



Universidad Católica del Uruguay

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROYECTO - POLINOMIOS DE TAYLOR

Cálculo Aplicado

Profesores: Maglis Mujica y Martín Perciante

Autores:

Luis Balduini (4.001.184-9)

Leandro Casaretto (x.xxx.xxx-x)

Juan Manuel Pérez (4.673.899-0)

24 de junio de 2025

1. Introducción

El presente informe aborda el uso del **polinomio de Taylor** como herramienta para aproximar modelos físicos y simplificar la resolución de problemas que, de otro modo, requerirían técnicas analíticas avanzadas. Se consideran dos situaciones independientes:

- **Parte 1:** la variación de la aceleración gravitatoria con la distancia al centro terrestre, basada en la ley de gravitación universal.
- **Parte 2:** la caída libre vertical con *rozamiento lineal* (fuerza de arrastre proporcional a la velocidad).

Ambos casos comparten el objetivo de responder: *¿en qué régimen es válido reemplazar la función exacta por un polinomio de baja orden y qué error se comete?*

2. Marco Teórico

2.1. Polinomio de Taylor

Sea f una función con derivadas hasta orden n en un entorno de a . El desarrollo de Taylor de orden n es

Para $n = 1$ y $n = 2$ se obtienen la aproximación lineal y cuadrática, respectivamente.

2.2. Gravitación Universal

La aceleración sobre un cuerpo de masa m a distancia r del centro de la Tierra (masa M) es $a(r) = -\frac{GM}{r^2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

2.3. Rozamiento lineal

Un cuerpo de masa m sometido a un rozamiento $-bv$ obedece

Definiendo $\gamma = b/m$, la solución analítica para la posición es

3. Desarrollo

Parte 1 – Gravedad

Los siete ítems se resuelven en orden:

1. Se deriva $f(r) = -\frac{GM}{r^2}$ y se presenta el Taylor de orden 1.

2. Se evalúa $f(R_T + h)$ para $h = 8849, \text{ m}$ y se calcula el error relativo.
3. Se construye el Taylor de orden 2 y se compara con el valor exacto.
4. Se grafica $f(r)$ junto a ambos polinomios en el entorno de R_T .
5. Se determina la distancia para que $|a|$ sea 1
6. Análisis en radios pequeños (0.01 m - 0.02 m) con órdenes 2 y 3.
7. Gráfico ilustrativo.

Las figuras y los scripts se incluyen en el repositorio adjunto (`parte1_gravedad.py`).

Parte 2 – Caída con rozamiento

1. Desarrollo de Taylor $O(2)$ de $y(t)$; se discute la aceleración inicial y el caso $\gamma \rightarrow 0$.
2. Simulación numérica y superposición de curvas para los tres γ (hormiga, persona, auto) y las seis combinaciones .
3. Obtención analítica de la velocidad terminal $v_T = -\frac{g}{\gamma}$ y verificación en las simulaciones.
4. Criterio basado en $\gamma t \ll 1$ para descartar la resistencia.

Los resultados se comentan sobre cada gráfico generado por `caida_con_rozamiento.py`.

4. Conclusiones

- Los polinomios de Taylor orden 1 y 2 son suficientes para aproximar la ley $-GM/r^2$ a menos de 0.3
- En el modelo con rozamiento lineal, el término adicional $\frac{1}{2}\gamma v_0 t^2$ delimita la validez de la aproximación. La condición $\gamma t < 0,3$ ¡10 práctico en todas las simulaciones.
- El uso del Taylor permitió justificar algebraicamente cuándo las curvas con y sin aire se separan, antes de siquiera integrar numéricamente el sistema.

5. Referencias

1. Beer, F. P., Johnston, E. R., *Mecánica vectorial para ingenieros*. McGraw-Hill.
2. Serway, R. *Física para ciencias e ingeniería*. Cengage Learning.
3. Notas de curso de Cálculo Aplicado – UCU (2024).