数值分析三次作业

韦俊林 (201928016029023)

2020 年 4 月 30 日

第五章作业

1. 给定方程 $x^2-5x+6=0$，

   1) 判断迭代法 $x_{k+1}=\frac{1}{5}(x_k^2+6),\ k=1,2,\ldots$ 在根 $x=2$ 附近是否收敛？若收敛，其收敛阶是多少？

   2) 当实数 α 在什么范围取值时迭代法 $x_{k+1}=x_k-\alpha\frac{x_k^2-5x_k+6}{2x_k-5},\ k=1,2,\ldots$ 在根 $x=2$ 附近收敛？α 取何值时收敛阶最高？

答：

1) 有定理，若 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个领域连续，且 $|\varphi'(x^*)<1|$，则迭代法局部收敛。

   这里有：

$$\begin{aligned}
&\because x_{k+1}=\frac{1}{5}(x_k^2+6)\ ,\quad \varphi(x)=\frac{1}{5}(x^2+6)\\
&\therefore \varphi'(x)=\frac{2}{5}x\\
&\because x^*=2\\
&\therefore |\varphi'(x^*)|=\frac{4}{5}<1
\end{aligned}$$

   所以该迭代式在 $x=2$ 附近收敛。

   又由定理，对于迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 及正整数 p，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求跟 x^* 的邻近连续，并且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

   则该迭代过程在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的。

   因为 $\varphi'(2)=\frac{4}{5}\neq 0$，所以该迭代式在 $x=2$ 处线性收敛。

2)

$$\begin{aligned}
&\because x_{k+1}=x_k-\alpha\frac{x_k^2-5x_k+6}{2x_k-5},\ \varphi(x)=x-\alpha\frac{x^2-5x+6}{2x-5}\\
&\therefore \varphi'(x)=1-\alpha\frac{(2x-5)(2x-5)-(x^2-5x+1)2}{(2x-5)^2}=\alpha\left(\frac{2(x^2-5x+1)}{(2x-5)^2}-1\right)+1
\end{aligned}$$

   根据题意带入 $x=2$ 得，

$$\varphi'(2)=\alpha\left(\frac{2(2^2-5\times 2+1)}{(2\times 2-5)^2}-1\right)+1=1-11\alpha$$

若要局部收敛，由上述定理得，

$$|\varphi'(2) < 1| \;\Rightarrow\; |1-11\alpha| < 1$$
$$\Rightarrow -1 < 1-11\alpha < 1 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{11} < \alpha < \frac{2}{11}$$

所以当 $-\frac{1}{11} < \alpha < \frac{2}{11}$ 时，该迭代式在 $x=2$ 处局部收敛。
令

$$\varphi'(2) = 1-11\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{11}$$

此时

$$\varphi''(x) = \alpha\tfrac{2(2x-5)(2x-5)^2-2(x^2-5x+1)\times 2(2x-5)\times 2}{(2x-5)^4} = \tfrac{2\alpha}{2x-5} - 8\alpha\tfrac{x^2-5x+1}{(2x-5)^3}$$
$$\varphi''(2) = 2\times\tfrac{1}{11}\times\tfrac{1}{2\times 2-5} - 8\times\tfrac{1}{11}\times\tfrac{2^2-5\times 2+1}{(2\times 2-5)^3}$$
$$\varphi''(2) = -\tfrac{42}{11} \neq 0$$

综上所述，当 $\alpha = \frac{1}{11}$ 时收敛阶最高。

2. 用 Newton 迭代法求 $f(x) = x^2 - 3x - e^x + 2 = 0$ 在 $x=1$ 附近的根。
答：牛顿法的迭代公式为，

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\; k = 0, 1, \ldots,$$

本题中，$f(x) = x^2 - 3x - e^x + 2$，$f'(x) = 2x - 3 - e^x$，因此迭代公式为：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k - e_k^x + 2}{2x_k - 3 - e_k^x},\; k = 0, 1, \ldots,$$

由题意，取迭代初值 $x_0 = 1$，迭代结果如下表：

k	x_k
0	1
1	0.268941421369995
2	0.257518261257097
3	0.257530285426349
4	0.257530285439861
5	0.257530285439861

