Introdução à Teoria dos Grafos

Prof. Hamilton José Brumatto

23 de janeiro de 2017

Sumário

Capítulo 1

Definições e Representações

1.1 Definições

Este texto foi escrito baseado no livro *Graduate Texts in Mathematics - Graph Theory* dos autores J. A. Bondy e U. S. R. Murty. As figuras de grafos reproduzidos neste texto são baseadas nos exemplos apresentados no livro de referência. Um estudo mais completo (e correto) sobre este tema poderá ser melhor realizado no livro original.

Muitas situações do mundo real podem ser descritas através de um diagrama contendo um conjunto de pontos e linhas que ligam pares destes pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas e as linhas podem ligar pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicações e as linhas a existência de comunicação entre dois centros.

É importante observar que estes diagramas apenas representam se dois pontos são de fatos ligados, a forma como esta ligação deve ocorrer não cabe nesta representação. Estas situações podem ser abstraídas em um modelo matemático que leva à criação do conceito de GRAFO.

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ consistindo de um conjunto $V(G)$ de *vértices* e um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de *arestas*, unidos com uma *função de incidência* ψ_G que associa a cada aresta em G um par não ordenado e não necessariamente distinto de vértices de G.

Se e é uma aresta e u e v são vértices tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, então e é dito ligar u e v, e os vértices u e v são extremos de e. O número de vértices e arestas em G é dado por $v(G)$ e $e(G)$, normalmente são representados por n e m respectivamente.

Dois exemplos de grafos podem servir para mostrar a definição. Para simplificar a notação, utilizaremos uv para o par não ordenado $\{u, v\}$.

Exemplo 1.

$$G = (V(G), E(G))$$

onde

$$\begin{aligned} V(G) &= \{u, v, w, x, y\} \\ E(G) &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \end{aligned}$$

e ψ_G é definido por:

$$\begin{array}{llll} \psi_G(a) = uv & \psi_G(b) = uu & \psi_G(c) = vw & \psi_G(d) = wx \\ \psi_G(e) = vx & \psi_G(f) = wx & \psi_G(g) = ux & \psi_G(h) = xy \end{array}$$

Exemplo 2.

$$H = (V(H), E(H))$$

onde

$$\begin{array}{ll} V(H) & = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(H) & = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} \end{array}$$

e ψ_H é definido por:

$$\begin{array}{lllll} \psi_H(e_1) = v_1v_2 & \psi_H(e_2) = v_2v_3 & \psi_H(e_3) = v_3v_4 & \psi_H(e_4) = v_4v_5 & \psi_H(e_5) = v_5v_1 \\ \psi_H(e_6) = v_0v_1 & \psi_H(e_7) = v_0v_2 & \psi_H(e_8) = v_0v_3 & \psi_H(e_9) = v_0v_4 & \psi_H(e_{10}) = v_0v_5 \end{array}$$

1.2 Desenho de Grafos

O grafo é chamado de tal forma pois permite uma representação gráfica muito mais importante, é nesta representação gráfica que é possível entender a maioria de suas propriedades. Cada vértice é indicado por um ponto, e cada aresta por uma linha que liga os pontos que representam seus extremos. Os diagramas de G e H são vistos na Figura 1.1. Para facilitar a visualização, os vértices são indicados por círculos e os rótulos dos vértices são colocados dentro dos círculos para não confundir com os rótulos das arestas.

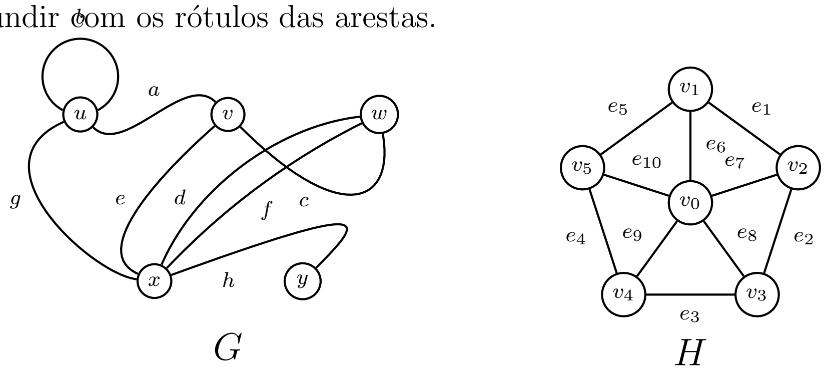


Figura 1.1: Diagramas para os grafos G e H

Não existe uma única forma de se desenhar um grafo, como podemos ver na figura 1.1 no desenho do grafo G as arestas são representadas por arcos curvilíneos e as arestas no desenho do grafo H são segmentos de reta. Em especial o grafo H é chamado de grafo "Roda" (wheel) de 5 raios: W_5, simplesmente por ter como possível desenho a forma apresentada. Um diagrama de um grafo simplesmente representa a relação de incidência entre seus vértices e arestas. Entretanto ao desenhar um diagrama de um grafo normalmente nos referimos ao diagrama como o grafo em si. No mesmo espírito, chamamos os "pontos" (ou círculos em nosso desenho) como 'vértices' e os arcos ou segmentos de retas que unem estes pontos de 'arestas'.

A maioria das definições e conceitos na teoria dos grafos surgem a partir da representação gráfica do grafo. Dentre os conceitos:

- Os extremos de uma aresta são ditos incidentes na aresta, e vice-versa.
- Dois vértices que são incidentes à mesma arestas são adjacentes, bem como duas arestas que incidem no mesmo vértice.
- Dois vértices adjacentes e distintos são vizinhos.
- O conjunto de vizinhos de um vértice v em um grafo G é representado por $N_G(v)$.
- Uma aresta com extremos idênticos é chamada de "laço", e uma aresta com extremos distintos de "ligação".
- Duas ou mais "ligações" em um mesmo par de extremos são chamadas de "arestas paralelas".

