04. 벡터의 내적과 외적

① 벡터의 내적과 벡터의 길이 Vector dot product & Vector length

cf) 내적 (inner product) = 점곱 (dot Product)

cf) 벡터의 연산.

1) Addition

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$

2) Scaler multiplication

$$c \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R}$$

* 벡터의 곱셈 방식
1) dot product
2) element - wise

* 내적 (Dot Product)

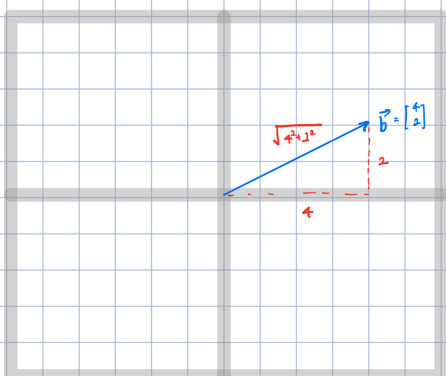
- 벡터의 내적 연산 결과는 임의의 실수 스칼라로 귀결된다.

ex) $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \Rightarrow \mathbb{R}$$ Scaler value!

* 벡터의 길이 (Length of vector)

* 벡터의 길이 (Norm)

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 일때, 벡터의 길이 : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$



* 벡터의 길이(Norm)와 내적(dot Product)의 관계

임의의 벡터 $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 이 존재할 때, 벡터 $\vec{a}$ 자신의 내적 $\vec{a} \cdot \vec{a}$ 는 $\vec{a} \circ \vec{a} = (a_1 \times a_1) + (a_2 \times a_2) + \cdots + (a_n \times a_n)$ 이다.

이때, $Norm(\vec{a}) = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ 이므로,

$\therefore$ $\|\vec{a}\| = \sqrt{a \circ a}$ or $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

② 벡터의 내적 성질 증명 Proving vector dot product properties

1) 벡터 내적의 교환법칙. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

$\mathbb{R}^n$ 벡터 공간 내의 임의의 두 벡터 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 과 $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ 이 존재할때,

① $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$

② $\vec{w} \cdot \vec{v} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n$ 으로 나타낼 수 있다.

→ 이때, 임의의 $v_i w_i$ $(1 \le i \le n)$ 에 대해, 실수 곱셈의 교환법칙(Commutative property)이 성립 하기 때문에

$\vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

$\therefore$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ 가 성립된다.

2) 벡터 내적의 분배법칙 $\vec{x}(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w})\vec{x} = (\vec{v}\vec{x} + \vec{w}\vec{x})$ 가 성립 하는가?

$\mathbb{R}^n$ 벡터 공간 내의 임의의 3개의 벡터, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 과 $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 이 존재할때,

$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$ 이며,

$(\vec{v} + \vec{w})\vec{x} = (v_1 + w_1)x_1 + (v_2 + w_2)x_2 + \cdots + (v_n + w_n)x_n$ 이 성립하며, $-①$

반면,

$\vec{v} \cdot \vec{x} = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n$

$\vec{w} \cdot \vec{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$ 이므로,

$\vec{v}\vec{x} + \vec{w}\vec{x} = (v_1 x_1 + w_1 x_1) + \cdots + (v_n x_n + w_n x_n)$

$= (v_1 + w_1)x_1 + \cdots + (v_n + w_n)x_n$ 이 성립한다. $-②$ 이는 식 ① 과 동일

$\therefore$ 분배법칙 성립.

3) 스칼라에 대한 결합 법칙 $(c\vec{v})\circ\vec{w} = c(\vec{v}\vec{w})$

$\mathbb{R}^n$ 벡터 공간 내의 임의의 두 벡터 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 과 $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ 이 존재할때, 임의의 상수 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해.

① $(c\vec{v}) = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix} \rightarrow (c\vec{v})\circ\vec{w} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = (cv_1)w_1 + (cv_2)w_2 + \cdots + (cv_n)w_n$

② $(\vec{v}\circ\vec{w}) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n \rightarrow c(\vec{v}\circ\vec{w}) = c(v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n)$

$= cv_1w_1 + cv_2w_2 + \cdots + cv_nw_n$

∴ 성립.

but, $(\vec{v}\cdot\vec{w})\circ\vec{z} \neq \vec{v}\cdot(\vec{w}\cdot\vec{z})$

$(\vec{v}\circ\vec{w}) = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n \longrightarrow (\vec{v}\circ\vec{w})\circ\vec{z} = (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n)z_1 + (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n)z_2 + \cdots + (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n)z_n$