第六章作业

1.（计算实习题）试分别用显式 Euler 法和四阶显式 Runge-Kutta 法求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = -50y + 50x^2 + 2x,\; 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

步长取为 $h = 0.02$，在同一图形中作为这两种数值解得到的曲线，以及真实解曲线，比较这两种方法。真实解为 $y(x) = \frac{1}{2}e^{-50x} + x^2$。若取步长为 $h = 0.01$ 将会怎样？
实验报告：

(a) matlab 实现显示 Euler 法和四阶 Runge-Kutta 方法核心代码，图 1。其中显示欧拉法公式经过带入与整理后得出；

```
for i=2:length(X)
    %Euler
    y_Euler(i)=2*h(j)*X(i-1)*(25*X(i-1)+1)+(1-50*h(j))*y_Euler(i-1);
    %Runge-Kutta
    %K1=f(x_n,y_n)
    K1=-50*y_RK(i-1)+50*X(i-1)^2+2*X(i-1);
    %K2=f(x_n+h/2,y_n+h*K1/2)
    K2=-50*(y_RK(i-1)+h(j)*K1/2)+50*(X(i-1)+h(j)/2)^2+2*(X(i-1)+h(j)/2);
    %K3=f(x_n+h/2,y_n+h*K2/2)
    K3=-50*(y_RK(i-1)+h(j)*K2/2)+50*(X(i-1)+h(j)/2)^2+2*(X(i-1)+h(j)/2);
    %K4=f(x_n+h,y_n+h*K3)
    K4=-50*(y_RK(i-1)+h(j)*K3)+50*(X(i-1)+h(j))^2+2*(X(i-1)+h(j));
    %y_(n+1)=y_n+(h/6)*(K1+2K2)
    y_RK(i)=y_RK(i-1)+(h(j)/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
```

