

จงใช้การพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง (proof by contradiction) พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

- $(n + 1)^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว n เป็นจำนวนเต็มคี่
- ถ้า $xy = 10$ แล้ว $x < 10$ หรือ $y < 10$
- มุมภายในของสามเหลี่ยม มีมุมฉากไม่เกิน 1 มุม
- มีจำนวนเต็มคู่ไม่จำกัด
- $25a + 15b = 1$ ไม่มีคำตอบที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
- ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- ถ้า n เป็นจำนวนเต็มแล้ว $n^2 + 2$ ไม่สามารถหารด้วย 4 ได้ลงตัว
- ถ้า p และ q เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$
- กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มคี่บวก ถ้า $a + b$ หารด้วย 4 ลงตัวแล้ว $a - b$ จะหารด้วย 4 ไม่ลงตัว
- ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a^2 - 4b - 3 \neq 0$

① กำหนดให้ $(n+1)^2$ เป็น จ. เต็มคู่ แล้ว n เป็น จ. เต็มคี่

จะได้ $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$

$$\begin{aligned}\text{จาก } (n+1)^2 &= (2k+1+1)^2 \\ &= (2k+2)^2 \\ &= 4k^2 + 8k + 4\end{aligned}$$

$$(n+1)^2 = 2(2k^2 + 4k + 2)$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \exists k_1 \in \mathbb{Z} \text{ ให้ } k_1 = 2k^2 + 4k + 2$$

$$(n+1)^2 = 2k_1$$

$\therefore (n+1)^2$ เป็น จ. เต็มคู่ แล้ว n เป็น จ. เต็มคี่

② พิสูจน์

ให้ $x \geq 10$ และ $y \geq 10$ ต้องการพิสูจน์ $xy \neq 10$ ($\sim q \rightarrow \sim p$)

สมมติให้ $xy = 10$ (contradiction) $\sim (\sim p)$

จะได้ $xy \geq 10(10)$

$$xy \geq 100$$

ขัดแย้งกับ $xy = 10$

$$\therefore xy = 10 \rightarrow x < 10 \vee y < 10$$

③ สมมติให้มุมภายในของสามเหลี่ยม มีมุมมากถึง 1 มุม

กำหนดให้ มุมภายใน สามเหลี่ยม = 180° ให้ a, b, c เป็นมุมภายในสามเหลี่ยม; $a, b, c \neq 0$

$$\text{จะได้ } a + b + c = 180^\circ$$

$$\text{สมมติให้ } a, b = 90^\circ$$

$$\text{จะได้ } 90 + 90 + c = 180$$

$$c = 0$$

ขัดแย้งกับ $a, b, c \neq 0$

\therefore มุมภายในสามเหลี่ยมมีมุมไม่เกิน 1 มุม

④ สมมติให้ E แทน จำนวนเต็มคู่ที่มากที่สุด และ $-E$ แทนจำนวนเต็มคู่ที่น้อยที่สุด

ดังนั้น $E = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$, $-E = -(2k_1)$

จะได้ $E + 2 = (2k) + 2$

$$= 2k + 2$$

$$= 2(k+1)$$

จาก $k \in \mathbb{Z} \therefore k+1 \in \mathbb{Z}$

จากนิยาม ดังนั้น $E+2$ เป็นจ.เต็มคู่

โดย $E+2$ มากกว่า E

จะได้ $-E - 2 = -(2k_1) - 2$

$$= -2k_1 - 2$$

$$= 2(-k_1 - 1)$$

จาก $k_1 \in \mathbb{Z} \therefore -k_1 - 1 \in \mathbb{Z}$

จากนิยาม ดังนั้น $-E - 2$ เป็นจ.เต็มคู่

โดย $-E - 2$ น้อยกว่า $-E$

ขัดแย้งกับสมมติที่ตั้งไว้

\therefore มีจ.เต็มคู่ไม่จำกัด

⑤ สมมติ $25a + 15b = 1$ มีค่าของ $a, b \in \mathbb{Z}$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z} \therefore 25a + 15b \in \mathbb{Z}$

จะได้ $25a + 15b = 1$

$$5a + 3b = \frac{1}{5}$$

จาก $a, b \in \mathbb{Z} \therefore a + b \in \mathbb{Z}$ แต่ $5a + 3b = 0.2 \notin \mathbb{Z}$ ขัดแย้ง

$\therefore 25a + 15b = 1$ ไม่มีค่าของ $a, b \in \mathbb{Z}$

⑥ กำหนดให้ a, b เป็นจ.จริงบวก

สมมติให้ $a + b < 2\sqrt{ab}$

จาก $a, b > 0 \therefore a + b > 0$

ยกกำลังทั้ง 2 ทั้ง

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

$$(a-b)^2 < 0$$

ซึ่งเป็นเท็จ เพราะ $(a-b)^2 \geq 0$ เสมอ

$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$

⑦ สมมุติให้ $n \in \mathbb{Z}$, $4 \mid n^2 + 2$

จาก $4 \mid n^2 + 2$ จะได้ $\exists k \in \mathbb{Z}$

$$4k = n^2 + 2$$

$$4k - 2 = n^2$$

$$2(k-1) = n^2$$

$$\sqrt{2(k-1)} = n$$

ขัดแย้งกับสมมุติ $n \in \mathbb{Z}$

\therefore ถ้า $n \in \mathbb{Z}$ แล้ว $4 \nmid n^2 + 2$

⑧ ให้ p และ q เป็นจ.เต็มบวกใด ๆ และ $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$

จะได้ $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$

$$\frac{p^2 + q^2}{qp} \geq 2$$

$$p^2 + q^2 \geq 2(qp)$$

$$p^2 + 2qp + q^2 \geq 0$$

ดังนั้น $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$

⑨ สมมุติให้ $a+b$ หรือ $a-b$ หรือ 4 ลงตัว แล้ว a, b เป็นจ.เต็มบวก

จะได้ $\exists n \in \mathbb{Z}^+$, $a = 2n+1$ $\exists n_1 \in \mathbb{Z}^+$, $b = 2n_1+1$

จาก $4 \mid a+b$ จะได้ $\exists n_2 \in \mathbb{Z}^+$ ที่ $4n_2 = (2n+1) + (2n_1+1)$

$$4n_2 = 2n+1 + 2n_1+1$$

$$4n_2 = 2n + 2n_1 + 2$$

$$2n_2 = n + n_1 + 1$$

$$n_2 = \frac{n + n_1 + 1}{2}$$

$$n_2 = \frac{n + n_1 + 0.5}{2}$$

$\therefore 4 \nmid a-b$ n_2 ขัดแย้งกับ $\exists n_2 \in \mathbb{Z}^+$

10 สมมุติให้ a และ b เป็นจ.เต็มแล้ว $a^2 - 4b - 3 = 0$

กำหนด $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ $a^2 - 4b - 3 = 0$

$$a^2 = 4b + 3$$

$$a = \sqrt{4b + 3} \quad \text{--- ①}$$

และจาก $a^2 - 4b - 3 = 0$

$$4b = a^2 - 3$$

$$b = \frac{a^2 - 3}{4}$$

$$b = \frac{a^2}{4} - 0.75 \quad \text{--- ②}$$

①, ② จัดเรียงกับสมมุติ $a, b \in \mathbb{Z}$

\therefore ถ้า a และ b เป็นจ.เต็มแล้ว $a^2 - 4b - 3 \neq 0$