$\vec{v}(\vec{w}\cdot\vec{z}) = (\vec{w}\cdot\vec{z})\cdot\vec{v}$

∴ $(\vec{w}\cdot\vec{z}) = w_1z_1 + w_2z_2 + \cdots + w_nz_n \longrightarrow (\vec{w}\circ\vec{z})\circ\vec{v} = (w_1z_1 + w_2z_2 + \cdots + w_nz_n)v_1 + (w_1z_1 + w_2z_2 + \cdots + w_nz_n)v_2 + \cdots + (w_1z_1 + w_2z_2 + \cdots + w_nz_n)v_n$

③ 코시-슈바르츠 부등식의 증명 Proof of the "Cauchy Schwarz Inequality"

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ 에 속하는 $\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$가 존재할 때,

$$\underbrace{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}_{\text{두 벡터 내적의 절댓값}} \le \underbrace{\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|}_{\text{두 벡터의 길이의 곱}}$$ 가 성립한다.

또, $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\times\|\vec{y}\| \Leftrightarrow \vec{x} = \underbrace{c}_{>0\ !!}\vec{y}$ 즉, 두 벡터가 선형 종속일 경우.

→ Cauchy Schwarz Inequality

Proof. 임의의 실수 $p(t) = \|t\vec{y} - \vec{x}\|^2$ 이 존재할 때,

$p(t) = \|\underbrace{t\vec{y}-\vec{x}}_{\text{임의의 벡터}}\|^2 \ge 0$ (why? → cf) $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}$ 항상 ≥ 0)

또, 임의의 벡터에 대해 $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$ 의 관계가 항상 성립.

∴ $p(t) = (t\vec{y}-\vec{x})\cdot(t\vec{y}-\vec{x})$ 이때, 벡터 내적에 대한 분배법칙이 성립하기 때문에,

$p(t) = t\vec{y}\cdot t\vec{y} + t\vec{y}(-\vec{x}) + (-\vec{x})\cdot(t\vec{y}) + (-\vec{x})(-\vec{x})$ 이때, 스칼라에 대한 결합 법칙이 성립.

$= \underbrace{(\vec{y}\cdot\vec{y})}_{=a>0}t^2 - \underbrace{2(\vec{x}\cdot\vec{y})}_{=b}t + \underbrace{(\vec{x}\cdot\vec{x})}_{=c}(\ge 0)$ 이때, $\vec{y}\cdot\vec{y} = a$ 로, $2(\vec{x}\cdot\vec{y}) = b$로 $(\vec{x}\cdot\vec{x}) = c$로 치환.

∴ $p(t) = at^2 - bt + c \ge 0$ 이때, $p(t)$는 모든 실수 t에 대해 $p(t) \ge 0$ 이 성립.

→ $t = \frac{b}{2a}$ (≥ 0) 을 대입: $p\left(\frac{b}{2a}\right) = a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - b\frac{b}{2a} + c \ge 0$

$$\therefore \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \ge 0$$

$$\frac{-b^2}{4a} + c \ge 0$$

$$c \ge \frac{b^2}{4a}$$

$$\therefore \vec{x}\cdot\vec{x} \ge \frac{(2\vec{x}\cdot\vec{y})^2}{4\,\vec{y}\cdot\vec{y}}$$

$$4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \ge 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2$$

$\|x\|^2\|y\|^2 \ge (\vec{x}\cdot\vec{y})^2$ 이때, 양변에 제곱근을 씌우면 (원래 $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 음수도 가능)

$$\|x\|\cdot\|y\| \ge |\vec{x}\cdot\vec{y}|$$

코시-슈바르츠 부등식

pf) $\|x\|\,\|y\| \ge |\vec{x}\cdot\vec{y}|$ 에서, 만약, $\vec{x} = c\vec{y}$ 라면

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |(c\vec{y})\cdot\vec{y}|$

$= |c|\cdot|\vec{y}\cdot\vec{y}|$

$= |c|\cdot\|\vec{y}\|^2 = |c|\,\|\vec{y}\|\,\|\vec{y}\|$

$= \underbrace{\|cy\|}_{\vec{x}} \times \|y\|$

$= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

+) $|c|\,\|y\| = \|cy\|$?

① $\|\vec{y}\| = \sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2} \Rightarrow |c|\,\|\vec{y}\| = |c|\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$

② $\|cy\| = \sqrt{(cy_1)^2+\cdots+(cy_n)^2} = \sqrt{c^2y_1^2+\cdots+c^2y_n^2}$

$= \sqrt{c^2(y_1^2+\cdots+y_n^2)}$

$= |c|\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$

$= |c|\,\|y\|$

4 triangle inequality of vector. 벡터의 삼각 부등식.

