

BAB IX FREKUENSI KOMPLEKS DAN FUNGSI TRANSFER

Sinyal Sinusoidal Tereadam

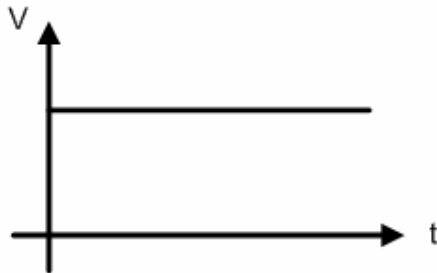
Pada bab sebelumnya kita telah melihat bahwa fungsi sinusoidal mempunyai persamaan sebagai berikut : $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ Volt.

Pada bab ini akan dibahas mengenai frekuensi kompleks yang sebetulnya muncul dari persamaan fungsi sinusoidal diatas hanya ditambahkan suatu nilai konstanta peredamnya, dimana dituliskan dalam persamaan : $v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ Volt.

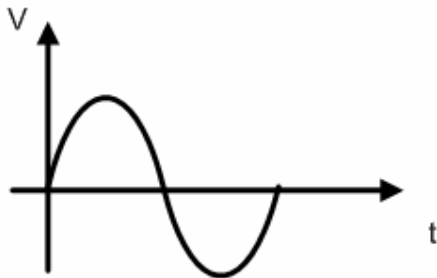
Pada persamaan tersebut muncul suatu konstanta peredam e^{σ} , dimana σ adalah bernilai negatif atau nol yang disebut dengan faktor peredam/frekuensi Neper dengan satuan Np/s.

Pada persamaan $v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ Volt tersebut apabila kita analisis bahwa :

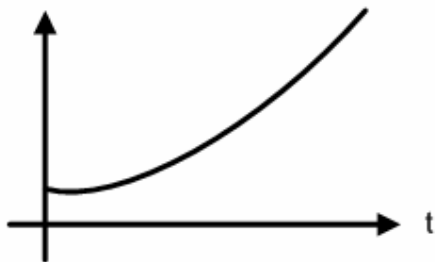
- Jika $\sigma = 0, \omega = 0 \Rightarrow v(t) = V_m$ merupakan sinyal searah atau DC.



- Jika $\sigma = 0 \Rightarrow v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ merupakan sinyal sinusoidal murni.



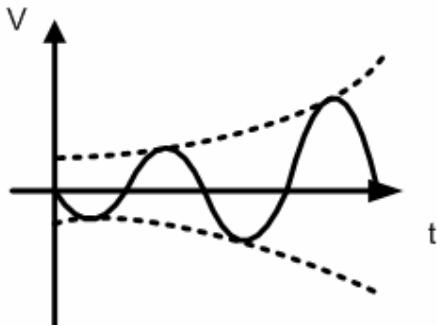
- Jika $\omega = 0, \sigma > 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{\sigma t}$ merupakan sinyal eksponensial positif.



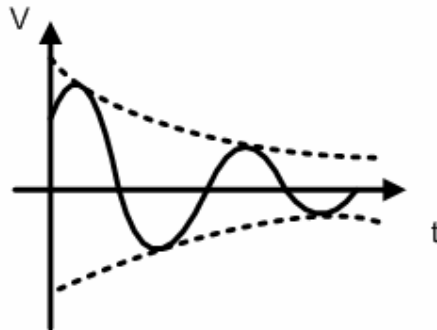
- Jika $\omega = 0, \sigma < 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{-\sigma t}$ merupakan sinyal eksponensial negatif.



- Jika $\sigma > 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ merupakan sinyal sinusoidal teredam positif.



- Jika $\sigma < 0 \Rightarrow v(t) = V_m e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ merupakan sinyal sinusoidal teredam negatif.



