인공지능의 구성: 입력값 – 기계 – 출력값

위 값들은 vector로 이루어져 있음.

음성을 입력해서 text가 출력되면 음성인식, text -> 음성: 음성합성
언어 -> 다른 언어: 통역

중간에 있는 기계에 해당되는 것은 행렬.

5 3 0 1     -1 0 2
0 1 3
3 -5 7
2 3 4

위 행렬의 곱

1. 5 3 0 1 * -1 0 3 2 = -5 + 0 + 0 + 2 = -3
2. 5 3 0 1 * 0 1 -5 3 = 0 + 3 + 0 + 3 = 6
3. 5 3 0 1 * 2 3 7 4 = 10 + 9 + 0 + 4 = 23
4. -3 + 6 + 23 = 26

위 4*3의 행렬을 기계라고 한다.

인공지능은 행렬의 곱이고, 어떤 입력 벡터를 출력 벡터로 바꿔주는 역할을 하고, 입력과 출력은 뭐든지 될 수 있다.

선형대수: linear algebra, 행렬: matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ -> m행 n열의 행렬 (m,n). dim: m by n 의 행렬

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$ 열로 이루어진 벡터를 column vector라고 한다.

Linear combination

C*V + D*W
C,D: scalars, D,W: vectors

Vector space: 여러 벡터들이 만들어내는 공간.
이 것은 모든 공간이 포함되어야 하기 때문에 1사분면 같은 일부분은 될 수 없다.

$R^1, R^2, R^3, \cdots, R^n$ R: real number, n: vector space

$R^n$ *space* consists of all *vectors* with n components → 모든 벡터를 포함하고 있어야 함.

Column space는 column vector들을 무한대로 linear combination 하여 만들어낸 공간이다.
Column space는 column vector의 차원을 절대 넘을 수 없다.

Column vector들을 원점과 연결하면 삼각형이 만들어짐. 그러한 삼각형은 평면 위에 존재하는 것이고, 그 각각의 면들이 확장되면 column space가 만들어진다.

같은 선상에 있지 않은 점들을 independent하다고 한다.

만약 원점과 두 column vector가 삼각형을 이루지 않고 한 선을 이루는 경우 아무리 확장해도 2차원의 면들을 채우지 못하고 그 라인 선상에서만 값을 형성한다. → dependent
이런 경우에는 whole space는 2차원이지만 column space는 L(line), 즉 한 선을 형성한다.

즉, whole space는 column vector를 구성하는 vector의 수에 따라 결정되고 column space는 column vector 중 independent한 vector들의 개수에 따라 결정된다.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 행렬의 경우, $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$ column과 $\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ column의 합으로 뒤의 행렬이 만들어졌기 때문에(linear combination으로) independent한 column vector는 $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$과 $\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ 두개 밖에 없다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

column vector가 모두 independent이지만 결과적으로 2개 밖에 없기 때문에 column space는 2차원(P)이다.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

위 행렬을 transpose하면 이런 행렬이 된다. Column vector의 수가 3개여도 그것을 구성하는 vector는 2개이기 때문에 whole space인 2차원을 벗어날 수 없다.

- ➔ transpose하게 되면 whole space는 달라질 수도 있지만 column space는 변하지 않는다.

matrix에는 4가지의 space가 있는데 column에 대한 space, row에 대한 space 두개도 포함된다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

whole space는 3차원인데, column space는 1차원이다. 그 나머지 2차원의 공간을 null space라고 한다.

어떤 행렬이 있을 때, 무엇을 곱하든지 간에 반드시 0이 되는 모든 가능성 있는 행렬을 null space라고 한다.

Column space에 있는 null space를 left null space라고 하고, row space에 있는 null space를 그냥 null space 혹은 right null space라고 한다.

Ax = b
A: 행렬(기계), x: 입력값, b: 출력값.
입력값과 출력값의 차원의 크기는 달라도 된다.

Linear transformation.
Ax = b에서 transformation matrix는 A이다.

Transformation을 기하적으로 보면 원래의 모눈종이가 찌그러져들어가듯이 표현된다.

$$A^{-1}b = x$$

Detransformation(inverse matrix)를 할 때, 두 벡터가 dependent하다면 inverse matrix는 존재하지 않는다.
하나의 선으로 표현되기 때문에 돌아갈 수 없다.

Determiner 값은 찌그러진 모눈종이에서 사각형의 넓이와 같고, 그 값이 0이라면 두 벡터는 dependent한 것이다.

3*2의 행렬에 곱해질 수 있는 행렬은 2*?이다.
즉, 인접한 것들이 같아야 함. Ex) 3*2 X 2*3
결과값은 그 뒤에 있는 행과 열로 결정된다. Ex) 3*2 X 2*3 = 3*3의 행렬. 1*3 X 3*1 = 1*1의 행렬

만약 2*1 X 3*2의 행렬을 계산한다면 transpose하여 1*2 X 2*3로 계산할 수 있다.

Orthogonal: 직교하다.

Spanning: linear combination으로 표현 가능한 모든 것.

Row space든 column space든 Whole space를 넘을 수 없음.

Independent한 개수는 rank라고 한다.
이것은 column이든 row이든 개수가 같다.

3*2에서 3은 columnize whole space, 2는 rowize whole space. Rank는 2 → column space와 row space는 2차원. Column의 null space는 1, row는 0.
기하적으로 3차원이 있을 때(column space), 그것의 orthogonal한 1차원에 해당되는 부분이 null space이다. (수학적 정의: xA = 0)
1차원에 해당하는 그 선에 있는 것들은 어떤 것을 곱해도 0이 되는 값들의 선.