No grafo G da figura 1.1 d e f são arestas paralelas e b é um laço.

Normalmente adotamos a letra G para representar um grafo. Portanto, quando não houver ambiguidade, omitiremos a letra G nos símbolos e escreveremos por exemplo V e E ao invés de $V(G)$ e $E(G)$ para representar o conjunto de vértices e arestas de G, respectivamente.

Mais definições:

- Um grafo que não possui nenhum vértice (e portanto nenhuma aresta) é chamado de *grafo nulo*. Este grafo é definido somente por conveniência matemática.
- Qualquer grafo que possua um único vértice é chamado de *trivial*.
- Um grafo é *simples* se não possui nenhum laço nem arestas paralelas.

Nos grafos simples, o conjunto E pode ser definido como um conjunto de sub-conjuntos de dois elementos de V, como não há ambigüidade no desenho do grafo, o rótulo da aresta pode ser omitido, bem como pode ser dispensada a função de incidência ψ, representando cada aresta pelo próprio par de vértices que ela liga.

1.3 Famílias Especiais de Grafos

Alguns tipos de grafos desempenham papéis importantes na teoria dos grafos. Um *grafo completo* é um grafo simples no qual quaisquer dois vértices são adjacentes, um grafo completo de n vértices é indicado por K_n. Um *grafo vazio* é um grafo que não possui nenhum par de vértices adjacentes (ou seja, o conjunto de arestas é vazio). Um grafo é *bipartido* se for possível dividir os vértices em dois subconjuntos X e Y de forma que todas as arestas tenham um extremo em X e outro em Y, esta partição (X, Y) é chamada de *bipartição* do grafo e X e Y são as *partes*. Um grafo bipartido G com partes X e Y é denotado como $G[X, Y]$. Se $G[X, Y]$ é simples e todo vértice em X é ligado a cada vértice em Y, então G é chamado de *grafo bipartido completo*, se considerarmos $x = |X|$ e $y = |Y|$, então o grafo completo $G[X, Y]$ é indicado por $K_{x,y}$. Uma *estrela* é um grafo bipartido completo com $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$. A figura 1.2 representa diagramas de grafos completo, bipartido completo e estrela.

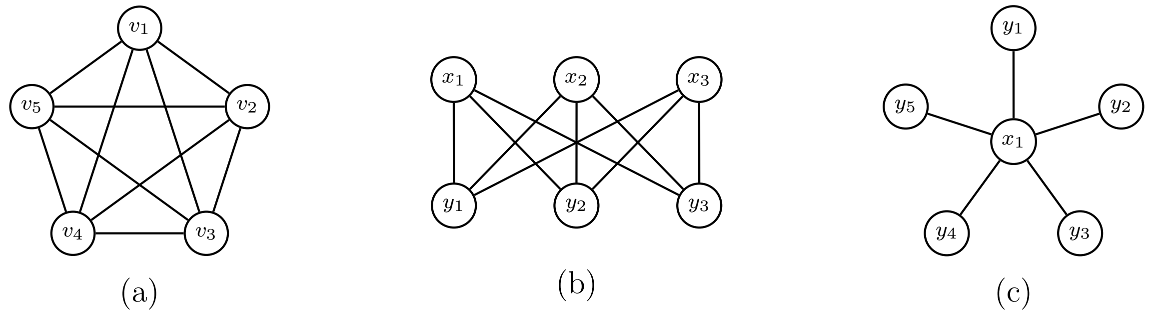


Figura 1.2: (a) Grafo Completo K_5, (b) Grafo Bipartido Completo $K_{3,3}$, (c) Estrela $K_{1,5}$

Um *caminho* é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma seqüência linear de forma que dois vértices são adjacentes se eles forem consecutivos na seqüência, e não adjacentes caso contrário, um caminho com m arestas (e obviamente $m + 1$ vértices) é chamado de P_m. Da mesma forma, um *ciclo*[1] em três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma seqüência cíclica de forma que dois vértices são adjacentes se forem consecutivos na seqüência e não adjacentes caso contrário, um ciclo com m arestas (e obviamente m vértices) é chamado e C_m. O comprimento de um caminho ou ciclo é definido pelo seu número de arestas. C_3 é conhecido por *triângulo*, C_4 por *quadrilátero*, C_5 por *pentágono*, C_6 por *hexágono* e assim por diante. A figura 1.3 demonstra um P_3 e um C_5.

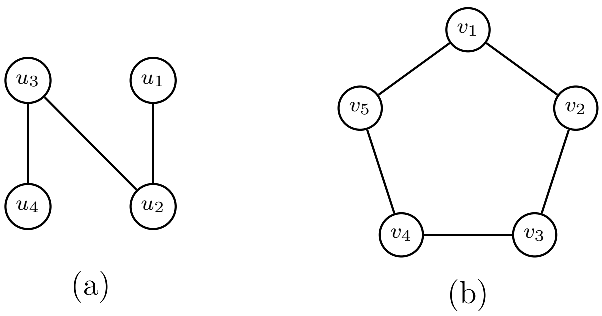
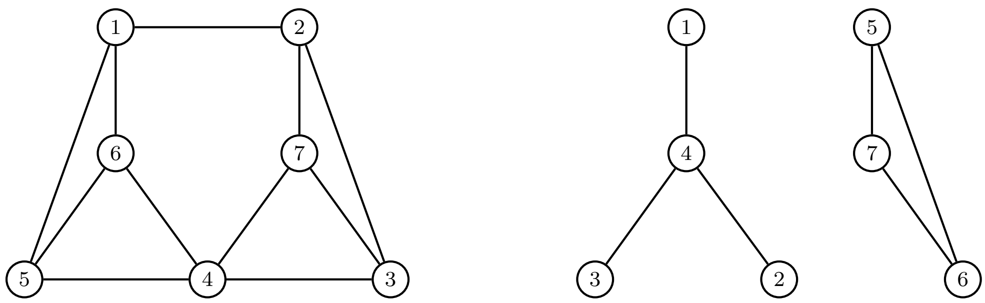