Phasor Frekuensi Kompleks

Pada bab sebelumnya mengenai notasi phasor untuk sinyal AC murni adalah sebagai berikut :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Notasi phasor :

$$V = \operatorname{Re}[V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}]$$

$$V(j\omega) = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

Jika konsep diatas diterapkan pada fungsi sinusoidal teredam maka :

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Notasi phasor :

$$V = \operatorname{Re}[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[V_m e^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t}] = \operatorname{Re}[V_m e^{j\phi} e^{st}]$$

$$V(s) = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

dimana : $s = \sigma + j\omega$

Impedansi dan Admitansi Frekuensi Kompleks

$$V(s) = Z(s)I(s)$$

dimana :

Impedansi kompleks:

$$Z_R(s) = R$$

$$Z_L(s) = sL$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

Admitansi kompleks :

$$Y_R(s) = \frac{1}{R} = G$$

$$Y_L(s) = \frac{1}{sL}$$

$$Y_C(s) = sC$$

Contoh latihan :

1. Tentukan frekuensi kompleks dari sinyal dibawah ini :

a. $V = 25e^{-t} \cos 2t$

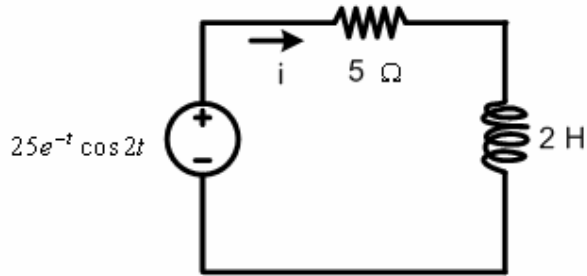
b. $V = 3e^{-4t}$

Jawaban :

a. $s = -1 + j2$

b. $s = -4$

2. Tentukan arus i yang mengalir dari rangkaian berikut :



Jawaban :

$$s = -1 + j2$$

$$Z_R(s) = 5$$

$$Z_L(s) = sL = 2s$$

$$Z_T(s) = 5 + 2s$$

$$V = 25e^{-t} \cos 2t = 25 \angle 0^\circ$$

$$i(s) = \frac{V(s)}{Z_T(s)} = \frac{25 \angle 0^\circ}{5 + 2s} = \frac{25 \angle 0^\circ}{5 + 2(-1 + j2)} = 5 \angle -53,1^\circ$$

$$i(t) = 5e^{-t} \cos(2t - 53,1^\circ) A$$

Fungsi Transfer Frekuensi Kompleks

Perbandingan antara output dengan input dalam frekuensi kompleks / $H(s)$.

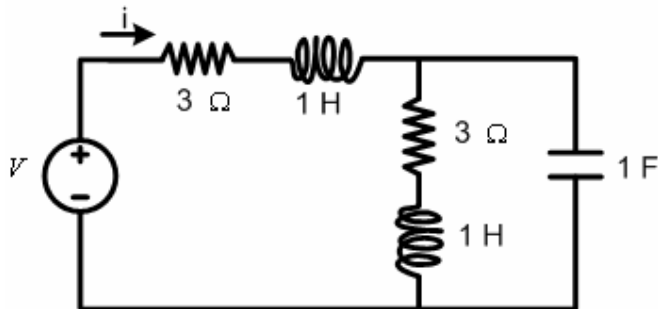
$H(s)$ bisa perbandingan tegangan terhadap arus, arus terhadap tegangan, tegangan terhadap tegangan, atau arus terhadap arus.

Misal :

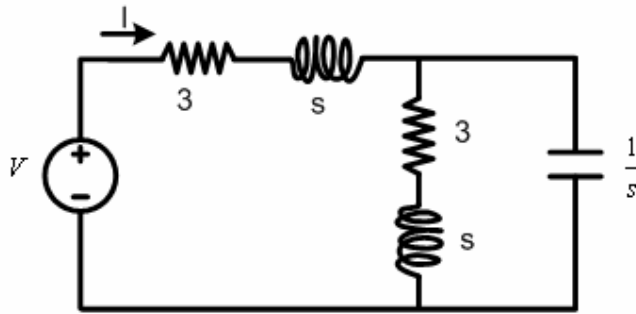
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \rightarrow V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

Contoh latihan :

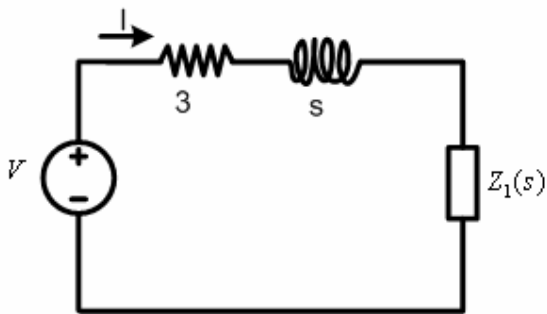
1. Tentukan fungsi transfer I terhadap V pada rangkaian berikut :



