Definición axiomática de Probabilidad

Sebastián Decuadro

Facultad de Ingeniería
Universidad Católica del Uruguay

Marzo 2023

Índice

Índice

Aprobación del curso

- Seis desafíos de programación a trabajar de forma grupal, cada uno centrado en un tema del curso, con el objetivo de resolver un problema aplicado. Cada desafío tendrá un total de 10 puntos.

Aprobación del curso

- Seis desafíos de programación a trabajar de forma grupal, cada uno centrado en un tema del curso, con el objetivo de resolver un problema aplicado. Cada desafío tendrá un total de 10 puntos.
- Un proyecto grande aplicado a resolver en grupo. Trabajaremos en un problema real en el área de la informática y con datos reales. El proyecto tendrá un total de 40 puntos.

Aprobación del curso

- Seis desafíos de programación a trabajar de forma grupal, cada uno centrado en un tema del curso, con el objetivo de resolver un problema aplicado. Cada desafío tendrá un total de 10 puntos.
- Un proyecto grande aplicado a resolver en grupo. Trabajaremos en un problema real en el área de la informática y con datos reales. El proyecto tendrá un total de 40 puntos.

Aprobación

El curso se aprueba con un total de 75 o más puntos.

Índice

Probabilidad

La aleatoriedad e incertidumbre existe en nuestra vida cotidiana y en la ciencia.

La teoría de probabilidad da un marco matemático para describir y analizar fenómenos aleatorios, donde se entiende por fenómeno aleatorio a un evento o experimento cuyo resultado no puede ser predecido con certeza.

Probabilidad

No es relevante la razón por la cuál esa predicción no se puede hacer.

Por ejemplo, al tirar una moneda, tal vez sea posible predecir el resultado si conocemos su orientación inicial, el punto de impacto entre el dedo y la moneda, la turbulencia del aire, la suavidad de la superficie en la que cae la moneda, los materiales de la moneda y la superficie etc.

Como en general uno no dispone de tanta información, no podemos predecir el resultado de la tirada de la moneda, por lo que impondremos un modelo probabilístico para analizar el experimento.

Interpretación de la probabilidad

Le asignaremos a los eventos números entre 0 y 1 que llamaremos probabilidades.

Por ejemplo, si la moneda es justa, diremos que la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{2}$.

¿Qué significa este número?

Daremos dos intepretaciones.

Interpretación de la probabilidad

La primera interpretación es en términos de frecuencia relativa. Al repetir un experimento muchas veces, podemos calcular la proporción de veces en las cuáles el experimento tiene éxito.

Esta proporción será aleatoria, pero cuando la cantidad de repeticiones del experimento tienda a infinito, se acercará al valor teórico, que es la probabilidad del evento estudiado (Ley de los Grandes Números).

Intepretación de la probabilidad

La segunda interpretación es en términos de confiabilidad, creencia subjetiva en la ocurrencia del evento.

Ocurrencia de eventos con probabilidad cercana a 0 serán "poco creíbles". Ocurrencia de eventos con probabilidad cercana a 1 serán "muy creíbles".

Índice

Experimentos aleatorios

La teoría de la probabilidad estudia los experimentos aleatorios.

Diremos que un experimento es aleatorio si al realizarlo, solo puede tener **un** resultado posible, que además no puede ser predecido.

Por ejemplo: tirar una moneda, tirar un dado.

Experimentos aleatorios

Observación

Los resultados pueden ser vectoriales, pero esto no impide que el resultado sea único.

Ejemplo

Si tiramos dos monedas, podemos denotar los resultados en forma vectorial de la siguiente forma

$$\{(C,C),(C,N),(N,C),(N,N)\}$$

Teoría de Conjuntos

Antes de pasar a la formalización de la teoría de la probabilidad, es importante tener en cuenta que la misma está basada en la Teoría de Conjuntos.

Es importante repasar los siguientes conceptos: conjunto, elemento, pertenencia, subconjunto, unión, intersección, diferencia, complemento, producto cartesiano.

Producto Cartesiano

Definición (Producto Cartesiano)

Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de ellos, denotado por $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados que se pueden formar donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Producto Cartesiano

Ejemplo

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$
El producto cartesiano de A con B es el conjunto

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

Otro ejemplo muy conocido de producto cartesiano es $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, el plano Euclídeo.

Resultados de un experimento aleatorio

Usaremos conjuntos para describir los resultados de un experimento aleatorio.

