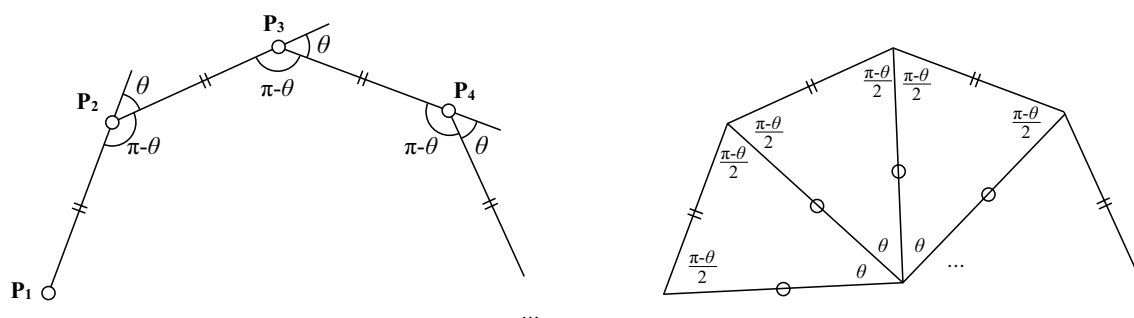


命題

1/8 円弧レールおよび直線レールを組み合わせて作られる経路 R について、始点と終点における進行方向が一致しない場合、経路 R を多くとも 8 個連結することで閉じた経路を作成できる。

証明

経路 R の始点と終点における進行方向の成す角を θ とすると、 n 番目の経路 R_n の始点 P_n の位置は図左のように表される。ただし、進行方向は 1/8 円弧のレールによってのみ変化するため、 θ の値は $\frac{a}{4}\pi$ ($a \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$) である (始点と終点における進行方向が一致しないという条件があるため $a = 0$ は含まれない)。



図左の各点において、図右のように角の二等分線をひくと、頂角が θ の合同な二等辺三角形が頂角を共有して並び、全ての点 P は同一円周上に位置する ($\theta < 0$ の場合は、各点が反時計回りに並び)。したがって、 $n\theta = 2m\pi$ となるような自然数 n, m の組み合わせを選ぶと、 $P_{n+1} = P_1$ となり、なおかつその点での進行方向も一致する ($P_{n+2} = P_2$ となるため)。

$a = 1$ のとき、 $n = 8m$ となり、このような条件を満たす m が存在する最小の n は 8。

$a = 2$ のとき、 $n = 4m$ となり、このような条件を満たす m が存在する最小の n は 4。

$a = 3$ のとき、 $3n = 8m$ となり、このような条件を満たす m が存在する最小の n は 8。

$a = 4$ のとき、 $n = 2m$ となり、このような条件を満たす m が存在する最小の n は 2。

$a = -3, -2, -1$ の場合はそれぞれ $a = 3, 2, 1$ のときと同じである。

以上より、経路 R を多くとも 8 個連結することで閉じた経路を作成できる。(証明終)

2016.7.4 三谷 純