数值分析第二次作业

韦俊林 (201928016029023)

2020 年 4 月 16 日

第三章作业

1. 试分别用 Lagrange 和 Newton 插值法求通过点 $(-1,-2),(0,-1),(1,2)$ 和 $(2,5)$ 的三次插值多项式，并由此验证插值多项式的唯一性。

   答：

   (a) Lagrange 插值法：

   首先引入记号：

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$$

   则拉格朗日 n 次插值多项式为：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

   带入已知条件得：

$$L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k \frac{\omega_4(x)}{(x-x_k)\omega'_4(x_k)}$$

$$\begin{aligned}
k=0:\ \lambda_0 &= y_0\frac{\omega_4(x)}{(x-x_0)\omega'_4(x_0)} = -2\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x \\
k=1:\ \lambda_1 &= y_1\frac{\omega_4(x)}{(x-x_1)\omega'_4(x_1)} = -\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \\
k=2:\ \lambda_2 &= y_2\frac{\omega_4(x)}{(x-x_2)\omega'_4(x_2)} = 2\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -x^3 + x^2 + 2x \\
k=3:\ \lambda_3 &= y_3\frac{\omega_4(x)}{(x-x_3)\omega'_4(x_3)} = 5\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)2} = \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x
\end{aligned}$$

$$\therefore\ L_3(x) = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{7}{3}x - 1$$

   (b) Newton 插值法：

   由定义知，牛顿 n 次插值多项式为：

$$\begin{aligned}
&P_n(x) = \\
&f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

其中 $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ 为 $f(x)$ 的 k 阶均差。

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_1,\dots,x_k] = &\quad \sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_k)} \\
= &\quad \frac{f[x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k_0}}
\end{aligned}
$$

带入已知条件计算相应均差，再构造均差表得：

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_1] &= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{-1+2}{1} = 1 \\
f[x_1,x_2] &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{2+1}{1} = 3 \\
f[x_2,x_3] &= \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{5-2}{2-1} = 3 \\
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{3-1}{1+1} = 1 \\
f[x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{3-3}{2} = 0 \\
f[x_0,x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{-1}{2+1} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
-1	-2			
0	-1	1		
1	2	3	1	
2	5	3	0	$-\frac{1}{3}$

综上，带入牛顿 3 次插值多项式得：

$$
\begin{aligned}
P_3(x) \quad &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x \\
&= -2+(x+1)+(x+1)x-\frac{1}{3}(x+1)x(x-1) \\
&= -\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{7}{3}x-1
\end{aligned}
$$

因为 $P_3(x)=L_3(x)$，所以验证得三次插值多项式是唯一的。

2. 已知

x_i	1.9600	1.9881	2.0164	2.0252
$y=\sqrt{x_i}$	1.4000	1.4100	1.4200	1.4231

应用 Lagrange 抛物插值公式，计算 $\sqrt{2}$ 的近似值，并估计误差。

答：

由定义，拉格朗日抛物插值公式有：

$$
\begin{aligned}
&L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x)\\
&l_{k-1} = \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}\\
&l_k = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}\\
&l_{k+1} = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}
\end{aligned}
$$

计算点离 $x_1 = 1.9881, x_2 = 2.0164, x_3 = 2.0252$ 近，因此选取这三个结点进行插值，带入公式得：

$$
\begin{aligned}
l_{k-1} &= \frac{(x-2.0164)(x-2.0252)}{(1.9881-2.0164)(1.9881-2.0252)} = \frac{x^2-4.0416x+4.08361328}{0.00104993}\\
l_k &= \frac{(x-1.9881)(x-2.0252)}{(2.0164-1.9881)(2.0164-2.0252)} = \frac{x^2-4.0133x+\ 4.02630012}{-0.00024904}\\
l_{k+1} &= \frac{(x-1.9881)(x-2.0164)}{(2.0252-1.9881)(2.0252-2.0164)} = \frac{x^2-4.0045x+\ 4.00880484}{0.00032648}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2(2) = \quad & 1.41 \times \frac{2^2-4.0416\times 2+4.08361328}{0.00104993}\\
& -1.42 \times \frac{2^2-4.0133\times 2+\ 4.02630012}{0.00024904}\\
& +1.4231 \times \frac{2^2-4.0045\times 2+\ 4.00880484}{0.00032648}\\
& = 1.414210650103946
\end{aligned}
$$

