BAB XII
RANGKAIAN TRANSIEN

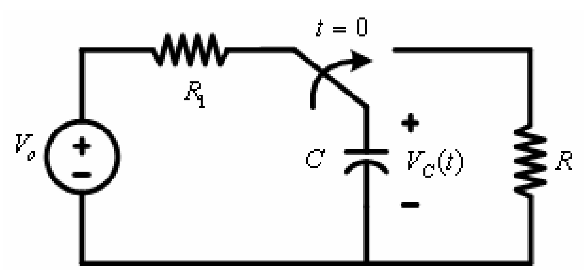
Respon alami adalah respon yang tergantung hanya oleh energi dalam yang disimpan komponen atau elemen dan bukan oleh sumber luar.

Respon transien atau respon peralihan adalah respon sementara yang muncul dalam rentang waktu tertentu.

Respon steady state adalah respon yang ada atau muncul setelah waktu yang lama diikuti oleh beroperasinya saklar.

Respon paksa adalah respon yang muncul karena reaksi satu atau lebih sumber bebasnya.

Rangkaian Transien Orde – 1
Rangkain RC bebas sumber



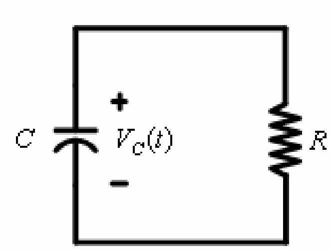
Pada saat t = 0^-, kondisi *switch* berada pada posisi gambar diatas, jika keadaan tersebut sebagai kondisi *steady state* maka :

$V_C(0) = V_o$

Asumsi : kapasitor *dicharge* sampai V_o

Energi di Kapasitor (t = 0) :

$W_C(0) = \frac{1}{2} C V_o^{\,2}$



Pada saat t > 0, kondisi *switch* berada seperti gambar diatas, maka :

Analisis untuk menentukan V(t) untuk t > 0 :

$i(t)R + V_C(t) = 0$

Pada komponen C :

$$i(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

sehingga :

$$C\frac{dV_C(t)}{dt}R + V_C(t) = 0$$

$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} = -V_C(t)$$

$$\frac{1}{V_C(t)}dV_C(t) = -\frac{1}{RC}dt$$

Kedua ruas masing – masing diintegralkan :

$$\int_{V_0}^{V}\frac{1}{V_C(t)}dV_C(t) = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt$$

$$\dim ana : V_C(t) = V(t)$$

$$\int_{V_0}^{V}\frac{1}{V(t)}dV(t) = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt$$

$$\ln V(t) - \ln V_o = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\frac{V(t)}{V_o} = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{V(t)}{V_o} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

Konstanta waktu : $\tau = RC$

Daya pada resistor :

$$P_R(t) = \frac{V^2(t)}{R} = \frac{V_o{}^2}{R}e^{\frac{-2t}{RC}}$$

Energi pada resistor :

$$\mathrm{W}_R(\mathrm{t}) = \int_0^{\sim} P_R(t)dt = \int_0^{\sim}\frac{V_o{}^2}{R}e^{-2t/RC}dt$$

$$= \frac{V_o{}^2}{R}\int_0^{\sim} e^{-2t/RC}dt$$

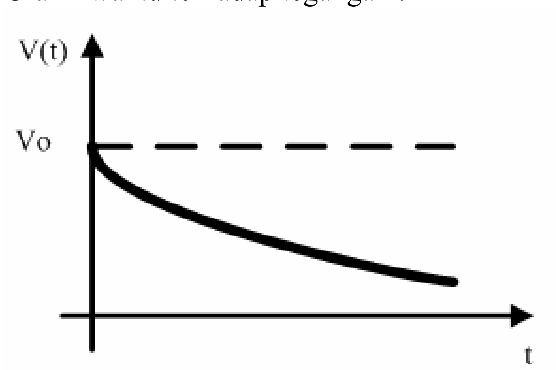
$$= \frac{V_o{}^2}{R}\frac{-RC}{2}e^{-2t/RC}\Big|_0^{\sim} = -\frac{V_o{}^2}{2}C[0-1] = \frac{V_o{}^2}{2}C$$

$$\mathrm{W}_R(\sim) = \frac{1}{2}CV_o{}^2$$

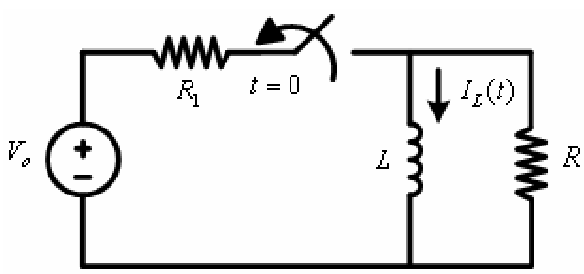
Secara umum, jika t awal = t_0, maka :