$\mathbb{R}^n$ 상의 임의의 영이 아닌 두 벡터 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ 가 존재할 때,

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|x\| + \|y\|$ 이 성립한다.

$\mathbb{R}^n$ 상의 임의의 영이 아닌 두 벡터 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ 가 존재할 때,

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \cdot (\vec{x}+\vec{y})$

(분배법칙) $= \vec{x}\cdot(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{y}\cdot(\vec{x}+\vec{y})$

$= \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$

$= \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$

이때, $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 음수일 수도 있기 때문에, $\vec{x}\cdot\vec{y} \le |\vec{x}\cdot\vec{y}|$ 이 성립한다.

→ 코시-슈바르츠 부등식에 의거, $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$

$\therefore \vec{x}\cdot\vec{y} \le |\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$

$\therefore \vec{x}\cdot\vec{y} \le \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$ 가 성립.

$= \|x\|^2 + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2$

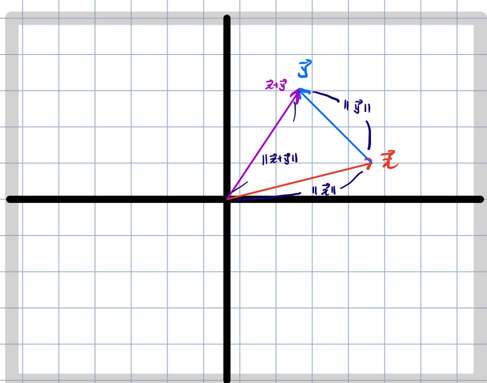
모두 스칼라.

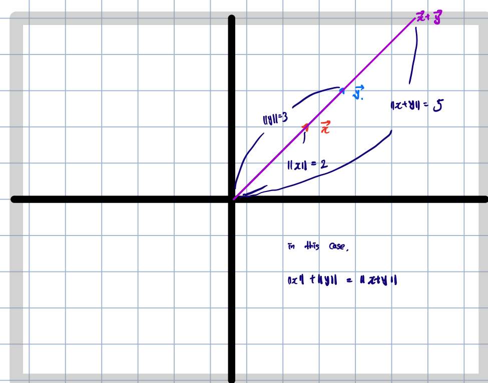
즉, $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2$

→ $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$

→ 양변에 제곱근.

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ → triangle inequality





다만, $\vec{x}$와 $\vec{y}$가 선형 종속 관계일 때,

즉, $\vec{x} = c\vec{y}$ $(c>0)$ 인 경우.

$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y)$

$= \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|y\|^2$

$= \|c\vec{y}\|^2 + 2c\|y\| + \|y\|^2$

$= c^2\|y\|^2 + 2c\|y\| + \|y\|^2$

$= (c\|y\| + \|y\|)^2$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$

$\therefore \|x+y\| = (\|x\| + \|y\|)$

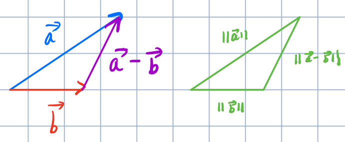
⑤ 벡터 사이의 각도 정의하기 Defining the angle between vectors.

cf) Norm : $\|\vec{v}\|$: length of vector → A scalar value.

· $\mathbb{R}^n$ 평면상의 $\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 존재할 때,

즉, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, non-zero 일 때,

"한 벡터의 길이는 항상 다른 두 벡터의 길이의 합보다 작아야 한다"



즉,
$$\|\vec{a}\| > \|\vec{b}\| + \|\vec{a}-\vec{b}\|$$
$$\|\vec{b}\| > \|\vec{a}\| + \|\vec{a}-\vec{b}\|$$
$$\|\vec{a}-\vec{b}\| > \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$
는 항상 성립할 수 없다.

Prof. 삼각 부등식에 의거, 임의의 두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$에 대해,

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ 가 항상 성립한다.

$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}\|$ 로 다시쓸 수 있다.

이는 삼각 부등식에 의거,

$\|(\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\| \le \|\vec{b}\| + \|\vec{a}-\vec{b}\|$ 로 표현 할 수 있다.

즉, $\|\vec{a}\| \le \|\vec{b}\| + \|\vec{a}-\vec{b}\|$

반복해서,

$\|b\| = \|(\vec{a})+(\vec{b}-\vec{a})\| \le \|a\| + \underbrace{\|\vec{b}-\vec{a}\|}_{=\|\vec{a}-\vec{b}\|}$

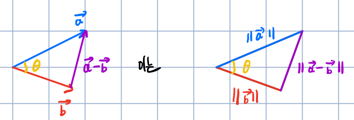
$(\vec{b}-\vec{a}) = -1(\vec{a}-\vec{b})$
방향은 다르지만, 크기는 같다.
$\therefore \|\vec{b}-\vec{a}\| = \|-1(\vec{a}-\vec{b})\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$

$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}+(-\vec{b})\| \le \|\vec{a}\| + \|(-\vec{b})\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

* 두 벡터 사이의 각 θ 구하기.