由定理，在 $[a,b]$ 上用插值多项式 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差限为：

$$
|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|
$$

其中，

$$
M_{n+1} = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|, \quad \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)
$$

这里 $n=2$，所以有：

$$
f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\because f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}\text{ , } 1.96 \leqslant x \leqslant 2.0252 \Rightarrow f^{(4)}(x) < 0\\
&\therefore f^{(3)}(x) \searrow, \quad M_3 = |f^{(3)}(x_0)|
\end{aligned}
$$

$$
\omega_3(x) = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|
$$

综上得：

$$
|R_2(2)| \leqslant \frac{M_3}{3!}|\omega_3(2)| = 2.286078717201158\times 10^{-9}
$$

3.（计算实习题）已给观测数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19	32.3	49	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的拟合多项式，并用 MATLAB 将计算所得多项式连同给定的数据点画在同一个图里，之后利用 MATLAB 多项式拟合函数 $polyfit()$ 求出上述数据的一次和二次最小二乘拟合多项式，再结合命令 $polyval()$，分别作出这两种拟合多项式（一次和二次）的曲线（分两个图），每个图中也要画出所给观测数据点，比较这三幅图。

实验报告：

(a) MATLAB 实现形如 $y = a + bx^2$ 的拟合多项式，图 1。

```
function [output] = MyLSF(X,Y,W,n)
    L=length(W);
    G=ones(n,n);
    D=ones(n,1);
    PHI=ones(n,L);

    for i=1:L
        PHI(2,i)=X(i)^2;
    end

    for i=1:n
        for j=1:n
            G(i,j)=MySum(PHI(i,1:L),PHI(j,1:L),W);
        end
        D(i)=MySum(PHI(i,1:L),Y,W);
    end
    output=G\D;
end
```

图 1: $y = a + bx^2$ 拟合多项式

(b) 利用 MATLAB 多项式拟合函数 $polyfit()$，以及 $polyval()$ 命令实现一次和二次曲线，图 2。

```
a=MyLSF(X,Y,W,n);
b=polyfit(X,Y,1);
c=polyfit(X,Y,2);

x=0:1:50;
y_1=a(1)+a(2)*x.^2;
y_2=polyval(b,x);
y_3=polyval(c,x);
```

图 2: 利用 MATLAB 自带函数实现最小二乘拟合

(c) 绘制观测点以及三个拟合曲线图，如图 3 所示。左边为自己实现的形如 $y = a+bx^2$ 拟合多项式曲线，中间为利用 MATLAB 自带函数实现最小二乘一次拟合多项式曲线，右边为 MATLAB 自带函数实现最小二乘二次拟合多项式曲线。