V(t) $= V_o e^{-(t-t_0)/RC}$, $t > t_0$

Grafik waktu terhadap tegangan :



Rangkaian RL Bebas Sumber



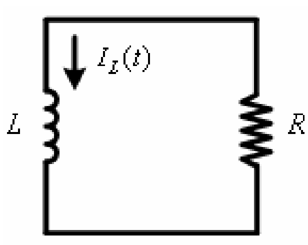
Pada saat t = 0 kondisi saklar tertutup , jika rangakain tersebut dalam kondisi *steady state* maka :

$$I_L(0) = \frac{V_o}{R_1} = I_o$$

Asumsi : induktor menyimpan arus I_0 di t = 0

Energi di induktor :

$$W_L(o) = \frac{1}{2} L I_o^{\ 2}$$



Pada saat t > 0, kondisi *switch* berada seperti gambar diatas, maka :

Analisis untuk menentukan i(t) pada t > 0 :

$$i(t)R + V_L(t) = 0$$

Pada komponen L :

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

sehingga :

$$i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$L\frac{di(t)}{dt} = -i(t)R$$

$$\frac{1}{i(t)}di(t) = -\frac{R}{L}dt$$

Integralkan kedua ruas :

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{1}{i(t)}di(t) = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$

$$\ln i(t) - \ln i_o = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln\frac{i(t)}{i_o} = -\frac{R}{L}t$$

$$\frac{i(t)}{i_o} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t) = i_o e^{-\frac{R}{L}t}$$

Konstanta waktu : $\tau = \frac{L}{R}$

Daya pada resistor :

$$P_R(t) = i(t)^2 R = i_o^{\;2} e^{-\frac{2R}{L}t} R$$

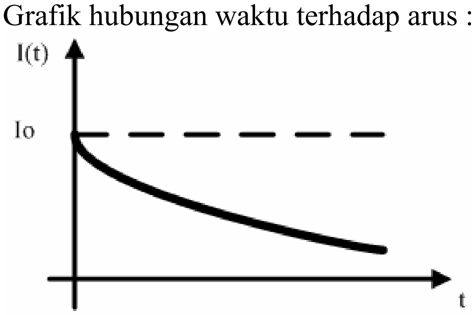
Energi pada resistor :

$$\mathrm{W}_R(\mathrm{t}) = \int_0^{\sim} P_R(t)dt = \int_0^{\sim} Ri_o^{\;2} e^{-\frac{2R}{L}t}dt$$

$$= -Ri_o^{\;2}\frac{L}{2R}e^{-2Rt/L}\Big|_0^{\sim} = -\frac{i_o^{\;2}L}{2}[0-1] = \frac{i_o^{\;2}L}{2}$$

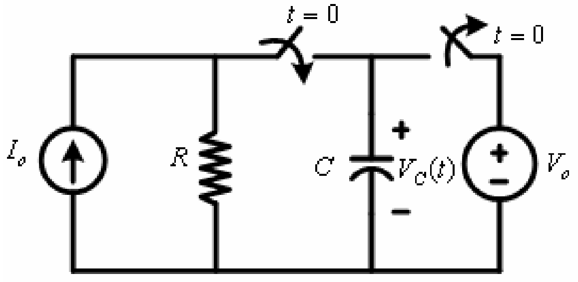
$$\mathrm{W}_R(\sim) = \frac{1}{2}Li_0^{\;2}$$

Grafik hubungan waktu terhadap arus :



<u>Respon Fungsi Paksa Orde - 1</u>

Rangkaian RC dengan Sumber

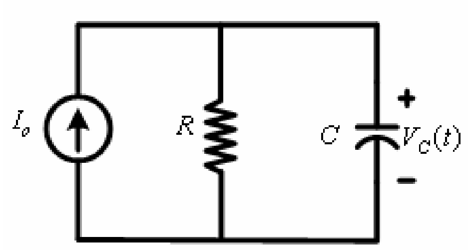


Menentukan nilai $V_{C(t)}$ pada saat switch diubah (t > 0)

Analisis keadaan *steady state* (t = 0) :

