◎1-5 三階行列式

【目標】

能熟練三階行列式的推算，並能理解三階行列式的基本性質及其應用。

在生活中，我們會遇到一些數量與形體問題。例如：問一個房間的面積是幾坪？還有房間中地面的形式是正方形、長方形，或是其他形狀？此外，如房間的高度，牆面是否平直，也都是我們關切的問題。數學中的兩大主題正是數與形，數是數量，而形是形體，也就是幾何。我們已經學過一些平面上的幾何知識，但是畢竟我們生活在立體的空間中，一個房間除了長、寬，還有高。因此，我們所處的真實空間稱為三維空間。

【討論】

1. 坐標空間中，設 $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \overrightarrow{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$，

則 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix})\cdot(c_1,\ c_2,\ c_3)$

$=c_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}$。

上式中，最後的結果可以 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$ 表示，

即 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}$

$=c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)$

$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$。

$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$ 稱為三階行列式，它有三列三行，

其中 $[a_1,\ a_2,\ a_3],\ [b_1,\ b_2,\ b_3],\ [c_1,\ c_2,\ c_3]$ 依序是第一列、第二列、第三列；

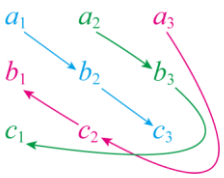
$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{bmatrix}$ 依序是第一行、第二行、第三行。

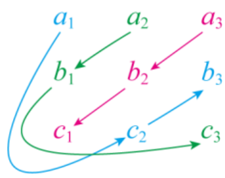
三階行列式的展開式中共有 $3!=6$ 項，每一項都是 3 個數的乘積，

3 個數分別來自第一列、第二列、第三列，且 3 個數所在之行不同。

此外，6 項中的 3 項取正號，標示如下左：$a_1b_2c_3,\ a_2b_3c_1,\ a_3b_1c_2$ 取 $+$。

另 3 項取負號，標示如下右：$a_3b_2c_1,\ a_2b_1c_3,\ a_1b_3c_2$ 取 $-$。





2. 由三階行列式的定義$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$，

可以推得類似二階行列式的基本性質：

(1)任二列互換，其值變號。(例如：$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$)

(2)$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

(3)$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

(4)$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

上述基本性質(2)可從右往左解讀，
表示兩個三階行列式除第一列外，其餘相同時，可就第一列相加；
性質(3)表示可就第一列提出公因式。
透過性質(1)(兩列互換，其值變號)，性質(2)可推廣成：
除某列外，其餘各列相同的兩行列式相加，可就該列相加。

例如：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+b_1' & b_2+b_2' & b_3+b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

性質(3)可推廣成：**可就任一列提出公因式**。

例如：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

其次，基本性質(4)意謂行列互換，其值不變。
由此可知(1)，(2)，(3)中有關列的性質，行也全都適用，

例如：$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。(兩行互換，其值變號)

$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2 & a_3 \\ b_1+b_1' & b_2 & b_3 \\ c_1+c_1' & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2 & b_3 \\ c_1' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。（除某行外，其餘相同，可就該行相加）

$\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & b_2 & b_3 \\ kc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。(可就任一行提出公因式)

3. 試由三階行列式的基本性質(1)～(3)，證明下列性質：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$。(某列全0，其值為0)

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$。(某兩列成比例，其值為0)

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1+b_1 & ka_2+b_2 & ka_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。（某列乘以一數加至另一列，其值不變）

證明：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0a_1 & 0a_2 & 0a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$。

(2)由基本性質(1)知

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，

$2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$，

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(兩列相同，其值為0)。

於是，$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$。

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1+b_1 & ka_2+b_2 & ka_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= 0 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

註：

例中所證明的性質，事實上都可由三階行列式的展開得到。此外，由於行列互換，不改變行列式的值，故例中(1)，(2)，(3)所描述有關列的性質，行也都適用。

4. 三階行列式由其定義$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$，

此等式將三階行列式降為二階行列式表示，稱為降階。

降階時，可以如上式依第三列降階，也可以依第一列或第二列降階，道理如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$。（依第一列降階）

