สรุปการเรียน

Mathematics for Computer Science

ให้นักศึกษาสรุปเนื้อหาที่ได้เรียนในแต่ละครั้ง โดยแต่ละครั้งไม่เกิน 1 หน้า

สัปดาห์ที่ 1

ไม่ได้เรียนครับ

สัปดาห์ที่ 2

ไม่ได้เรียนครับ

สัปดาห์ที่ 3

ตรรกศาสตร์(Logic)

ประพจน์ คือประโยคที่สามารถระบุค่าความจริงของประโยคได้นั่นคือเป็นจริงหรือเท็จเพียง อย่างใดอย่างหนึ่ง

การเชื่อมประพจน์และค่าความจริงของการเชื่อมประพจน์ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ การเชื่อมประพจน์ในทางคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. และ ประพจน์ p และประพจน์q ใช้สัญลักษณ์ $p \land q$
ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยและจะเป็นจริงกรณีเดียวเมื่อประพจน์ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง

2. หรือ ประพจน์ p หรือประพจน์ q ใช้สัญลักษณ์ $p \lor q$
ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยหรือจะเป็นจริงเมื่อประพจน์ p หรือ q มีค่าความจริงเป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสอง

3. ถ้า...แล้ว... ถ้าประพจน์p แล้วประพจน์q ใช้สัญลักษณ์ $p \longrightarrow q$
ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยถ้า...แล้วจะเป็นเท็จกรณีเดียวเมื่อประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

4. ...ก็ต่อเมื่อ... ประพจน์p ก็ต่อเมื่อประพจน์q ใช้สัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$
ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วย...ก็ต่อเมื่อ...จะเป็นจริงเมื่อประพจน์ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน

5. ไม่... หรือ นิเสธ.... นิเสธของประพจน์p ใช้สัญลักษณ์ $\neg p$
ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยนิเสธ จะให้ค่าความจริงตรงกันข้ามกับค่าความจริงของประพจน์ p

2. ประพจน์ที่สมมูล (equivalent statements) คือประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันในทุกค่าความจริงของประพจน์ย่อย และใช้สัญลักษณ์ $\equiv$ แทนประพจน์ที่สมมูลกัน

3. สัจจนิรันด์ (Tautology) หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี
การอ้างเหตุผล การอ้างเหตุผลคือการหาผลสรุปจากเหตุ(ประพจน์)ที่กำหนดให้ ซึ่งสามารถตรวจสอบความสมเหตุ สมผลของการอ้างเหตุผลได้ดังนี้

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifiers) เป็นคำที่ใช้เพื่อระบุจำนวนของตัวแปรในประพจน์ โดยทั่วไปจะมีตัวบ่งปริมาณ 2 ชนิดคือ

- $\forall x\, [P(x)]$ นั่นคือการพิจารณาประพจน์P(x) สำหรับค่า x ทุกค่า
-> ประพจน์นี้เป็นจริงเมื่อ x ทุกตัวทำให้ประพจน์P(x) มีค่าความจริงเป็นจริง
-> ประพจน์นี้เป็นเท็จเมื่อมีx บางตัวที่ทำให้ประพจน์P(x) มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- $\exists x\, [P(x)]$ นั่นคือการพิจารณาประพจน์P(x) สำหรับบางค่าของ x
-> ประพจน์นี้เป็นจริงเมื่อมีx บางตัวที่ทำให้ประพจน์P(x) มีค่าความจริงเป็นจริง
-> ประพจน์นี้เป็นเท็จเมื่อ x ทุกตัวทำให้ประพจน์P(x) มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เซต คือกลุ่มของสิ่งต่างๆ และเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่าสมาชิก (element or member) ตัวอย่างของเซตพื้นฐานที่สำคัญที่ควรรู้คือ
$\emptyset$ คือเซตที่ไม่มีสมาชิกและเรียกว่า เซตว่าง (empty set) , N = {1, 2, 3, ...} คือเซตของจำนวนนับ (Natural numbers)
Z = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...} คือเซตของจำนวนเต็ม (Integer numbers), Q คือเซตของจำนวนตรรกยะ (Rational numbers)
R คือเซตของจำนวนจริง (Real Numbers)

การดำเนินการของเซต (Set Operations)
ยูเนียน (union) , อินเตอร์เซคชัน (intersection) , คอมพลีเมนต์ (complement) , ผลต่าง (difference)

สัปดาห์ที่ 4

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นการให้เหตุผลโดยใช้บทนิยาม (definition) สัจพจน์(Axioms) หรือทฤษฎีบท (Theorem) ต่างๆที่ได้รับการยอมรับแล้ว เพื่อแสดงว่าข้อความหรือทฤษฎีนั้นเป็นจริง

การพิสูจน์ประโยคเงื่อนไข (condition statement) $p \longrightarrow q$ เมื่อ p เป็นเหตุ และ q เป็นผล ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการพิสูจน์ $p \longrightarrow q$ โดย 3 วิธีคือ