Figura 1.3: (a) Caminho P_3, (b) Ciclo C_5

Um grafo é *conexo* se, para qualquer partição de seus vértices em dois subconjuntos não vazio X e Y existir ao menos uma aresta com um extremo em X e outro em Y, caso contrário o grafo é *não conexo*. Em outras palavras, um grafo é não conexo se seu vértices podem ser particionados em dois subconjuntos não vazio X e Y de forma que não exista aresta que possua um extremo em X e outro em Y. Exemplos de grafos conexo e não conexo podem ser vistos na figura 1.4. Se particionarmos o conjunto de vértices no maior número de subconjuntos de forma que não exista qualquer aresta que tenha extremos em subconjuntos distintos, cada grafo formado pelo conjunto representado por cada partição dos vértices e o subconjunto de arestas que só tenha extremos nesta partição é chamado de componente conexo do grafo original. Na figura 1.4 podemos observar que o grafo representado em (b) possui dois componentes conexos, e o grafo em (a) apenas um componente conexo.

Alguns cuidados precisam ser tomados ao representar graficamente um grafo. Não é permitido a intersecção de uma aresta por si mesma, nem é permitido que uma aresta passe por

[1] Alguns autores preferem a denominação *circuito*



(a) (b)

Figura 1.4: (a) Um grafo conexo e (b) Um grafo não conexo

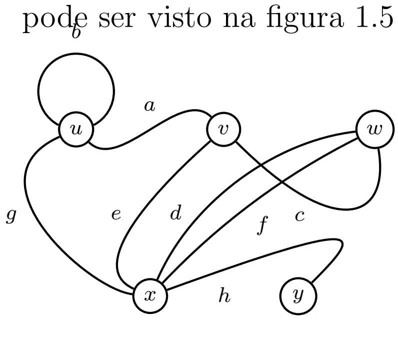
sobre um vértice. As arestas apenas atingem um vértice se este for seu extremo, também é possível a intersecção de duas arestas distintas em um ponto que não represente um vértice, como vimos na figura 1.2. Se um grafo puder ser desenhado no plano de forma que somente há a intersecção de duas arestas em pontos que correspondam a um extremo comum, então o grafo é dito *grafo planar* e a figura é a *representação planar* do grafo. Por exemplo, ambos grafos da figura 1.1 são planares, embora a representação do primeiro grafo naquela figura tenha arestas se cruzando, por outro lado, os dois primeiros grafos da figura 1.2 não são planares.

1.4 Representação dos Grafos

Apesar da conveniência no uso de desenhos para representar grafos, esta forma não é a mais apropriada para armazenar grafos em computadores, ou para aplicar métodos matemáticos ao estudar suas propriedades. Para estas finalidades poderemos trabalhar com diversas representações, duas delas na forma de matrizes associadas a um grafo: sua matriz de incidência e sua matriz de adjacência.

Seja um grafo G com o conjunto de vértices V e conjunto de arestas R. A *Matriz de Incidência* de G é a matriz $n \times m$ $\mathbf{M}_G := (m_{ve})$, onde m_{ve} é o número de vezes (0, 1 ou 2) que um vértice v e uma aresta e são incidentes.

A *Matriz de Adjacência* de G é a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}_G := (a_{uv})$, onde a_{uv} é o número de arestas que ligam os vértices u e v. As matrizes de Incidência e Adjacência do gráfico da figura 1.1 pode ser visto na figura 1.5



G

	a	b	c	d	e	f	g	h
u	1	2	0	0	0	0	1	0
v	1	0	1	0	1	0	0	0
w	0	0	1	1	0	1	0	0
x	0	0	0	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	0	0	0	1

M

	u	v	w	x	y
u	2	1	0	1	0
v	1	0	1	1	0
w	0	1	0	2	0
x	1	1	2	0	1
y	0	0	0	1	0

A

Figura 1.5: Matrizes de Incidência e de Adjacência de um grafo

Como normalmente os grafos possuem muito mais arestas do que vértices, as matriz de adjacência de um grafo é geralmente muito menor que a sua matriz de incidência, e portanto requer muito menos espaço de armazenamento. Ao lidar com grafos simples, uma representação mais compacta é possível, na forma de *lista de adjacência*: Para cada vértice v, os vizinhos de v são listados em uma determinada ordem: $\mathbf{L}_G := lista(N(v) : v \in V)$. A figura 1.6 representa graficamente uma lista de adjacência.

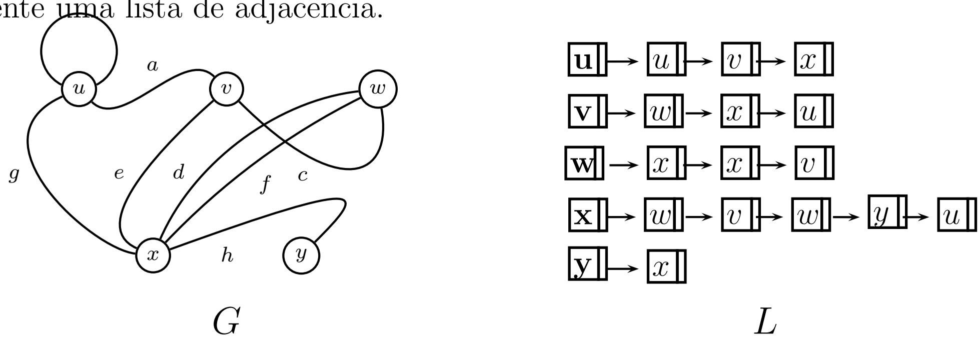


Figura 1.6: Lista de Adjacência de um grafo

Quando o grafo G é bipartido, já que não existem arestas ligando pares de vértices que pertençam à mesma partição, uma matriz de tamanho menor que a matriz de adjacência pode ser utilizada para registrar o número de arestas entre vértices. Suponha que $G[X, Y]$ é bipartido, onde $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ e $Y := \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$. Podemos definir a matriz de adjacência bipartida de G como a matriz $r \times s$ $\mathbf{B}_G = (b_{ij})$, onde b_{ij} é o número de arestas que ligam x_i a y_j.