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$。（依第二列降階）

三階行列式降為二階時，共有3項，各項正、負號相間。

依第一、第三列降階時，由正號開始；依第二列降階時，由負號開始。

由於行列互換不改變行列式的值，故三階行列式也可依行降階，

同樣的，依第一、第三行由正號開始，而依第二行由負號開始。

下面的例子分別顯示依第一列及第二行降階的運算：

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$（依第一列降階）

$= 2\cdot(-16) - 1\cdot(-20) + (-4)\cdot 26 = -116$。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - (-7)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-1)\cdot(-20) + (-5)\cdot 16 + 7\cdot(-8) = -116$。

5. 試證：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$。

證明：

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$(第一行乘以$-1$加到第二、第三行)

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$(上式依第一列降階)

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$。

6. 展開並分解$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$。

解答：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$(第二、第三行加到第一行)

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)[(a-b)(a-c)-(b-c)(c-b)]$$

$$=(a+b+c)(a^2-ac-ab+bc-bc+b^2+c^2-bc)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$ 。

【定義】

1. 三階行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$ 。

2. 平行六面體體積以行列式表示：
   坐標空間中，
   線性獨立之三向量$\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1, c_2, c_3)$
   所張開平行六面體的體積為$\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$。

【性質】

1. 三階行列式的重要性質
   (1) 兩列(行)互換，其值變號。
   (2) 除某列(行)外，其餘各列(行)相同的兩行列式相加，可就該列(行)相加。
   (3) 任一列(行)可提出公因式。
   (4) 一列(行)全0，其值為0。
   (5) 兩列(行)成比例，其值為0。
   (6) 一列(行)乘以一數加至另一列(行)，其值不變。
   (7) 行列互換，其值不變。
   (8) 可依任一列(行)降階。

【討論】

1. 坐標空間中，設 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1, c_2, c_3)$，

由於 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 線性獨立的充要條件為 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\neq 0$，

又 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，

故 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 線性獨立的充要條件為 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$；

換言之，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 線性相依的充要條件為 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

2. 在坐標平面上，

向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$ 所張開的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

一般而言，設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 是任意三點，

則 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ 所張開的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|$，

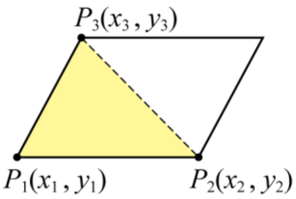
由於

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

故 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ 所張開的平行四邊形面積可表為 $\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$，

因此可知 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$，

參閱圖。



3. 平面上，假設

$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0,\ L_2: a_2x+b_2y+c_2=0,\ L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$

是不完全平行的三相異直線，以下證明：

$L_1,\ L_2,\ L_3$ 三線共點的充要條件是 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ 。

(1) 當 $L_1,\ L_2,\ L_3$ 三線共點時，令 $(x_0,\ y_0)$ 為其交點，

則 $a_1x_0+b_1y_0+c_1=0,\ \ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0,\ a_3x_0+b_3y_0+c_3=0$ ，

於是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x_0+b_1y_0+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x_0+b_2y_0+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x_0+b_3y_0+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=0 \text{ 。}$$

(2) 當 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ 時，在不失一般性下可假設 L_1 不平行 L_2 ，

則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ ，

由克拉瑪公式知 L_1 與 L_2 交於一點

$$(x_0,\ y_0)=\left(\frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right) \text{ ，}$$

將此點坐標代入 $a_3x+b_3y+c_3$ 得

$$a_3x_0+b_3y_0+c_3=a_3\cdot\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}-b_3\cdot\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}+c_3$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \text{ 。}$$

故三直線交於點 $(x_0,\ y_0)$ 。

【方法】

1. 三向量線性相依或線性獨立的判定：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \overrightarrow{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3),\ \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，則

(1) $\Delta=0$ 時，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 線性相依。

(2) $\Delta\neq 0$ 時，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 線性獨立。

2. 頂點決定三角形面積：

在坐標平面上，設點 $P_1(x_1,\ y_1),\ P_2(x_2,\ y_2),\ P_3(x_3,\ y_3)$，

則 $\Delta\ P_1P_2P_3$ 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$。

3. 三線共點的判定：

坐標平面上，設

$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0,\ L_2: a_2x+b_2y+c_2=0,\ L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$