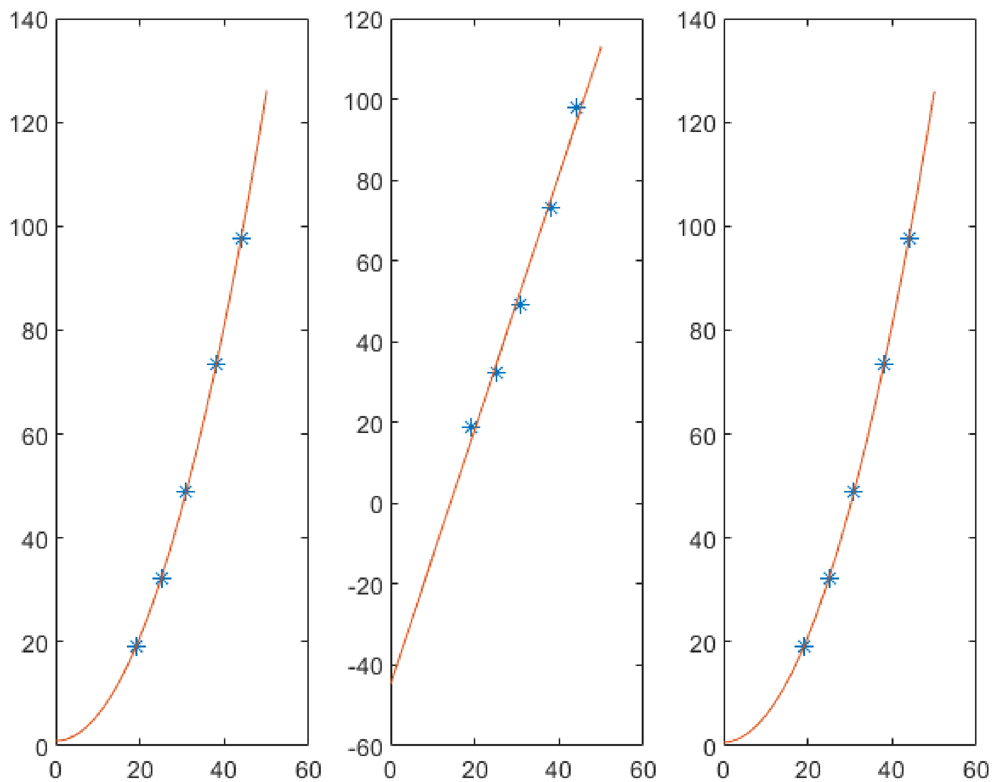

图 3: 观测点与三个拟合曲线图

第四章作业

1. 试分别用，(1) 五点 ($n=4$)Gauss-Legendre 公式；(2)Romberg 方法 (误差不超过 10^{-4})；(3) 将积分区间四等分后，用复化两点 Gauss-Legendre 公式，计算积分 $\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y$。
答：

 – **Gauss-Legendre 公式：**利用变换公式将在 $[a,b]$ 上的积分变换到 $[-1,1]$ 上，

$$y=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t+2}\mathrm{d}t$$

有公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

这里 $n=4$，查表得相应的 A_k 和 x_k，带入公式得：

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y \quad &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{4} A_k f(x_k)\\ &= 0.5688889\times\frac{1}{2}+0.4786287\times\frac{1}{-0.5384693+2}\\ &+0.4786287\times\frac{1}{0.5384693+2}+0.2369269\times\frac{1}{-0.9061798+2}\\ &+0.2369269\times\frac{1}{0.9061798+2}\\ &=1.181777508323819\end{aligned}$$

 – **Romberg 方法：**龙贝格求积算法有递推公式：

$$T_m^{(k)}=\frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)}-\frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)},\quad k=1,2,\ldots.$$

其中 $T_0^{(k)}$ 表示二分 k 次，即 $n=2^k$ 等分，$T_m^{(k)}$ 表示序列 $\{T_0^{(k)}\}$ 的 m 次加速值。
这样在区间 $[a,b]$ 上，子区间长度为 $h=\frac{b-a}{n}$，对应的有 $x_i=a+ih$。
计算过程为：

(1) 取 $k=0$，求 $T_0^{(0)}=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$；

(2) $k++$，利用公式 $T_0(h)=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]$，求 $T_0^{(k)}=T_0(\frac{b-a}{n})$；

(3) 求加速值，即按上述递推公式逐个求出 $T_j^{(k-j)}(j=1,2,\ldots,k)$；

(4) 若 $|T_k^{(0)}-T_{k-1}^{(0)}|<\varepsilon$(预先给定的精度)，则终止计算，并取 $T_k^{(0)}\approx I$；否则跳转 (2) 继续计算。

根据上述的计算步骤，可得如下表格：

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	2	$T_0^{(0)}$				
1	1	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$			
2	$\frac{1}{2}$	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
3	$\frac{1}{4}$	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
4	$\frac{1}{8}$	$T_0^{(4)}$	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$