$V_{C(0)} = V_o$

Analisis keadaan switch ditutup (t > 0) :



Dengan metoda node (simpul) :

$$i_o = \frac{V_{C(t)}}{R} + C\frac{dV_{C(t)}}{dt}$$

$$i_o R = V_{C(t)} + RC\frac{dV_{C(t)}}{dt}$$

$$-RC\frac{dV_{C(t)}}{dt} = V_{C(t)} - i_o R$$

$$\frac{1}{V_{C(t)} - i_o R} dV_{C(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

Integralkan kedua ruas :

$$\int \frac{1}{V_{C(t)} - i_0 R} dV_{C(t)} = \int -\frac{1}{RC} dt$$

$$\ln(V_{C(t)} - i_o R) = -\frac{t}{RC} + k$$

$$V_{C(t)} - i_o R = e^{-\frac{t}{RC} + k}$$

$$V_{C(t)} = e^k e^{-\frac{t}{RC}} + i_o R$$

$$V_{C(t)} = Ae^{-\frac{t}{RC}} + i_o R$$

dimana : $Ae^{\frac{-t}{RC}}$ adalah respon alami

i_0R adalah respon paksa

Pada saat t = 0, maka $Vc_0 = V_o$ sehingga :

$$V_{C(t)} = Ae^{-\frac{t}{RC}} + i_oR$$

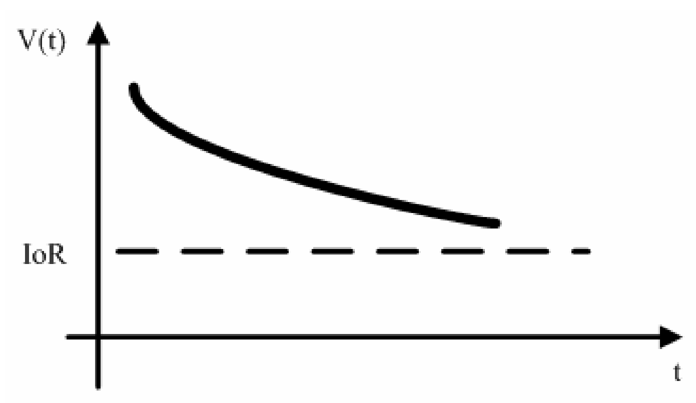
$$V_o = A + i_oR$$

$$A = V_o - i_oR$$

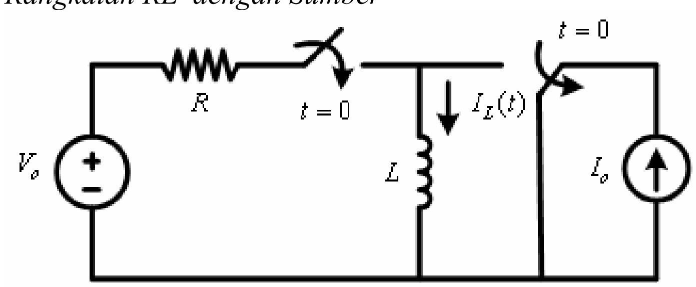
sehingga :

$$V_{C(t)} = (V_o - i_oR)e^{-\frac{t}{RC}} + i_oR, ...t > 0$$

Grafik hubungan waktu terhadap tegangan :



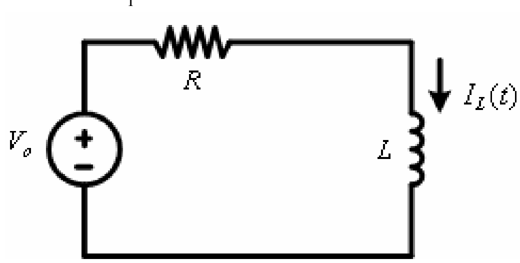
Rangkaian RL dengan Sumber



Menentukan nilai $I_L(t)$ pada saat switch diubah (t > 0)

