Lecture 6

第五章 特徵值與特徵向量

大綱

- 冪次法 (Power Method)
- 逆冪次法 (Inverse Power Method)
- QR法
- 進階問題

簡介

- 基本定義為：若且唯若Ax=λx，則實數或複數λ是矩陣A的特徵值，且非零向量x為A相對應的特徵向量(假設A是實數矩陣)。但要注意的是，如果A不是對稱的，它可能有複數特徵值。
  - *特徵向量必為非零nx1矩陣，即表示至少有一非零元素。*
  - *特徵向量的任何非零純量倍仍為其特徵向量。*

  若$\alpha \neq 0$, 且$AX = \lambda X$, 則$A(\alpha(\alpha = \alpha AX = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X)$

特徵值與特徵向量的數學求法

- 1.由 $|A-\lambda E|=0$，求A的n個特徵值.
- 2.由 $Ax=\lambda x$，求抽象矩陣的特徵值.
- 3.由$(A-\lambda E)x=0$ ，求A 的特徵向量.

簡介

- 冪次法(Power method)，它可求矩陣A的一個特定特徵值，及其相對的特徵向量。基本冪次法可求得**主導特徵值(Dominant eigenvalue)**，也就是絕對值最大的特徵值。不同形式的冪次法可用以求絕對值最小的特徵值，或最接近某一數的特徵值。

簡介

- QR法是利用QR因式分解以求得矩陣的特徵值。因為此方法需要做重覆的因式分解，所以通常會先做前置的相似轉換，**將原矩陣轉換成Hessenberg矩陣的形式**(看P4-29,Hessenberg形式的相似轉換：B=HAH)。
- 如果**A為對稱，其Hessenberg形式是三對角線矩陣**。QR法會產生一序列的矩陣，其**會收斂到一個很容易求得特徵值的相似矩陣**。
- 因為QR法不能求特徵向量，也考慮用逆迭代(Inverse iteration)法求任何特定特徵值的相對特徵向量。

簡介

- 特徵值與特徵向量是非常重要的，包括解微分方程和求結構的物理特性，如主應力、慣性矩等。
- 有許多迭代法，在決定其是否收斂時，特徵值扮演關鍵角色。

問題5-A 主慣量 (Principal Inertias)

- 一個三維物體的主慣量和主應力軸，可以分別用它的慣量矩陣 (Inertial matrix)的特徵值和特徵向量來求得。

問題5-A 主慣量 (Principal Inertias)

- 考慮一個物體，在(1,0,0)、(1,2,0)和(0,0,1)各有一個單位質量的質點。(見圖5.1)它的慣量矩陣為

$$G=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

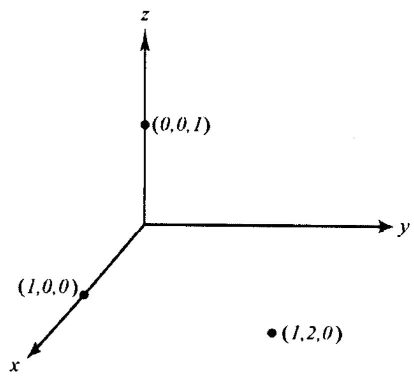


圖 5.1　包含三個單位質點的物體

問題5-A 主慣量 (Principal Inertias)

- 慣量矩陣的通式為

$$G=\begin{bmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz}\end{bmatrix}$$

- 其中物體繞x、y及z軸的慣性矩分別為

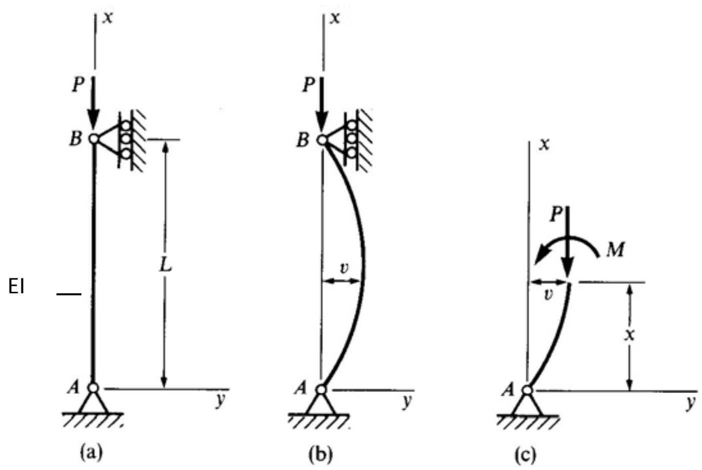
$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)\,dm,\quad I_{yy}=\int(x^2+z^2)\,dm,\quad I_{zz}=\int(x^2+y^2)\,dm$$

而相對應之慣性積爲

$$I_{xy}=I_{yx}=\int xy\,dm,\quad I_{xz}=I_{zx}=\int xz\,dm,\quad I_{yz}=I_{zy}=\int yz\,dm$$

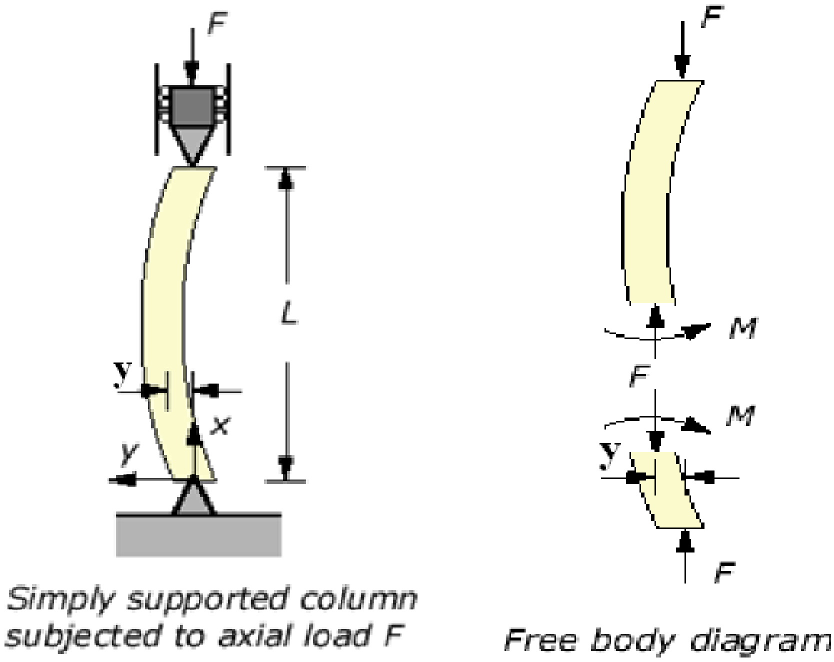
細長柱之挫曲

- 承受壓縮負荷的細長柱(垂直樑)，在承受遠低於材料降服強度所需之力量時造成彎曲而破壞(永久變形或斷裂)之情況稱之。



細長柱之挫曲

- *受軸向力F之簡單支撐垂直樑，長度為L，若其橫向位移為y，則*



細長柱之挫曲

- The right schematic shows the forces and moments acting on a cross-section in the buckled column. Moment equilibrium on the lower free body yields a solution for the internal bending moment *M*,

$$Fw - M = 0$$

- Recall the relationship between the moment *M* and the transverse displacement *w* for an Euler-Bernoulli beam,

$$M = EI\frac{d\chi}{dx} = -EI\frac{d\theta}{dx} = -EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

- Eliminating *M* from the above two equations results in the governing equation for the buckled slender column,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EI}y = 0$$