$\mathbb{R}^n$ 평면 상의 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 존재할 때,

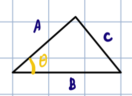
→ 우리는 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ 를 통해 삼각형을 정의할 수 있다.



로 다시 표현 가능하다.

→ 이는 Law of Cosines 에 따라

cf) 코사인의 법칙



모든 삼각형에 대해
$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ 가 성립한다.

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \times \cos(\theta)$가 성립한다.

이는, 내적과 길이의 관계로 인해.

$(\vec{a}-\vec{b})\circ(\vec{a}-\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \times \cos(\theta)$

$\vec{a}\circ\vec{a} - 2(\vec{a}\circ\vec{b}) + (\vec{b}\circ\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \times \cos(\theta)$

$\cancel{\|\vec{a}\|^2} - \cancel{2}(\vec{a}\circ\vec{b}) + \cancel{\|\vec{b}\|^2} = \cancel{\|\vec{a}\|^2} + \cancel{\|\vec{b}\|^2} - \cancel{2}\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \times \cos(\theta)$

양 변을 정리하면.

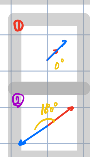
→ ∴ $\vec{a}\circ\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\theta)$ — θ is the angle between them.

+) 만약, 두 벡터가 선형 종속 관계인 경우,

즉, $\vec{a} = c\vec{b}$

① $(c > 0) \rightarrow \theta = 0°$

② $(c < 0) \Rightarrow \theta = 180°$



def "Perpendicular" 수직

$\mathbb{R}^n$상의 $\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 사이의 각 θ가 $90°$ 라면

→ those two vectors are perpendicular.

✡ 두 벡터 사이의 각이 90°이다?

위의 증명된 식에서,

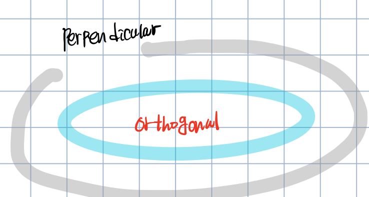
$\vec{a}\circ\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos 90°$ 이때 $\cos 90 = 0$

∴ $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$ 두 벡터의 내적이 0이된다!

* 일반화 명제

$\vec{a}, \vec{b}$ is perpendicular $\Rightarrow$ $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ is perpendicular $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$ & $\vec{a}, \vec{b}$ is non-zero



+) "orthogonal" 직교 : 두 벡터의 내적이 0인 경우

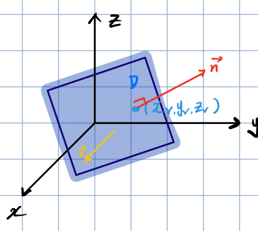
t) $\vec{a}\circ\vec{b} = 0 \Rightarrow$ "orthogonal"

zero vector orthogonal to everything-else, even itselves!

$\vec{0}\cdot\vec{a}\ \perp$
$\vec{0}\cdot\vec{0}\ \perp$

⑥ 점과 법선벡터를 이용하여 $\mathbb{R}^3$상에서 평면 정의하기.

* Equation of Plane in $\mathbb{R}^3$



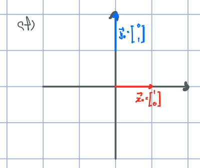
* 임의의 $\mathbb{R}^3$ 공간 상의 평면 D에 대하여,
  D 상의 모든 점은 $Ax + By + Cz = D$를 만족한다. (면의 방정식.)

$\vec{n}$: "normal" vector (법선 벡터)
↳ 주어진 객체에 수직인 선.. 벡터와 같은 객체

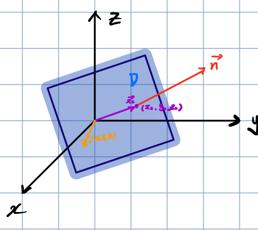
perpendicular to 'everything' on the plane.

∴ 평면 D 상에 위치한 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대해,

$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ 이 항상 성립된다.

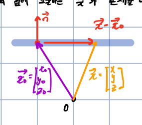


* 평면 정의하기.



· 원점에서 평면과 법선 벡터의 교점에 이르는 위치벡터 $\vec{x}_0$와
평면상의 임의의 점에 도달하는 $\vec{x}$가 존재할 때,

→ 즉,



일때, $\vec{x} - \vec{x}_0$는 평면상에 위치한 하나의 벡터를 정의한다.

