数值分析四次作业

韦俊林 (201928016029023)

2020 年 5 月 9 日

第七章作业

1. 对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 用幂法求主特征值及其对应的特征向量，练习计算前三步。

   答：由定理，设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量，主特征值 λ_1 满足 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$，则对任意非零初始化向量 $v_0 = u_0(\alpha_1 \neq 0)$，
   按下述方法构造的向量序列 $\{u_k\},\{v_k\}$：

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \neq 0 \ , \\ v_k = Au_{k-1} \ , \\ \mu_k = \max(v_k) \ , \\ u_k = \frac{v_k}{\mu_k} \ , \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad \Rightarrow \begin{cases} \lim_{k\to\infty} u_k = \frac{x_1}{\max(x_1)} \\ \lim_{k\to\infty} \mu_k = \lambda_1 \end{cases}$$

   取 $u_0^T = (1,1,1)$，将题给条件代入定理得：

k	u_k^T(规范化向量)	$\max\{v_k\}$
0	$(1,1,1)$	
1	$(1,1,1)$	4
2	$(1,1,1)$	4
3	$(1,1,1)$	4
4	$(1,1,1)$	4
5	$(1,1,1)$	4

2. 用 Householder 矩阵，化矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 为上三角阵。

   答：由约化定理，设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \neq 0$，则存在初等反射矩阵 H，使得 $Hx = -\sigma e_1$，有公式：

$$\begin{cases} H = I - \beta^{-1} uu^T \ , \\ \sigma = sgn(x_1)\|x\|_2 \ , \\ u = x + \sigma e_1 \ , \\ \beta = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 = \sigma(\sigma + x_1) \ , \end{cases}$$

按照上公式，首先计算 $H_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$，使得

$$H_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得：

$$H_1 = \begin{pmatrix} -0.816496580927726 & -0.408248290463863 & 0.408248290463863 \\ -0.408248290463863 & 0.908248290463863 & 0.091751709536137 \\ 0.408248290463863 & 0.091751709536137 & 0.908248290463863 \end{pmatrix}$$

$$H_1 A = \begin{pmatrix} 2.449489742783179 & -0.816496580927726 & -1.632993161855453 \\ 0 & 0.479379273840342 & 0.408248290463863 \\ 0 & 2.520620726159658 & -0.408248290463863 \end{pmatrix}$$

再利用上述定理公式，找 $\bar{H}_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，使得

$$\bar{H}_2 \begin{pmatrix} 0.479379273840342 \\ 2.520620726159658 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

得：

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.186834180127603 & -0.982391464303333 \\ 0 & -0.982391464303333 & 0.186834180127603 \end{pmatrix}$$

因此有 $A = QR$，其中 R 为上三角矩阵：

$$R = -H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} -2.449489742783179 & 0.816496580927726 & 1.632993161855453 \\ 0 & 2.565800719723442 & -0.324784901230815 \\ 0 & 0 & 0.477334370505438 \end{pmatrix}$$

$$Q = -(H_2 H_1)^T = \begin{pmatrix} 0.816496580927726 & 0.324784901230815 & -0.477334370505438 \\ 0.408248290463863 & 0.259827920984652 & 0.875113012593303 \\ -0.408248290463863 & 0.909397723446283 & -0.079555728417573 \end{pmatrix}$$