細長柱之挫曲

- **Buckling Solutions**
- The governing equation is a second order homogeneous ordinary differential equation with constant coefficients and can be solved by the method of characteristic equations. The solution is found to be,

$$y(x) = A\sin mx + B\cos mx$$

$$where\ \ m^2 = \frac{F}{EI}$$

- The coefficients *A* and *B* can be determined by the two boundary conditions y(1)=y(0)=0, which yields,

$$\begin{cases} B = 0 \\ A\sin mL = 0 \end{cases}$$

細長柱之挫曲

- **The coefficient *B* is always zero, and for most values of *m*L* the coefficient *A* is required to be zero. However, for special cases of *m*L*, *A* can be nonzero and the column can be buckled. The restriction on *m*L* is also a restriction on the values for the loading *F*; these special values are mathematically called eigenvalues. All other values of *F* lead to trivial solutions (i.e. zero deformation).**

$$\sin ML = 0$$

$$\Rightarrow m = n\frac{\pi}{L} \; where n = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow F = EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

細長柱之挫曲

- **The lowest load that causes buckling is called critical load (n = 1).**

$$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

- **The above equation is usually called Euler's formula. Although Leonard Euler did publish the governing *equation* in 1744, J. L. Lagrange is considered the first to show that a non-trivial solution exists only when *n* is an *integer*. Thomas Young then suggested the critical load (*n* = 1) and pointed out the solution was valid when the column is *slender* in his 1807 book. The "slender" column idea was not quantitatively developed until A. Considère performed a series of 32 tests in 1889.**

細長柱之挫曲

- **The shape function for the buckled shape *w*(*x*) is mathematically called an eigenfunction, and is given by,**

$$y(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

- **Recall that this eigenfunction is strictly valid only for simply-supported columns.**

Source:
http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/columns/theory.cfm

細長柱之挫曲

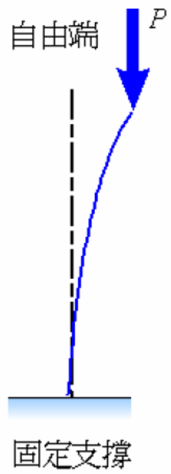
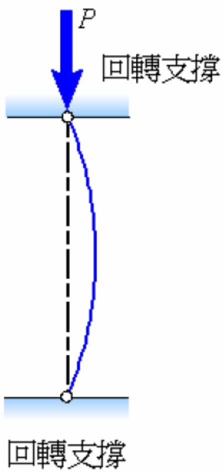
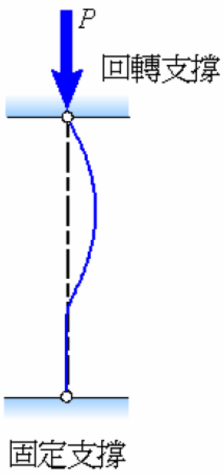
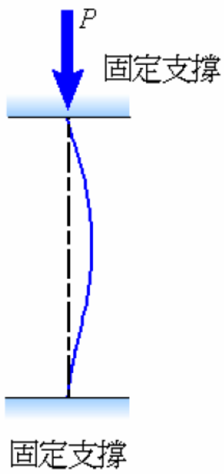
截面旋轉半徑： $k = \sqrt{\dfrac{I}{A}}$

細長比： $\lambda = \dfrac{\text{柱的長度}}{\text{截面旋轉半徑}} = \dfrac{l}{k}$

$$P_{cr} = C\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_r^2}$$

$$\sigma_{cr} = C\frac{\pi^2 EI}{l^2 A} = C\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{k}\right)^2} = C\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_r^2}$$

細長柱之挫曲

限制條件（邊界條件）	一端固定 一端自由	兩端可旋轉	一端固定 一端可旋轉	兩端皆固定
圖	 (a)	 (b)	 (c)	 (d)
積分常數 C	0.25	1	$2.0458 \cong 2$	4
$l_r = \dfrac{l}{\sqrt{C}}$	$2l$	l	$0.69933 \cong 0.7l$	$\dfrac{l}{2}$

問題5-B 樑的挫曲與斷裂

- 一根承受壓縮負荷的細長柱(垂直樑)。假設此樑的端點被限制維持垂直，其餘不限(亦即可以轉動)。以x代表沿此樑的距離(以樑全長為單位)；此樑偏離垂直線的量y(x)可用以下微分方程描述

$$EI\, y''(x) = -F\, y(x)$$

- 其中E為材料的彈性模數(Modulus of elasticity)、I為截面的慣性矩、而F為施加的外力。邊界條件為y(0)=y(1)=0。

問題5-B 樑的挫曲與斷裂

- 若λ=F/(EI)，所以原方程式成為

$$y''(x) = -\lambda y(x)$$

- 參數λ代表所承受的負荷 (以樑的物性參數做尺度化)。當λ達到一臨界值時，此樑開始發生挫曲(Buckling)(在負荷超過該值後可能很快就斷裂)。

問題5-B 樑的挫曲

- $y(x)=\sin(k\pi x)$的函數可滿足邊界條件(對整數k)，而且如果$\lambda=k^2\pi^2$，滿足微分方程式。因此λ的臨界值(此微分方程的最小非零特徵值)為$\lambda=\pi^2 \fallingdotseq 9.8696$。不過，如果邊界條件改變，或截面積不是定值，就必須使用數值方法求解。

問題5-B 樑的挫曲

- 求解邊界值問題的有限差分法(Finite Difference Method)，是在找沿著樑做等間隔分佈的一系列點x_i上的近似解y_i。原來的微分方程被轉換成未知數y_i的線性代數方程組。如果將區間[0,1]劃分為n個子區間，要求$x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$處的近似解(因為x_0和x_n為區間的端點)。微分方程的特徵值問題就成代數的特徵值問題。

問題5-B 樑的挫曲

$Ay = \lambda y$

其中A為$(n-1)\times(n-1)$矩陣。

當n很大時，要求最小的特徵值

$$\mathrm{A} = n^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

冪次法

- 冪次法是用迭代的程序以求出矩陣A的主導特徵值。其基本觀念是，如果x是A的特徵向量，則一定滿足定義

$$\lambda \mathrm{x} = \mathrm{Ax}$$

- 以z做為特徵向量x的初始估計，則

$$\mathrm{w} = \mathrm{Az}$$

- 若z是一個特徵向量，則對z和w的任一分量有 $\lambda \mathrm{z}_\mathrm{k} = \mathrm{w}_k$

冪次法

- 如果z不是特徵向量，就用w做為下個近似值。但因為特徵向量取決於尺度因子，所以將w正規化(Normalize)以得到新的近似值z。

$$\mathbf{z}^{(1)} = [1,1,\cdots,1]^T, \qquad \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)}$$

$$\mathbf{z}^{(2)} = \frac{1}{w_k^{(1)}}\mathbf{w}^{(1)}, \qquad \mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(2)}$$

$$\mathbf{z}^{(3)} = \frac{1}{w_k^{(2)}}\mathbf{w}^{(2)}, \qquad \mathbf{w}^{(3)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(3)}, \cdots$$

冪次法

- 考慮迭代過程與矩陣A的關係 (在此將第i階段的正規化簡記為c_i)

$$\mathbf{z}^{(1)} = [1,1,\cdots,1]^T$$
$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)}$$
$$\mathbf{z}^{(2)} = \frac{1}{c_2}\mathbf{w}^{(1)} = \frac{1}{c_2}\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)}$$
$$\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(2)} = \mathbf{A}\frac{1}{c_2}\mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)} = \frac{1}{c_2}\mathbf{A}^2\mathbf{z}^{(1)}$$
$$\mathbf{z}^{(3)} = \frac{1}{c_3}\mathbf{w}^{(2)} = \frac{1}{c_3}\frac{1}{c_2}\mathbf{A}^2\mathbf{z}^{(1)}$$
$$\mathbf{w}^{(3)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(3)} = \mathbf{A}\frac{1}{c_3}\frac{1}{c_2}\mathbf{A}^2\mathbf{z}^{(1)} = \frac{1}{c_3}\frac{1}{c_2}\mathbf{A}^3\mathbf{z}^{(1)}$$

