Projeto e Análise de Algoritmos

Hamilton José Brumatto

Bacharelado em Ciência da Computação - UESC

13 de abril de 2016

Indução

Indução

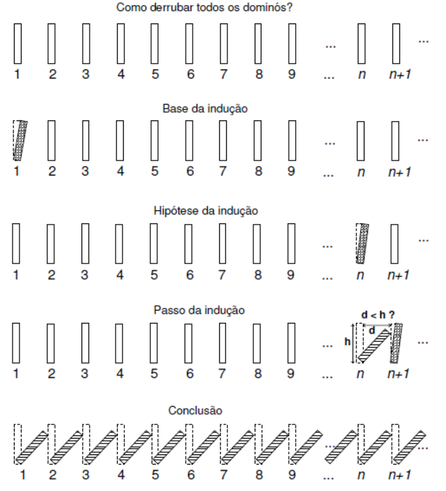
- Indução representa uma prova baseada em demonstração construtiva.
- O uso da indução conduz à construção de um algoritmo.
- A prova da indução já é a prova da corretude do algoritmo.

Entendendo a Indução

Metáfora do dominó:

- Primeiro é necessário verificar se há força suficiente para derrubar a primeira peça.
- Supondo que uma dada peça N cairá (Hipótese da Indução),
- É necessário provar que a construção da cadeia de dominós implicará que a peça $N+1$ também cairá.

Metáfora do Dominó



Princípio da Indução Finita

Sejam P_n afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas associadas a cada inteiro positivo $n \geqslant k$. Se "P_k é verdadeiro", e para cada inteiro positivo j maior ou igual a k, "se P_j é verdadeiro, então P_{j+1} também o é", então "P_n é verdadeiro" para todos inteiros $n \geqslant k$.

Formalmente, das duas afirmações:

1. P_k é verdadeiro para algum $k \geqslant 1$.
2. se P_j é verdadeiro, então P_{j+1} é verdadeiro, $j \geqslant k$.
   Deriva-se:
3. P_n é verdadeiro, para todo $n \geqslant k$

Aplicando a Indução Finita

- A afirmação (1) é denominada a "*Base* da Indução".
- A afirmação (2) é denominada o "*Passo* da Indução".
- A suposição "*Se P_j é verdadeiro*" em (2) é denominada "*Hipótese da Indução*"

Apresentada desta forma a formulação é "*Princípio da Indução (Finita) Fraca*", pois somente assumindo que P_j é verdadeiro é suficiente para provar que P_{j+1} é verdadeiro.

Princípio da Indução Forte

Para se provar que P_{j+1} é verdadeiro, é necessário assumir que $P_i, k \leqslant i \leqslant j$ é verdadeiro.

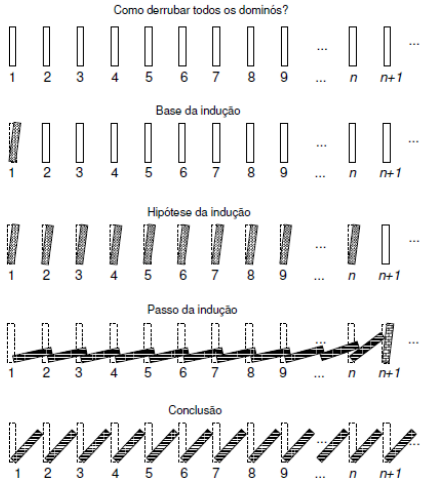
Sejam P_n afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas associadas a cada inteiro positivo $n \geqslant k$. Se "P_k é verdadeiro", e para cada inteiro positivo j maior ou igual a k, "se $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j$ são verdadeiros, então P_{j+1} também o é", então "P_n é verdadeiro" para todos inteiros $n \geqslant k$.

Das afirmações:

1. P_k é verdadeiro para algum $k \geqslant 1$.
2. se $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j$ é verdadeiro, então P_{j+1} é verdadeiro, $j \geqslant k$

   Deriva-se:
3. P_n é verdadeiro, para todo $n \geqslant k$.

Indução Forte



O que é mais forte?

- Aparentemente supor apenas P_j como suficiente parece ser algo mais forte.
- É necessário considerar o que é forte.
- Ter de supor que todos os $P_i, k \leqslant i \leqslant j$ implica em ter de supor algo muito maior para garantir que P_{j+1} é verdadeiro.

