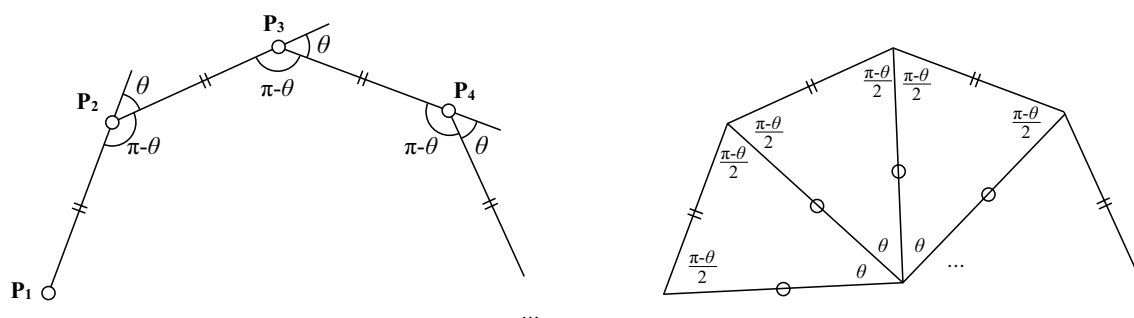


# 命題

1/8 円弧レールおよび直線レールを組み合わせて作られる経路  $R$  について、始点と終点における進行方向が一致しない場合、経路  $R$  を多くとも 8 個連結することで閉じた経路を作成できる。

# 証明

経路  $R$  の始点と終点における進行方向の成す角を  $\theta$  とすると、 $n$  番目の経路  $R_n$  の始点  $P_n$  の位置は図左のように表される。ただし、進行方向は 1/8 円弧のレールによってのみ変化するため、 $\theta$  の値は  $\frac{a}{4}\pi$  ( $a \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ ) である (始点と終点における進行方向が一致しないという条件があるため  $a = 0$  は含まれない)。



図左の各点において、図右のように角の二等分線をひくと、頂角が  $\theta$  の合同な二等辺三角形が頂角を共有して並び、全ての点  $P$  は同一円周上に位置する ( $\theta < 0$  の場合は、各点が反時計回りに並ぶ)。したがって、 $n\theta = 2m\pi$  となるような自然数  $n, m$  の組み合わせを選ぶと、 $P_n = P_0$  となり、なおかつその点での進行方向も一致する ( $P_{n+1} = P_1$  となるため)。

$a = 1$  のとき、 $n = 8m$  となり、このような条件を満たす  $m$  が存在する最小の  $n$  は 8。

$a = 2$  のとき、 $n = 4m$  となり、このような条件を満たす  $m$  が存在する最小の  $n$  は 4。

$a = 3$  のとき、 $3n = 8m$  となり、このような条件を満たす  $m$  が存在する最小の  $n$  は 8。

$a = 4$  のとき、 $n = 2m$  となり、このような条件を満たす  $m$  が存在する最小の  $n$  は 2。

$a = -3, -2, -1$  の場合はそれぞれ  $a = 3, 2, 1$  のときと同じである。

以上より、経路  $R$  を多くとも 8 個連結することで閉じた経路を作成できる。(証明終)

2016.7.4 三谷 純