Analisis keadaan *steady state* (t = 0) :

$$I_L(0) = \frac{V_o}{R_1} = I_o$$



Analisis keadaan switch diubah (t > 0) seperti gambar pada halaman sebelumnya, jika dianalisis sama halnya seperti pada rangkaian RC dengan sumber maka didapatkan persamaan akhir :

$$I_L(t) = \frac{V_o}{R} + \left(I_o - \frac{V_o}{R} \right) e^{-tR/L}$$

Kasus secara umum

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q$$

dimana : y = fungsi V atau i
P,Q = konstanta

sehingga :

$$\frac{d}{dt}(ye^{Pt}) = \frac{dy}{dt}e^{Pt} + Pye^{Pt}\ e^{Pt}$$

$$= e^{Pt}\left(\frac{dy}{dt} + Py\right)$$

$$\frac{d}{dt}(ye^{Pt}) = e^{Pt}Q$$

kalikan kedua ruas dengan dt dan integralkan :

$$\int d(ye^{Pt}) = \int Qe^{Pt}dt$$

$$ye^{Pt} = \int Qe^{Pt} + A$$

kalikan kedua ruas dengan e^{-Pt} :

$$y = e^{-Pt} \int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt}$$

$$y = e^{-Pt}\ \frac{Q}{P}\ e^{Pt} + Ae^{-Pt}$$

$$y = Ae^{-Pt} + \frac{Q}{P}$$

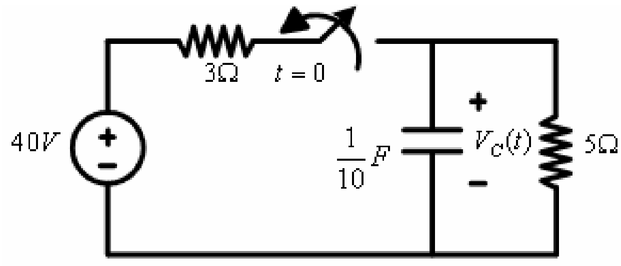
dimana : Ae^{-Pt} adalah respon alami
$\frac{Q}{P}$ adalah respon paksa

Langkah-langkah praktis untuk menyelesaikan respon paksa orde 1 :

1. Untuk respon natural cari responnya dengan sumber diganti tahanan dalamnya
2. Untuk respon paksa cari dengan keadaan steady state
3. Cari keadaan awalnya

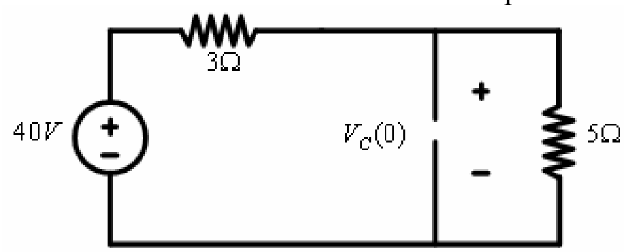
Contoh latihan :

1. Jika rangkaian tersebut pada saat t = 0 berada dalam kondisi *steady state*, cari V_C untuk t > 0 !



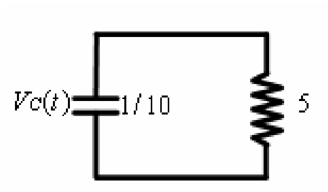
Jawaban :

Pada saat t = 0 atau keadaan *switch* ditutup dalam keadaan *steady state* (mantap)



$$V_{C(0)} = \frac{5}{5+3}40 = 25V$$

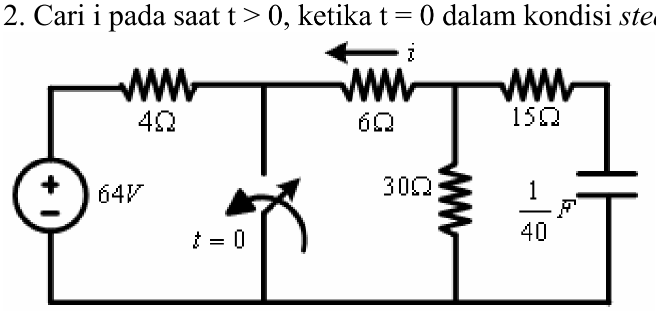
Pada saat *switch* dibuka atau t > 0, maka :



$$V_{C(t)} = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

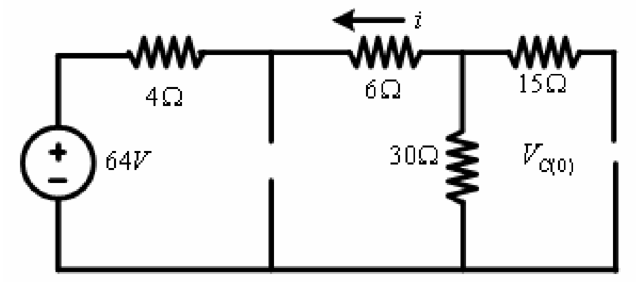
$$V_{C(t)} = 25e^{-\frac{t}{5\frac{1}{10}}} = 25e^{-2t}$$