Jawaban :



$$Z_1(s) = \frac{3+s}{s^2+3s+1}$$



$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{3+s+\frac{3+s}{s^2+3s+1}}$$

$$H(s) = \frac{s^2+3s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$H(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s+2)(s+3)(s+1)}$$

2. Tentukan output tegangan jika diberikan fungsi transfer :

$$H(s) = \frac{4(s+5)}{s^2+4s+5}$$

dimana input $V_i(s) = 2\angle 0^\circ$ dan $s = -2+j3$

Jawaban :

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s) = \frac{4(s+5)}{s^2+4s+5} \cdot 2\angle 0^\circ = \frac{4(-2+j3+5)}{(-2+j3)^2+4(-2+j3)+5} \cdot 2\angle 0^\circ = -3(1+j)$$

$$V_o(s) = 3\sqrt{2}\angle -135^\circ$$

$$V_o(t) = 3\sqrt{2}e^{-t} \cos(3t-135^\circ)$$

Pole dan Zero

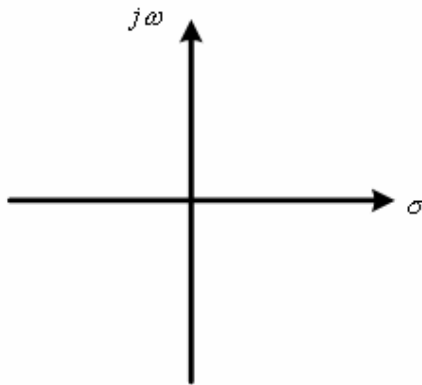
Jika fungsi transfer : $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ dinyatakan dengan persamaan :

$$H(s) = \frac{b_m(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_m)}{a_n(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)} \Rightarrow \frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$$

Yang dikatakan dengan zero adalah pembuat nilai nol pada fungsi transfer tersebut, dimana zero pada fungsi transfer diatas terdiri dari Z_1, Z_2, \dots, Z_m .

Yang dikatakan dengan pole adalah pembuat nilai tak hingga pada fungsi transfer tersebut, dimana pole pada fungsi transfer diatas terdiri dari P_1, P_2, \dots, P_n .

Diagram s-plane :



Pada diagram s-plane tersebut dapat ditentukan kestabilan, dimana BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) stability terletak atau berada disebelah kiri pole-polenya.

Macam-macam bentuk kestabilan :

- ❑ *Absolutely* stabil : berada disebelah kiri jω axis.
- ❑ *Conditionally* stabil : tidak ada disebelah kanan pole tapi pada jω axis untuk orde > 1.
- ❑ *Unstable* stabil : berada disebelah kanan jω axis.

Diagram Bode Plot

Grafik penguatan fungsi transfer dalam desibel (dB) dan fasa dalam derajat terhadap logaritmik frekuensi.

$$H(s) = \frac{b_m(s + Z_1)(s + Z_2) \dots (s + Z_m)}{a_n(s + P_1)(s + P_2) \dots (s + P_n)} = k_1 \frac{(s + Z_1)(s + Z_2) \dots (s + Z_m)}{(s + P_1)(s + P_2) \dots (s + P_n)}$$

$$H(s) = K \frac{(1 + s/Z_1)(1 + s/Z_2) \dots (1 + s/Z_m)}{(1 + s/P_1)(1 + s/P_2) \dots (1 + s/P_n)}$$

Jika : $s = j\omega$

$$H(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega/Z_1)(1 + j\omega/Z_2) \dots (1 + j\omega/Z_m)}{(1 + j\omega/P_1)(1 + j\omega/P_2) \dots (1 + j\omega/P_n)}$$

dimana besaran magnitude dan phasanya terpisah, maka didapatkan :

