Projeto e Análise de Algoritmos

Hamilton José Brumatto

Bacharelado em Ciência da Computação - UESC

3 de junho de 2016

Grafos

Contextuação

- Diagrama que representa um conjunto de pontos com linhas que unem pares destes pontos.
- Usado para descrever diversos fatos do mundo real: Pessoas e Pares de amizade; Centros de comunicações e ligações entre dois centros...
- Apenas representam se dois pontos são de fatos unidos. Não descreve como implementar a união.

Definições

O grafo G

- Par ordenado $(V(G), E(G))$
- Conjunto $V(G)$ de *vértices*
- Conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de *arestas*
- Unidos com uma *função de incidência* ψ_G
- ψ_G associa a cada aresta em G um par não ordenado e não necessariamente distinto de vértices de G

Exemplo

$$G = (V(G), E(G))$$

onde

$$\begin{aligned} V(G) &= \{u, v, w, x, y\} \\ E(G) &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \end{aligned}$$

e ψ_G é definido por:

$$\begin{array}{llll} \psi_G(a) = uv & \psi_G(b) = uu & \psi_G(c) = vw & \psi_G(d) = wx \\ \psi_G(e) = vx & \psi_G(f) = wx & \psi_G(g) = ux & \psi_G(h) = xy \end{array}$$

Exemplo

$$H = (V(H), E(H))$$

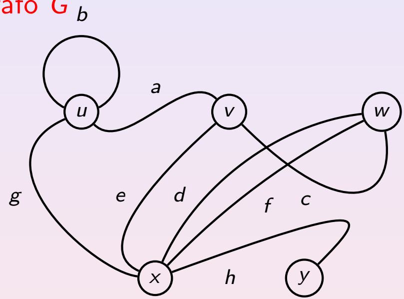
onde

$$\begin{aligned} V(H) &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(H) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} \end{aligned}$$

e ψ_H é definido por:

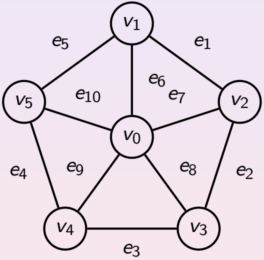
$$\begin{array}{lllll} \psi_H(e_1) = v_1 v_2 & \psi_H(e_2) = v_2 v_3 & \psi_H(e_3) = v_3 v_4 & \psi_H(e_4) = v_4 v_5 & \psi_H(e_5) = v_5 v_1 \\ \psi_H(e_6) = v_0 v_1 & \psi_H(e_7) = v_0 v_2 & \psi_H(e_8) = v_0 v_3 & \psi_H(e_9) = v_0 v_4 & \psi_H(e_{10}) = v_0 v_5 \end{array}$$

Desenho do grafo G



Grafo G: Arestas são representadas por arcos curvilíneos. Vértices representados por círculos e os rótulos dos vértices estão descritos dentro dos círculos

Desenho do grafo H



Grafo H: arestas representadas por segmentos de retas.
O Grafo H é o grafo "Roda" (wheel) com 5 raios: W_5

Definições para grafos

- Os extremos de uma aresta são ditos incidentes na aresta, e vice-versa.
- Dois vértices que são incidentes à mesma arestas são adjacentes, bem como duas arestas que incidem no mesmo vértice.
- Dois vértices adjacentes e distintos são vizinhos.
- O conjunto de vizinhos de um vértice v em um grafo G é representado por $N_G(v)$.
- Uma aresta com extremos idênticos é chamada de "laço", e uma aresta com extremos distintos de "ligação".
- Duas ou mais "ligações" em um mesmo par de extremos são chamadas de "arestas paralelas".

Definições para grafos

- Um grafo que não possui nenhum vértice (e portanto nenhuma aresta) é chamado de *grafo nulo*. Este grafo é definido somente por conveniência matemática.
- Qualquer grafo que possua um único vértice é chamado de *trivial*.
- Um grafo é *simples* se não possui nenhum laço nem arestas paralelas.

Famílias especiais de grafos

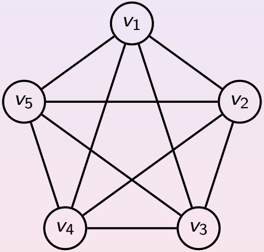
- *grafo completo*: grafo simples no qual quaisquer dois vértices são adjacentes, um grafo completo de n vértices é indicado por K_n.
- *grafo vazio*: grafo que não possui nenhum par de vértices adjacentes, ou $E = \emptyset$
- *bipartido*: é possível dividir os vértices em dois subconjuntos X e Y de forma que todas as arestas tenham um extremo em X e outro em Y. $G[X, Y]$.
- *grafo bipartido completo*: grafo simples bipartido com todos vértices de uma partição adjacente a cada vértice da outra partição: $K_{x,y}$.
- *estrela*: grafo completo bipartido com $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

Famílias especiais de grafos

- *caminho*: grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma seqüência linear de forma que dois vértices são adjacentes se eles forem consecutivos na seqüência, e não adjacentes caso contrário.
- caminho de m arestas é indicado por P_m.
- *ciclo*[1] em três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma seqüência cíclica de forma que dois vértices são adjacentes se forem consecutivos na seqüência e não adjacentes caso contrário.
- ciclo de m arestas é indicado por C_m.
- O comprimento de um caminho ou ciclo é dado pelo número de arestas do grafo.