2. Cari i pada saat t > 0, ketika t = 0 dalam kondisi *steady state*.



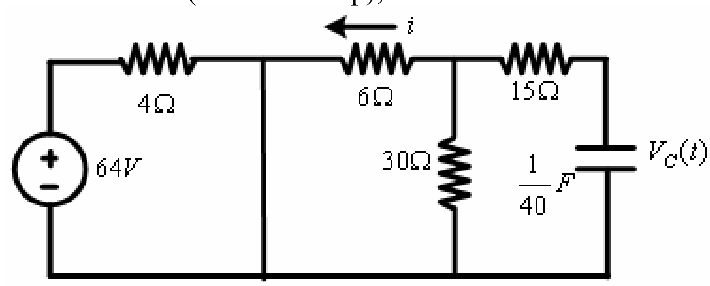
Jawaban :

Pada saat t = 0 (*switch* terbuka) dalam kondisi *steady state* :

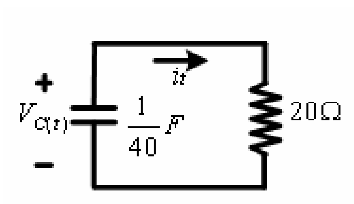


$$V_{C(0)} = \frac{30}{30+6+4}64 = 48V$$

Pada saat t > 0 (*switch* ditutup), maka :



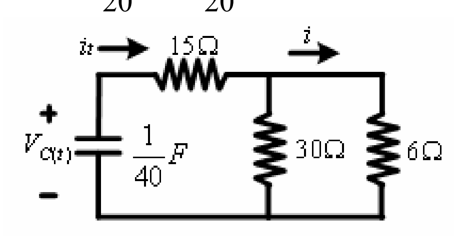
$$R_t = 15 + \frac{6.30}{6+30} = 20\Omega$$



$$V_{C(t)} = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_{C(t)} = 48e^{-\frac{t}{20\frac{1}{40}}} = 48e^{-2t}$$

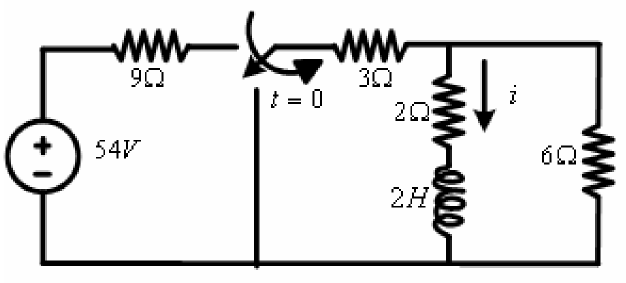
$$i_t(t) = \frac{V_{C(t)}}{20} = \frac{48e^{-2t}}{20}$$



$$i = \frac{30}{30+6} i_t$$

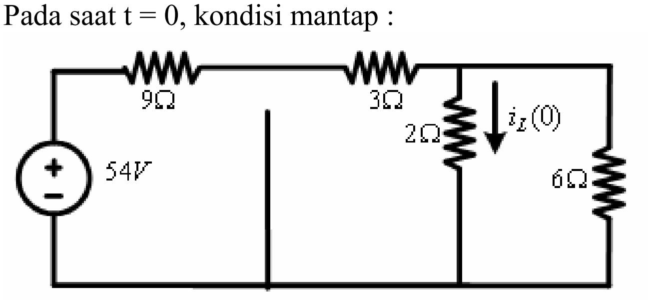
$$i = \frac{30}{36}\frac{48}{20} e^{-2t} = 2e^{-2t}$$

3. Tentukan nilai i pada saat t > 0, jika t = 0 kondisi *steady state* pada rangkaian tersebut !



Jawaban :

Pada saat t = 0, kondisi mantap :

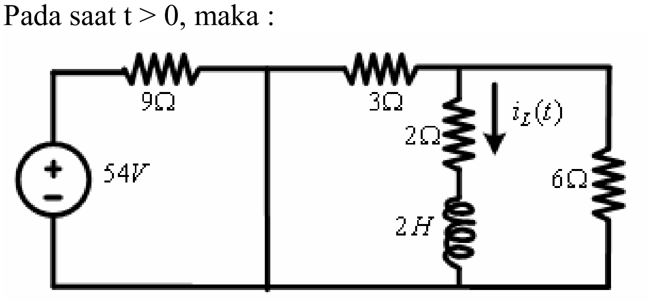


$$R_t = 9 + 3 + \frac{2.6}{2+6} = \frac{27}{2}\Omega$$

$$i_t = \frac{54}{27/2} = 4A$$

$$i_L(0) = \frac{6}{6+2} i_t = \frac{6}{8} 4 = 3A$$

Pada saat t > 0, maka :