∴ $(\vec{x} - \vec{x}_0)$ perpendicular to $\vec{n}$ (normal vector)

즉, $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0$

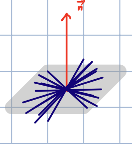
$\Rightarrow n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$ 가 성립된다.

· 이는 $Ax + By + Cz = D$ 즉, $\mathbb{R}^3$상의 보편적인 면 D에 대한 방정식 형태.

ex) 법선 벡터 $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$가 존재하고, 면의 교차하는 임의의 벡터 $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$이 존재할 때,
평면 상 임의의 점 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$에 대하여

sol) $(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{bmatrix}$은 평면 상에 놓여 있다 ─①

이때, 평면상의 모든 벡터는 법선 벡터 $\vec{n}$에 수직이다 ─②



∴ $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{bmatrix} = 1(x-1) + 3(y-2) - 2(z-3) = 0$

∴ $x + 3y - 2z + 1 - 6 + 6 = 0$

∴ $x + 3y - 2z = -1$ ⟶ 즉, 평면상의 한 점과 법선 벡터를 알면 → 우리는 평면을 정의할 수 있다.

⑦ 벡터의 외적이란? (cross product introduction)

+) Inner Product : 임의의 $\mathbb{R}^n$에 대해, $\mathbb{R}^n$상에 존재하는 모든 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대해 정의가능 → 결과 : Scalar

Cross Product : * only defined in $\mathbb{R}^3$ * → 결과: 외적을 취하는 두 벡터 모두에게 "orthogonal"한 벡터

* 외적 공식.

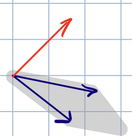
$\mathbb{R}^3$ 평면상의 두 벡터 $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 가 존재할 때,

Cross Product : $\vec{a} \times \vec{b}$ $= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \ominus(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

ex) $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-7)4 - 2 \\ 5 - 4 \\ 2 - (-7)5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 1 \\ 37 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3$상 임의의 두 벡터는, 하나의 (면)을 생성한다.



이때, 외적은 해당 공간에 orthogonal 한 벡터를 생성한다.

* 외적과 직교

ex) 두벡터가 orthogonal 하면 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이다.

⇒ ∴ $(\vec{a} \times \vec{b})$ 의 결과 $\begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$ 에 대해서 ⇒ $\begin{cases} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$ 이 항상 성립.

Proof) Ⅰ. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \cancel{a_2} b_3 - a_1 \cancel{a_3} b_2 + a_2 \cancel{a_3} b_1 - a_2 \cancel{a_1} b_3 + a_3 \cancel{a_1} b_2 - a_3 \cancel{a_2} b_1$

$= 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_1 \cancel{a_2} b_3 - b_1 \cancel{a_3} b_2 + b_2 \cancel{a_3} b_1 - b_2 \cancel{a_1} b_3 + b_3 \cancel{a_1} b_2 - b_3 \cancel{a_2} b_1$

$= 0$

증명 proof. 외적과 - 각의 사인값 사이의 관계 (proof : Relationship between cross product and sin of angle

참) 벡터의 내적과 $\cos\theta$ 의 관계식

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

* 외적과 angle의 관계는?

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin(\theta)$$

참) Cross-product

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

proof)

① $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{a}\times\vec{b})$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \oplus (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \oplus (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

참) $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}\circ\vec{x} = x_1^2+\cdots+x_n^2$

$= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 \oplus a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2 \oplus a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2$

$= a_1^2(b_2^2+b_3^2) + a_2^2(b_1^2+b_3^2) + a_3^2(b_1^2+b_2^2) - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2)$

② $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta = \vec{a}\circ\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 에서, 양변에 제곱.

$\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta = (\vec{a}\circ\vec{b})^2 = (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$

$= a_1^2b_1^2 + a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3$

$\oplus\ a_2^2b_2^2 + a_1a_2b_1b_2 \quad + a_2a_3b_2b_3$

$\oplus\ a_3^2b_3^2 + \quad a_1a_3b_1b_3 \quad + a_2a_3b_2b_3$

소거

$= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^3 + a_3^2b_3^2 + 2(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3)$

---

①+② : $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta = a_1^2(b_2^2+b_3^2) + a_2^2(b_1^2+b_3^2) + a_3^2(b_1^2+b_2^2) \oplus a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^3 + a_3^2b_3^2$

$= a_1^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2) + a_2^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2) + a_3^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$= (b_1^2+b_2^2+b_3^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$