Si el experimento es tirar una moneda podemos escribir $\{C, N\}$

Si el experimento es tirar un dado podemos escribir $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Si el experimento es tirar una moneda hasta que salga cara, y se cuenta la cantidad de tiradas podemos escribir $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (infinitos resultados posibles)

Índice

Espacio muestral

Definición (Espacio muestral)

Al conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama espacio muestral, se le denota con la letra Ω.

Ejemplo

En el experimento de tirar un dado se tiene que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Espacio Muestral

Ejemplo

Se tiran dos dados equilibrados. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

Espacio muestral

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Espacio Muestral

Observar que el espacio muestral es el producto cartesiano:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

Este espacio muestral tiene $6 \times 6 = 36$ elementos (tengo 6 posibilidades para el primer dado y por cada una de ellas tengo 6 posibilidades para el segundo dado).

Eventos o sucesos

Definición (Evento o suceso)

Un evento (o suceso) es un subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo, consideramos el suceso "sale un número par en la tirada de un dado"$= \{2,4,6\} \subset \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

Otro ejemplo, el suceso "sale un número menor que 4 en la tirada de un dado".

Es a los sucesos a los que nos interesa calcular probabilidades.

Eventos o sucesos

Al conjunto vacío $\emptyset$ se le llama suceso vacío. Recordar que $\emptyset \subset \Omega$

Recordar que $\Omega \subset \Omega$. Por lo tanto el espacio muestral también va a ser un evento, se le llama evento seguro.

Eventos o sucesos

Definición (Eventos incompatibles)

Decimos que A y B son eventos incompatibles (o excluyentes) si $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo

En el experimento de tirar un dado, los eventos $A = \{1,4\}$ y $B = \{2,5\}$ no pueden ocurrir al mismo tiempo, su intersección es vacía.

Probabilidades

Asumiendo que el dado es equilibrado podemos empezar a pensar en probabilidades.

$P(A) = 2/6 = 1/3$, $P(B) = 2/6 = 1/3$.

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$

$P(A \cup B) = 4/6 = 2/3$

Observación

Se observa que $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. Esta fórmula es cierta en general siempre que los eventos A y B sean incompatibles.

Probabilidades

Veamos que la fórmula anterior no es cierta cuando los eventos no son incompatibles. Consideremos los eventos

$$C = \{2,3,5\} \Longrightarrow P(C) = 1/2$$

$$D = \{2,6,1\} \Longrightarrow P(D) = 1/2$$

$$C \cup D = \{2,3,5,6,1\} \Longrightarrow P(C \cup D) = 5/6$$

$$C \cap D = \{2\} \Longrightarrow P(C \cap D) = 1/6$$

Observar que $P(C \cup D) + P(C \cap D) = P(C) + P(D)$

Índice

Definición axiomática de Probabilidad

Dado un espacio muestral, una probabilidad es una asignación de números entre 0 y 1 para cada evento del espacio muestral. Tiene que cumplir con dos propiedades (axiomas)

Definición axiomática de Probabilidad

Dado un espacio muestral, una probabilidad es una asignación de números entre 0 y 1 para cada evento del espacio muestral. Tiene que cumplir con dos propiedades (axiomas)

- $P(\Omega) = 1$

Definición axiomática de Probabilidad

Dado un espacio muestral, una probabilidad es una asignación de números entre 0 y 1 para cada evento del espacio muestral. Tiene que cumplir con dos propiedades (axiomas)

- $P(\Omega) = 1$
- Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección infinita de eventos incompatibles dos a dos entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Probabilidades en el dado

$P(\Omega) = 1$, además $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Por lo tanto, $P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

$P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = 1$

$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$

Esto implica que si queremos un dado equilibrado, entonces todas las probabilidades puntuales tienen que ser $\frac{1}{6}$.

Probabilidades

Propiedades de una función de probabilidad.

- $P(\emptyset) = 0$

Probabilidades

Propiedades de una función de probabilidad.

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando A y B son incompatibles

Probabilidades

Propiedades de una función de probabilidad.

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando A y B son incompatibles
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidades

Propiedades de una función de probabilidad.

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando A y B son incompatibles
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

A^c es el complemento del conjunto A.

Principio de inclusión exclusión

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Observemos que en esta fórmula las probabilidades de intersección dos conjuntos se restan, mientras que las probabilidades de intersección de tres conjuntos se suman.

Principio de inclusión exclusión

En general, al generalizar este principio para una unión de n conjuntos, la fórmula es similar y sigue el siguiente patrón:

Todas las probabilidades de intersección de una cantidad par de conjuntos se restan.

