Probabilidad Condicional

Sebastián Decuadro

Facultad de Ingeniería
Universidad Católica del Uruguay

Agosto 2022

Índice

Índice

Probabilidad Condicional

¿Cómo cambian las probabilidades cuando se tiene información parcial sobre el resultado del experimento aleatorio?

Probabilidad Condicional

¿Cómo cambian las probabilidades cuando se tiene información parcial sobre el resultado del experimento aleatorio?

Sabemos que la probabilidad trabaja sobre experimentos en los cuales no podemos predecir el resultado, pero si nos dan cierta información sobre el resultado del experimento, deberíamos cambiar nuestra asignación de probabilidades.

Ejemplo para reflexionar

Supongamos que la probabilidad de lluvia para el día de mañana es 0.15.

Sin embargo al día siguiente salimos a la calle y veo nubes de color oscuro.

¿Debería cambiar la probabilidad de lluvia en base a la información parcial obtenida?

Índice

Probabilidad Condicional

Introduciremos la noción de probabilidad condicional a partir de un ejemplo.

Ejemplo

Supongamos que se tira un dado equilibrado y nos interesa calcular la probabilidad de que salga un número menor o igual a 3.

Si denotamos por A al evento $\{1,2,3\}$, es fácil identificar que el ejemplo pide calcular $P(A)$ y la misma vale $3/6 = 1/2$.

Ejemplo

Supongamos que quiero calcular $P(A)$ de nuevo, pero ahora sabiendo la información parcial de que el resultado del dado es un número impar.

Denotaremos por B al evento "sale un número impar en el dado".

Como los impares en el dado son $B = \{1, 3, 5\}$ y dos de ellos cumplen con la condición de ser menores o iguales que 3. Parece razonable que la probabilidad condicional buscada sea $2/3$.

Notación

Llamaremos a la probabilidad que hemos calculado: “Probabilidad condicional del evento A condicionado a la ocurrencia del evento B”. Utilizaremos la siguiente notación para la probabilidad condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3}$$

Esto se lee: "Probabilidad de A dado que ocurrió B.º equivalentemente "Probabilidad de A sabiendo que ocurrió B".

Observación importante

$$A = \{1,2,3\},\ B = \{1,3,5\},\ A \cap B = \{1,3\}.$$

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esta última expresión es lo que usaremos como la definición general de probabilidad condicional.

Definición de Probabilidad Condicional

Definición

Sean A y B dos eventos tales que $P(B) > 0$. La probabilidad de A condicionada a la ocurrencia del evento B se define de la siguiente manera

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición de Probabilidad Condicional

Observación

No tiene sentido preguntarnos por una probabilidad condicionada a la ocurrencia de un evento imposible, por eso tiene sentido pedir $P(B) > 0$ en la definición.

Índice

Primeras propiedades

Las siguientes propiedades se pueden demostrar facilmente a partir de la definición.

- $P(A \mid \Omega) = P(A)$.
- Si A y B son incompatibles entonces $P(A \mid B) = 0$.
- Si $B \subset A$ entonces $P(A \mid B) = 1$.
- Si $A \subset B$ entonces $P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.
- $P(B \mid B) = 1$.

Interpretación

Podemos pensar que si sabemos que ocurre B entonces nuestro espacio muestral ha cambiado.

Por motivos de conveniencia mantendremos Ω como el espacio muestral. Podemos hacer esto porque la probabilidad de Ω sigue siendo uno.

$$P(\Omega \mid B) = 1$$

Probabilidad condicional

Ejercicio

Una pareja tiene dos hijos. Vamos a suponer que el género de los hijos es equiprobable.

1. Se le pregunta al padre si su primer hijo fue una niña y responde que si. Sabiendo esto, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niñas?
2. Se le pregunta al padre si alguno de sus hijos es una niña y responde que si. Sabiendo esto, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niñas?

Ejercicio

Proponemos el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{(H, H), (H, M), (M, H), (M, M)\}$$

La ventaja de proponer este espacio muestral es que hay equiprobabilidad.

Ejercicio

Definimos los siguientes eventos:

$$A = \{(M, M)\}$$
$$B = \{(M, H), (M, M)\}$$
$$C = \{(H, M), (M, H), (M, M)\}$$

Observemos que la pregunta 1 nos pide $P(A \mid B)$.

Observemos que la pregunta 2 nos pide $P(A \mid C)$.