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{\left|1 + j\omega/Z_1\right| \left|1 + j\omega/Z_2\right| \dots \left|1 + j\omega/Z_m\right|}{\left|1 + j\omega/P_1\right| \left|1 + j\omega/P_2\right| \dots \left|1 + j\omega/P_n\right|}$$

$$\angle H(j\omega) = K \frac{\angle(1 + j\omega/Z_1) \angle(1 + j\omega/Z_2) \dots \angle(1 + j\omega/Z_m)}{\angle(1 + j\omega/P_1) \angle(1 + j\omega/P_2) \dots \angle(1 + j\omega/P_n)}$$

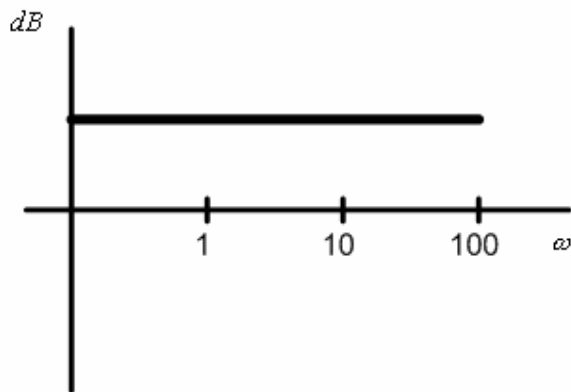
Ada 4 jenis faktor yang dapat muncul pada diagram bode plot fungsi transfer, yaitu :

1. Konstanta K
2. Pole atau zero pada titik asal
3. Pole atau zero orde satu $\rightarrow (1 + j\omega/\omega_1)$
4. Pole atau zero faktor kuadratik $\rightarrow 1 + j\left(2\xi/\omega_0\right) + \left(j\omega/\omega_0\right)^2$

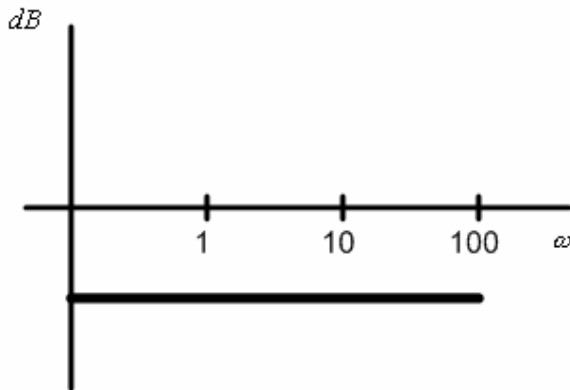
Maka diagram bode untuk masing-masing faktor tersebut :