$$R_t = \frac{3.6}{3+6} + 2 = 4\Omega$$

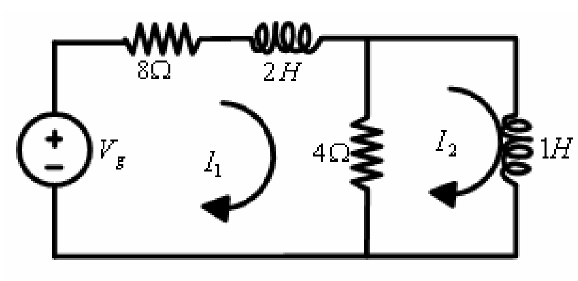
$$i_L(t) = i_o e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(t) = 3e^{-\frac{4}{2}t} = 3e^{-2t}\,A$$

Rangkaian Transien Orde – 2

Rangkaian yang di dalamnya terdapat dua komponen penyimpan energi (baik L atau C)

Contoh kasus :



Loop i_1 :

$$2\frac{di_1}{dt} + 12i_1 - 4i_2 = V_g \text{...........(1)}$$

Loop i_2 :

$$-4i_1 + 4i_2 + \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$i_1 = i_2 + \frac{1}{4}\frac{di_2}{dt} \text{.......................(2)}$$

dari persamaan (1) dan (2) :

$$2\frac{d}{dt}(i_2 + \frac{1}{4}\frac{di_2}{dt}) + 12(i_2 + \frac{1}{4}\frac{di_2}{dt}) - 4i_2 = V_g$$

$$2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2i_2}{dt^2} + 12i_2 + 3\frac{di_2}{dt} - 4i_2 = V_g$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2i_2}{dt^2} + 5\frac{di_2}{dt} + 8i_2 = V_g$$

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + 10\frac{di_2}{dt} + 16i_2 = 2V_g$$

sehingga secara umum persamaan orde – 2 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_o x = f(t)$$

dimana respon lengkap : $x = x_n + x_f$

Respon alami (x_n)

Terjadi pada saat $f(t) = 0$, sehingga jika $x_n = Ae^{st}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_o x = 0, x_n = Ae^{st}$$

$$As^2e^{st} + Aa_1se^{st} + a_oAe^{st} = 0$$

$$Ae^{st}(s^2 + a_1s + a_o) = 0$$

$$s^2 + a_1s + a_o = 0$$

$$s_{12} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^{\ 2} - 4a_o}}{2}$$

$$x_{n1} = A_1e^{s_1t}$$

$$x_{n2} = A_2e^{s_2t}$$

$$x_n = x_{n1} + x_{n2} = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

Tipe – tipe respon alami

1. Akar – akar real : *Overdamped*

$$x_n = A_1e^{-s_1t} + A_2e^{-s_2t}$$

2. Akar – akar kompleks : *Underdamped*

$$s_{12} = \alpha + \beta$$

$$\begin{aligned} x_n &= A_1\ e^{(\alpha + j\beta)t} + A_2e^{(\alpha - j\beta)t} \\ &= A_1\ e^{\alpha t}\ e^{j\beta t} + A_2\ e^{\alpha t}\ e^{-j\beta t} \\ &= e^{\alpha t}\ (A_1\ e^{j\beta t} + A_2\ e^{-j\beta t}) \\ &= e^{\alpha t}\ (A_1 \cos\beta\mathrm{t} + \mathrm{j}\ A_1 \sin\beta\mathrm{t} + A_2 \cos\beta\mathrm{t} - A_2 \sin\beta\mathrm{t}) \\ &= e^{\alpha t}\ ((A_1 + A_2)\cos\beta\mathrm{t} + \mathrm{j}(A_1 - A_2)\sin\beta\mathrm{t}) \\ &= e^{\alpha t}\ (B_1 \cos\beta\mathrm{t} + B_2 \sin\beta\mathrm{t}) \end{aligned}$$

3. Akar real sama : C*ritical Damped*

$$s_1 = s_2 = \mathrm{k}$$

$$x_n = (A_1 + A_2\mathrm{t})\, e^{kt}$$

Respon paksa (x_f)

Contoh kasus :

