Projeto e Análise de Algoritmos

Hamilton José Brumatto

Bacharelado em Ciência da Computação - UESC

3 de maio de 2017

Crescimento de Funções

O tempo de execução depende da grandeza da entrada

- É necessário definir uma dimensão para a entrada.
- Problemas numéricos podem depender, ou da quantidade de elementos numéricos ou no número de bits que representa o valor numérico da entrada.
- Problemas baseados em estrutura de dados podem depender da quantidade de elementos da estrutura, como vértices e/ou arestas em um grafo ou árvore.
- Problemas baseados em textos podem depender do número de caracteres ou número de palavras.

O tempo de execução aumenta, de forma positiva, com o tamanho da entrada

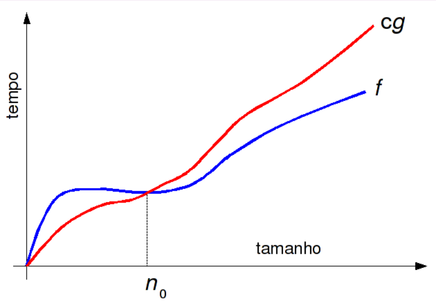
- Funções que representam complexidade são consideradas sempre positivas.
- A comparação é assintótica, ou seja, para números grandes, desprezando-se constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

Crescimento	10^2	10^3	10^5	10^7	10^{10}
$log n$	2	3	5	7	10
n	10^2	10^3	10^5	10^7	10^{10}
$n log n$	$2 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^7$	10^{11}
n^2	10^4	10^6	10^{10}	10^{14}	10^{20}
2^n	$1,2 \cdot 10^{30}$	10^{301}	$10^{30.103}$	$> 10^{3.000.000}$	?

Classe O

$O(g(n)) = \{ f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n)$, para todo $n \geqslant n_0 \}$.

Ou seja, se $f(n) \in O(g(n))$ significa que $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$



Classe O: Exemplo

$n^2 + 5n \in O(n^2)$.

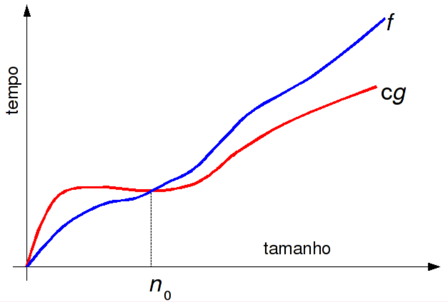
Queremos: $n^2 + 5n \leqslant cn^2$ para todo $n \geqslant n_0$
Temos: $5n \leqslant (c-1)n^2$, logo $c > 1$
Vamos tomar: $c = 2$ por exemplo.
Ficamos com: $5n \leqslant n^2$.
Fazemos $n_0 = 5$

$n^2 + 5n \in O(n^2)$, pois $0 \leqslant n^2 + 5n \leqslant 2n^2$ para todo $n \geqslant 5$

Classe Ω

$\Omega(g(n)) = \{\ f(n) :$ existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geqslant cg(n)$, para todo $n \geqslant n_0$ $\}$.

Ou seja, se $f(n) \in \Omega(g(n))$ significa que $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$



Classe Ω: Exemplo

$n^3 - n^2 \in \Omega(n^3)$.

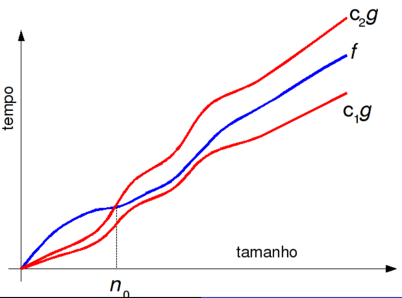
Queremos: $n^3 - n^2 \geqslant cn^3$ para todo $n \geqslant n_0$
Temos: $n^2 \leqslant (1-c)n^3$, ou simplesmente: $1 \leqslant (1-c)n$
Vamos tomar: $c = \frac{1}{2}$, por exemplo.
Ficamos com: $1 \leqslant \frac{1}{2}n$.
Fazemos $n_0 = 2$

$n^3 - n^2 \in \Omega(n^3)$, pois $n^3 - n^2 \geqslant \frac{1}{2}n^3$ para todo $n \geqslant 2$

Classe Θ

$\Theta(g(n)) = \{\ f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que $0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)$, para todo $n \geqslant n_0\ \}$.

Ou seja, se $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$



Classe Θ: Exemplo

$2n^2 + 2n \in \Theta(n^2)$.

Queremos: $c_1 n^2 \leqslant 2n^2 + 2n \leqslant c_2 n^2$ para todo $n \geqslant n_0$
Temos: $-2n \leqslant (2 - c_1)n^2$, ou simplesmente: $-2 \leqslant (2 - c_1)n$
Queremos $(2 - c_1)$ positivo: $c_1 = 1$, por exemplo.
Ficamos com: $-2 \leqslant n$.
Fazemos $n_0 = 1$
Por outro lado: $2n \leqslant (c_2 - 2)n^2$, ou simplesmente: $2 \leqslant (c_2 - 2)n$
Vamos tomar: $c_2 = 3$, por exemplo.
Fazemos $n_0 = 2$

$2n^2 + 2n \in \Theta(n^2)$, pois $0 \leqslant 1.n^2 \leqslant 2n^2 + 2n \leqslant 3.n^2$ para todo $n \geqslant 2$

Classe o

$o(g(n)) = \{ f(n) :$ para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leqslant f(n) < cg(n)$, para todo $n \geqslant n_0$ $\}$.

Ou seja, se $f(n) \in o(g(n))$ significa que $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$

Classe o: Exemplo

$100n^2 \in o(n^3)$.

Para todo valor de $c > 0$ $\exists n_0 > 0$ que satisfaz a definição.
$100n^2 < cn^3$, ou $100 < cn$. Podemos tomar:
$n_0 = \frac{100}{c} + 1$

Classe ω

$$\omega(g(n)) = \{\ f(n) : \quad \text{para toda constante positiva } c\text{, existe uma constante } n_0 > 0 \text{ tal que } f(n) > cg(n)\text{, para todo } n \geqslant n_0\ \}.$$

Ou seja, se $f(n) \in \omega(g(n))$ significa que $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$

Classe ω: Exemplo

$\frac{n^3}{1000} \in \omega(n^2)$.

Para todo valor de $c > 0$ $\exists n_0 > 0$ que satisfaz a definição.
$\frac{n^3}{1000} > cn^2$, ou $\frac{n}{1000} > c$. Podemos tomar:
$n_0 = 1000c + 1$

A relação de classe entre as funções

- $f(n) \in o(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- $f(n) \in O(g(n))$ se $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant \infty$
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Relação de classe é transitiva

Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$

Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$

Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$

Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$

Propriedade reflexiva na relação de classe

$$
\begin{aligned}
f(n) &\in O(f(n)) \\
f(n) &\in \Omega(f(n)) \\
f(n) &\in \Theta(f(n))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(n) &\notin o(f(n)) \\
f(n) &\notin \omega(f(n))
\end{aligned}
$$

Simetria na relação de classe

Simetria direta:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) \in \Theta(f(n))$$

Simetria transposta:

$$f(n) \in O(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) \in \Omega(f(n))$$
$$f(n) \in o(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) \in \omega(f(n))$$

Atividades baseadas no CLRS

- Leitura: Capítulo 3
- Exercícios: 3.1-1, 3.1-2, 3.1-3, 3.1-4, 3.1-7,
- Problemas: 3-1, 3-2, 3-3a, 3-4: a, b, f.

Resolver a 2ª Lista de Exercícios