例題5.1 基本冪次法

- 求矩陣A絕對值最大的特徵值λ，和與其相對的特徵向量

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

步驟 1：初始向量 $\mathbf{z} = [1,1,1]'$ 爲起點。

計算 $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{z} = [27,19,20]'$ 。

取 λ 的第一個估計值爲 $w_1 = 27$ 。

因爲 $\mathbf{w}$ 的第一個分量絕對值最大，設 $k=1$

例題5.1 基本冪次法

步驟 2：將 $\mathbf{w}$ 尺度化以求 $\mathbf{z}$ (使用 k=1 分量)：

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{w}}{w_1} = [1, \frac{19}{27}, \frac{20}{27}]' = [1.0000, 0.7037, 0.7407]'$$

計算 $\mathbf{w} = \mathbf{Az} = [25.1852, 15.1111, 16.0000]'$ 。

對 λ 的估計值爲 $w_1 = 25.1852$ (因爲 k=1 且 $z(1)=1$)。

因爲 $\mathbf{w}$ 的第一個分量絕對值最大，再次設 k=1。

步驟 3：將 $\mathbf{w}$ 尺度化以求 $\mathbf{z}$：

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{w}}{w_1} = [1.0000, 0.6000, 0.6353]'$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{Az} = [24.5647, 13.6471, 14.3059]'$$

λ 的估計值爲 $w_1 = 24.5647$ 。

例題5.1 基本冪次法

綜合整理：三次迭代後得

估計之特徵值： $\lambda \approx 24.5647$

估計之特徵向量： $\mathbf{z} \approx [1.0000, 0.6000, 0.6353]'$

誤差： $\mathbf{Az} - \lambda\mathbf{z} = [0, -1.0918, -1.2999]'$

誤差之最大範數： $\|\mathbf{Az} - \lambda\mathbf{z}\|_\infty = 1.2999$

使用 MATLAB 的內建函數 `eig` 求 $\mathbf{A}$ 的特徵值得：

```
eig(A)=[24.0000,8.0000,16.0000]'
```

由此可看出最大的特徵值是 24。冪次法的近似解朝該值收斂。

例題5.1 基本冪次法

- 主程式：Main_Power_B.m
- 基本冪次法程式：Power_B.m
- MATLAB內建函數：eig(A)

```
clear all;
close all;

A=[21 7 -1;5 7 7;4 -4 20];
maxit=3; tol=0.001;
[z, m] = Power_B(A, maxit, tol);
```


例題5.1 基本冪次法

- 結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)
1.0000	27.0000	10.6301	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	25.1852	3.7248	1.0000	0.7037	0.7407
3.0000	24.5647	1.6976	1.0000	0.6000	0.6353

例題5.2 使用基本冪次法

- 下面矩陣的主導特徵值和次大的特徵值之間有明顯的距離。

$$H = \begin{bmatrix} 41.5 & -31.5 & 21.0 & -10.5 \\ 43.4 & -33.4 & 22.4 & -11.2 \\ 2.2 & -2.2 & 1.7 & -0.8 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

例題5.2 使用基本冪次法

- 主程式：**Main_Power_B_Ex2.m**
- 基本冪次法程式：**Power_B.m**

```
clear all;
close all;

H=[41.5 -31.5 21 -10.5
  43.4 -33.4 22.4 -11.2
  2.2 -2.2 1.7 -0.8
  0.2 -0.2 0.2 0];
maxit=15; tol=0.001;
[z, m] = Power_B(H, maxit, tol);
```

例題5.2 使用基本冪次法

- 結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
1.0000	20.5000	28.2266	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	9.4123	0.5259	0.9670	1.0000	0.0425	0.0094
3.0000	10.0131	0.0146	1.0000	0.9989	-0.0009	0.0002
4.0000	9.9986	0.0010	0.9999	1.0000	0.0001	0.0000
5.0000	10.0000	0.0000	1.0000	1.0000	-0.0000	0.0000

```
Power Method has converged

z = 1.0000
    1.0000
   -0.0000
    0.0000


m =10.0000
```


例題5.2 使用基本冪次法

- 用MATLAB內建函數求得此矩陣特徵值為10、-0.5、0.2和0.1。前兩個特徵值分得很遠($|m_2/m_1|=1/20<<1$)，這和此方法的快速收斂是一致的。

例題 5.3 收斂緩慢的冪次法

- 利用基本冪次法求矩陣H的主導特徵值和相對之特徵向量

$$H = \begin{bmatrix} 40.5 & 10.5 & -21 & 21 \\ 10.5 & 20.5 & -5 & 5 \\ -21 & -5 & 37 & -1 \\ 21 & 5 & -1 & 37 \end{bmatrix}$$

例題 5.3 收斂緩慢的冪次法

- 主程式：Main_Power_B_Ex3.m
- 基本冪次法程式：Power_B.m

```
clear all;
close all;

H=[40.5 10.5 -21.0 21
  10.5 20.5 -5 5
  -21 -5 37 -1
  21 5 -1 37];
maxit=15; tol=0.001;
[z, m] = Power_B(H, maxit, tol)
```

例題 5.3 收斂緩慢的冪次法

- 結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
1.0000	51.0000	46.9255	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	56.6129	26.3181	0.8226	0.5000	0.1613	1.0000
3.0000	60.1385	21.1052	0.9923	0.4077	-0.2615	1.0000
4.0000	71.9385	9.5953	1.0000	0.3535	-0.4728	0.8475
5.0000	71.9923	4.7807	1.0000	0.3385	-0.5715	0.7589
6.0000	71.9990	2.3876	1.0000	0.3346	-0.6194	0.7132
7.0000	71.9999	1.1934	1.0000	0.3337	-0.6431	0.6900
8.0000	72.0000	0.5966	1.0000	0.3334	-0.6549	0.6784
9.0000	72.0000	0.2983	1.0000	0.3334	-0.6608	0.6725
10.0000	72.0000	0.1492	1.0000	0.3333	-0.6637	0.6696
11.0000	72.0000	0.0746	1.0000	0.3333	-0.6652	0.6681
12.0000	72.0000	0.0373	1.0000	0.3333	-0.6659	0.6674
13.0000	72.0000	0.0186	1.0000	0.3333	-0.6663	0.6670
14.0000	72.0000	0.0093	1.0000	0.3333	-0.6665	0.6668
15.0000	72.0000	0.0047	1.0000	0.3333	-0.6666	0.6668

```
z = 1.0000
    0.3333
   -0.6666
    0.6668
m = 72.0000
```


例題 5.3 收斂緩慢的冪次法

- 用MATLAB函數eig求得特徵值為72、36、18和9。特徵值的比值$m_2/m_1=1/2$顯示其收斂速度會比前一例題慢。

Rayleigh商(Rayleigh Quotient)

- 另外一種估計特徵值λ的方式，叫做Rayleigh商(Rayleigh quotient)

$$\text{若}Az=\lambda z\text{，則}$$

$$z'Az=z'\lambda z=\lambda z'z$$

$$\therefore \lambda=\frac{z'w}{z'z}=\frac{z'Az}{z'z}$$

- 當A為對稱時，冪次法結合Rayleigh商，會比基本冪次法更快求得主導特徵值。要使用此種方法，更換使用基本冪次法之MATLAB函數中對λ的定義即可。

Rayleigh商(Rayleigh Quotient)

- 前面基本冪次法中用的infinity範數也可換成歐幾里得範數。計算z=w/‖w‖$_2$，而不再以w的最大分量做尺度化。
- Rayleigh商的形式非常適合使用歐幾里得範數，而不要用max範數來對向量z做尺度化

$$\text{若}\|z\|_2=1\text{，則}$$

$$\therefore \lambda=\frac{z'w}{z'z}=\frac{z'Az}{z'z}=z'w$$

例題5.4 對稱矩陣的主導特徵值

- 在使用Rayleigh商求對稱矩陣主導特徵值時，通常會有的加速收斂。

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2/3 & -4/3 & 4/3 \\ 2/3 & 4 & 0 & 0 \\ -4/3 & 0 & 6 & 0 \\ 4/3 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