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 32$

   misalkan : $x_f = A$

   16 A = 32

   A = 2

   sehingga : $x_{(t)} = x_n + x_f = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 40\cos 4t$

   misalkan : x_f = Acos4t + Bsin4t

   $\frac{dx}{dt}$ = -4Asin4t + 48Bcos4t

   $\frac{d^2x}{dt^2}$ = -16Acos4t – 16Bsin4t

   -16Acos4t – 16Bsin4t – 40Asin4t + 40Bcos4t + 16Acos4t + 16Bsin4t = 40cos4t
   cos4t(-16A+40B+16A) + sin4t(-16B-40A+16B) = 40cos4t
   40Bcos4t – 40Asin4t = 40cos4t
   sehingga : 40Bcos4t = 40cos4t → B=1
   -40Asin4t = 0 → A=0

   x_f = Acos4t + Bsin4t = sin4t

   sehingga : $x_{(t)} = x_n + x_f = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}$ + sin4t

Tabel Trial Respon Paksa (x_f)

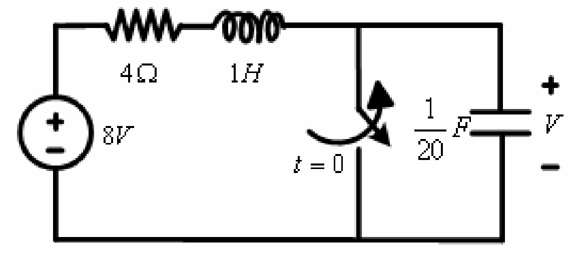
No	$f(t)$	x_f
1	k	A
2	t	At + B
3	t^2	At^2 + Bt +C
4	e^{at}	Ae^{at}
5	sinbt , cosbt	Asinbt + Bcosbt
6	e^{at} sinbt , e^{at} cosbt	e^{at} (Asinbt + Bcosbt)

Respon Lengkap

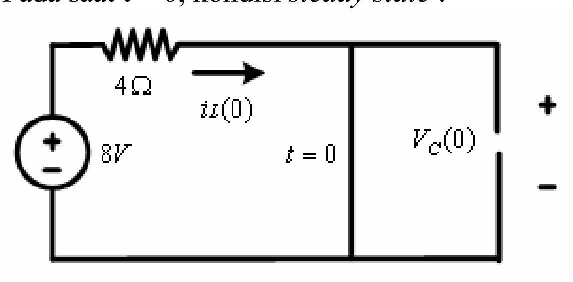
Gabungan antara respon alami dan respon paksa dengan initial kondisi (kondisi awal)

Contoh latihan :

Tentukan nilai V pada saat t > 0, jika t = 0 kondisi *steady state* !



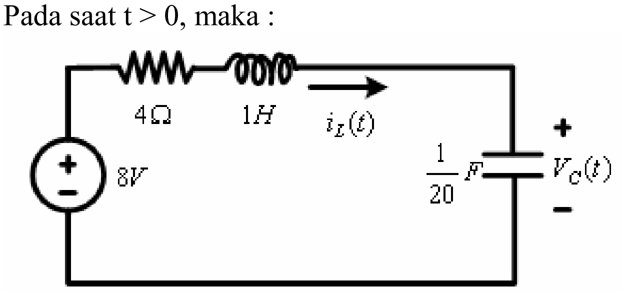
Jawaban :
Pada saat t = 0, kondisi *steady state* :



$$V_C(0) = 0V$$

$$i_L(0) = \frac{8}{4} = 2A$$

Pada saat t > 0, maka :



$$8 = \frac{di_L(t)}{dt} + 4i_L(t) + V_C(t)$$

$$\dim ana : i_L(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$8 = \frac{di_L(t)}{dt} + 4i_L(t) + V_C(t)$$

$$8 = \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + 4\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

$$8 = \frac{1}{20}\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

$$160 = \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + 4\frac{dV_C(t)}{dt} + 20V_C(t)$$