Todas las probabilidades de intersección de una cantidad impar de conjuntos se suman.

Probabilidad del complemento

Demostremos la propiedad del complemento.

Demostración.

Observemos primero que $A \cap A^c = \emptyset$, por lo tanto podemos decir que A y A^c son eventos incompatibles.
Por otro lado, $A \cup A^c = \Omega$. Ahora usamos las propiedades y los axiomas.
$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
Por lo tanto $1 = P(A) + P(A^c)$ $\square$

Probabilidad del complemento

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que al tirar dos dados equilibrados, la suma de los resultados sea 3 o más.

Probabilidad del complemento

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que al tirar dos dados equilibrados, la suma de los resultados sea 3 o más.

Definimos los eventos

$A = \text{Sale 3 o más en la suma de las tiradas de los dados}$

$A^c = \text{Sale 2 en la suma de las tiradas de los dados}$

$P(A^c) = 1/36$ (el único resultado que sirve es que ambos dados saquen 1) por lo tanto $P(A) = 35/36$.

Sobre el lenguaje

Es importante observar que por definición de unión de conjuntos se tiene que $A \cup B$ es lo mismo que decir que ocurren A o B.

De forma similar, por definición de intersección de conjuntos se tiene que $A \cap B$ es lo mismo que decir que ocurren A y B.

Por último, por definición de complemento de un conjunto, es lo mismo decir ocurre A^c que decir no ocurre A.

Asignación de probabilidades

¿Cómo se asignan inicialmente las probabilidades?

Veremos varias formas de hacerlo. Al final depende del experimento que estemos estudiando.

Índice

Equiprobabilidad

Hay experimentos donde todos los resultados tienen la misma chance de ocurrir, esto se llama equiprobabilidad. En este caso asignamos probabilidades de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Donde $|\cdot|$ denota cantidad de elementos de un conjunto.

Esta regla se llama casos favorables sobre casos posibles.

Equiprobabilidad

Es importante recordar que para usar equiprobabilidad debemos tener:

- Finitos casos posibles
- Todos los casos posibles deben tener la misma probabilidad (estudiar experimento)

Equiprobabilidad

Ejemplo

Se tiran dos dados equilibrados. Calcular la probabilidad de que los resultados de los mismos sumen 6.

Equiprobabilidad

Ejemplo

Se tiran dos dados equilibrados. Calcular la probabilidad de que los resultados de los mismos sumen 6.

Sea $A =$"Los resultados de los dados suman 6". Entonces $A = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$.

Como Ω tiene 36 elementos se concluye que $P(A) = \frac{5}{36}$.

Equiprobabilidad

Ejemplo

Ahora quiero calcular la probabilidad de que la suma de los resultados de los dados sea 6 o menos.

Sugerencia: considerar A_i el evento en el que los resultados de los dados suman i.

Equiprobabilidad

Observemos que usando la sugerencia, podemos expresar la probabilidad pedida de esta forma $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6)$.

Observemos también que los seis conjuntos son incompatibles dos a dos (¿por qué?). Luego, por las propiedades de la probabilidad

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i)$$

Equiprobabilidad

Podemos escribir explícitamente los conjuntos y contar cuántos elementos tienen, de esta forma podremos calcular la probabilidad de cada uno.

$$A_1 = \emptyset \qquad A_2 = \{(1,1)\}$$

$$A_3 = \{(1,2),(2,1)\} \qquad A_4 = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$$

$$A_5 = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$$

$$A_6 = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$$

Equiprobabilidad

Usando casos favorables sobre casos posibles, podemos calcular la probabilidad de cada uno de los eventos y obtener

$$P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) =$$

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

Equiprobabilidad

Usando casos favorables sobre casos posibles, podemos calcular la probabilidad de cada uno de los eventos y obtener

$$P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) =$$

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados de mayor a 6?

Equiprobabilidad

Usando casos favorables sobre casos posibles, podemos calcular la probabilidad de cada uno de los eventos y obtener

$P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) =$

$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$

¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados de mayor a 6?

$$1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36}$$

Equiprobabilidad

Ejercicio

Calcular la probabilidad de que al tirar dos dados equilibrados los resultados sean distintos.

Equiprobabilidad

Ejercicio

Calcular la probabilidad de que al tirar dos dados equilibrados los resultados sean distintos.

El complemento de este evento es que los resultados de los dados NO sean distintos, es decir, que sean iguales. Hay 6 resultados posibles donde esto pasa, por lo tanto, la probabilidad del complemento es $P(A^c) = \frac{6}{36}$.

Finalmente, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$