1.5 Graus de Vértices

O grau de um vértice v em um grafo G, representado por $g_G(v)$[2], é o número de arestas de G que incidem com v, como um laço incide duas vezes no mesmo vértice, então cada laço é contado duas vezes. Em particular, se G é um grafo simples, $g_G(v)$ é o número de vizinhos de v em G. Um vértice que possui grau 0 é chamado de *vértice isolado*. Representamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o menor e o maior graus dos vértices de G, e por $g(G)$ o seu *grau médio*, $\frac{1}{n}\sum_{v\in V} g(v)$. O seguinte teorema estabelece uma identidade fundamental relacionando os graus dos vértices e os números de arestas.

Teorema 1.1. *Para todo grafo G,*

$$\sum_{v\in V} g(v) = 2m \tag{1.1}$$

Demonstração. Considere a matriz de incidência $\mathbf{M}_G := (m_{ve})$ de G. A soma das entradas em uma linha é o grau de um vértice: $g(v) = \sum_{e\in E} m_{ve}$. Por outro lado, a soma das entradas em uma coluna é 2, pois repesenta o número de vezes que uma determinada aresta incidiu no conjunto de vértices, como uma aresta só tem 2 extremos (mesmo os laços) então $2 = \sum_{v\in V} m_{ve}$. Como a ordem das parcelas não altera a soma, podemos somar todas as células da

[2]Na literatura podemos encontrar a versão em inglês: $d_G(v)$

matriz fazendo primeiro a soma das linhas e em seguida das colunas ou o inverso, primeiro a soma das colunas e em seguida das linhas.

$$\sum_{v\in V} g(v) = \sum_{v\in V}\sum_{e\in E} m_{ve} = \sum_{e\in E}\sum_{v\in V} m_{ve} = 2\sum_{e\in E} 1 = 2m$$

□

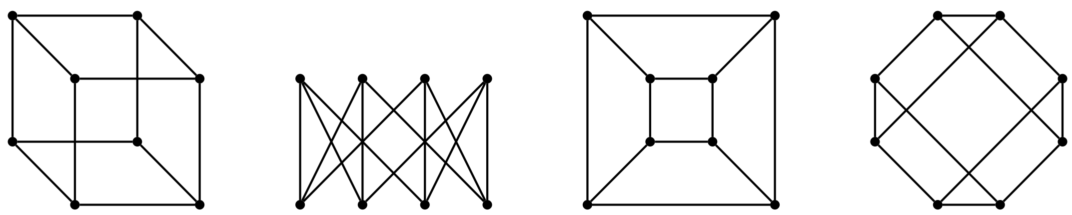
Corolário 1.2. *Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Demonstração. Considere a equação 1.1 módulo 2. Nós temos:

$$g(v) \equiv \begin{cases} 1(mod2), & \text{se } g(v) \text{ é ímpar,} \\ 0(mod2), & \text{se } g(v) \text{ é par.} \end{cases}$$

Então, módulo 2 no lado esquerdo da equação é congruente com o número de vértices de grau ímpar, e no lado direito é 0. Ou seja, o número de vértices de grau ímpar é portanto congruente a zero módulo 2. □

Um grafo G é dito k-regular se $g(v) = k$ para todo $v \in V$; um *grafo regular* é k-regular para algum k. Por exemplo, um grafo completo de n vértices é $(n-1)$-regular, e um grafo completo bipartido com k vértices em cada partição é k-regular. Em especial, os grafos 3-regular são chamados de *grafos cúbicos* e possuem uma importância grande na teoria dos grafos. Todos os grafos da figura 1.7 são 3-regulares.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1.7: 3-cubo: (a) tridimensional (b) bipartido (c) planar (d) ciclo hamiltoniano

1.6 Isomorfismo

Dois grafos G e H são *idênticos*, escrito $G = H$, se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$, e $\psi(G) = \psi(H)$. Se dois grafos são idênticos, eles podem ser claramente representados por diagramas idênticos. Entretanto, é possível aos grafos que não são idênticos ter essencialmente o mesmo diagrama. Por exemplo, os grafos G e H na figura 1.8 podem ser representados por diagramas que tenham a mesma aparência, como o segundo desenho de H mostra; a única diferença recai sobre os rótulos em seus vértices e arestas. Embora os grafos G e H não são idênticos, ele têm estruturas idênticas e são ditos ISOMORFOS.

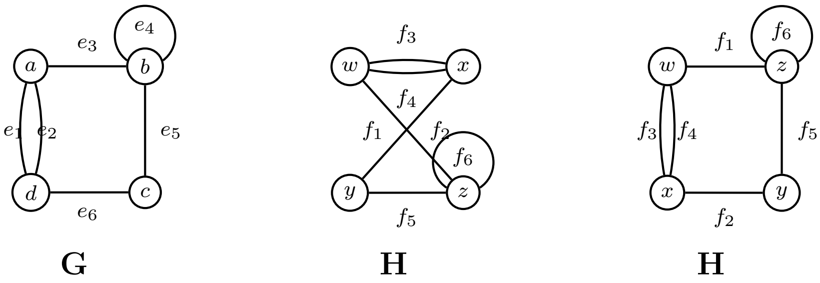


Figura 1.8: Grafos Isomorfos

Em geral, dois grafos G e H são isomorfos, escrito $G \cong H$, se existem bijeções $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tais que $\psi_G(e) = uv$ se e somente se $\psi_H(\phi(e))) = \theta(u)\theta(v)$; este par de mapeamento é chamado de isomorfismo entre G e H.