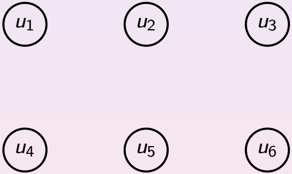
[1] Alguns autores preferem a denominação *circuito*

Grafo completo



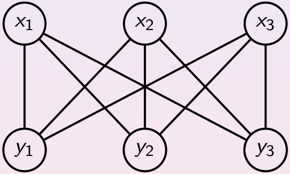
Grafo K_5

Grafo Vazio



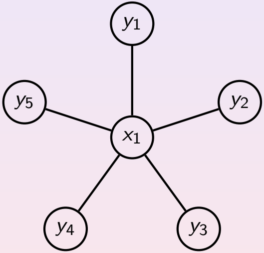
Grafo Vazio com 6 vértices

Grafo Bipartido Completo



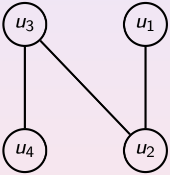
Grafo $K_{3,3}$

Grafo Estrela



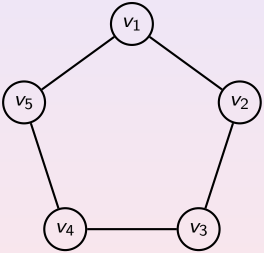
Estrela $K_{1,5}$

Caminho



Caminho P_3

Ciclo



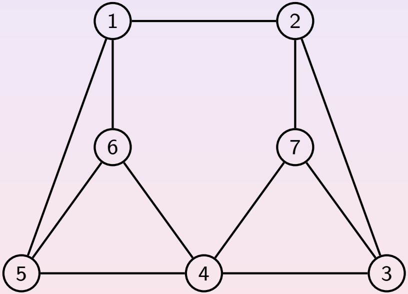
Ciclo C_5

Conexidade

- *conexo*: para qualquer partição de seus vértices em dois subconjuntos não vazio X e Y deve existir ao menos uma aresta com um extremo em X e outro em Y, caso contrário o grafo é *não conexo*

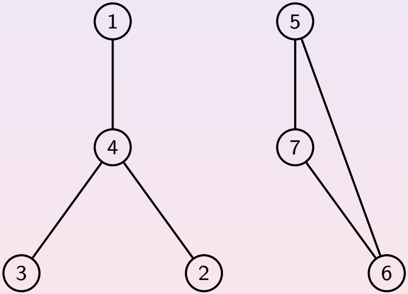
Se particionarmos o conjunto de vértices no maior número de subconjuntos de forma que não exista qualquer aresta que tenha extremos em subconjuntos distintos, um grafo formado pelo conjunto representado por uma partição dos vértices e o subconjunto de arestas que só tenha extremos nesta partição é chamado de componente conexa do grafo original.

Grafo conexo



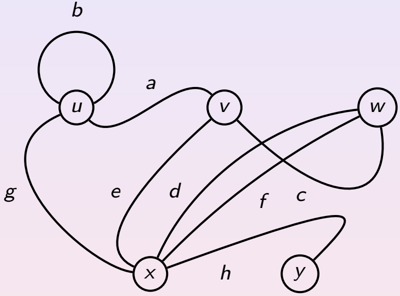
Grafo conexo, possui somente uma componente conexa, que é o próprio grafo.

Grafo não conexo



Grafo não conexo que possui duas componentes conexas.

Matriz de Incidência



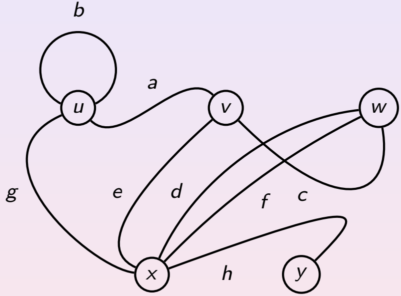
G

	a	b	c	d	e	f	g	h
u	1	2	0	0	0	0	1	0
v	1	0	1	0	1	0	0	0
w	0	0	1	1	0	1	0	0
x	0	0	0	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	0	0	0	1

$\mathbf{M}$

Matriz $n \times m$ $\mathbf{M}_G := (m_{ve})$, onde m_{ve} é o número de vezes (0, 1 ou 2) que um vértice v e uma aresta e são incidentes. Um laço incide 2 vezes em um vértice.

