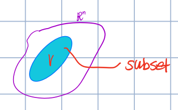
# 03. 선형 부분공간과 부분공간의 기저 Linear subspace & basis of subspace

① Linear subspace , 선형 부분공간
② basis of subspace , 부분공간의 기저

## ① Linear subspace 선형 부분공간.

* subspace of $\mathbb{R}^n$

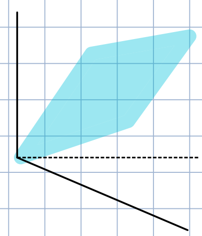
n개의 실수 성분들을 갖는 열벡터의 집합. $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \text{ and } 1 \le i \le n \right\}$




어떤 벡터들의 집합 V가 $\mathbb{R}^n$의 부분 집합일 때,
아래의 세가지 조건을 만족 하면 V는 $\mathbb{R}^n$의 부분공간(or 선형 부분공간) 이다.

① 집합 V는 영벡터를 포함해야 한다 ( V contains zero vector)

② V에 포함되는 임의의 벡터 $\vec{x}$가 존재할 때,
벡터 $\vec{x}$에 어떠한 임의의 실수 C를 곱한 $C\vec{x}$는 항상 V에 속해야 한다.
⇒ '스칼라 곱에 대해 닫혀있다' ( closure under scaler multiplication)



③ 집합 V의 임의의 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 존재 할때,
두 벡터의 합 $\vec{a}+\vec{b}$의 결과 또한 V에 속해야 한다.
⇒ '덧셈에 대해 닫혀있다' ( Closure under addition )

Case 1. $\mathbb{R}^3$ 벡터 공간 내의 집합 V가 존재 할때,
$V = \{ \mathbf{0} \} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 인 경우. V는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간인가?

① 벡터의 집합 V는 영벡터를 포함하는가? Yes.

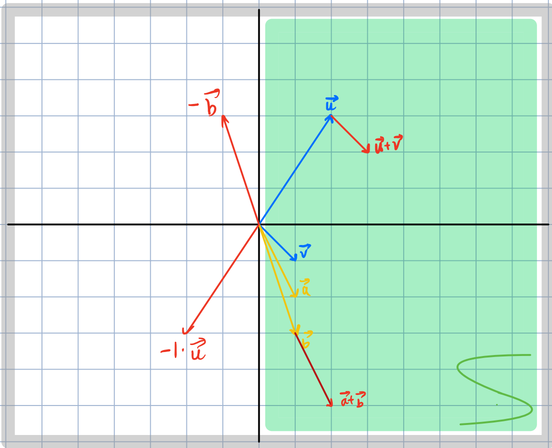
② 스칼라 곱에 대해 닫혀 있는가? Yes. $c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

③ 덧셈에 대해 닫혀있는가? Yes. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

It is Subspace!

## Case2. $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \right\}$은 $\mathbb{R}^2$의 부분공간인가?

$x_1$은 양수, 0 그리고 $x_2$는 임의의 실수




① 집합 S는 영벡터를 포함하는가? Yes

② 집합 S는 덧셈에 대해 닫혀 있는가.

Sol) 임의의 두 벡터 $\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\alpha}, \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}_{\beta}$에 대하여

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ 이때, a와 c는 항상 $\geq 0$

$\therefore$ $a+c \geq 0$ 이고, $b+d$는 임의 실수

$\therefore$ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ 또한 집합 S에 포함. → 덧셈에 대해 닫혀있다.

Yes

③ 집합 S는 곱셈에 대해 닫혀 있는가?

Sol) 임의의 벡터 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $(a \geq 0)$에 대해서,

$c < 0$ 이라면,

⇒ $ca < 0$ 즉, 음의 값을 갖는다. 이는 집합 S의 범위를 벗어난다.

$\therefore$ 스칼라 곱에 대해 열려있다.

it is not subspace.