例題5.4 對稱矩陣的主導特徵值

- 用基本冪次法所得的主導特徵值的估計值 λ_b、用Rayleigh商所得的估計值λ_r及特徵向量 z。在十次迭代後，基本冪次法的誤差為0.1584；用Rayleigh商所得近似值的誤差為0.1000。

Step	λ_b	λ_r	z_1	z_2	z_3	z_4
1	9.3333	6.3333	0.5000	0.5000	0.7143	1.0000
2	8.0952	7.2792	0.3353	0.2882	0.6941	1.0000
3	7.8353	7.6621	0.2477	0.1757	0.7297	1.0000
4	7.7898	7.8286	0.1885	0.1114	0.7764	1.0000
5	7.8042	7.9083	0.1443	0.0732	0.8210	1.0000
6	7.8344	7.9495	0.1104	0.0497	0.8595	1.0000
7	7.8661	7.9718	0.0842	0.0346	0.8911	1.0000
8	7.8945	7.9842	0.0640	0.0246	0.9164	1.0000
9	7.9181	7.9911	0.0485	0.0178	0.9362	1.0000
10	7.9371	7.9950	0.0366	0.0131	0.9516	1.0000

例題5.4 對稱矩陣的主導特徵值

- 主程式：Main_Power_B_Ex54.m
- 基本冪次法程式：Power_B.m

```
clear all;
close all;

A=[4 2/3 -4/3 4/3;2/3 4 0 0;-4/3 0 6 2;4/3 0 2 6];
maxit=10; tol=0.001;
[z, m] = Power_B(A, maxit, tol);
```


例題5.4 對稱矩陣的主導特徵值

- 基本冪次法結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
1.0000	4.6667	5.0772	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	8.0952	2.1779	0.5000	0.5000	0.7143	1.0000
3.0000	7.8353	1.1516	0.3353	0.2882	0.6941	1.0000
4.0000	7.7898	0.7718	0.2477	0.1757	0.7297	1.0000
5.0000	7.8042	0.5734	0.1885	0.1114	0.7764	1.0000
6.0000	7.8344	0.4424	0.1443	0.0732	0.8210	1.0000
7.0000	7.8661	0.3443	0.1104	0.0497	0.8595	1.0000
8.0000	7.8945	0.2674	0.0842	0.0346	0.8911	1.0000
9.0000	7.9181	0.2064	0.0640	0.0246	0.9164	1.0000
10.0000	7.9371	0.1584	0.0485	0.0178	0.9362	1.0000

例題5.4 對稱矩陣的主導特徵值

- 主程式：Main_Power_RQ_Ex54.m
- Rayleigh商程式：Power_RQ.m

```
clear all;
close all;

A=[4 2/3 -4/3 4/3;2/3 4 0 0;-4/3 0 6
2;4/3 0 2 6];
maxit=10; tol=0.001;
[z, m] = Power_RQ(A, maxit, tol);
```


例題5.4 對稱矩陣的主導特徵值

- Rayleigh商結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
1.0000	6.3333	1.9149	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
2.0000	7.2792	1.3014	0.3527	0.3527	0.5038	0.7053
3.0000	7.6621	0.8722	0.2589	0.2226	0.5360	0.7721
4.0000	7.8286	0.6043	0.1944	0.1378	0.5725	0.7845
5.0000	7.9083	0.4340	0.1467	0.0867	0.6043	0.7783
6.0000	7.9495	0.3191	0.1107	0.0561	0.6296	0.7669
7.0000	7.9718	0.2376	0.0834	0.0375	0.6491	0.7552
8.0000	7.9842	0.1778	0.0627	0.0258	0.6638	0.7449
9.0000	7.9911	0.1333	0.0471	0.0181	0.6748	0.7363
10.0000	7.9950	0.1000	0.0354	0.0130	0.6830	0.7295

例題5.5 對非對稱矩陣使用Rayleigh商

- 考慮例題5.1中的不對稱矩陣。

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 7 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ 4 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

例題5.5 對非對稱矩陣使用Rayleigh商

- 主程式：Main_Power_B_Ex55.m
- 基本冪次法程式：Power_B.m

```
clear all;
close all;

A=[21 7 -1;5 7 7;4 -4 20];
maxit=10; tol=0.001;
[z, m] = Power_B(A, maxit, tol);
```

例題5.5 對非對稱矩陣使用Rayleigh商

- 基本冪次法結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)
1.0000	27.0000	10.6301	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	25.1852	3.7248	1.0000	0.7037	0.7407
3.0000	24.5647	1.6976	1.0000	0.6000	0.6353
4.0000	24.3065	0.9071	1.0000	0.5556	0.5824
5.0000	24.1816	0.5345	1.0000	0.5334	0.5523
6.0000	24.1135	0.3332	1.0000	0.5211	0.5340
7.0000	24.0731	0.2142	1.0000	0.5136	0.5224
8.0000	24.0478	0.1400	1.0000	0.5089	0.5148
9.0000	24.0316	0.0924	1.0000	0.5059	0.5098
10.0000	24.0209	0.0612	1.0000	0.5039	0.5065

例題5.5 對非對稱矩陣使用Rayleigh商

- 主程式：Main_Power_RQ_Ex55.m
- Rayleigh商程式：Power_RQ.m

```
clear all;
close all;

A=[21 7 -1;5 7 7;4 -4 20];
maxit=10; tol=0.001;
[z, m] = Power_RQ(A, maxit, tol);
```

例題5.5 對非對稱矩陣使用Rayleigh商

- Rayleigh商結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)
1.0000	22.0000	3.5590	0.5774	0.5774	0.5774
2.0000	23.3235	1.8227	0.6995	0.4922	0.5181
3.0000	23.7250	0.9638	0.7530	0.4518	0.4784
4.0000	23.8670	0.5533	0.7790	0.4328	0.4537
5.0000	23.9273	0.3392	0.7931	0.4231	0.4381
6.0000	23.9571	0.2165	0.8015	0.4176	0.4280
7.0000	23.9735	0.1412	0.8067	0.4143	0.4214
8.0000	23.9831	0.0932	0.8100	0.4123	0.4170
9.0000	23.9891	0.0618	0.8122	0.4109	0.4141
10.0000	23.9928	0.0411	0.8137	0.4100	0.4121

平移冪次法

- 在某些情況下，可能要求絕對值並非最大之特徵值。
- 因特徵值有平移後特徵向量不變的特性，所以若矩陣A有特徵值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，及相對之特徵向量$v_1, v_2, \ldots, v_n$，則將特徵值進行平移，即A-bI的特徵值為$m_1=\lambda_1-b, m_2=\lambda_2-b, \ldots, m_n=\lambda_n-b$。
- 因此，如果已知(或能夠估計)矩陣A的一個特徵值λ，將冪次法用於矩陣$B=A-\lambda I$，可求得A的另一個特徵值。將平移後之矩陣B的主導特徵值記為m。

例題5.6　平移後矩陣的主導特徵值

- 由例題5-A的慣量矩陣中知，G矩陣有一特徵值6(平移6)，將冪次法用於平移

$$B=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}-6I=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