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proofs) พิสูจน์โดย สมมติ p เป็นจริง และให้เหตุผลต่างๆที่ถูกยอมรับว่าจริง เพื่อแสดงว่า q จะต้องเป็นจริง การพิสูจน์ทางตรงเป็นการแสดงว่าประโยคเงื่อนไข (condition statement) $p \longrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริงโดยการแสดงวาา ถ้า p เป็นจริง แล้ว q จะต้องเป็นจริงด้วย การพิสูจน์เริ่มจากการสมมติให้เหตุ (p) เป็นจริง แล้วดำเนินการจากเหตุ โดยใช้บทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทต่างๆ เพื่อให้ผล (q) เป็นจริง

2. การพิสูจน์โดยการขัดแย้ง (Proof by Contradiction) พิสูจน์โดยสมมติ p และ $\neg q$ เป็นจริง แล้วหาข้อขัดแย้ง

3. การพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ (Proof by Contraposition) พิสูจน์โดย สมมติ $\neg q$ เป็นจริง และให้แล้วแสดงว่า $\neg q$ เป็นจริง โดยใช้การพิสูจน์ทางตรง

สัปดาห์ที่ 5

การพิสูจน์โดยการขัดแย้ง (Proof by Contradiction)

เป็นการพิสูจน์ที่ตั้งสมมติฐานเริ่มต้นว่าทฤษฎีที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ และพยายามแสดงให้เห็นว่าสมมติฐานดังกล่าวนำไปสู่ความขัดแย้ง ซึ่งเรียกว่า เกิดข้อขัดแย้ง มีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

ให้ P (n)เป็นประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์

1. สมมติ $\neg p$ (n) มีค่าความจริงเป็นจริง
2. พยายามแสดงให้เห็นว่าค่าความจริงในข้อ 1 นำไปสู่ความขัดแย้ง (ค่าความจริงแย้งกับที่ตั้งสมมติฐานที่ตั้งไว้)
3. สรุปว่า P (n) เป็นจริงตามค่าความจริงที่ต้องการพิสูจน์

การบ่งปริมาณกับการขัดแย้ง (Quantifications and Contradiction) เมื่อต้องการพิสูจน์ประโยครูปแบบ $\forall x$, $\neg P(x)$ บาครั้งต้องทำการพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง โดยสมมตินิเสธของ ประโยคคือ $\exists x$, $\neg P(x)$ เป็นจริง นั่นคือ มี x ที่ทำให้ $\neg P$ (x) เป็นจริงแล้วพิจารณาหาข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ (Proof by Contraposition)

เป็นการพิสูจน์ประโยคเงื่อนไข (condition statement) $p \longrightarrow q$ เมื่อ p เป็นเหตุ และ q เป็นผลโดยสมมติ $\neg q$ เป็นจริง แล้วแสดงว่า $\neg p$ เป็นจริง โดยใช้การพิสูจน์ทางตรงพิสูจน์ประโยคเงื่อนไข (condition statement) $\neg q \longrightarrow \neg p$ (เนื่องจาก $p \longrightarrow q \equiv \neg q \longrightarrow \neg p$)

สัปดาห์ที่ 6

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

เป็นเทคนิคสำหรับพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวกหรือทุกจำนวนเต็มที่เริ่มต้นจากจำนวนเต็มบวกจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

อะไรคือการพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ในการพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราจะไม่พิสูจน์เพียง 1 ข้อความแต่เราจะพิสูจน์ลำดับของข้อความ นั่นคือ เราจะพิสูจน์ว่าข้อความแรกเป็นจริงและพิสูจน์ว่าถ้าข้อความที่ n เป็นจริง ข้อความที่ n + 1 ต้องเป็น จริงด้วย ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า ทุกข้อความเป็นจริงทุกจำนวนนับ n วิธีพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มี 2 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นพื้นฐาน (basis step) เป็นการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงเมื่อ $n = 1$ หรือเขียนแทนด้วย P (1) (หรือถ้าข้อความเป็นจริงเมื่อ $n \geq a$ ให้พิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงเมื่อ $n = a$)
2. ขั้นอุปนัย (Inductive step) เป็นการพิสูจน์ข้อความถ้า $n = k$ เป็นจริงแล้วดังนั้นข้อความเมื่อ $n = k + 1$ ต้องเป็นจริงด้วย

วิธีการพิสูจน์ขั้นอุปนัย

2.1 เขียนสมมติว่าข้อความเป็นจริงเมื่อ $n = k$ (เรียกว่า inductive hypothesis) หรือเขียนแทนด้วย P(k)

2.2 เขียนข้อความเมื่อ $n = k + 1$ (นี่เป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์) หรือเขียนแทนด้วย p (k + 1)

2.3 ทำการพิสูจน์ข้อความในข้อ 2.2 เมื่อทำการพิสูจน์ขั้นพื้นฐานและขั้นอุปนัยเรียบร้อยแล้ว เราสามารถสรุปว่าได้ข้อความดังกล่าวเป็นจริงสำหรับทุก $n \geq 1$ (หรือทุก $n \geq a$ ถ้าเราเริ่มต้นที่ $n = a$)