## Case 3. 집합 W가 $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ 일때, 집합 W는 $\mathbb{R}^n$의 부분 공간인가?

($v_1, v_2, v_3$의 성분은 모른다)

① 0벡터를 포함하는가?

→ $0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$ $\therefore$ yes

② 곱셈에 대해 닫혀있나? Yes

Sol) 집합 내의 임의의 벡터 $\vec{x}$ ( $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ )가 존재할 때,

→ 임의의 실수 k를 곱하면 $k\vec{x} = kc_1\vec{v}_1 + kc_2\vec{v}_2 + kc_3\vec{v}_3$

$= c_4\vec{v}_1 + c_5\vec{v}_2 + c_6\vec{v}_3$ 즉, 임의의 상수 × 임의의 상수 = 임의의 상수

즉, 또다른 선형 결합일 뿐, 닫혀있다.

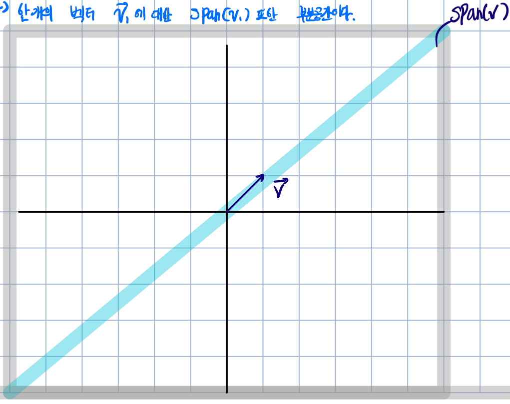
③ 덧셈에 대해 닫혀있나? Yes.

$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ 일때, $y = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + d_3\vec{v}_3$ 라면,

$\vec{x} + \vec{y} = \underbrace{(c_1 + d_1)}_{\text{임의의 실수.}}\vec{v}_1 + \underbrace{(c_2 + d_2)}_{\text{임의의 실수.}}\vec{v}_2 + \underbrace{(c_3 + d_3)}_{\text{임의의 실수.}}\vec{v}_3$ → ∴ 이 또한 세 벡터의 선형 결합.

It is subspace.

+) 한개의 벡터 $\vec{v}_1$에 대한 $\mathrm{Span}(v_1)$ 또한 부분공간이다.




ex) $\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

① $0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ True.

② $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$ 이는, Span(v)에 속함. True.

③ $c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{c_1+c_2}_{=c_3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ True

## ② Basis of subspace. 부분공간의 기저

↳ 어떤 벡터 공간의 '기저'는 그 벡터 공간을 선형 생성하는 (span) 선형독립인 벡터들을 의미한다.

def) 기저

$\mathbb{R}^n$ 상의 벡터공간 $V$의 유한 기저는 다음 두 조건을 만족하는, $V$의 유한 부분집합 $B = \{b_1, \cdots, b_n\} \subseteq V$ 이다.

① 임의의 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ 를 만족하는 상수에 대해, $c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n = 0$ 이면 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 이다. → 선형독립 조건.

② 임의의 벡터 $\vec{v_i} \in V$ 는, 임의의 실수 $c_1, \cdots c_n \in \mathbb{R}$ 에 대해 $\vec{v_i} = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$ 으로 나타낼 수 있다. → 선형 생성 조건.

cf) 임의의 subspace $V$가 존재할 때, ① $V$는 임의의 벡터들의 span과 같고,

→ 즉 $\underset{\text{subspace}}{V} = \mathrm{span}(\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_n}) = \{c_1\vec{b_1} + \cdots + c_n\vec{b_n} \mid c_i \in \mathbb{R}\}$ 이고.

② $\{\vec{b_1}, \cdots \vec{b_n}\}$ 이 linearly independent 하다면

→ 즉, $c_1\vec{b_1} + \cdots + c_n\vec{b_n} = 0$ 을 만족하는 해가 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 외에 존재하지 않는다면

$S = \{\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_n}\}$ 은 $V$의 기저(basis)라 한다.