例題5.6　平移後矩陣的主導特徵值

步驟 1：由 $\mathbf{z}=[1,1,1]'$ 及 $k=1$ 開始。

計算 $\mathbf{w}=\mathbf{Bz}=[-3,-5,0]'$ 。

則 $m=\dfrac{w_k}{z_k}=\dfrac{w_1}{z_1}=-3.0$ 。

步驟 2：現在 $\mathbf{z}=\dfrac{\mathbf{w}}{w_2}=[\dfrac{3}{5},1,0]'$ 且 $k=2$

(因爲 $\mathbf{w}$ 的第二個分量絕對值最大)。

計算 $\mathbf{w}=\mathbf{Bz}=[-\dfrac{13}{5},-\dfrac{21}{5},0]'$ 。

則 $m=\dfrac{w_2}{z_2}=-\dfrac{21}{5}=-4.2$ 。

例題5.6 平移後矩陣的主導特徵值

使用基本冪次法的 MATLAB 函數前五次迭代的結果顯示如下表。

G 相對之特徵值爲 $6+(-4.2361)=1.7639$，它準確到小數四位。此爲最小的 (絕對值) 特徵值。主導特徵值，6.2361，和第二特徵值，6，相距甚近，因此用基本冪次法會有困難。

```
[z, m] = Power_B(B, 10,0.0001)
      iter       m          r          z(1)       z(2)       z(3)
        1     -3.0000     3.6056     1.0000     1.0000     1.0000
        2     -4.2000     0.0800     0.6000     1.0000          0
        3     -4.2381     0.0045     0.6190     1.0000          0
        4     -4.2360     0.0003     0.6180     1.0000          0
        5     -4.2361     0.0000     0.6180     1.0000          0
Power Method has converged
```


例題5.6 MATLAB程式

- **主程式：Main_Power_RQ_Ex56.m**
- **基本冪次法程式：Power_B.m**

```
clear all;
close all;

A1=[5 -2 0;-2 3 0;0 0 6];
A2=[-1 -2 0;-2 -3 0;0 0 0];
maxit=300; tol=0.0001;
[z1, m1] = Power_B(A1, maxit, tol);
[z2, m2] = Power_B(A2, maxit, tol);
```

例題5.6 MATLAB程式

- 結果：

第一個主導特徵值

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)
1.0000	3.0000	3.6056	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	6.0000	1.7159	0.5000	0.1667	1.0000
3.0000	6.0000	0.5107	0.3611	-0.0833	1.0000
4.0000	6.0000	0.1714	0.3287	-0.1620	1.0000
5.0000	6.0000	0.0995	0.3279	-0.1906	1.0000
236.0000	6.2361	0.0001	1.0000	-0.6180	0.0004

Power Method has converged

第二個主導特徵值(平移6之後)

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)
1.0000	-3.0000	3.6056	1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	-4.2000	0.0800	0.6000	1.0000	0
3.0000	-4.2381	0.0045	0.6190	1.0000	0
4.0000	-4.2360	0.0003	0.6180	1.0000	0
5.0000	-4.2361	0.0000	0.6180	1.0000	0

Power Method has converged

加速收斂

- 利用平移加速收斂
- Aitken外插加速收斂

利用平移加速收斂

- 假設矩陣A的特徵值滿足$\lambda_1 > \lambda_2 \geqq \lambda_3 \ldots \geqq \lambda_n$ 且$\lambda_1 > \lambda_n$。若選一個 平移量b，使得

$$|\lambda_1 - b| > |\lambda_n - b|$$

- 則平移後之矩陣的收斂速度是

$$\frac{|\lambda_2 - b|}{|\lambda_1 - b|} \text{和} \frac{|\lambda_n - b|}{|\lambda_1 - b|} \text{兩者中較大者}$$

例題5.3 使用平移加速收斂

- 求下面矩陣H之特徵值

$$H = \begin{bmatrix} 40.5 & 10.5 & -21 & 21 \\ 10.5 & 20.5 & -5 & 5 \\ -21 & -5 & 37 & -1 \\ 21 & 5 & -1 & 37 \end{bmatrix}$$

MATLAB程式

- 主程式：Main_Power_RQ_Translation.m
- Rayleigh商程式：Power_RQ.m

```
clear all;
close all;

H=[40.5 10.5 -21.0 21
  10.5 20.5 -5 5
  -21 -5 37 -1
  21 5 -1 37];
maxit=10; tol=0.001;
[z, m] = Power_RQ(H, maxit, tol)
```


MATLAB程式

- Rayleigh商結果：

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
1.0000	38.5000	19.8557	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
2.0000	57.3453	18.8197	0.5887	0.3578	0.1154	0.7156
3.0000	67.3894	12.1710	0.6661	0.2737	-0.1756	0.6713
4.0000	70.7649	6.5704	0.6956	0.2459	-0.3289	0.5895
5.0000	71.6855	3.3521	0.7041	0.2383	-0.4024	0.5344
6.0000	71.9210	1.6846	0.7063	0.2364	-0.4375	0.5038
7.0000	71.9802	0.8434	0.7069	0.2359	-0.4546	0.4878
8.0000	71.9951	0.4218	0.7071	0.2357	-0.4631	0.4796
9.0000	71.9988	0.2109	0.7071	0.2357	-0.4672	0.4755
10.0000	71.9997	0.1055	0.7071	0.2357	-0.4693	0.4735

例題5.3 使用平移加速收斂

- 將矩陣H平移20後之矩陣變成

$$H = \begin{bmatrix} 40.5 & 10.5 & -21 & 21 \\ 10.5 & 20.5 & -5 & 5 \\ -21 & -5 & 37 & -1 \\ 21 & 5 & -1 & 37 \end{bmatrix} - 20I$$

$$= \begin{bmatrix} 20.5 & 10.5 & -21 & 21 \\ 10.5 & 0.5 & -5 & 5 \\ -21 & -5 & 17 & -1 \\ 21 & 5 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

MATLAB程式

- 主程式：Main_Power_RQ_Translation.m
- Rayleigh商程式：Power_RQ.m

```
clear all;
close all;

H=[20.5 10.5 -21.0 21
  10.5 0.5 -5 5
  -21 -5 17 -1
  21 5 -1 17];
maxit=10; tol=0.0001;
[z, m] = Power_RQ(H, maxit, tol)
```

MATLAB程式

- **Rayleigh商結果：**

iter	m	r	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
1.0000	18.5000	19.8557	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
2.0000	45.1032	14.7451	0.5711	0.2027	-0.1842	0.7738
3.0000	51.2577	5.1971	0.7156	0.2295	-0.3564	0.5552
4.0000	51.9300	1.5980	0.7031	0.2365	-0.4423	0.5041
5.0000	51.9934	0.4880	0.7078	0.2354	-0.4614	0.4804
6.0000	51.9994	0.1495	0.7070	0.2358	-0.4686	0.4744
7.0000	51.9999	0.0459	0.7071	0.2357	-0.4705	0.4723
8.0000	52.0000	0.0141	0.7071	0.2357	-0.4711	0.4717
9.0000	52.0000	0.0043	0.7071	0.2357	-0.4713	0.4715
10.0000	52.0000	0.0013	0.7071	0.2357	-0.4714	0.4714

利用Aitken外插加速收斂

- **利用對主導特徵值在第k階段的估計值m_k，k≧3，和前兩次的估計值m_{k-1}及m_{k-2}，可求得更好的估計值m，其關係式為**

$$m = m_k - \frac{(m_k - m_{k-1})^2}{[m_k - m_{k-1}] - [m_{k-1} - m_{k-2}]}$$

例題5.3 使用Aitken外插加速收斂

- 求下面矩陣H之特徵值

$$H = \begin{bmatrix} 40.5 & 10.5 & -21 & 21 \\ 10.5 & 20.5 & -5 & 5 \\ -21 & -5 & 37 & -1 \\ 21 & 5 & -1 & 37 \end{bmatrix}$$

MATLAB程式

- 主程式：Main_Power_RQ_Aitken.m
- Rayleigh商+ Aitken程式：Power_RQ_Aitken.m

```
clear all;
close all;

H=[40.5 10.5 -21.0 21
  10.5 20.5 -5 5
  -21 -5 37 -1
  21 5 -1 37];
maxit=10; tol=0.001;
[z, m, M] = Power_RQ_Aitken(H, maxit, tol)
```

MATLAB程式

- **Rayleigh商執行前10次之結果比較：**

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m =	38.5000	57.3453	67.3894	70.7649	71.6855	71.9210	71.9802	71.9951	71.9988	71.9997
M =	0	0	78.8517	72.4734	72.0308	72.0019	72.0001	72.0000	72.0000	72.0000