Para mostrar que dois grafos são isomorfos, é necessário apresentar o isomorfismo entre eles. O par (θ, ϕ) definido por:

$$\theta := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ w & z & y & x \end{pmatrix} \quad \phi := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ f_3 & f_4 & f_1 & f_6 & f_5 & f_2 \end{pmatrix}$$

é o isomorfismo entre os grafos G e H na figura 1.8.

No caso de grafos simples, a definição de isomorfismo pode ser apresentada de forma mais concisa, por que se (θ, ϕ) é um isomorfismo entre grafos simples G e H, o mapeamento ϕ é completamente determinado por θ; de fato, $\phi(e) = \theta(u)\theta(v)$ para qualquer aresta $e = uv$ em G. Assim podemos definir isormorfismo entre dois grafos simples G e H como a bijeção $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve a adjacência (ou seja, os vértices u e v são adjacentes em G se o somente se suas imagens $\theta(u)$ e $\theta(v)$ são adjacentes em H).

Considere, por exemplo, os grafos G e H na figura 1.9, o mapeamento

$$\theta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & d & f & c & e & a \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo entre G e H, bem como

$$\theta' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & e & d & f & b \end{pmatrix}$$

.

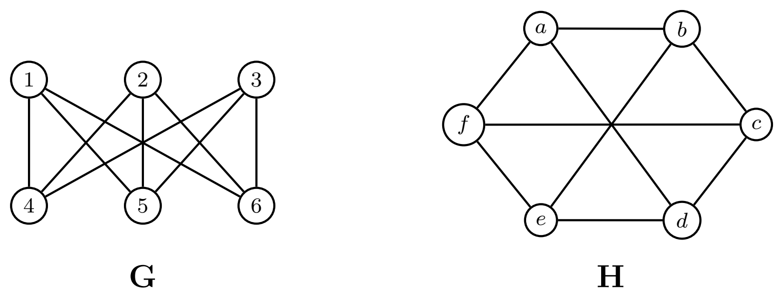


Figura 1.9: Grafos simples isomorfos

Grafos isomorfos claramente têm o mesmo número de vértices e arestas. Por outro lado, a igualdade destes parâmetros não garantem o isomorfismo. Por exemplo, os dois grafos vistos na figura 1.10 possuem oito vértices e doze arestas, mas não são isomorfos. Para identificar, observe que o grafo G têm quatro vértices mutuamente não adjacentes: v_1, v_3, v_6 e v_8. Se houvesse um isomorfismo entre G e H, os vértices $\theta(v_1)$, $\theta(v_3)$, $\theta(v_6)$ e $\theta(v_8)$ de H deveriam ser da mesma forma mutuamente não adjacentes. Mas é possível verificar rapidamente que não há quatro vértices em H que sejam mutuamente não adjacentes. Podemos deduzir que G e H não são isomorfos.

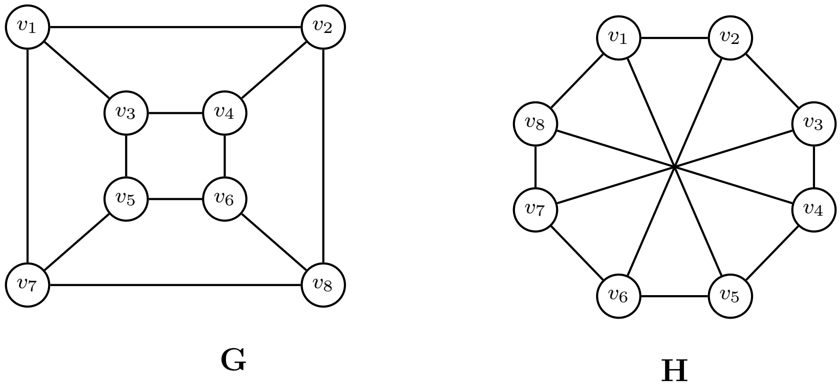


Figura 1.10: Grafos não isomorfos

Podemos concluir desta discussão que se dois grafos são isomorfos, então eles são idênticos ou diferem simplesmente pelo nome de seus vértices e arestas, e portanto possuem a mesma estrutura. Por estarmos interessados principalmente nas propriedades estruturais, frequentemente omitimos os rótulos ao desenhar grafos; formalmente podemos definir que grafos sem rótulos são representativos de uma classe de equivalência isomórfica. Nós atribuímos rótulos a vértices e arestas em um grafo principalmente com a finalidade de referência aos mesmos, como por exemplo em uma prova.

Decorrente do isomorfismo, existe somente um grafo completo com n vértices, chamado de K_n. Da mesma forma, dados dois inteiros positivos m e n, existe um único grafo completo bipartido com partes de tamanho m e n, nomeado de $K_{m,n}$. O mesmo para caminhos de comprimento n e ciclos com n vértices.

Não há algoritmo eficiente para identificar se dois grafos são isomorfos.

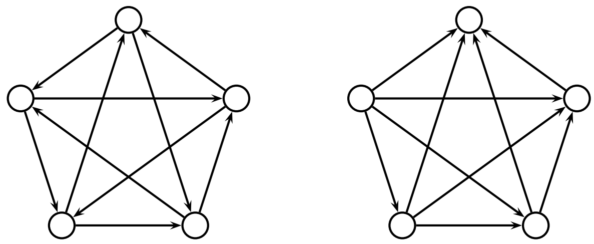
1.7 Grafos Orientados

Alguns problemas não são bem definido na forma de grafos simplesmente, como por exemplo o tratamento de fluxo de tráfego, é necessário conhecer quais estradas em uma rede têm mão dupla ou mão única, e quais direções são permitidas. Claramente, um grafo desta rede não é muito útil nesta situação. O que é necessário é um grafo no qual cada ligação tenha uma orientação atribuída, ou seja, um Grafo Orientado[3]. Em inglês o termo "directed graph" é abreviado a *digraph*.