1. Logaritmik K $\rightarrow 20 \log K$

Untuk nilai : $K \geq 1$

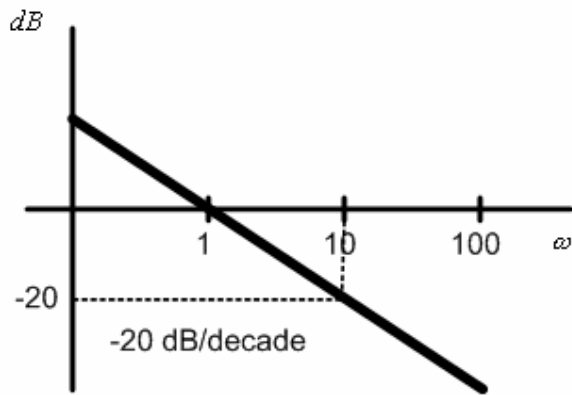


Untuk nilai : $0 < K < 1$

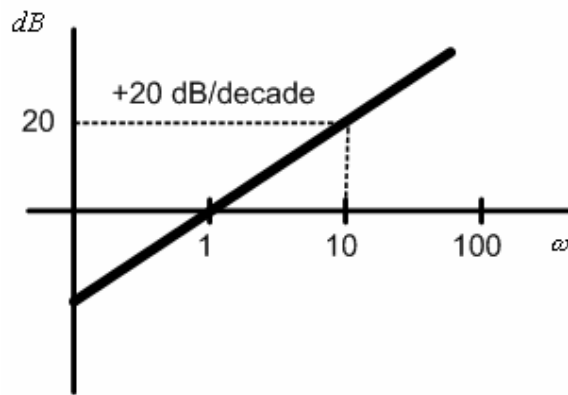


2. Pole atau zero pada titik asal

Untuk pole : $20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$



Untuk zero : $20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$



3. Pole atau zero orde satu.

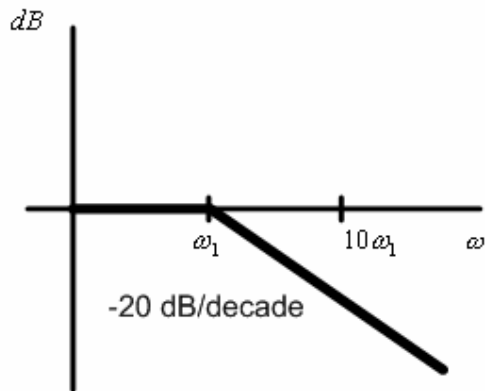
Untuk pole : $20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1} \right|$

Asimtot :

$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$

$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow -20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_1$



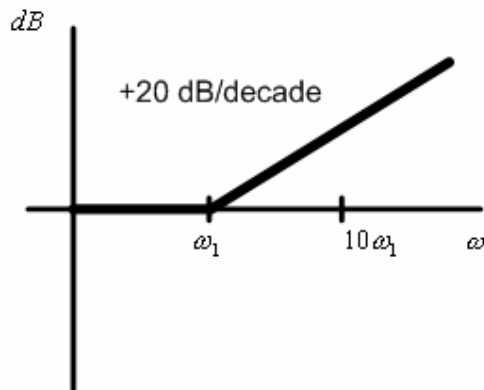
Untuk zero : $20 \log \left| 1 + j\omega / \omega_1 \right|$

Asimtot :

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_1$



4. Pole atau zero faktor kuadratik

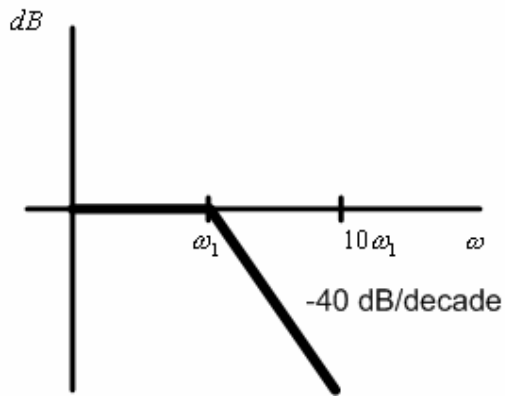
$$\text{Untuk pole : } 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right) + \left(j\omega / \omega_0\right)^2} \right|$$

Asimtot :

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_0$



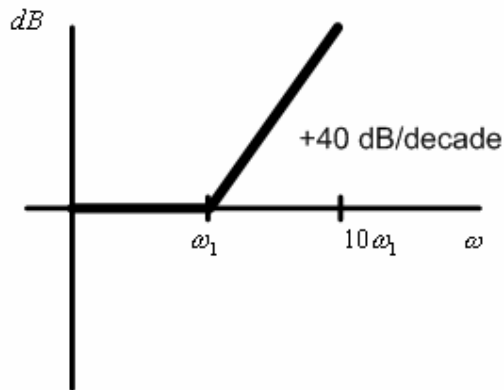
Untuk zero : $20 \log \left| 1 + j \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \right|$

Asimtot :

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow 40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Frekuensi cut off di $\omega = \omega_0$



Contoh latihan :

1. Jika fungsi transfer dinyatakan dengan persamaan : $H(s) = \frac{R}{R + sL}$

Tentukan diagram bode plotnya !

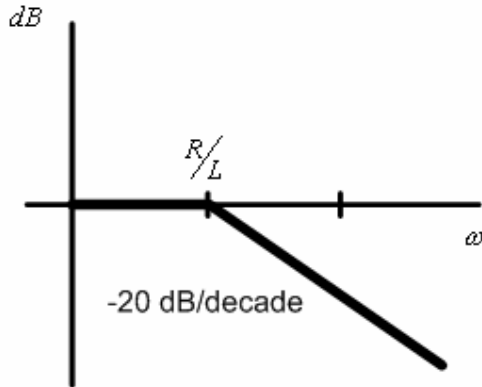
Jawaban :

$$H(s) = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{1 + sL/R}$$

Jika $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega L/R} = \frac{1}{1 + j\omega R/L}$$

