ธนภัทร์ เกิดเปี่ยม 65050368

Lab 5: Proof by Contraposition

Mathematics for Computer Science

จงใช้การพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ (proof by contradiction) พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. กำหนด $x, y \in R$ ถ้า $x + y < 100$ แล้ว $x < 35$ หรือ $y < 65$

2. กำหนด $x \in R$ ถ้า $x + \sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว x เป็นจำนวนอตรรกยะ

3. กำหนด $n \in Z$ ถ้า n^2 หารด้วย 3 ลงตัวแล้ว n จะหารด้วย 3 ลงตัว

4. กำหนด $a, b \in Z$ ถ้า $a^2(b^2 - 2b)$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a และ b เป็นจำนวนเต็มคี่

5. กำหนด $a, b, c \in Z$ ถ้า bc หารด้วย a ไม่ลงตัวแล้ว b จะหารด้วย a ไม่ลงตัว

6. กำหนด $x \in R$ ถ้า $x^2 + 5x < 0$ แล้ว $x < 0$

7. กำหนด $a, b \in Z$ ถ้า $a + b$ และ ab เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a และ b เป็นจำนวนเต็มคู่

8. กำหนด $a, b \in Z$ ถ้า $a^2(b + 3)$ เป็นเลขคู่แล้ว a เป็นเลขคู่ หรือ b เป็นเลขคี่

9. หาก n เป็นกำลังเลขสองของจำนวนเต็ม แล้ว $n \ mod \ 4$ จะเท่ากับ 0 หรือ 1
<u>คำแนะนำ</u> กำหนด $n = k^2$ แล้วแยกกรณี $k \ mod \ 4$

10. ให้พิสูจน์ประพจน์ “ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3n - 5$ เป็นจำนวนเต็มคี่” โดย
    10.1 พิสูจน์โดยตรง (direct proof)
    10.2 พิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง (proof by contradiction)
    10.3 พิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ (proof by contraposition)

1. กำหนด $x, y \in R$ ถ้า $x+y < 100$ แล้ว $x < 35$ หรือ $y < 65$

$p \rightarrow (q \vee r)$

สมมุติ $x \geq 35$ และ $y \geq 65$ $\qquad \sim(q \vee r) \equiv \sim q \wedge \sim r$

$\therefore x+y \geq 35+65$

$\therefore x+y \geq 100$ $\qquad \sim p$

2. กำหนด $x \in R$ ถ้า $x+\sqrt{2}$ เป็นจน.ตรรกยะแล้ว x เป็นจน.ตรรกยะ

สมมุติ x เป็นจน.ตรรกยะ $\qquad \sim q$

ให้ $x = \frac{m}{n}$; $m, n \in I$

$x + \sqrt{2} = \frac{m}{n} + \sqrt{2}$

โดยนิยาม จน.ตรรกยะ + จน.อตรรกยะ = จน.อตรรกยะ

$\therefore x+\sqrt{2}$ เป็นจน.อตรรกยะ $\sim p$

3. กำหนด $n \in I$ ถ้า n^2 หารด้วย 3 ลงตัว แล้ว n จะหารด้วย 3 ลงตัว

p(เหตุ) $\rightarrow$ (q ผล)

สมมุติ n หารด้วย 3 ลงตัว โดย $3|n$ $\qquad$ 4(เหตุ)

ให้ $n = 3k$

$n^2 = (3k)^2 = 9k^2$

$= 3(3k^2)$

$\therefore 3k^2 \in I$

$\therefore 3|n^2$ $\quad p$(ผล)

④ กำหนด $a, b \in I$ ถ้า $a^2(b^2-2b)$ เป็นจน.เต็มคี่แล้ว a, b เป็นจน.เต็มคี่

$p \rightarrow q$

สมมติ a หรือ b เป็นจน.เต็มคู่ $\sim q$

ให้ $a = 2k_1$, $b = 2k_2$ โดย $k_1, k_2 \in I$

$$a^2(b^2-2b) = (2k_1)^2[(2k_2)^2 - 2(2k_2)]$$
$$= 4k_1^2(4k_2^2 - 4k_2)$$
$$= 16k_1^2k_2^2 - 16k_1^2k_2$$
$$= 2(8k_1^2k_2^2 - 8k_1^2k_2)$$