Formalmente, um *grafo orientado* D é um par ordenado $(V(D), A(D))$ consistindo de um conjunto $V := V(D)$ de *vértices* e um conjunto $A := A(D)$, disjunto de $V(D)$, de *arcos*, juntos

[3]Alguns autores preferem o nome *Grafos Dirigidos*

com uma função de incidência ψ_D que associa a cada arco em D um par *ordenado* e não necessariamente distinto de vértices de D. Se a é um arco e $\psi_D(a) = (u, v)$, então a é dito ligar u a v; também dizemos que u *domina* v. O vértice u é a *cauda* de a e o vértice v é a cabeça de a; eles são os extremos de a. Ocasionalmente, a orientação de um arco é irrelevante à discussão, neste caso podemos nos referir ao arco como aresta do grafo orientado. O número de arcos em D é representado por $a(D)$. Os vértices que dominam um vértice v são seus *in*-vizinhos, e aqueles que são dominados por v são seus *out*-vizinhos. Estes conjuntos são representados por $N_D^-(v)$ e $N_D^+(v)$ respectivamente.



(a) (b)

Figura 1.11: Dois torneios de 5 vértices

Um grafo estrito é aquele sem laços ou arcos paralelos (arcos que coincidam extremos nas cabeças e caudas. A qualquer grafo orientado D pode estar associado um grafo G com o mesmo conjunto de vértices, simplesmente substituindo cada arco por uma aresta com os mesmos extremos. Este grafo associado é representado por $G(D)$. Uma orientação em especial em grafos simples completos é chamada de *torneio*, este nome é decorrente a este representar um torneio no qual cada time joga com todos os outros oponentes. A figura 1.11 mostra um torneio de 5 vértices.

Um grafo orientado, tal qual um grafo possui uma representação gráfica simples. Um grafo orientado é representado por um diagrama semelhante ao grafo, com setas em suas arestas, cada seta aponta à cabeça do arco. Todo conceito que é válido para grafos automaticamente se aplica a grafos orientados, também. Por exemplo, o *grau* de um vértice v em um grafo orientado D é simplesmente o grau de v em $G(D)$. Da mesma forma um grafo orientado é dito conexo se seu grafo associado for conexo. Mas existem alguns conceitos nos quais a orientação possui um papel essencial. Por exemplo o *in*-grau $g_D^-(v)$ de um vértice v em D é o número de arcos com cabeça em v, e o *out*-grau $g_D^+(v)$ de um vértice é o número de arcos com cauda em v. O *in*-grau e *out*-grau mínimo é $\delta^-(D)$ e $\delta^+(D)$ respectivamente. Da mesma forma que o *in*-grau e *out*-grau máximo é $\Delta^-(D)$ e $\Delta^+(D)$, respectivamente. Um grafo orientado é k-regular se cada *in*-grau e *out*-grau são iguais a k. Um vértice de *in*-grau zero é chamado de *fonte*, um vértice de *out*-grau zero é chamado de *sorvedouro*. Um *caminho orientado* ou *ciclo orientado* é a orientação de um caminho ou ciclo no qual cada vértice domina o seu sucessor na seqüência.

Grafos Fortemente Conexos

Um grafo orientado D é dito FORTEMENTE CONEXO se para quaisquer par de vértices u e v, existe o caminho orientado $P_1 : \{u, \ldots, v\}$ e $P_2 : \{v, \ldots, u\}$.

Se um grafo orientado D não é *Fortemente Conexo*, então ele possui mais de uma componente fortemente conexa. Uma componente formetemente conexa é definida por um subconjunto maximal de vértices $V'(D) \subset V(D)$ tal que o subgrafo de D obtido por $D - v | v \in (V(D) - V'(D))$ é um grafo fortemente conexo. Dadas duas componentes fortemente conexas, qualquer arco que ligue um vértice de uma componente a um vértice da outra componente possui a mesma orientação.

Princípio da Dualidade Direcional

Toda declaração sobre um grafo orientado possui uma declaração 'dual' que acompanha, obtida ao se aplicar a declaração no grafo orientado inverso, que se obtém trocando a direção de todos seus arcos.

Por exemplo: A soma de todos os *in*-graus dos vértices de um grafo orientado é igual ao número total de seus arcos. Aplicando o princípio da dualidade direcional, a soma de todos os *out*-graus dos vértices de um grafo orientado também é igual ao número total de seus arcos.

Matriz de Incidência em um Grafo Orientado

Seja D um grafo orientado com conjunto de vértices V e conjunto de arcos A. A matriz de incidência de D (com relação à ordenação de seus vértices e arcos) é a matriz $n \times m$ $\mathbf{M}_D := (m_{va})$, onde

$$m_{va} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } a \text{ é uma ligação e o vértice } v \text{ é a cauda de } a \\ \text{-1} & \text{se arco } a \text{ é ligação e o vértice } v \text{ é cabeça de } a \\ 0 & \text{outra situação} \end{cases}$$

Matriz de Adjacência em um Grafo Orientado

A matriz de adjacência de um grafo orientado D é a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}_D = (a_{uv})$, onde a_{uv} é o número de arcos em D com calda u e cabeça v.

Capítulo 2

Subgrafos

2.1 Remoção de Arestas e Vértices

Dado um grafo G, existem duas formas naturais de derivar grafos menores a partir de G. Se e é uma aresta de G, podemos obter um grafo com $m - 1$ arestas removendo e de G, mas deixando os vértices e as arestas remanescentes intactas. O grafo resultante é indicado por $G\backslash e$. Da mesma forma, se v é um vértice de G, podemos obter um grafo com $n - 1$ vértices removendo de G o vértice v junto com todas arestas que incidem em v. O grafo resultante é indicado por $G - v$. Estas operações são chamadas de *Remoção de Aresta* e *Remoção de Vértice*. A figura 2.1 ilustra estas operações.