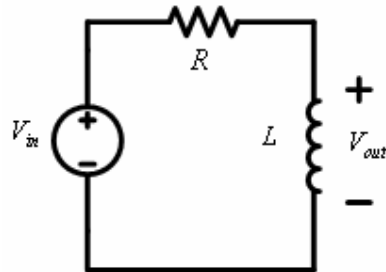
Gambar diagram bode plot :



2. Jika suatu rangkaian seri RL diberikan tegangan AC sebagai inputnya (V_{in}) dan output pada komponen L, maka tentukan :
- Fungsi transfer dalam domain s
 - Diagram bode plot

Jawaban :

- a. Jika output pada komponen L maka fungsi transfer :



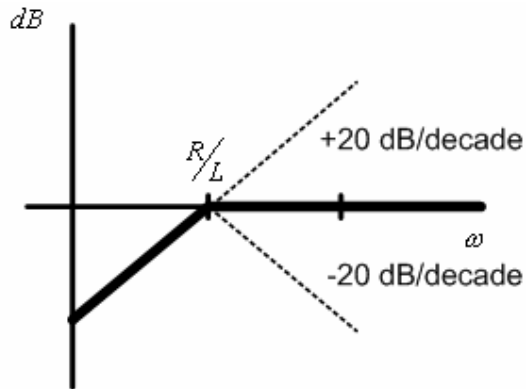
$$H(s) = \frac{sL}{sL + R}$$

- b. Diagram bode plot :

$$H(s) = \frac{sL}{sL + R} = \frac{sL/R}{sL/R + 1} = \frac{s/R/L}{1 + s/R/L}$$

Jika $s = j\omega$, maka :

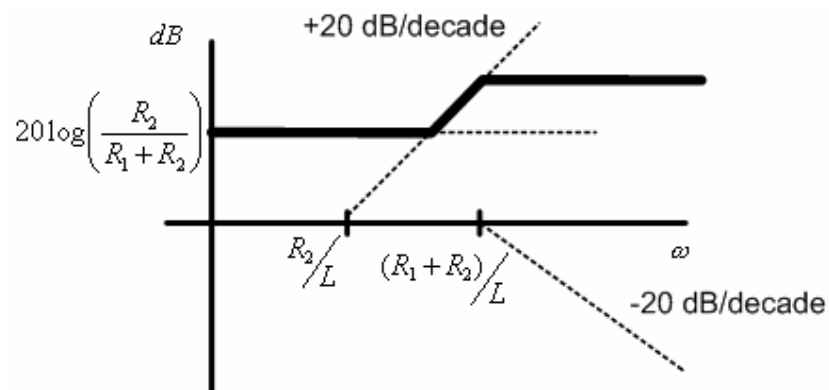
$$H(j\omega) = \frac{j\omega R/L}{1 + j\omega R/L}$$



3. $H(s) = \frac{R_2 + sL}{R_1 + R_2 + sL}$, tentukan diagram bode plot !

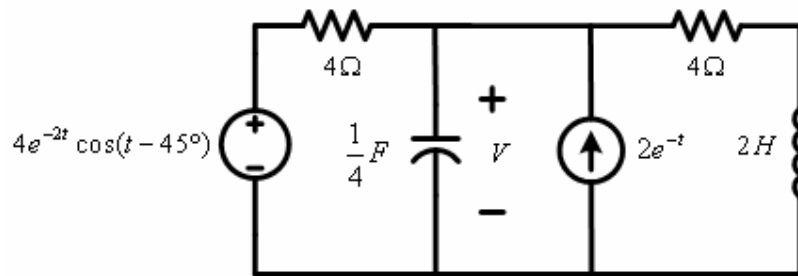
Jawaban :

$$H(s) = \frac{R_2 + sL}{R_1 + R_2 + sL} = \frac{R_2(1 + sL/R_2)}{(R_1 + R_2)(1 + sL/(R_1 + R_2))} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{\left(1 + \frac{s}{R_2/L} \right)}{\left(1 + \frac{s}{(R_1 + R_2)/L} \right)}$$