带入题给数据得：

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	2	2				
1	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{9}$			
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{67}{60}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{752}{675}$		
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{481}{436}$	$\frac{345}{314}$	$\frac{323}{294}$	$\frac{1027}{935}$	
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{474}{431}$	$\frac{557}{507}$	$\frac{713}{649}$	$\frac{713}{649}$	$\frac{713}{649}$

$$\because \left|T_4^{(0)} - T_3^{(0)}\right| = \left|\frac{713}{649} - \frac{1027}{935}\right| = \frac{25}{114654} \approx 2.180473424389904 \times 10^{-4}$$
$$\therefore I \approx T_4^{(0)} = \frac{713}{649}$$

- **复化两点 Gauss-Legendre 公式**：将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，分点 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \ldots, n$。这样有：

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

带入题给数据有：

$$n = 4\,, \quad h = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}\,, \quad x_k = 1 + \frac{1}{2}k$$

$$I = \int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{3} \int_{1+\frac{1}{2}k}^{1+\frac{1}{2}(k+1)} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int_{\frac{5}{2}}^{3} \frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

将上述四个区间带入区间变换公式得：

$$\begin{aligned}
I \quad &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{5}{4}}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{7}{4}}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{9}{4}}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{11}{4}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{5}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{7}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{9}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}t + \frac{11}{4}} \right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{t+5} + \frac{4}{t+7} + \frac{4}{t+9} + \frac{4}{t+11} \right)\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{-1}^{1} \frac{(t+7)(t+9)(t+11) + (t+5)(t+9)(t+11) + (t+5)(t+7)(t+9)}{(t+5)(t+7)(t+9)(t+11)}\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{-1}^{1} \frac{3t^3 + 73t^2 + 581t + 1503}{t^4 + 32t^3 + 374t^2 + 1888t + 3465}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

带入两点 Gauss-Legendre 公式有：

$$I \approx 4\sum_{k=0}^{1} A_k \frac{3x_k^3 + 73x_k^2 + 581x_k + 1503}{x_k^4 + 32x_k^3 + 374x_k^2 + 1888x_k + 3465}$$

查表得到相应的 A_k 与 x_k 分别为 1 和 ± 0.5773503，再带入公式得：

$$I \approx 4 \times \frac{1103}{1260} = \frac{1103}{315}$$

2. 用复化 Simpson 方法 $(n=4)$ 计算积分 $\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x$，并用余项公式估计误差。

答：在区间 $[a,b]$ 上的辛普森求积公式有：

$$S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\frac{a+b}{2} + f(b)\right]$$

其余项为：

$$R[f] = -\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\eta)\ , \quad \eta \in (a,b)$$

而将区间 $[a,b]$ 分为 n 等份，在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上采用上述的辛普森公式，可得复化辛普森公式：

$$S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

其中

$$h = (b-a)/n\ , \quad x_k = a + kh\ , \quad x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h$$

当 $f(x) \in C^4[a,b]$ 时，其复化辛普森公式的余项为：

$$R_n(f) = I - S_n = -\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta)\ , \quad \eta \in (a,b)$$

这里是在区间 $[1,9]$ 进行 4 等分，对 $f(x) = \sqrt{x}$ 进行积分，因此有：

$$n = 4\ , \quad h = \frac{9-1}{4} = 2\ , \quad x_k = 2k+1\ , \quad x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + 1 = 2k+3$$

带入公式得：

$$\begin{aligned} S_4 \qquad &= \frac{2}{6}\left(\sqrt{1} + 4\sum_{k=0}^{3}\sqrt{2k+3} + 2\sum_{k=1}^{3}\sqrt{2k+1} + \sqrt{9}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5259}{247} = \frac{1753}{247} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\because f(x) = \sqrt{x} \\ &\therefore f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}\ , \quad f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} \\ &\because x \in [1,9] \\ &\therefore f^{(5)}(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(x) \nearrow \\ &\therefore \max_{a \leqslant x \leqslant b} f^{(4)}(x) = f^{(4)}(9) = -\frac{15}{16} \times 9^{-\frac{7}{2}} = -\frac{5}{11664} \\ &\therefore R_4(f) \leqslant -\frac{8}{180}(\frac{2}{2})^4 f^{(4)}(9) = \frac{1}{52488} \approx 1.905197378448407 \times 10^{-5} \end{aligned}$$