$= \|\vec{b}\|^2\,\|\vec{a}\|^2$

즉, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta = \|\vec{b}\|^2\,\|\vec{a}\|^2$

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1-\cos^2\theta)$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta)^2$

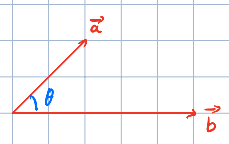
$\therefore \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$

⑨ 내적과 외적의 비교(직관) Dot product & cross product Comparison / institution

* 내적의 기하학적 의미

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \neq \vec{0}$ 에 대해,

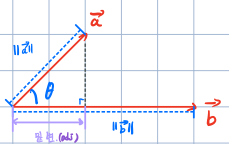
$\Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$



$\therefore \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \cos\theta$

$\theta = \underbrace{\arccos}_{= \cos^{-1}} \left(\dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$ 을 통해, 즉각적으로 두 벡터간의 각도를 즉각적으로 파악 가능하다.

* 기하학적 직관을 길러보자.



$\dfrac{adj}{\|\vec{a}\|} = \cos\theta$

$\therefore adj = \|\vec{a}\| \cos\theta$

$\|\vec{b}\| \underline{\|\vec{a}\| \cos\theta} = \|\vec{b}\| \times adj$

$= adj$

$\therefore \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos\theta = \|\vec{b}\| \, \underline{adj}$

↳ 벡터 $\vec{a}$의 $\vec{b}$에 대한 투사영.
즉, $\vec{a}$가 $\vec{b}$ 방향으로 얼마나 많이 움직이는가.

즉, 두 벡터가 서로 더 작은 각을 가질수록,
→ (같은 방향으로 움직일 수록)

⇒ 두 벡터의 내적 값은 커진다.

dot product is "product of "length" of two vecter that move to the "same" direction."

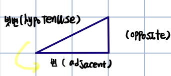
if) two vectors are perpendicular

$\Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

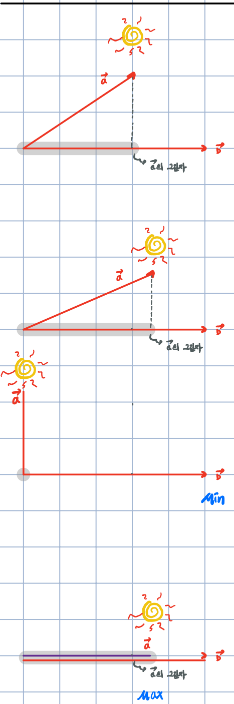
cf) 삼각 함수 기초 中

soh cah toa

↳ $\cos\theta = \dfrac{\text{adjacent (변)}}{\text{hypotenuse (빗변)}}$



cf) 정사영의 기본 컨셉 Basic cocept of Projection



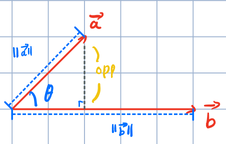
직관적으로, 두 벡터가 얼마나 같은 방향으로 향하는지 나타냄.

$\cos 0° = 1 \rightarrow$ 최대.

* 외적의 기하학적 의미

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \neq \vec{0}$ 에 대해,

$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta$



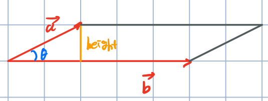
$\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \underline{\sin\theta} = \|\vec{b}\|$ opp

$\dfrac{\text{opp}}{\|\vec{a}\|}$

→ 즉, 두 벡터가 얼마나 수직인지를 나타낸다.

* 외적의 또다른 의미

$\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 평행사변형 (Parallelogram) 의 넓이?



$\text{Area}_p = \|\vec{b}\| \times \text{height}$

→ 삼각함수 공식에 의거,

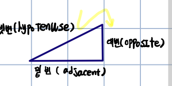
$\sin\theta = \dfrac{\text{height}}{\|\vec{a}\|}$

$\text{height} = \|\vec{a}\| \times \sin\theta$

$\therefore \text{Area}_p = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

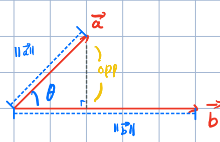
---

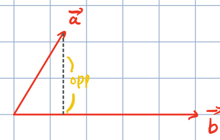
cf) 삼각 함수 기초 中

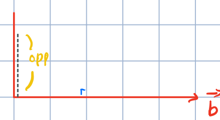


soh cah toa

→ $\sin\theta = \dfrac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse (빗변)}}$







$\sin 90 = 1$ → 최대.

즉, 두 벡터가 수직일수록
대변의 길이가 길어진다.

⑩ 벡터의 삼중적 (확장) vector triple product expansion

→ 벡터의 삼중곱전개 or 라그랑주 공식

↳ 세 벡터의 외적을 세 벡터의 내적의 선형 결합으로 표현.