Ejercicio

Para poder utilizar la definición de probabilidad condicional, necesitaremos hallar las interseciones:

$$A \cap B = \{(M, M)\} \qquad A \cap C = \{(M, M)\}$$

Ejercicio

Para poder utilizar la definición de probabilidad condicional, necesitaremos hallar las interseciones:

$$A \cap B = \{(M, M)\} \qquad A \cap C = \{(M, M)\}$$

Por lo tanto,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad Condicional

Teorema

Sea B un evento fijo tal que $P(B) > 0$. La función de probabilidad condicional dado el evento B satisface los axiomas para ser una función de probabilidad. Es decir:

- $P(\Omega \mid B) = 1$
- *Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección infinita de eventos disjuntos dos a dos entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

Probabilidad Condicional

Corolario

Como $P(\cdot \mid B)$ resulta ser una función de probabilidad, cumple con todas las propiedades que cumplen todas las funciones de probabilidad. Por ejemplo:

- $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
- $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$

Probabilidad Condicional

¡Cuidado!

Fijar el primer evento en vez del segundo NO resulta en una función de probabilidad. Equivalentemente, la función $P(A|\cdot)$ no es una función de probabilidad. Por lo tanto, en la mayoría de los casos se tiene que

$$P(A|B^c) \neq 1 - P(A|B)$$

De la forma similar, $P(A|\cdot)$ tampoco cumple el resto de los axiomas y propiedades de una función de probabilidad.

Demostración del teorema

Probaremos el axioma 2 para dos eventos. Sean A_1, A_2 eventos disjuntos. Tenemos que probar que

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

lo haremos usando la definición de probabilidad condicional.

Demostración del teorema

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \mid B) &= \frac{P([A_1 \cup A_2] \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P([A_1 \cap B] \cup [A_2 \cap B])}{P(B)} \\
&= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\
&= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)
\end{aligned}
$$

Índice

Independencia de eventos

Definición

Decimos que dos eventos A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Independencia de eventos

Una propiedad muy importante de la independencia de eventos que ayuda a interpretar qué significa: si A y B son independientes entonces

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Es decir, el conocimiento de la ocurrencia del evento B no afectó las chances de ocurrencia del evento A.

Ejemplo de independencia

Ejemplo

Si tiramos dos dados equilibrados y definimos $A =$ "el primer dado saca 5" y $B =$ "el segundo dado saca 3". Entonces A y B son independientes.

No es difícil demostrar esto comprobando que se cumple la igualdad requerida en la definición de independencia.

En general asumiremos independencia de eventos donde no hay relación física entre los resultados posibles que los definen en el experimento aleatorio.

Independencia de tres eventos

Decimos que tres eventos A,B y C son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

y además si se cumple que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Índice

Partición de un conjunto

Definición

Sea Ω un conjunto y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ subconjuntos de Ω. Decimos que los subconjuntos $\{B_i\}$ forman una *partición* de Ω si son disjuntos dos a dos y

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

El ejemplo más sencillo de partición es la que se genera con el complemento. B y B^c siempre particionan Ω en dos partes.

Ejemplo de partición

Ejemplo

Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4\}$ y $B_3 = \{5, 6\}$.

Entonces los conjuntos B_1, B_2, B_3 forman una partición de Ω en tres partes.

Ley de Probabilidad Total

Teorema

Sean A y B dos eventos con $P(B) \neq 0$. Entonces

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

Ley de Probabilidad Total

Demostración.

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap [B \cup B^c]) \\
&= P([A \cap B] \cup [A \cap B^c]) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
&= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)
\end{aligned}$$

$\square$

Ley de Probabilidad Total para particiones

Teorema

Sea A un evento y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω en eventos de probabilidad distinta de cero. Entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

La demostración de este teorema es análoga a la que hicimos para una partición en dos conjuntos.

Ejemplo

Se tienen tres cajas con lamparitas que pueden estar fundidas o no.

La primera caja tiene 4 lamparitas fundidas y 10 en total.

La segunda caja tiene 1 lamparita fundida y 6 en total.

La tercera caja tiene 3 lamparitas fundidas y 8 en total.

Ejemplo

Se elige una caja al azar de forma equiprobable y se extrae una lamparita al azar (también de forma equiprobable).

¿Cuál es la probabilidad de que la lamparita extraída esté fundida?

Ejemplo

Definimos los siguientes eventos:

$C_1 =$"La lamparita extraída viene de la caja 1".

$C_2 =$"La lamparita extraída viene de la caja 2".

$C_3 =$"La lamparita extraída viene de la caja 3".

$F =$"La lamparita extraída está fundida".

$B =$"La lamparita extraída funciona bien".