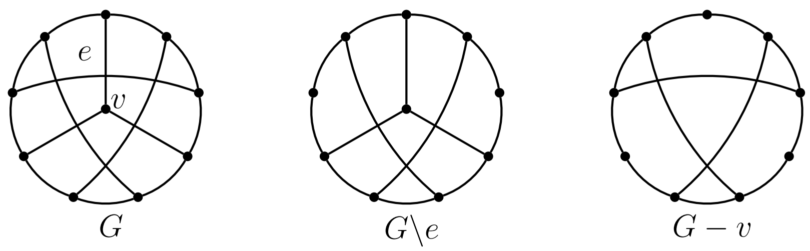


Figura 2.1: Subgrafos obtidos pela remoção de aresta e vértice

Os grafos $G\backslash e$ e $G - v$ definidos acima são exemplos de subgrafos de G. Podemos indicar o grafo F um subgrafo do grafo G se $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$, e ψ_F é a restrição de ψ_G para $E(F)$. Dizemos então que G *contém* F ou que F *esta contido em* G, e escrevemos $G \supseteq F$ ou $F \subseteq G$, respectivamente. Qualquer subgrafo F de G pode ser obtido por repetidas aplicações das operações básicas de remoção de vértices e arestas; por exemplo, primeiro removendo as arestas de G que não estão em F e depois removendo os vértices de G que não estão em F. Note que um grafo nulo é um subgrafo de qualquer grafo.

Uma *cópia* de um grafo F em um grafo G é um subgrafo de G que é isomorfo a F. Este grafo também é referido como F-*subgrafo* de G; Por exemplo, um K_3-subgrafo é um triângulo em um grafo. Em especial, qualquer K_n-subgrafo é chamado de *click*.

Um *supergrafo* de G é um grafo H que contenha G como subgrafo, ou seja, $H \supseteq G$. Observe que qualquer grafo é ambos, subgrafo e supergrafo de si mesmo. Todos os outros subgrafos F ou supergrafos H são referidos como *próprios*; escreve-se então: $F \subset G$ ou

$H \supset G$, respectivamente[1].

Muitas aplicações dependem da existência de algum subgrafo em especial. O teorema abaixo indica condições suficientes para que um grafo contenha um ciclo.

Teorema 2.1. *Seja G um grafo no qual todos os vértices têm grau no mínimo 2. Então G contém um ciclo.*

Demonstração. Se G contém um laço, então ele possui um ciclo de comprimento 1, se G contém arestas paralelas, então ele contém um ciclo de tamanho 2. Vamos assumir, então, que G é simples.

Seja $P := v_0v_1 \dots v_{k-1}v_k$ o maior caminho em G. Como o grau de v_k é no mínimo 2, ele possui um vizinho v diferente de v_{k-1}. Se v não está em P, o caminho $v_0v_1 \dots v_{k-1}v_kv$ contradiz a escolha de P como maior caminho. então, $v = v_i$, para algum $i, 0 \leqslant i \leqslant k-2$, e $v_iv_{i+1} \dots v_kv_i$ é um ciclo em G. □

2.2 Subgrafo Gerador e Induzido

(... em breve um texto...)
(... ...)

2.3 Grafos acíclicos

Um grafo é chamado de acíclico quando não contiver nenhum ciclo. Segue do teorema 2.1 que um grafo acíclico deve conter um vértice de grau menor que 2. De fato, todo grafo acíclico não trivial tem ao menos dois vértices de grau menor que dois.

Um grafo orientado é acíclico se ele não contiver nenhum ciclo orientado.

2.4 Árvores e Florestas

Todo grafo acíclico é um grafo que não contém ciclos. Um grafo conexo e acíclico é chamado de *árvore*. As árvores de seis vértices podem ser vistas na figura 2.2. De acordo com estas definições, cada componente acíclica de um grafo é uma árvore. Por esta razão, grafos acíclicos são usualmente chamados de *florestas*.

Para que um grafo seja conexo, deve existir pelo menos um caminho entre dois quaisquer vértices. A próxima proposição indica que árvores são grafos conexos que atendem a esta requisição.

Proposição 2.2. *Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por exatamente um caminho.*

Demonstração. Esta é uma prova simplificada que considera que os caminhos não se cruzam e não possuem arestas comuns:

[1]Para indicar um subgrafo ou supergrafo próprio há quem prefira: $F \subsetneqq G$ e $H \supsetneqq G$

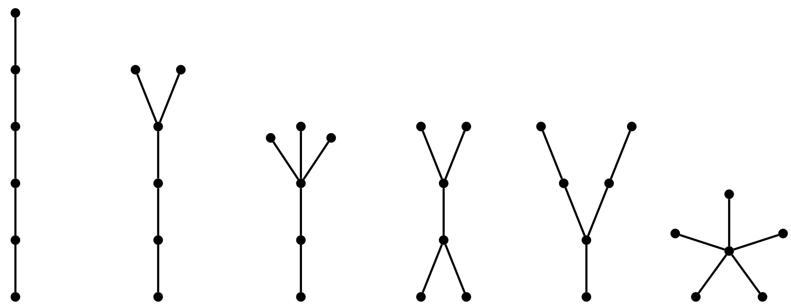


Figura 2.2: Árvores de seis vértices

Se existir dois vértices no grafo que não sejam ligados por um caminho, então o grafo não é conexo e por definição não é uma árvore, então podemos supor que entre dois vértices exista pelo menos um caminho.