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \underline{\qquad\qquad\qquad}}$$

① $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{bmatrix} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

② $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{bmatrix}$ ⊜ (전개식) $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \hat{i}(b_y c_z - b_z c_y) \ominus \hat{j}(b_y c_z - b_z c_x) \oplus \hat{k}(b_x c_y - b_y c_x)$

$= \hat{i}(b_y c_z - b_z c_y) + \hat{j}(b_z c_x - b_x c_z) + \hat{k}(b_x c_y - b_y c_z)$

⇒ ①×②: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ (b_y c_z - b_z c_y) & (b_z c_x - b_x c_z) & (b_x c_y - b_y c_x) \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z) - \hat{j}(a_x b_x c_y - a_x b_y c_x - a_z b_y c_z + a_z b_z c_y) + \hat{k}(a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y)$

$= \hat{i}(a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x) + \hat{j}(a_x b_y c_x - a_x b_x c_y + a_z b_y c_z - a_z b_z c_y + a_y b_y c_y - a_y b_y c_y) + \hat{k}(a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y + a_z b_z c_z - a_z b_z c_z)$

$= \Big(b_x\underbrace{(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)}_{=\vec{a}\circ\vec{c}} - c_x\underbrace{(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)}_{\vec{a}\circ\vec{b}}\Big)\hat{i} + \Big(b_y\underbrace{(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)}_{=\vec{a}\circ\vec{c}} - c_y\underbrace{(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)}_{\vec{a}\circ\vec{b}}\Big)\hat{j} \oplus \Big(b_z\underbrace{(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)}_{=\vec{a}\circ\vec{c}} - c_z\underbrace{(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)}_{\vec{a}\circ\vec{b}}\Big)\hat{k}$

$= \big((\vec{a}\circ\vec{c})\,b_x - (\vec{a}\circ\vec{b})\,c_x\big)\hat{i}$

$\oplus \big((\vec{a}\circ\vec{c})\,b_x - (\vec{a}\circ\vec{b})\,c_x\big)\hat{j}$

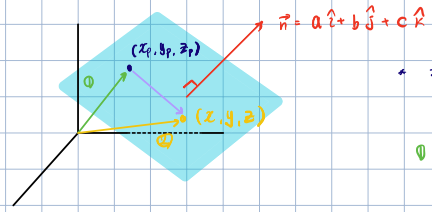
$\oplus \big((\vec{a}\circ\vec{c})\,b_x - (\vec{a}\circ\vec{b})\,c_x\big)\hat{k}$

$$= \boxed{(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c}}$$

⑪ 평면 방정식의 법선 벡터 Normal vector from plane equation

Q. 평면 방정식이 주어졌을 때, 평면에 수직인 벡터를 구하시오.

sol) ※) 평면 위의 한 점과 법선 벡터를 통해 평면 정의하기.



* 평면 상의 한 점 (x_p, y_p, z_p)와 평면의 법선벡터 $\vec{n}$이 주어졌을 때, 평면 방정식 도출

① 원점으로 부터 점 p로 향하는 벡터 정의.

$$\vec{p_1} = x_p\hat{i} + y_p\hat{j} + z_p\hat{k}$$

② 평면상의 임의의 점 (x, y, z) 에 대한 벡터 $\vec{p}$ 가정.

$$\vec{p} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

③ 평면상에서 이동하는 벡터 $\vec{p} - \vec{p_1}$

$$\vec{p} - \vec{p_1} = (x - x_p)\hat{i} + (y - y_p)\hat{j} + (z - z_p)\hat{k}$$

④ 법선 벡터는 평면 위 모든 벡터와 수직

$$\therefore \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{p_1}) = 0 = ax - ax_p + by - by_p + cz - cz_p$$

$$\rightarrow ax + by + cz = ax_p + by_p + cz_p$$

즉, $ax + by + cz = D$

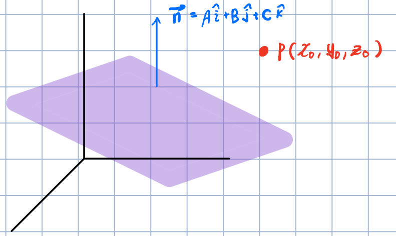
✦ 이때, 평면 방정식의 계수는 법선 벡터의 각 성분과 정확히 일치한다!