Matriz de Adjacência



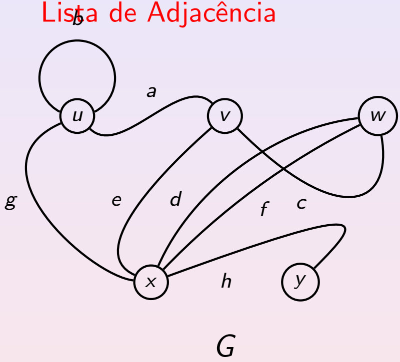
G

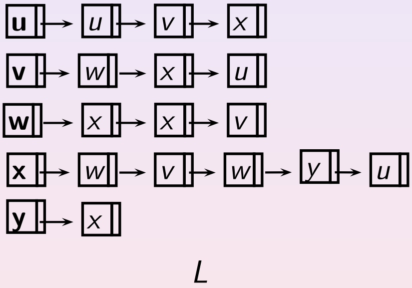
	u	v	w	x	y
u	2	1	0	1	0
v	1	0	1	1	0
w	0	1	0	2	0
x	1	1	2	0	1
y	0	0	0	1	0

$\mathbf{A}$

Matriz $n \times n$ $\mathbf{A}_G := (a_{uv})$, onde a_{uv} é o número de arestas que ligam os vértices u e v. Um laço é contado como 2.

Lista de Adjacência





Para cada vértice v, os vizinhos de v são listados em uma determinada ordem: $\mathbf{L}_G := lista(N(v) : v \in V)$. Usado normalmente em grafos simples.

Matriz de Adjacência Bipartida

- $G[X, Y]$ é bipartido, onde $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ e $Y := \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$
- B: Matriz $r \times s$ $\mathbf{B}_G = (b_{ij})$, onde b_{ij} é o número de arestas que ligam x_i a y_j
- $B = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ representa a estrela $K_{1,5}$

Graus dos Vértices

- $g_G(v)$[2] é o grau do vértice v.
- $g_G(v)$ é o número de arestas de G que incidem com v
- Grafo simples: $g_G(v) = N_G(v)$.
- Vértice isolado $\equiv$ grau $= 0$.
- $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o menor e o maior graus dos vértices de G.
- $g(G)$: o seu *grau médio*, $\frac{1}{n}\sum_{v \in V} g(v)$.

[2] Na literatura podemos encontrar a versão em inglês: $d_G(v)$

Teorema: A soma dos graus representa o dobro do número de arestas

Theorem

Teorema Para todo grafo G,

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m$$

Demonstração.

$$\sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} m_{ve} = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} m_{ve} = 2 \sum_{e \in E} 1 = 2m$$

$\square$

Corolário: O número de vértices de grau ímpar é par

Corollary

Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Demonstração.

Considere a equação $\sum_{v \in V} g(v) = 2m \pmod 2$. Nós temos:

$$\sum_{v \in V} g(v) = I + P, I = \sum_{g(v) \equiv 1 (mod 2)} g(v) \text{ e } P = \sum_{g(v) \equiv 0 (mod 2)} g(v)$$

$$\sum_{v \in V} g(v)(mod 2) \equiv (I + P)(mod 2) \equiv I(mod 2) \equiv 2m(mod 2)$$

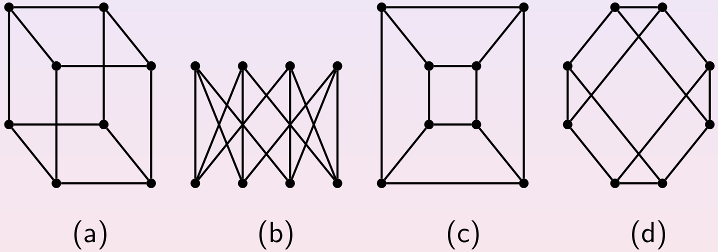
$$I(mod 2) \equiv 0(mod 2)$$

$\square$

Grafos regulares

- G é k-regular se $g(v) = k$ para todo $v \in V$;
- *grafo regular* é k-regular para algum k.
- Grafo completo de n vértices é $(n-1)$-regular.
- Grafo completo bipartido com k vértices em cada partição é k-regular.
- Grafos 3-regular são chamados de *grafos cúbicos* e possuem uma importância grande na teoria dos grafos.

3-Cubo



(a) tridimensional (b) bipartido (c) planar (d) ciclo hamiltoniano

Atividades

1. Ler o texto de Introdução à Teoria dos Grafos.