是不完全平行的相異三直線，

則 $L_1,\ L_2,\ L_3$ 三線共點的充要條件是 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

【性質】

三階行列式的性質：

1. 有一行(列)全為0，其值為0。

即$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix}=0$或$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=0$。

2. 每一行(列)可提公因數。

即$\begin{vmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$或$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$。

3. 將兩行(列)對調，則行列式的值變號。

即$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$或$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$。

4. 將某一行(列)乘以k倍加入另一行(列)，其值不變。

即$\begin{vmatrix} a & b+ka & c \\ d & e+kd & f \\ g & h+kg & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$或$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ka & e+kb & f+kc \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$。

5. 可以依照任何一行(列)降階。

即$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$

或$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$。

註：三階行列式除了可以依第一列展開之外，

也可以依任何一列或任何一行展開，

只是其各項的符號要依$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$之格式決定，

並且盡量找出有0的行或列。

6. 三階行列式行列互換，其值不變。

即$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$。

7. 兩行(列)成比例，其值為0。

即$\begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix}=0$或$\begin{vmatrix} kd & ke & kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=0$。

8. 兩行列式的加法運算。

即$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

或$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b & c \\ d_1+d_2 & e & f \\ g_1+g_2 & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ d_1 & e & f \\ g_1 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b & c \\ d_2 & e & f \\ g_2 & h & i \end{vmatrix}$。

【注意】

行列式求值時之注意事項：

1. 降階求值：
   先將行列式化至某一行、列的各項中，出現盡量多個0，
   再利用該行或列降階求值，
   只需計算二階行列式即可，
   此時整個計算過程已經被簡化了。
2. 觀察各行或列是否有公因數(式)，若有則提公因數。
3. 觀察各行或列是否有成等差。
4. 觀察各行或列，逐項相加是否相等，
   若相等將其加到某一項，
   再提公因數，
   降階求值。

【問題】

1. 凡得夢(Vandermonde)行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ 。}$$

例如：

試解 $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -9 & 27 \end{vmatrix} = 0$？

2. 若三角形三邊長a,b,c滿足

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ，}$$

試問此為何種三角形？

(解：等腰三角形或正三角形)

3. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \text{ 。}$$

4. 試證：

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^4 \\ b & b^2 & b^4 \\ c & c^2 & c^4 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \text{ 。}$$

5. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \text{ 。}$$

6. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ 。}$$

7. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & ab \\ 1 & b & bc \\ 1 & c & ca \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ 。}$$

8. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ 。}$$

9. 試證：

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \text{ 。}$$

10. 試證：

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc \text{ 。}$$

11. 試證：

$$\begin{vmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \text{ 。}$$

12. 試證：

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ca \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+1 \text{ 。}$$

13. 試證：

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & a^2+5 \\ b^2 & ca & b^2+5 \\ c^2 & ab & c^2+5 \end{vmatrix} = 5(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \text{ 。}$$

14. 試證：

$$\begin{vmatrix} 2a+b+c & a & a \\ b & a+2b+c & b \\ c & c & a+b+2c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3 \text{ 。}$$

15. 試證：

$$\begin{vmatrix} \sin 40^\circ + \sin 80^\circ & \sin 20^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 40^\circ & \sin 80^\circ + \sin 20^\circ & \sin 40^\circ \\ \sin 80^\circ & \sin 80^\circ & \sin 20^\circ + \sin 40^\circ \end{vmatrix}$$

$$= 4\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 。}$$

16. 試證：

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 189 \text{ 。}$$

17. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$ 。

註：

可以視為 a 的三次多項式，

又 $f(b)=f(c)=f(d)=0$

$(a-b)(a-c)(a-d) \mid f(a)$

同理 $(b-c)(b-d)(c-d) \mid f(a)$

設 $f(a)=k(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

比較係數可得 $k=1$。

18. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$ 。

19. 試證：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(abc+abd+acd+bcd)$$

。

20. 求：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = ?$$ 。

21. 試證：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 63$$ 。

22. 設 ω 為 $x^2+x+1=0$ 之一根，求：

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & 2\omega^3 \\ 2\omega^3 & \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega^2 & 2\omega^3 & \omega & 2\omega^2 \\ 1 & \omega & \omega^2 & -\omega^4 \end{vmatrix} = ?$$ 。