Case 1. 만약 subspace $V = \mathrm{span}(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ 일 때,

집합 $T = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}, \vec{v_3}\}$ 이고, $\vec{v_3} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$ 인 경우

① $\mathrm{span}(T)$는 여전히 subspace $V$ 이다.

② 하지만, $T$는 선형 종속이다. → $\therefore$ $T$ is not a basis of $V$

but, $V$의 부분집합 $\{\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n}\}$ 은 $V$의 기저이다.

> "가저는 어떠한 공간을 선형 생성하기 위해 필요한 최소한의 벡터들의 집합이다.
> Basis is a minimum set of vectors that spans the space."

## ex) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 일 때,

① $span(S) = \mathbb{R}^2$ 인가?

Prob $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ( $c_1, c_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ) 이 항상 성립되는가?

$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} 2c_1 + 7c_2 = x_1 \quad - ① \\ 3c_1 + 0 = x_2 \quad - ② \end{array} \right.$ → ① 에서, $\frac{2}{3}x_2 + 7c_2 = x_1$

$7c_2 = x_1 - \frac{2}{3}x_2$

$\therefore \left| \begin{array}{l} c_2 = \frac{1}{7}x_1 - \frac{2}{21}x_2 \\ c_1 = \frac{1}{3}x_1 \end{array} \right.$ ∴ 임의의 $\mathbb{R}^2$ 상의 벡터 $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ 는 두 벡터의 선형 결합으로 표현이 가능하다.

$\longrightarrow span(S) = \mathbb{R}^2$

② 집합 S는 선형 독립인가?

Prob $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 을 만족하는 유일한 해는 $c_1 = c_2 = 0$ 이어야 함.

→ 위의 결과에서 $\left( \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{3}x_1 \\ c_2 = \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{21}x_2 \end{array} \right.$ → 이때, $x_1 = x_2 = 0$ 이면 → $\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}$ 이 성립 ∴ 두 벡터는 선형독립.

$\longrightarrow$ ∴ set $S$ is a basis of $\mathbb{R}^2$

## * basis는 유일한가? no.

ex) 위의 예시에 이어, $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 일 때,

① $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

→ $c_1 = x_1$ & $c_2 = x_2$ → ∴ $span(T) = \mathbb{R}^2$

② $c_1 + 0 = x_1$ & $c_2 = x_2$ 에서

→ $c_1 = 0$ $c_2 = 0$ 가 유일해 → linearly independent.

→ 즉, 동일한 subspace 에 대해 여러개의 basis가 존재할 수 있다.

> * → 이때, T를 "standard basis" (표준 기저) 라 부르고
>
> T의 각 벡터를 standard basis vector (= 단위벡터 (unit vector)) 라 부른다.
> 표준 기저 벡터

## *. subspace 상의 임의의 벡터는, 특정 기저에 대해 유일하게 '만' 표현 가능하다.

pro) $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots \vec{v_n}\}$ 이 부분공간 $U$ 의 basis 일 때. $U$ 상의 임의의 벡터 $\vec{a}$ 에 대해

i) $\vec{a} = c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n}$ 임과 동시에, $\vec{a} = d_1\vec{v_1} + \cdots + d_n\vec{v_n}$ 이라면

$$
\begin{array}{rl}
\rightarrow & \vec{a} = c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n} \\
\ominus & \vec{a} = d_1\vec{v_1} + \cdots + d_n\vec{v_n} \\ \hline
 & 0 = (c_1 - d_1)\vec{v_1} + \cdots + (c_n - d_n)\vec{v_n} \quad - ①
\end{array}
$$

이때, 기저의 정의상 $\vec{v_1} \sim \vec{v_n}$ 은 선형 독립이어야 한다.

∴ ① 식을 만족하는 $(c_1 - d_1) \cdots (c_n - d_n) = 0$ 이어야 한다.

∴ $c_1 = d_1, \cdots, c_n = d_n$ 이외의 식은 성립할 수 없다.