逆冪次法 (Inverse Power Method)

- 逆冪次法可求得A之所有特徵值中絕對值最小的一個。它是**利用B=A^{-1}的特徵值為A之特徵值的倒數**。
  - *步驟1：將冪次法用於B=A^{-1}以求得其主導特徵值m。*
  - *步驟2：求m的倒數，即為A之特徵值中絕對值最小的一個。*

$$AX = \lambda X \rightarrow A^{-1}X = \lambda^{-1}X$$

$$\lambda = \frac{1}{A^{-1}\text{的主導特徵值}}$$

逆冪次法 (Inverse Power Method)

- 但不想真的去求A^{-1}，在冪次法要計算$A^{-1}z=w$以得到特徵向量的新近似值w的時候，實際上是求解方程組Aw=z以得到w。這就是一個LU因式分解，因為在每一個階段，都需要解一個係數矩陣相同只有右側項不同的線性方程組。
  - 步驟1：先給初始值w，則z=w/‖w‖，使用因式分解法將A分解成LU後解出迭代之w。
  - 步驟2：繼續迭代解w及z。
  - 步驟3: 其特徵值為 $m = z^T w$

例題5.7　使用逆冪次法求特徵值

- 求以下矩陣A的最小特徵值

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例題5.7 MATLAB程式

- 主程式：Main_Inv_Power_Ex57.m
- 逆冪次法程式：Inv_Power.m

```
clear all;
close all;

A=[1 2 1;2 5 3;1 3 3];
maxit=5; tol=0.001;
[z, mm] = Inv_Power(A, maxit, tol);
```


例題5.7 MATLAB程式

- 逆冪次法結果：

```
  iter       m         r        z(1)      z(2)      z(3)
1.0000    1.0000    2.4495    0.5774    0.5774    0.5774

2.0000    7.8571    0.3499    0.8729   -0.4364    0.2182

3.0000    7.8730    0.0057    0.8601   -0.4717    0.1942

4.0000    7.8730    0.0001    0.8599   -0.4722    0.1938

Inv Power Method has converged

mm = 0.1270
```

例題5.8 樑的挫曲

- 垂直樑的挫曲及隨後的斷裂，可用以下nxn矩陣的最小特徵值來近似

$$A=(n+1)^2\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 較大的n值可得較好的近似值。
- 最小特徵值為挫曲的第一模數(也就是讓挫曲發生之負荷)。如應用問題5-B中所述的，此微分方程之離散近似的最小(絕對值)特徵值為π^2=9.8696。

例題5.8 MATLAB程式

- 主程式：Main_Inv_Power_Ex58.m
- 逆冪次法程式：Inv_Power.m

```
clear all;
close all;

n=6;
D1=2*ones(n,1);
D2=-1*ones(n-1,1);
A=diag(D1,0)+diag(D2,-1)+diag(D2,1);
maxit=10; tol=0.00001;
[z, mm] = Inv_Power(A, maxit, tol);
b=(n+1)^2*mm
```

例題5.8 MATLAB程式

- 逆冪次法結果：

n=6
mm = 0.1981   b = 9.7051

n=10
mm = 0.0810   b = 9.8027

通用逆冪次法

- 結合平移冪次法和簡單逆冪次法的觀念，可以求出矩陣A最接近某已知數b的特徵值。此方法是基於
  - *若矩陣C的特徵值為$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$*
    - ☞ 則D=C-bI的特徵值為λ_1-b,…, λ_n -b
    - ☞ 且D^{-1}的特徵值為$m_1=1/\lambda_1-b,\ldots,m_n=1/\lambda_n-b$
- 所以C的特徵值中最靠近b的一個，可以由D^{-1}的主導特徵m_1求得，因為$\lambda_1=b+1/m_1$。

例題5.9 最靠近給定值的特徵值

- 要求出A的特徵值中最接近b=15的一個

$$A=\begin{bmatrix}21 & 7 & -1\\ 5 & 7 & 7\\ 4 & -4 & 20\end{bmatrix}$$

- 將逆冪次法用於求B=A-15I，得

$$B=\begin{bmatrix}21-15 & 7 & -1\\ 5 & 7-15 & 7\\ 4 & -4 & 20-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 7 & -1\\ 5 & -8 & 7\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

例題5.9 最靠近給定值的特徵值

步驟 1：由 $\mathbf{z}=[1,1,1]'$ 開始。

求解 $\mathbf{Bw}=\mathbf{z}\Rightarrow\mathbf{w}=[0.0317,0.1587,0.3016]'$ 。

$\mathbf{B}^{-1}$ 之最大特徵值的估計值爲： $m=\dfrac{w_3}{z_3}=0.3016$ 。

$\mathbf{B}$ 之最小特徵值的估計值爲： $\dfrac{1}{m}=\dfrac{z_3}{w_3}=3.3158$ 。

例題5.9 最靠近給定值的特徵值

步驟 2： $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{w}}{w_3} = [0.1053, 0.5263, 1.000]'$ 。

求解 $\mathbf{Bw} = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{w} = [0.3718, 0.4570, 0.8630]'$ 。

$\mathbf{B}^{-1}$ 之最大特徵值的估計值為： $m = \dfrac{w_3}{z_3} = 0.8630$ 。

$\mathbf{B}$ 之最小特徵值的估計值為： $\dfrac{1}{m} = \dfrac{z_3}{w_3} = 1.1588$ 。

例題5.9 最靠近給定值的特徵值

步驟 3： $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{w}}{w_3} = [-0.4308, 0.5295, 1.0000]'$ 。

求解 $\mathbf{Bw} = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{w} = [-0.4723, 0.4808, 0.9624]'$ 。

$\mathbf{B}$ 之最小特徵值的估計值為： $\dfrac{1}{m} = \dfrac{z_3}{w_3} = 1.0390$ 。

我們所要之 $\mathbf{A}$ 的特徵值的估計值為 $b + \dfrac{1}{m}$ ，其中

m 是 $\mathbf{B}^{-1}$ 之最大特徵值的估計值

$1/m$ 是 $\mathbf{B}$ 之最小特徵值的估計值

因此，$\mathbf{A}$ 之特徵值中最靠近 15 的，其近似值為 16。

收斂分析

- 冪次法的基礎為，若矩陣A是可對角線化的(亦即若A有n個線性獨立特徵向量$\mathbf{v}^{(1)},\ldots,\mathbf{v}^{(n)}$)，則向量z可以表示成特徵向量唯一的線性組合：

$$\mathbf{z}=\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}^{(i)} \Rightarrow \mathbf{A}^j\mathbf{z}=\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{A}^j \mathbf{v}^{(i)}$$

因爲 λ_i 是對應於特徵向量 $\mathbf{v}^{(i)}$ 的特徵值，由此可得

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)}=\lambda_i\mathbf{v}^{(i)} \quad 且 \quad \mathbf{A}^j\mathbf{v}^{(i)}=\lambda_i^j\mathbf{v}^{(i)}$$

因此

$$\mathbf{A}^j\mathbf{z}=\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i^j\mathbf{v}^{(i)}=\lambda_1^j\Big[c_1\mathbf{v}^{(1)}+\sum_{i=2}^{n} c_i\frac{\lambda_i^j}{\lambda_1^j}\mathbf{v}^{(i)}\Big]$$

若 **A** 有單一實數主導特徵值 (亦即，$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$)，則，在 $j\to\infty$ 時，$\dfrac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|}<1$ 且 $\dfrac{\lambda_i^j}{\lambda_1^j}\to 0$。但是，經常在不符這些假設條件的情形下，此方法仍然可用。

收斂分析

- 在迭代的每一階段所產生的向量均經過尺度化，以確保限制向量的每個分量不會無限增大。
- 如果特徵向量的初始估計值，有一個分量(非零)是與對應於主導特徵值之特徵向量同方向，則冪次法會收斂，亦即只要初始向量不是對應於主導特徵值之特徵向量之外其它特徵向量的線性組合。在第j次迭代的收斂取決於$|\lambda_2/\lambda_1|^j$，所以第二大特徵值與主導特徵值差得愈遠，此方法收斂得愈快。