$\therefore 8k_1^2k_2^2 - 8k_1^2k_2 \in I$

$\therefore a^2(b^2-2b)$ เป็นจน.เต็มคู่ $\sim p$

⑤ กำหนด $a, b, c \in I$ ถ้า bc หารด้วย a ไม่ลงตัวแล้ว b จะหารด้วย a ไม่ลงตัว

$p \rightarrow q$

สมมติ $a | b$ $\sim q$

ให้ $b = ak$

คูณ c ทั้ง 2 ฝั่ง $bc = akc$

$bc = a(kc)$

$\therefore kc \in I$

$\therefore a | bc$ $\sim p$

⑥ กำหนด $x \in R$ ถ้า $x^2 + 5x < 0$ แล้ว $x < 0$

$p \rightarrow q$

สมมติ $x \geq 0$ $\sim q$

$\therefore$ ยกกำลังสองทั้งสองฝั่ง $x^2 \geq 0$

คูณ 5 ทั้งสองฝั่ง $5x \geq 0$

$\therefore x^2 + 5x \geq 0$ $\sim p$

⑦ กำหนด $a, b \in I$ ถ้า $a+b$ และ ab เป็นจน.เต็มคู่แล้ว a, b เป็นจน.เต็มคู่

$p \rightarrow q$

สมมติ a หรือ b เป็นจน.เต็มคี่ $\sim q$

ให้ $a = 2k_1$ $b = 2k_2 + 1$

$\therefore a+b = 2k_1 + (2k_2+1)$

$= 2k_1 + 2k_2 + 1$

$= 2(k_1 + k_2) + 1$

ให้ $a = 2k_1 + 1$ $b = 2k_2$

$\therefore a+b = 2k_1 + 1 + 2k_2$

$= 2k_1 + 2k_2 + 1$

$= 2(k_1 + k_2) + 1$

ให้ $a = 2k_1 + 1$ $b = 2k_2 + 1$

$\therefore ab = (2k_1+1)(2k_2+1)$

$= 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1$

$= 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$

$\therefore a+b$ และ ab เป็นจน.เต็มคี่ $\sim p$

8 กำหนด $a, b \in I$ ถ้า $a^2(b+3)$ เป็นเลขคู่แล้ว a เป็นเลขคู่หรือ b เป็นเลขคี่

$p \rightarrow (q \vee r)$

สมมติ a เป็นเลขคี่ และ b เป็นเลขคู่ $\sim(q \vee r) \equiv \sim q \wedge \sim r$

ให้ $a = 2k_1 + 1$ $\quad b = 2k_2$

$$\therefore a^2(b+3) = (2k_1+1)^2(2k_2+3)$$

$$= 8k_1^2k_2 + 12k_1^2 + 8k_1k_2 + 12k_1 + 2k_2 + 3$$

$$= 8k_1^2k_2 + 6k_1^2 + 4k_1k_2 + 6k_1 + k_2 + 1) + 1$$

$$= 2(4k_1^2k_2 + 6k_1^2 + 4k_1k_2 + 6k_1 + k_2 + 1) + 1$$

$\therefore a^2(b+3)$ เป็นจน.เต็มคี่

9 หาก n เป็นเลขกำลังสองของจน.เต็ม แล้ว $n \bmod 4$ จะเท่ากับ 0 หรือ 1

โดยนิยาม $\exists k_1 \in I$ ที่ซึ่ง $n = k_1^2$

กรณี 1 $n \equiv 0 \pmod 4$

$$k_1^2 - 0 = 4k_2$$

$$k_1^2 = 4k_2$$

กรณี 2 $n \equiv 1 \pmod 4$

$$k_1^2 - 1 = 4k_2$$

$$k_1^2 = 4k_2 + 1$$

$\therefore n \bmod 4 = 0, 1$

กรณี 1 จะได้ 4 หาร n แล้วเหลือเศษ 0

กรณี 2 จะได้ 4 หาร n แล้วเหลือเศษ 1

10 ให้พิสูจน์ประพจน์ "ถ้า n เป็นจน.เต็มคู่แล้ว $3n-3$ เป็นจน.เต็มคี่"

โดย 10.1 direct proof

ให้ n เป็นจน.เต็มคู่

โดยนิยาม $\exists u \in I$ ที่ซึ่ง $n = 2k$

$$\begin{aligned} 3n-5 &= 3(2k)-5 \\ &= 6k-5 \\ &= 6k-6+1 \\ &= 2(3k-3)+1 \end{aligned}$$

$\therefore 3k-3 \in I$

$\therefore 3n-5$ เป็นจน.เต็มคี่

10.2 proof by contradiction

สมมติ $3n-5$ เป็นจน.เต็มคู่ $\sim q$

ให้ $3n-5 = 2k$

$3n = 2k+5$

$3n = 2(k+2)+1$

$\therefore 3n$ เป็นจน.เต็มคี่

โดยนิยาม ผลคูณของจน.คี่ จะเป็นจน.คี่

จะได้ n เป็นจน.เต็มคี่ (เกิดข้อขัดแย้ง กับ n เป็นจำนวนเต็มคู่)

$\therefore n$ เป็นจำนวนเต็มคู่

10.3 proof by contraposition

สมมติ $3n-5$ เป็นจน.เต็มคู่

$3n = 2k+5$

$3n = 2(k+2)+1$

$\therefore 3n$ เป็นจน.เต็มคี่

โดยนิยาม ผลคูณของจน.คี่ จะเป็นจน.คี่

$\therefore n$ เป็นจน.เต็มคี่ เป็นไปตาม $\sim q \to \sim p$