Vamos supor, por contradição, que entre os vértices u e v exista mais de um caminho, por exemplo, os caminhos P_1 e P_2 disjuntos nos vértices e arestas, exceto por u e v. Então uP_1vP_2u é um ciclo. □

Decorrente do teorema 2.1 uma árvore, não trivial, deve conter um vértice de grau exatamente 1. Tal vértice é chamado *folha* da árvore. A seguinte proposição é mais forte:

Proposição 2.3. *Toda árvore não trivial tem ao menos duas folhas*

Demonstração. Fica como exercício! □

Teorema 2.4. *Se T é uma árvore, então $e(T) = v(T) - 1$.*

Demonstração. Vamos provar por indução:
Base Uma árvore trivial: $e(T) = 0$, $v(T) = 1$. Na base: $e(T) = v(T) - 1$.
Hipótese de Indução: $e(T) = v(T) - 1$.
Passo: Seja x folha em T, tomamos $T' = T - x$.
Sabemos que $v(T') = v(T) - 1$ decorrente da operação de remoção de vértice, e como x só possui uma aresta incidindo nele, $e(T') = e(T) - 1$. Ficamos com:

$$\text{Pela H.I.: } e(T') = v(T') - 1 \Rightarrow e(T) - 1 = v(T) - 1 - 1,$$

$$e(T) = v(T) - 1$$

□

Árvores enraizadas

Uma *Árvore enraizada* $T(x)$ é uma árvore T com u vértice específico x, chamado *raiz* de T. Uma orientação de uma árvore enraizada no qual qualquer vértice, exceto o raiz possua *in*-grau 1 é chamada de *ramificação*. A figura 2.3 é um exemplo de ramificação. Um caminho orientado é uma ramificação e o raiz de qualquer ramificação é um fonte.

Árvores enraizadas e ramificações são ferramentas básicas no projeto de algoritmos eficientes para resolver uma variedade de problemas envolvendo alcançabilidade.

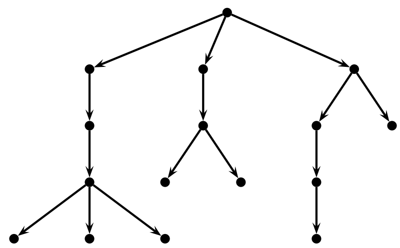


Figura 2.3: Uma ramificação

2.5 Modificando Grafos

Além de remoção de vértices e arestas é possível realizar outras operações que modificam os grafos, entre elas as operações Unificação de Vértices e Contração de Arestas que reduzem o tamanho do grafo e as operações Divisão de Vértices e Divisão de Arestas que aumentam o tamanho do grafo.

Apesar destas operações não conduzirem a subgrafos ou supergrafos elas são importantes e é conveniente apresentá-las neste capítulo.

Unificação de Vértices e Contração de Arestas

Unificar dois vértices x e y de um grafo G é substituir estes vértices por um único vértice incidente a todas as arestas que eram incidentes a x ou y em G. O grafo resultante é representado por: $G/\{x, y\}$ (veja a figura 2.4). *Contrair* uma aresta e de um grafo G é remover esta aresta e então (se a aresta é uma ligação) unificar os vértices que são seus extremos. O grafo resultante é representado por G/e (veja a figura 2.4).

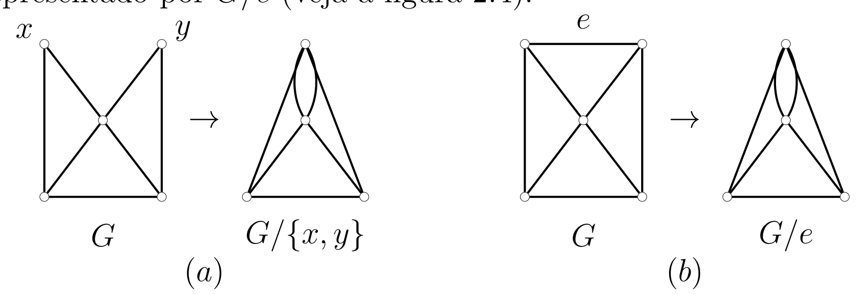


Figura 2.4: (a) Unificação de Vértices, e (b) Contração de aresta

2.5.1 Divisão de Vértices e Arestas

A operação inverça à contração de aresta é a divisão de vértices. *Dividir* um vértice v é substituí-lo por dois vértices adjacentes v' e v'', e substituir cada aresta incidente em v por uma incidente a v' ou v'' (mas não a ambos, a não ser que a aresta é um laço em v), o outro extremo da aresta mantém-se inalterado (veja figura 2.5). Observe que um vértice de grau positivo pode ser subdividido de diversas maneiras, desta forma o grafo resultante, em geral, não é único.

Um caso especial de divisão de vértices ocorre quando exatamente uma ligação, ou exatamente um extremo do loop é atribuído a v' ou a v''. O grafo resultante pode ser visto como obtido por uma subdivisão de aresta do grafo original, sendo que subdividir uma aresta e

significa remover a aresta e, adicionar um novo vértice x e ligar x aos extremos de e (quando e é uma ligação significa substituir e por um caminho de comprimento 2), como pode ser visto na fig 2.5.

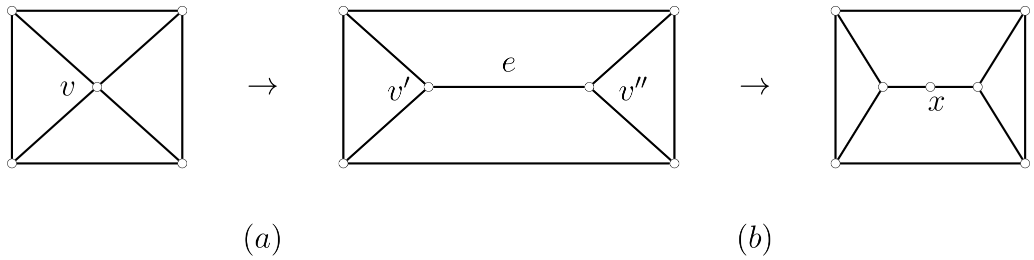


Figura 2.5: (a) Divisão de Vértice, e (b) Divisão de aresta