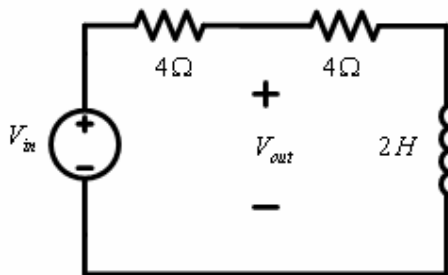


Soal – soal :

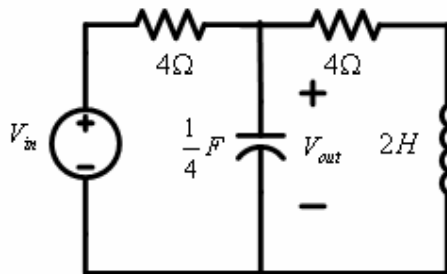
1. Tentukan nilai V !



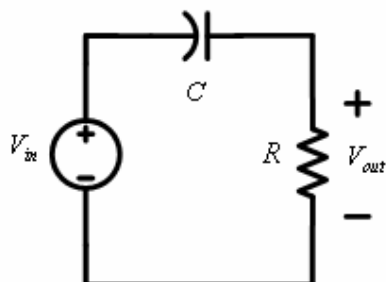
2. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :



3. Gambarkan diagram bode pada soal nomor 2 diatas !
4. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :

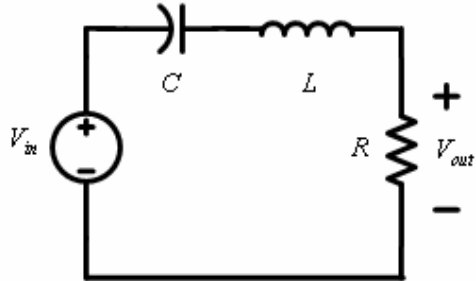


5. Gambarkan diagram bode pada soal nomor 4 diatas !
6. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :



7. Gambarkan diagram bode pada soal nomor 6 diatas !

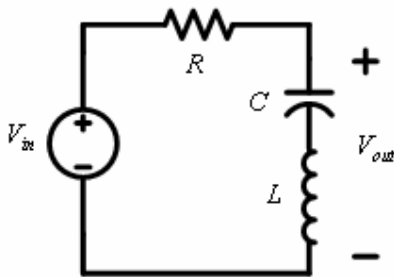
8. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :



9. Gambarkan diagram bode pada soal nomor 8 diatas !

10. Gambarkan diagram bode jika $H(s) = \frac{32(s+1)}{s(s+8)}$

11. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :



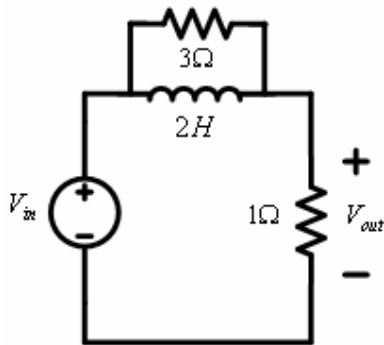
12. Gambarkan diagram bode jika $H(s) = \frac{3+2s}{3+8s}$

13. Gambarkan diagram bode jika $H(s) = \frac{5(1+0,1s)}{s(1+0,5s)(1+\frac{0,6s}{50}+(\frac{s}{50})^2)}$

14. Gambarkan diagram bode jika $H(s) = \frac{400(s+1)}{(s+4)(s+10)}$

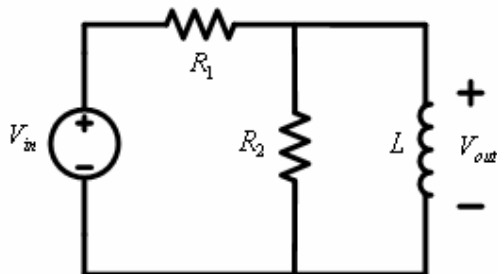
15. Gambarkan diagram bode jika $H(s) = \frac{16s}{s^2+4s+16}$

16. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :



17. Gambarkan diagram bode untuk soal nomor 16 diatas !

18. Tentukan fungsi transfer dari gambar berikut :



19. Gambarkan diagram bode untuk soal nomor 18 diatas !