【定義】
三階行列式：
由前面討論可知若定義如下行列式，則以後較為方較研究
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - ahf - bdi$$ 。

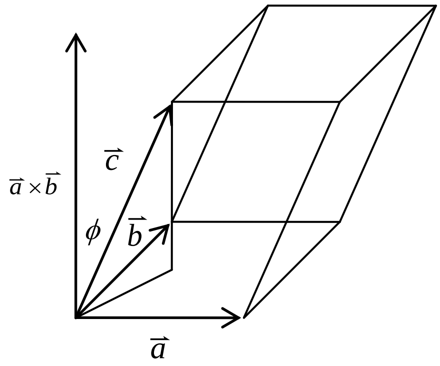
註：用降階定義可以推廣。

【應用】

1. 平行六面體的體積：

由 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 三向量(設 ϕ 為 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角)所決定的平行六面體的體積為

$$V = Ah = \left| |\vec{a} \times \vec{b}| \times (|\vec{c}| \cos\phi) \right| = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$$
$$= \left| \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1, c_2, c_3) \right|$$
$$= \left| c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|$$
$$= \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$ 。



註：

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 為一種有向體積，若 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角 ϕ 為銳角時，
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos\phi > 0$ ，
否則 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos\phi < 0$ 。

(2)可以用來求給定空間中四個點所圍成的四面體的體積，
即三向量所決定的平行六面體的體積的 $\frac{1}{6}$ 。

(3)行列式中若有任兩行或兩列成比例，其值為0，
就幾何意義而言，
此行列式的三個向量共面，
即它不能決定空間中的一個平行六面體，
所以其行列式值必為0，
亦即退化的平行六面體，
體積為0。

(4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ 。

2. 設空間中有四點 $A(a_1, b_1, c_1), B(a_2, b_2, c_2), C(a_3, b_3, c_3), D(a_4, b_4, c_4)$ ，
則四面體 $ABCD$ 的體積 $= \frac{1}{6}$(向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 所展成平行六面體體積)。

3. 空間中三向量共平面：

三向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 共平面的充要條件是

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

註：

若 $\Delta \neq 0$

$\Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 所圍平行六面體的體積不為零 $\Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共平面 $\Leftrightarrow$ 三面交一點

4. 平面上三點所圍成三角形面積：

設平面上有三點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，

則三角形 ABC 的面積為

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$ 。

5. 平面上三點共線：

平面上 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 三點共線的充要條件為

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|=0$$ 。

6. 過點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 的直線方程式為 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$。

7. 平面上三線共點：

設

$L_1:a_1x+b_1y=c_1,L_2:a_2x+b_2y=c_2,L_3:a_3x+b_3y=c_3$

表三相異直線，

則若 L_1,L_2,L_3 相交於一點 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

註：

三線共點實際上可寫成如下：

設表三相異直線，則若 L_1,L_2,L_3 相交於一點或三線平行 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

註：

設 L_1,L_2 之交點 $P(x_0,y_0)=(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta})$ 在 L_3 上

$$\Rightarrow \left(\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right) \in L_3 \Rightarrow a_3\left(\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right) + b_3\left(\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right) = c_3$$

$$\Rightarrow a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

8. 平面上三線平行：

設

$L_1 : a_1x + b_1y = c_1, L_2 : a_2x + b_2y = c_2, L_3 : a_3x + b_3y = c_3$

表三直線，若三直線平行

則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k_1a_2 & k_1b_2 & c_2 \\ k_2a_3 & k_2b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

空間中外積概念：

如果 $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{cases}$，且 $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}$ 中至少有一個不為0，則

$x : y : z = \begin{vmatrix} b & c \\ d & f \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ 。