível ajustar as Equações 8 e 9 para obter as forças em 4 DOFs como desejado. Sendo necessário zerar os momentos que não serão aplicados ao ROV, tem-se então como resultado:

$$r = [0 \ 0 \ l_z]^T \quad (10)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} f \\ r \times f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_y l_x - F_x l_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

A alocação de controle é então modelada por:

$$\tau = T(\alpha)F = T(\alpha)Ku \quad (12)$$

Sendo  $T$  a matriz de alocação, onde  $T \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$  e  $\alpha$  o vetor de ângulos de rotação dos *thrusters*, onde  $\alpha \in \mathbb{R}^6$ . Como consequência, a matriz de configuração de *thruster*  $T$  pode ser calculada usando a Equação 11. Uma vez determinadas as forças e momentos dos *thrusters*, é possível formalizar o problema da alocação, cujo objetivo é distribuir corretamente os esforços para os propulsores, para realizar a ação de controle desejada.

## 0.2 Alocação de controle

Wu (2018) define a alocação de controle como o processo que computa o sinal de entrada do controle  $u$  e o aplica nos *thrusters*, de forma que o controle geral de forças  $\tau$  possa ser gerado. Partindo da Equação 12, é possível calcular o vetor de entradas de controle através da seguinte equação:

$$u = K^{-1}T^{-1}\tau \quad (13)$$

Contudo, levando em conta que a matriz  $T$  é uma matriz não quadrática, é aplicada a Moore-Penrose pseudo-inversa  $T^+$ , dada por:

$$T^+ = T^T(TT^T)^{-1} \quad (14)$$

Assim, podemos obter o vetor de entradas do controle por:

$$u = K^{-1}T^+\tau \quad (15)$$

## 0.3 Formulação da Otimização

Em *Efficient optimal constrained control allocation via multiparametric programming* (JOHANSEN; FOSSEN; TONDEL, 2005) é sugerida uma formulação de otimização para o problema de alocação de controle. É considerado então o seguinte problema de otimização:

$$\min_{u,s,\tilde{u}}(s^T Qs + u^T W u + \beta \tilde{u}) \quad (16)$$

A Equação 16 está sujeita ao seguinte:

$$Tu = \tau + s \quad (17)$$

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (18)$$

$$-\tilde{u} \leq u_1, u_2, \dots, u_N \leq \tilde{u} \quad (19)$$

A variável  $s$  é o termo que garante a restrição proposta em 18, que faz com que o resultado da força generalizada  $Tu$  desvie das especificações de  $\tau$ , caso seja necessário. O segundo termo do critério corresponde ao critério de mínimos quadrados, enquanto o terceiro termo minimiza a maior força entre os atuadores, devido a 19. O parâmetro  $\beta \geq 0$  controla a ponderação relativa desses dois critérios, permitindo que sejam tratados os compromissos entre o uso médio e o pior caso do controle. Os parâmetros  $u_{min}$  e  $u_{max}$  representam os limites mínimos e máximos de cada *thruster*, respectivamente e o parâmetro  $u_N$  representa o limite absoluto de magnitude para cada *thruster* no termo de minimização  $\beta \tilde{u}$ .