ธนภัทร์ เกิดเปี่ยม 65050368

Lab 6: Proof by Mathematical Induction

Mathematics for Computer Science

จงใช้การพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (proof by mathematical induction) พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. $n \in N,\ \sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

2. $n \in N,\ \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$

3. $n \in N,\ \sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} = 2^n - 1$

4. $n \in N,\ \sum_{r=1}^{n} 3^{r-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

5. $n \in N,\ \sum_{r=1}^{n} r(r!) = (n+1)! - 1$

6. $n \in N,\ 6|(7^n + 5)$

7. $n \in N,\ 15|(4^{2n} - 1)$

8. $n \in N,\ 4|(9^n - 5^n)$

9. $n \in N,\ 8|(2^n + 6^n)$

10. $n \in N,\ 5^n$ สามารถเขียนในรูปของ $a^2 + b^2$ เมื่อ $a, b \in N$

(ข้อ 10 ใช้ 2 base cases)

① $n \in N, \sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

ให้ $P(n)$ แทน $r(r+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$; $n \geq 1$

① แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+3) = 1(1+3) = 4$$

$$4 = \frac{1}{3}(1)(1+1)(1+5)$$

$$4 = 4$$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

② สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k} r(r+3) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+5)$$

$\therefore P(k)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k+1} r(r+3) = \sum_{r=1}^{k} r(r+3) + (k+1)(k+4)$$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+5) + (k+1)(k+4)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+5)}{3} + \frac{3(k+1)(k+4)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+8k+12)}{3}$$

$$= (k+1)(k+6)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+5)$$

② $n \in N, \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$

ให้ $P(n)$ แทน $\frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$; $n \geq 1$

① แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ $\therefore P(1)$ เป็นจริง

② สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$\therefore$ $P(k)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

$\therefore P(k+1)$ เป็นจริง

③ $n \in N, \sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} = 2^n - 1$

ให้ $P(n)$ แทน $2^{r-1} = 2^n - 1$; $n \geq 1$

① แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} = 2^n - 1$$

$$2^{1-1} = 2^{1-1}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ $P(1)$ เป็นจริง

② สมมติ P(k) เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k} 2^{r-1} = 2^k - 1$$

$\therefore$ P(k) เป็นจริง

แสดงว่า P(k+1) เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k+1} 2^{r-1} = \sum_{r=1}^{k} 2^{r-1} + 2^{(k+1)-1}$$

$$= 2^k - 1 + 2^k$$

$$= 2 \cdot 2^k - 1$$

$$= 2^{k+1} - 1$$

$\therefore$ P(k+1) เป็นจริง

④ $n \in N$, $\sum_{r=1}^{n} 3^{r-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

ให้ P(n) แทน $3^{r-1} = \frac{3^n - 1}{2}$; $n \geq 1$

① แสดงว่า P(1) เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{n} 3^{r-1} = \frac{3^1 - 1}{2}$$

$$3^{1-1} = \frac{3-1}{2}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

② สมมติ P(k) เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k} 3^{r-1} = \frac{3^k - 1}{2}$$

$\therefore$ P(k) เป็นจริง

แสดงว่า P(k+1) เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k+1} 3^{r-1} = \sum_{r=1}^{k} 3^{r-1} + 3^k$$

$$= \frac{3^k - 1}{2} + 3^k$$

$$= \frac{3^k - 1}{2} + \frac{2 \cdot 3^k}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^k - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

$\therefore$ P(k+1) เป็นจริง

⑤ $n \in N$, $\sum_{r=1}^{n} r(r!) = (n+1)! - 1$

ให้ $P(n)$ แทน $r(r!) = (n+1)! - 1$; $n \geq 1$

① แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{n} r(r!) = (1+1)! - 1$$

$$1(1!) = 2! - 1$$

$$1 = 1$$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

② สมมติ $p(k)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k} r(r!) = (k+1)! - 1$$

$\therefore p(k)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$$\sum_{r=1}^{k+1} r(r!) = \sum_{r=1}^{k} r(r!) + (k+1)[(k+1)!]$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1)[(k+1)!]$$

$$= (k+1)k! - 1 + (k+1)(k+1)k!$$

$$= (k+1)k! + (k+1)(k+1)k! - 1$$

$$= (k+1)k!(1+(k+1)) - 1$$

$$= (k+2)(k+1)k! - 1$$

$$= (k+2)! - 1$$

$$= ((k+1)+1)! - 1$$

$\therefore P(k+1)$ เป็นจริง

6 $n \in N$, $6 \mid (7^n + 5)$

ให้ $P(n)$ แทน $6 \mid (7^n + 5) \rightarrow 7^n + 5 = 6m$

1 แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$6 \mid (7^1 + 5)$

$6 \mid 12$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

2 สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$6 \mid (7^k + 5) \rightarrow 7^{k+5} = 6m$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$6 \mid (7^{k+1} + 5) \rightarrow 7^{k+1} + 5 = 7 \cdot 7^k + 5$