Ejemplo

Es importante observar que el ejercicio nos pide $P(F)$.

Vamos a usar la ley de probabilidad total, para esto es importante observar que los eventos C_1, C_2, C_3 forman una partición del espacio muestral.

Ejemplo

Para ver esto, escribamos el espacio muestral:

$$\Omega = \{(c_1, b), (c_1, f), (c_2, b), (c_2, f), (c_3, b), (c_3, f)\}$$

Con este espacio muestral se tiene que $C_1 = \{(c_1, b), (c_1, f)\}$, $C_2 = \{(c_2, b), (c_2, f)\}$ y $C_3 = \{(c_3, b), (c_3, f)\}$.

Efectivamente C_1, C_2 y C_3 forman una partición de Ω.

Ejemplo

Ahora aplicamos la ley de probabilidad total:

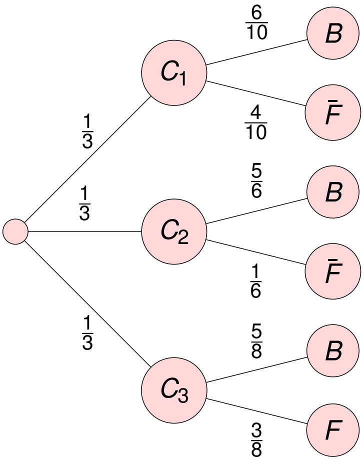
$$P(F) = P(F \mid C_1)P(C_1) + P(F \mid C_2)P(C_2) +$$

$$P(F \mid C_3)P(C_3)$$

$$P(F) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{113}{360}$$

Diagrama de árbol

Es usual usar un diagrama de árbol para usar la ley de probabilidad total.



Explicación del árbol

En los nodos del árbol colocamos los eventos que queremos estudiar. La arista que llega a cada nodo es etiquetada con la probabilidad de que ocurra el evento indicado en el nodo, **condicionada** a la ocurrencia de todos los eventos que se encuentran en el camino desde la raíz hasta el nodo que estamos estudiando.

Por ejemplo, para la rama que se encuentra en el extremo superior del árbol, $\frac{6}{10} = P(B \mid C_1)$.

Ley de probabilidad total en el árbol

Para hallar $P(F)$ ubicamos todas las ramas del árbol que terminan en el nodo etiquetado con el evento F, en cada rama multiplicamos las probabilidades que se encuentran en las aristas, y sumamos los valores resultantes.

Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de que la lamparita elegida sea de la caja 1 y esté fundida?

Lo que se pide es

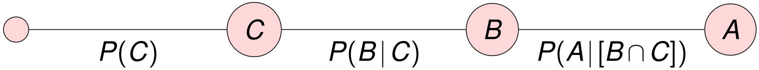
$$P(F \cap C_1) = P(F \mid C_1)P(C_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3}$$

Multiplicar las probabilidades en las ramas de un camino en el árbol da como resultado la probabilidad de la intersección de los eventos recorridos.

Teorema

Esto también es cierto al multiplicar probabilidades en un camino de ramas más largo.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un árbol de profundidad tres, y una de sus ramas es



Entonces se cumple que
$P(A \cap B \cap C) = P(C)P(B \mid C)P(A \mid [B \cap C])$.

Demostración

Primero observamos que $P(C)P(B \mid C) = P(B \cap C)$. Por lo tanto

$$P(C)P(B \mid C)P(A \mid [B \cap C]) =$$

$$P(B \cap C)P(A \mid [B \cap C]) = P(B \cap C) \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

$$= P(A \cap B \cap C)$$

Fórmula de Bayes

Es una fórmula muy útil para "invertir" probabilidades condicionales.

Teorema

Sean A, B eventos con probabilidad no nula. Entonces

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

Fórmula de Bayes

Lo de invertir probabilidades condicionales es porque para poder calcular el lado derecho, necesitamos la probabilidad condicional con el orden invertido (entre otras cosas).

Demostración.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

□

Fórmula de Bayes

Aplicación

Si se sabe que la lamparita extraída resultó estar fundida, hallar la probabilidad de que haya venido de la caja 1.

Fórmula de Bayes

Aplicación

Si se sabe que la lamparita extraída resultó estar fundida, hallar la probabilidad de que haya venido de la caja 1.

Solución: primero observemos que lo que se pide es $P(C_1 \mid F)$, para hallar esta probabilidad usamos la Fórmula de Bayes:

$$P(C_1 \mid F) = \frac{P(F \mid C_1)P(C_1)}{P(F)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{113}{360}} = \frac{48}{113}$$