Rayleigh商型式

- 對於對稱矩陣，用Rayleigh商來估計特徵值可加快收斂。因為在第j次迭代的特徵值可取為單範正交(Orthonormal)，有

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(j+1)} &= \frac{(\mathbf{z}^{(j)})^T \mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)}}{(\mathbf{z}^{(j)})^T \mathbf{z}^{(j)}} \\ &= \frac{(\mathbf{z}^{(j)})^T \mathbf{z}^{(j+1)}}{(\mathbf{z}^{(j)})^T \mathbf{z}^{(j)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \lambda_i^{2j+1}}{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \lambda_i^{2j}} \\ &= \lambda_1 + O((\lambda_2/\lambda_1)^{2j})\end{aligned}$$

- 第j次迭代的估計值取決於$|\lambda_2/\lambda_1|^{2j}$。

QR因式分解法

- 在使用QR因式分解求A的特徵值時，會產生一序列和A為正交相似(Orthogonally similar)的矩陣$A^{(m)}$(因此其特徵值和A的一樣)。這一序列的$A^{(m)}$會收斂到一個很容易求得特徵值的矩陣。要瞭解此一序列矩陣都是相似的，考慮第一步：

$$A = QR \quad \rightarrow \quad R = Q'A$$

$$A^{(1)} \equiv RQ \rightarrow A^{(1)} = Q'AQ$$

- 因此$A^{(1)}$相似於A。分解$A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$並構成$A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$，它相似於$A^{(1)}$，其理由和$A^{(1)}$相似於A的理由一樣。

QR因式分解法

- 如果A的特徵值滿足$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\ldots>|\lambda_n|$ ，迭代的過程收斂到T，它是一個上三角矩陣，且特徵值位於對角線。
- 如果A有2個特徵值μ_1和μ_2其絕對值相同(可能出現於具有複數特徵值的非對稱實數矩陣)，則T在對角線上會有一個2乘2區塊 (它有特徵值μ_1和μ_2)。

QR因式分解法

- 基本QR特徵值演算法，和一個應用此演算法的MATLAB函數，QR特徵值法牽涉到一序列的因式分解。
- 一個效率更好的QR因式分解法以求特徵值。此方法是先將A轉換成Hessenberg形式——也就是上三角矩陣加上次對角線。一個對稱矩陣的Hessenberg形式為三對角線矩陣。在QR法的迭代過程中都保持Hessenberg形式。

基本 QR法

- 以下MATLAB函數提供以QR因式分解求特徵值的基本程序。

例題5.10　用QR因式分解求特徵值

- 考慮例題5.4中的矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2/3 & -4/3 & 4/3 \\ 2/3 & 4 & 0 & 0 \\ -4/3 & 0 & 6 & 0 \\ 4/3 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

例題5.10 MATLAB程式

- 主程式：Main_QR_eig_basic.m
- 基本QR法程式：QR_eig_basic.m

```
clear all;
close all;

A=[4 2/3 -4/3 4/3;2/3 4 0 0;-4/3 0 6 2;4/3 0
2 6];
maxit=5;
e = QR_eig_basic(A, maxit);
```


例題5.10 MATLAB程式

- 結果：

```
A(2) =
    5.6000    0.2769   -0.3819   -1.1034
    0.2769    3.9148    0.1175    0.3395
   -0.3819    0.1175    7.4099   -1.7047
   -1.1034    0.3395   -1.7047    3.0753
A(3) =
    5.9512    0.0541   -0.0401    0.4338
    0.0541    3.9703    0.0220   -0.2377
   -0.0401    0.0220    7.9498    0.5429
    0.4338   -0.2377    0.5429    2.1286
A(4) =
    5.9945    0.0092   -0.0035   -0.1476
    0.0092    3.9922    0.0029    0.1241
   -0.0035    0.0029    7.9967   -0.1399
   -0.1476    0.1241   -0.1399    2.0165
A(5) =
    5.9994    0.0015   -0.0003    0.0494
    0.0015    3.9980    0.0004   -0.0624
   -0.0003    0.0004    7.9998    0.0351
    0.0494   -0.0624    0.0351    2.0028
A(6) =
    5.9999    0.0003   -0.0000   -0.0165
    0.0003    3.9995    0.0000    0.0312
   -0.0000    0.0000    8.0000   -0.0088
   -0.0165    0.0312   -0.0088    2.0006

e = 5.9999    3.9995    8.0000    2.0006
```

雖然對角線元素做為特徵值的近似值還不算太差，但對角線以外元素趨近零的速度卻非常慢。

較好的 QR法

- 如前節所述在使用QR因式分解求矩陣A的特徵值時，最好先用相似轉換將A轉換成Hessenberg 形式。
- 以下MATLAB函數包含Hessenberg形式的相似轉換及利用Givens旋轉的QR因式分解。
- 收斂與否，是利用矩陣A之對角線以下元素的絕對值為判斷依據 。

例題 5.11 使用較佳的 QR法

- 將 OR_eig_G用於對稱矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

例題 5.11 使用較佳的 QR法

- 主程式：Main_QR_eig_G.m
- 較佳的QR法程式：QR_eig_G.m

```
clear all;
close all;

A=[5 4 1 1;4 5 1 1;1 1 4 2;1 1 2
4];
maxit=5; tol=0.0001;
e=QR_eig_G(A, maxit, tol);
```


例題 5.11 使用較佳的 QR法

- 結果：

Hessenberg形式

A =

5.0000	-4.2426	-0.0000	0.0000
-4.2426	6.0000	1.4142	0
-0.0000	1.4142	5.0000	0
0.0000	0	0	2.0000

第5次迭代後

A =

9.9988	-0.0781	-0.0000	0.0000
-0.0781	5.0012	0.0052	0.0000
-0.0000	0.0052	1.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	2.0000

例題 5.11 使用較佳的 QR法

- 考慮以下非對稱矩陣

$$B=\begin{bmatrix}15 & -2 & -2 & -1\\ 10 & 6 & -4 & -2\\ 10 & 4 & -1 & -3\\ 10 & 4 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

例題 5.11 使用較佳的 QR法

- 主程式：Main_QR_eig_G_Ex2.m
- 較佳的QR法程式：QR_eig_G.m

```
clear all;
close all;

A=[15 -2 -2 -1;10 6 -4 -2;10 4 -1 -3;10 4 -2 -2];
maxit=5; tol=0.0001;
e=QR_eig_G(A, maxit, tol);
```

例題 5.11 使用較佳的 QR法

- 結果：

```
Hessenberg形式
A =
    15.0000     2.8868    -0.6109     0.5417
   -17.3205    -0.0000    -9.3915    -3.1305
          0     0.0000     1.3804     1.8588
          0    -0.0000     0.1268     1.6196
第5次迭代後
A =
    10.1403    20.1715     8.3212     0.5546
    -0.0358     4.8597    -5.3743     0.4830
    -0.0000     0.0000     1.9585     1.7547
     0.0000     0.0000     0.0227     1.0415
```


求特徵向量

- 因為QR法並不會自動求出特徵向量，現在要考慮如何求矩陣A之對應於特徵值m的特徵向量。此一名為逆迭代的方法已在例題5.3介紹過了，當時是用於基本冪次法中做為加速特徵向量收斂的方法。已知特徵向量的初始估計值z(可以是一個任意向量、全為1的向量或某些非零向量)，其程序如下:

求特徵向量

- 求B=A-mI
- 求解By=z
- 將y尺度化為單位長(歐幾里得或max範數)。
- 若y是具有足夠準確度的特徵向量，則停止;否則設z=y，並進行迭代。

求特徵向量

- 針對對稱矩陣A求特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

求特徵向量

• 程式名稱：5-23.m

```
clear all;
close all;

A=[5 4 1 1;4 5 1 1;1 1 4 2;1 1 2 4];
B=A-9.9988*eye(4)
z=[1;1;1;1]
y=inv(B)*z;
y=y./max(max(y))
```