Aplicação da Indução: Teorema 1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1 \text{ para } n \geqslant 1$$

Prova: (Indução fraca em n)

Base: para $n = 1$, temos $\frac{1}{2} < 1$

Hipótese: Assumimos que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1$$

Prova do Passo para o Teorema 1

Passo: Vamos considerar:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Podemos reescrever como:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Aplicando a Hipótese da Indução:

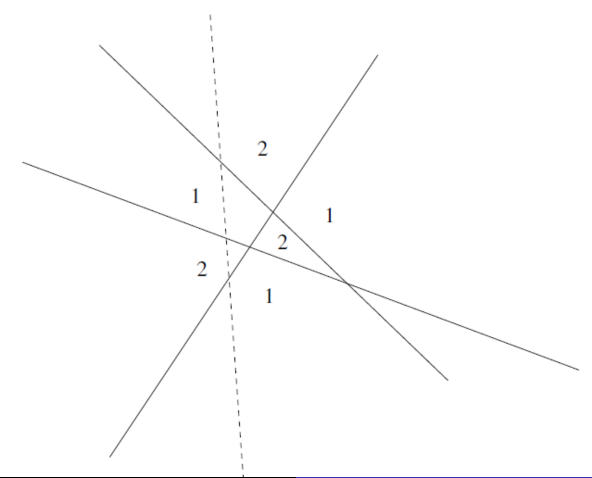
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1)$$

Ficamos com:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < 1. \square$$

Teorema 2

É possível colorir todas as regiões formadas por qualquer número de retas no plano com apenas 2 cores



Como inserir mais uma reta?

- Ao contrário de números, a próxima reta não será necessariamente aquela que poderia estar no desenho.
- É possível inserir uma nova reta em infinitas posições.
- Se provarmos que vale para um desenho com n retas, como deduzir onde a $n+1$ reta será inserida para provarmos a indução?

A reta já está lá!

- Vamos pensar da forma inversa:
- O conjunto com $n+1$ retas já existe.
- Retiramos uma reta, e aplicamos a hipótese da indução.
- Recolocamos a $n+1$ reta e provamos o passo.
- Esta técnica vale para várias outras estruturas que não apenas números: grafos, árvores, figuras geométricas, ...

Provando o Teorema 2

Base: Com apenas uma reta, temos duas regiões do plano, cada região colorimos uma uma cor diferente.

Hipótese da Indução: Seja R um conjunto de $n+1$ retas: $r_1, r_2, ..., r_{n+1}$, consideramos o conjunto $R \backslash r_{n+1}$, pela Hipótese de Indução, este conjunto pode ser colorido com 2 cores.

Passo: Recolocamos a reta r_{n+1}, vamos dividir a região em dois espaços, de um lado de r_{n+1} e de outro. Todas as regiões de um lado mantemos as cores, todas as regiões do outro lado invertemos as cores.
A coloração da região do primeiro lado está correta, a coloração da região do outro lado continua correta apesar da inversão de cores. Em uma região vizinha por r_{n+1} temos agora duas cores distintas, logo a coloração final está correta. $\square$

Teorema 3

Todo número inteiro e positivo pode ser escrito como uma soma de potências distintas de 2.

Base: O número 1 é escrito como 2^0.

Hipótese de indução (**forte**): Todos os números i, $1 \leqslant i \leqslant n$ podem ser escritos como soma de potências distintas de 2.

Passo: $2^k < (n+1) \leqslant 2^{k+1}$ para um determinado valor k. Se $(n+1) = 2^{k+1}$ está provado. Se $(n+1) < 2^{k+1}$, então $j = (n+1) - 2^k$, pela Hipótese de Indução, também é um número que pode ser escrito como soma de potências distintas de 2, além disto, como $j < 2^k$ as potências na soma de j são distintas de k, logo $(n+1) = j + 2^k$ também é um número que pode ser escrito como soma de potências distintas de 2.$\square$

Prova falsa usando indução

Teorema: Em uma reunião de mulheres, se uma tem olhos azuis, então todas têm olhos azuis.
Prova por indução:
Base: Um conjunto com uma mulher: Se ela tem olhos azuis, então todas têm olhos azuis.
Hipótese da Indução: Em um conjunto de mulheres, se retirarmos uma, o teorema é válido.
Passo: Consideramos uma reunião, removemos uma mulher a, pela Hipótese de Indução, o teorema é válido. Podemos considerar um novo caso em que outra, b, foi retirada, pela Hipótese de Indução, o teorema é válido. Por fim podemos considerar novamente retirando a c. Ficamos que o teorema é válido quando o conjunto inclui a e b, a e c, e também com b e c, logo o teorema é válido para todo o conjunto. $\square$??

Considerações

- Apesar da prova pela indução ser simples, nem sempre é simples identificar o que deve ser retirado do conjunto para definir a Hipótese da Indução.
- O passo nem sempre fica tão evidente.
- É necessário se preocupar de que as operações realizadas no passo é coerente com todo o conjunto.

Atividades

- Resolver a 3ª Lista de Exercícios.