

จงใช้การพิสูจน์โดยตรง (direct proof) พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. ผลคูณของจำนวนคี่ จะเป็นจำนวนคี่

กำหนดให้ m, n เป็น ค.น. ใด ๆ

จะได้ $m = 2k+1$ โดย $\exists k \in \mathbb{Z}$, $n = 2k_1+1$ โดย $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$

$$mn = (2k+1)(2k_1+1)$$

$$= 4kk_1 + 2k + 2k_1 + 1$$

$$= 2(2kk_1 + k + k_1) + 1$$

$\exists k \in \mathbb{Z}, \exists k_1 \in \mathbb{Z} \therefore kk_1 \in \mathbb{Z}, 1kk_1 \in \mathbb{Z}$ ให้ $2kk_1 + k + k_1 = k_2$

$$mn = 2k_2 + 1 \quad \#$$

2. จำนวนคี่ทุกจำนวน จะเป็นผลต่างของจำนวนเต็มกำลังสอง (เช่น 5 เป็นผลต่างของ 2^2 กับ 3^2)

กำหนดให้ m เป็น ค. น. ใด ๆ $\therefore m = 2k+1$; $\exists k \in \mathbb{Z}$

$$= 2k+1$$

$$= k+1 + k(k+1-k)$$

$$= (k+1)^2 - k^2$$

\therefore ค. น. ใด ๆ ก็ล้วนเป็นผลต่างของ ค. น. เต็มกำลังสอง

3. ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว $\frac{1}{x}$ จะเป็นจำนวนตรรกยะ

กำหนดให้ $x \in \mathbb{Q} \therefore x = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{R} \quad m, n \neq 0$

$$x = \frac{m}{n}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(\frac{m}{n})}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{n}{m}$$

\therefore ถ้า $x \in \mathbb{Q}$ แล้ว $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

$$4. \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{ให้ } \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad \text{--- ①}$$

$$\text{และ } \sum_{i=1}^n i = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} + \text{②} = 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \quad \text{รวม } n \text{ ตัว}$$

$$\therefore 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) = n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \#$$

5. n หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อผลรวมของเลขประจำหลักของ n หารด้วย 3 ลงตัว (เช่น 123 หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อ $1+2+3=6$ หารด้วย 3 ลงตัว)

กำหนดให้ n หาร 3 ลงตัว $\therefore n = 3k ; \exists k \in \mathbb{Z}$

ให้ n เป็นเลข 3 หลัก a เป็นร้อย b เป็นสิบ c เป็นหน่วย ; $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\text{พิจารณา } n = 100a + 10b + c$$

$$n = 99a + a + 9b + b + c$$

$$n = 3(33a + 3b) + (a + b + c)$$

$$3k = 3(33a + 3b) + (a + b + c)$$

$$3k - 3(33a + 3b) = a + b + c$$

$$a + b + c = 3(k - 33a - 3b)$$

\therefore เมื่อ n หาร 3 ลงตัว $a+b+c$ หาร 3 ลงตัว