$= (6+1) \cdot 7^k + 5$

$= 6 \cdot 7^k + 7^k + 5$

$= 6 \cdot 7^k + 6m$

$= 6(7^k + m)$

จะได้ $6 \mid (7^{k+1} + m)$

$\therefore P(k+1)$ เป็นจริง

7 $n \in N$, $15 \mid (4^{2n} - 1)$

ให้ $P(n)$ แทน $15 \mid (4^{2n} - 1) \rightarrow 4^{2n} - 1 = 15m$

① แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$15 \mid 4^{2(1)} - 1 = 15 \mid 16 - 1$

$15 \mid 15$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

② สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$15 \mid 4^{2k} - 1 \rightarrow 4^{2k} - 1 = 15m$

$\therefore P(k)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$15 \mid 4^{2(k+1)} - 1 \rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 4^{2k+2} - 1$

$= 4^{2k} \cdot 4^2 - 1$

$= 4^{2k} \cdot 16 - 1$

$= 4^{2k} \cdot (15+1) - 1$

$= 15 \cdot 4^{2k} + 4^{2k} - 1$

$= 15 \cdot 4^{2k} + 15m$

$= 15(4^{2k} + m)$

จะได้ $15 \mid 4^{2(k+1)} - 1$

$\therefore P(k+1)$ เป็นจริง

8 $n \in N,\ 4 \mid (9^n - 5^n)$

ให้ $P(n)$ แทน $4 \mid (9^n - 5^n) \longrightarrow 9^n - 5^n = 4m$

1 แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$4 \mid (9^1 - 5^1)$

$4 \mid 4$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

2 สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$4 \mid (9^k - 5^u) \longrightarrow 9^k - 5^k = 4m$

$\therefore P(k)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$4 \mid (9^{k+1} - 5^{k+1}) \rightarrow 9^{n+1} - 5^{k+1} = 9 \cdot 9^k - 5 \cdot 5^k$

$= (8+1) \cdot 9^k - (4+1) \cdot 5^k$

$= (8 \cdot 9^k + 9^k) - (4 \cdot 5^k + 5^k)$

$= 8 \cdot 9^k + 9^k - 4 \cdot 5^u + 5^k$

$= 8 \cdot 9^k - 4 \cdot 5^k + 9^k - 5^k$

$= 8 \cdot 9^k - 4 \cdot 5^k + 4m$

$= 4(2 \cdot 9^k - 5^k + 4m)$

จะได้ $4 \mid (9^{k+1} - 5^{k+1})$

$\therefore P(k+1)$ เป็นจริง

9. $n \in N$, $8 \mid (2^n + 6^n)$

ให้ $P(n)$ แทน $8 \mid (2^n + 6^n) \rightarrow 2^n + 6^n = 8m$

1. แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$8 \mid (2^1 + 6^1)$

$8 \mid 8$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$8 \mid 2^k + 6^k \longrightarrow 2^k + 6^k = 8m$

$\therefore P(k)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

$8 \mid 2^{k+1} + 6^{k+1} \longrightarrow 2^{k+1} + 6^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 6 \cdot 6^k$

$= 2^k + 2^k + 5 \cdot 6^k + 6^k$

$= 2^k + 5 \cdot 6^k + 2^k + 6^k$

$= 2^k + 5 \cdot 6^k + 8m$

$= 8\left(\frac{2^k + 5 \cdot 6^k}{8} + m\right)$

โดย $\frac{2^k + 5 \cdot 6^k}{8} \in N$ เมื่อ $k \in N$

จะได้ $8 \mid 2^{k+1} + 6^{k+1}$

$\therefore P(k+1)$ เป็นจริง

10 $n \in N$, 5^n สามารถเขียนในรูปของ a^2+b^2 เมื่อ $a, b \in N$

ให้ $P(n)$ แทน $5^n = a^2+b^2$

1 แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1) = 5^1 = 1^2+2^2$

$\therefore P(1)$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

$P(2) = 5^2 = 3^2+4^2$

2 กรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ $n = 2k$

แสดงว่า $P(n+2)$ เป็นจริง

$P(n+2) = P(2k+2) = 5^{2k+2} = 5^{2k} \cdot 5^2$

$= 5^{2k} \cdot (3^2+4^2)$

$= (5^{2k} \cdot 3^2) + (5^{2k} \cdot 4^2)$

$= (3 \cdot 5^k)^2 + (4 \cdot 5^k)^2$

กรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคี่ $n = 2k+1$

แสดงว่า $P(n+2)$ เป็นจริง

$P(n+2) = P(2k+1+2) = 5^{2k+1+2} = 5^{2k+1} \cdot 5^2$

$= 5^{2k+1}(3^2+4^2)$

$= 5^{2k+1} \cdot 3^2 + 5^{2k+1} \cdot 4^2$

$= 5^{2k} \cdot 5 \cdot 3^2 + 5^{2k} \cdot 5 \cdot 4^2$

$= 5(3 \cdot 5^k)^2 + 5(4 \cdot 5^k)^2$

$= 5[(3 \cdot 5^k)^2 + (4 \cdot 5^k)^2]$

$\therefore P(n+2)$ เป็นจริงทั้ง 2 กรณี