图 1: code

(b) 输出从 0 到 2 步长为 0.02 的结果，从左到右 h 分别为 0.02 和 0.01，图 2；

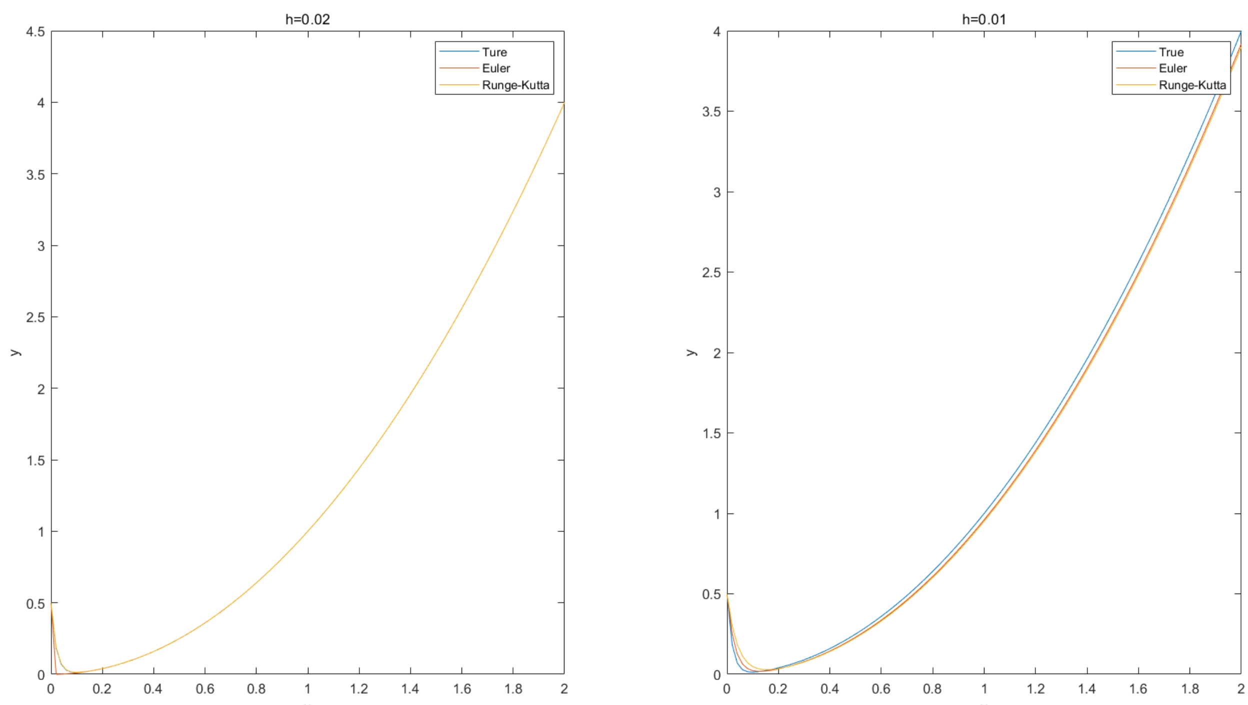

图 2: result-2

(c) 输出从 0 到 20 步长为 0.5 的结果，从左到右 h 分别为 0.02 和 0.01，图 3；

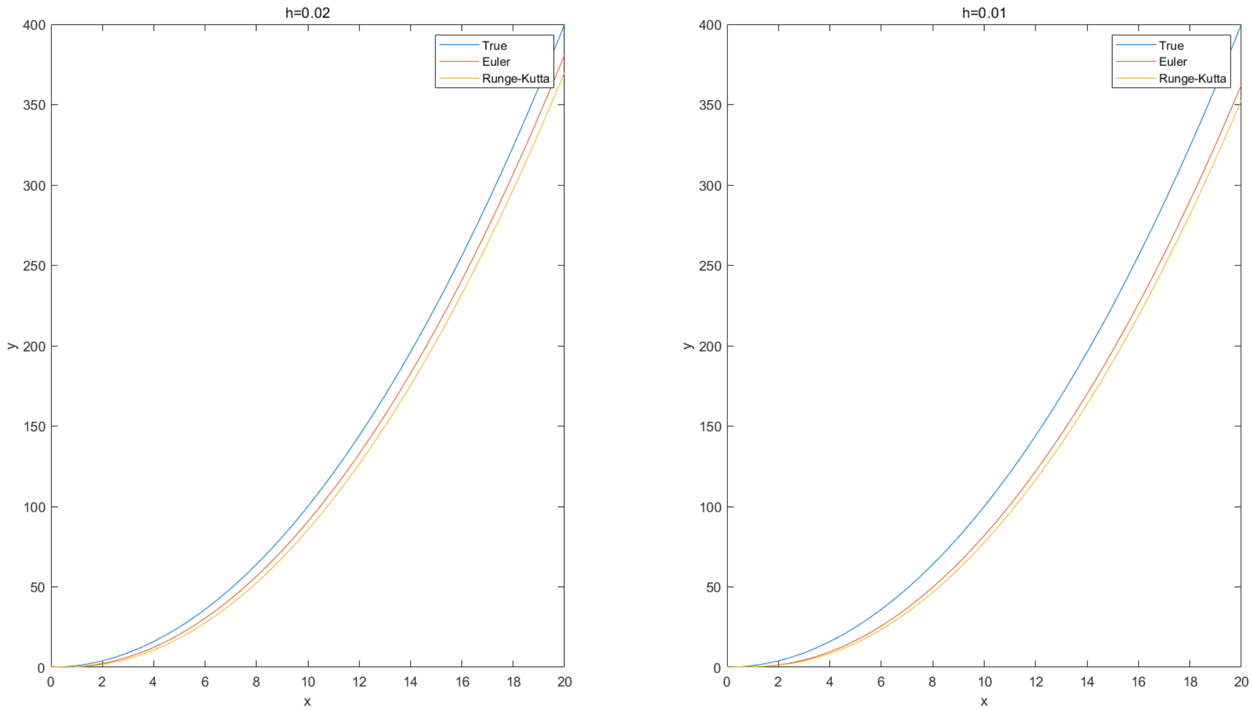
h=0.02
True
Euler
Runge-Kutta
y
x
h=0.01
True
Euler
Runge-Kutta
y
x

图 3: result-20