Respon alami : $V_n = Ae^{st}$

$$\frac{d^2V_n(t)}{dt^2} + 4\frac{dV_n(t)}{dt} + 20V_n(t) = 0$$

$$Ae^{st}(s^2 + 4s + 20) = 0$$

$$(s+2)^2 + 16 = 0$$

$$s_1 = -2 + j4$$

$$s_2 = -2 - j4$$

$$V_n = e^{-2t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t)$$

Respon paksa : $V_f = A$

$$20V_f = 160$$

$$20A = 160$$

$$A = \frac{160}{20} = 8$$

sehingga :

$$V(t) = V_n(t) + V_f(t)$$

$$V(t) = e^{-2t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) + 8$$

Pada saat : $V(0) = A_1 + 8 = 0 \rightarrow A_1 = -8$

Pada saat : $i_L(0) = 2$

$$i_L(t) = C\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{20}\frac{dV(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{20}\left\{-2e^{-2t}\left(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t\right) + e^{-2t}\left(-4A_1 \sin 4t + 4A_2 \cos 4t\right)\right\}$$

$$i_L(0) = \frac{1}{20}\left\{-2\left(A_1\right) + \left(4A_2\right)\right\} = 2$$

$$-2\left(A_1\right) + \left(4A_2\right) = 40, \dim ana : A_1 = -8$$

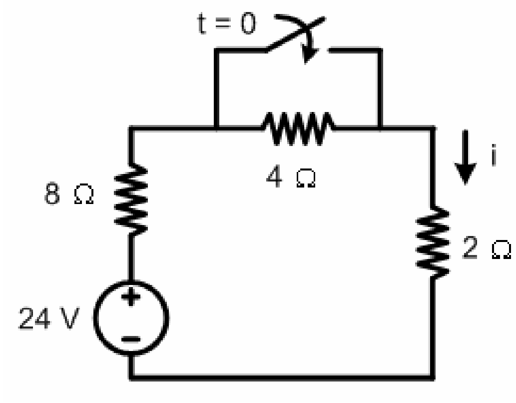
$$16 + 4A_2 = 40 \rightarrow A_2 = \frac{24}{4} = 6$$

sehingga :

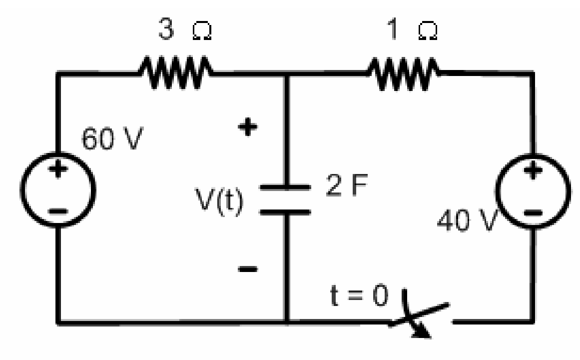
$$V(t) = e^{-2t}(6\sin 4t - 8\cos 4t) + 8$$

Soal – soal :

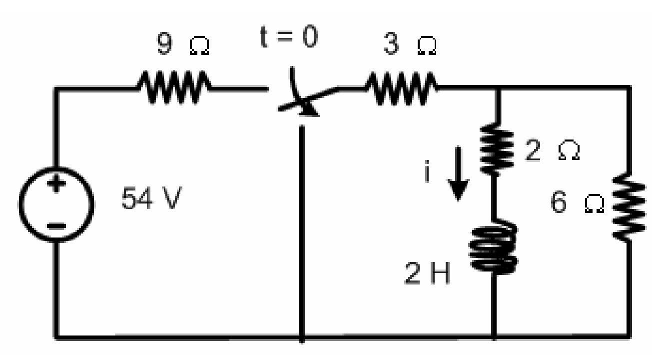
1. Tentukan nilai i pada saat t > 0, jika t = 0 kondisi *steady state* !



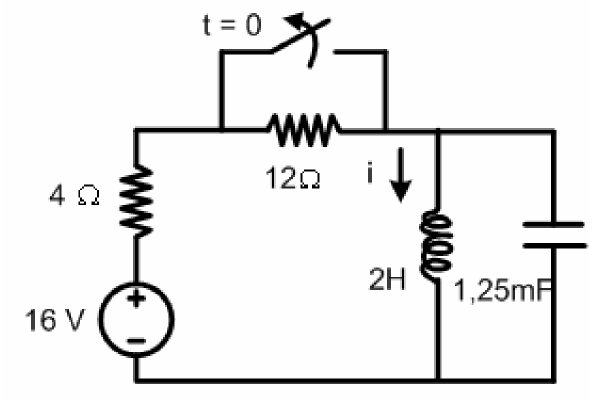
2. Tentukan nilai V(t) pada saat t > 0, jika t = 0^- kondisi rangkaian dalam keadaan steady state (mantap) !



3. Tentukan nilai i pada saat t > 0, jika t = 0 kondisi *steady state* !



4. Tentukan nilai i pada saat t > 0, jika t = 0 kondisi *steady state* !



5. Tentukan V pada saat t > 0, jika V(0) = 6 dan i(0) = 2 !