求特徵向量

• 結果：

```
B=
  -4.9988    4.0000    1.0000    1.0000
   4.0000   -4.9988    1.0000    1.0000
   1.0000    1.0000   -5.9988    2.0000
   1.0000    1.0000    2.0000   -5.9988

z =  1   1   1   1

y = 1.0000  1.0000   0.4999   0.4999
```

求特徵向量

- **將A的特徵向量將y和z展開**

$$y=\sum_{i=1}^{n} a_i v^{(i)}, \quad z=\sum_{i=1}^{n} b_i v^{(i)}$$

由線性方程組$(A-mI)y=z$**得**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_i-m)v^{(i)}=\sum_{i=1}^{n} b_i v^{(i)}$$

所以$a_i(\lambda_i-m)=b_i$**或**$a_i=b_i/(\lambda_i-m)$

求特徵向量

- **如果m很靠近λ_1，則y的展開式中$v^{(1)}$的係數會遠大於其它特徵向量的係數，且y會很靠近$v^{(1)}$。**
- **逆迭代也可用來改善特徵值的進似值m。將現有近似值記為m_k而與其對應特徵向量的近似值為y_k (經正規化為單位長)。求新的y值(不做正規化)並更新特徵值如**

$$m_{k+1}=m_k+\frac{1}{y_k^T y}$$

加速收斂

- 單次平移QR
- 降階

單次平移QR

- 矩陣右下角的元素，在每次迭代中都是特徵值最好的近似值。平移一個量，進行QR因式分解，然後再平移回來，這樣可得到一個二階收斂的算則(Golub and van Loan)。

單次平移QR

- 非對稱矩陣說明其效果

$$B=\begin{bmatrix}15 & -2 & -2 & -1\\ 10 & 6 & -4 & -2\\ 10 & 4 & -1 & -3\\ 10 & 4 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

單次平移QR

- 主程式：Main_QR_eig_S1.m
- 含降階與單移位的QR法程式：QR_eig_S1.m

```
clear all;
close all;

A=[15 -2 -2 -1;10 6 -4 -2;10 4 -1 -3;10 4 -2 -2];
maxit=20; tol=0.0001;
e = QR_eig_S1(A, maxit, tol)
```

單次平移QR

- 結果：

5次迭代後：
A =

10.0314	20.1994	-7.0634	-4.4874
-0.0078	4.9686	4.9100	2.1283
0.0000	0.0000	1.0000	1.7321
-0.0000	0.0000	-0.0000	2.0000

- 利用 e=QR_eig_S1(A,20,0.0001)計算，發現此程序在10次迭代後收斂，計算所得的特徵值和前一個例題所得相同。

e = 10.0002 4.9998 1.0000 2.0000

例題5.12 使用較佳QR法

- 介紹如何將函數QR_eig_G用於有複數特徵值的矩陣

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

MATLAB程式：
eig(c)

ans =
12.0000
1.0000 + 5.0000i
1.0000 - 5.0000i
2.0000

例題5.12 使用較佳QR法

- 程式： QR_eig_G.m

```
10次迭代後
A =
  12.0000   -0.0022   -0.0025   -0.0000
  -0.0033    1.0000   -5.0000    0.0001
   0.0000    5.0000    1.0000   -0.0002
   0.0000    0.0000    0.0003    2.0000
```

- 在對角線上有一個相對於複數特徵值的2乘2區塊。

降階

- 由上個例子可看出，次對角線最下方的元素最快趨近於零。一個簡單的降階法則，讓能夠辨識出迭代矩陣右下角的特徵值，由A中刪去和它相對的列與行，然後繼續求這個減小後矩陣的特徵值。以下程式也包含單移位法。

例題5.13 使用含降階與單移位的QR法

- 使用前一例題中的對稱矩陣

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

例題5.13 MATLAB程式

- 主程式：Main_QR_eig_D2.m
- 含 降 階 與 單 移 位 的 QR 法 程 式 ： QR_eig_D2.m

```
clear all;
close all;

A=[5 4 1 1;4 5 1 1;1 1 4 2;1 1 2 4];
maxit=10; tol=0.0001;
e = QR_eig_D2(A, maxit, tol)
```

例題5.13 MATLAB程式

- 結果：

```
Step1 A = 9.6667   -1.4907   -0.0000   -0.0000
         -1.4907    2.7333    1.9596    0.0000
         -0.0000    1.9596    3.6000   -0.0000
         -0.0000    0.0000   -0.0000    2.0000
deflate,      eig =    2.0000
      A = 9.6667   -1.4907   -0.0000
         -1.4907    2.7333    1.9596
         -0.0000    1.9596    3.6000
Step2 A = 9.9727   -0.3831   -0.0000
         -0.3831    4.3593   -1.4944
         -0.0000   -1.4944    1.6680
Step3 A = 9.9960   -0.1410   -0.0000
         -0.1410    4.9721    0.3559
         -0.0000    0.3559    1.0319
Step4 A = 9.9992   -0.0622   -0.0000
         -0.0622    5.0008   -0.0029
         -0.0000   -0.0029    1.0000
Step5 A = 9.9998   -0.0276   -0.0000
         -0.0276    5.0002    0.0000
         -0.0000    0.0000    1.0000
deflate,     eig =    2.0000    1.0000
      A = 9.9998   -0.0276
         -0.0276    5.0002
Step6 A =10.0000   -0.0123
         -0.0123    5.0000
Step7 A =10.0000    0.0000
          0.0000    5.0000
deflate,     eig =    2.0000    1.0000    5.0000
      A =10.0000
e =    2.0000    1.0000    5.0000   10.0000
```


例題5.13 使用含降階與單移位的QR法

- 在例題5.11中，QR法要用八次迭代以求出特徵值，要讓非對角線元素全部小於容許誤差則需要15次迭代。使用單移位加降階不僅減少所須的迭代次數，隨著迭代的進行，計算的矩陣也逐步縮小。

MATLAB所用方法

MATLAB 函數 `eig` 可用來求矩陣的特徵值。

- 只求特徵值 `m=eig (A)`。

  向量 **m** 中為方矩陣 **A** 的特徵值。

- 求特徵向量與特徵值 `[V,M]=eig(A)`。

  矩陣 **V** 的各行為特徵向量，分別相對於位於矩陣 **M** 之對角線上的特徵值。特徵值和特徵向量滿足 **AV = VM**。特徵向量經尺度化為單位歐幾里得長度。

- 一般化之特徵值 `[V,D]=eig(A,B)`。

  傳回包含有一般化之特徵值的對角線矩陣 **D**，以及相對之特徵向量所構成之向量 **V**，可滿足 **AV = BVD**。一般化特徵值問題是要解 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}$ (其中 **B** 可能為奇異)。

MATLAB所用方法

```
A =
   15   -2   -2   -1
   10    6   -4   -2
   10    4   -1   -3
   10    4   -2   -2
 [V,M]=eig(A)
V =
  -0.5000    0.2774    0.2085    0.1826
  -0.5000    0.5547    0.4170    0.3651
  -0.5000    0.5547    0.6255    0.5477
  -0.5000    0.5547    0.6255    0.7303
M =
  10.0000         0         0         0
        0    5.0000         0         0
        0         0    2.0000         0
        0         0         0    1.0000
```

```
V*M =
  -5.0000    1.3868    0.4170    0.1826
  -5.0000    2.7735    0.8341    0.3651
  -5.0000    2.7735    1.2511    0.5477
  -5.0000    2.7735    1.2511    0.7303
A*V=
  -5.0000    1.3868    0.4170    0.1826
  -5.0000    2.7735    0.8341    0.3651
  -5.0000    2.7735    1.2511    0.5477
  -5.0000    2.7735    1.2511    0.7303
```