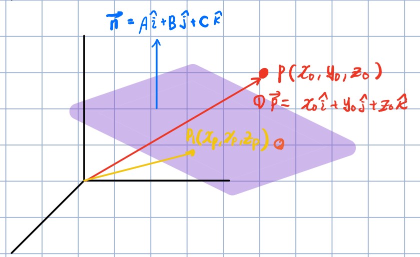
⇒ ∴ ex) $7x + \sqrt{2}y + 15z = x$ 에 대한 법선 벡터는

$$\Rightarrow \vec{n} = 7\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} + 15\hat{k}$$

⑫ 점과 평면사이의 거리 point distance to plane

Q. 평면 외부의 점 $P(x_0, y_0, z_0)$ 와 평면 $D = Ax + By + Cz$ 사이의 거리는?



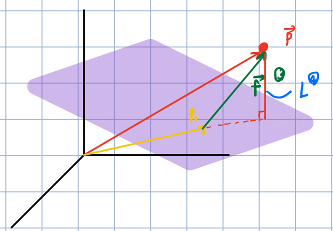


① 점 P는 위치 벡터의 결합

$\vec{p} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ 로 표현할 수 있다.

② 또한, 평면 위의 임의 $P_1(x_p, y_p, z_p)$ 에 대해,

$\vec{P_1} = x_p\hat{i} + y_p\hat{j} + z_p\hat{k}$ 로 표현 할 수 있다.

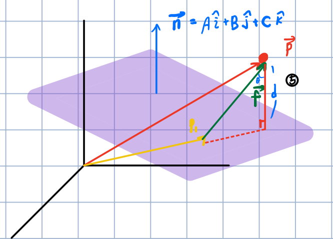


③ 그렇다면, 평면 상의 점 P_1 에서, 평면 외부에 선 점 $P(x_0, y_0, z_0)$ 까지의 거리는

$\vec{p} - \vec{P_1} = \vec{f} = (x_0 - x_p)\hat{i} + (y_0 - y_p)\hat{j} + (z_0 - z_p)\hat{k}$ 가 될 것이다.

but, 이는 평면과 점의 최단거리가 아니다.

④ 보통, 거리라 함은 최단거리를 의미하므로, 평면과 점 $\vec{P}$ 사이의 거리는 평면과 점의 수선인 직선 L 이 될 것이다.



⑤ 직선 L의 길이, 즉 d는,

$\cos\theta = \dfrac{d}{|\vec{f}|}$ 에서

$\Rightarrow d = |\vec{f}|\cos\theta$ 로 구할 수 있다.

$\vec{a}, \vec{b} \in R^n, \neq \vec{0}$ 에 대해,

$\Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$

⑥ 이때, 법선 벡터의 길이를 곱하고 나누면,

$$d = \frac{|\vec{n}||\vec{f}|\cos\theta}{|\vec{n}|}$$

이때의 분모가 법선과 수선의 내적임을 확인 할 수 있다.

$$\therefore = \frac{Ax_0 - Ax_p + By_0 - By_p + Cy_0 - Cy_p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - \boxed{(Ax_p + By_p + Cz_p)}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ ⑦

이때, ⑦ 이 법선과 평면 방정식 사이 관계이며

⑦ $\vec{n} \circ (\vec{p} - \vec{P_1}) = 0 = ax - ax_p + by - by_p + cz - cz_p$

$\rightarrow ax + by + cz = ax_p + by_p + cz_p$

즉, $ax + by + cz = D$

$$\therefore = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ 가 성립한다.

ex) 평면 $D: x-2y+3z=5$와 점 $P:(2,3,1)$ 사이의 최단거리?

$$\vec{n} = 1\cdot\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \frac{1\cdot 2+(-2)\cdot 3+3\cdot 1-5}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{-6}{\sqrt{14}}$$

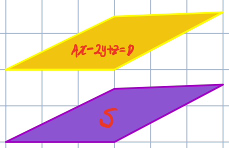
⑬ 평면 사이의 거리 Distance between Planes

Q. 평면 $Ax - 2y + z = D$ 와

두 선, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ (1) and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ (2) 를 포함하는 평면 S

사이의 거리가 $\sqrt{6}$ 일때, $|D|$ 의 값을 구하시오.

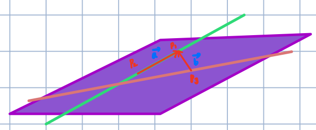
Sol)



① 두 평면 사이의 거리가 존재하기 위해, 두 평면은 평행 관계에 있어야 한다.

⇒ (단 Not, 두 평면 사이의 거리 = 0)

또한, 두 평면이 평행관계라면 → 두 평면 방정식의 비가 일정해야 한다.



② 평면 S 위의 두 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ (1) and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ (2) 에서,

평면 상의 점을 도출 하면,

(1) ⇒ $(1, 2, 3)$ — P_1

$(3, 5, 7)$ — P_2

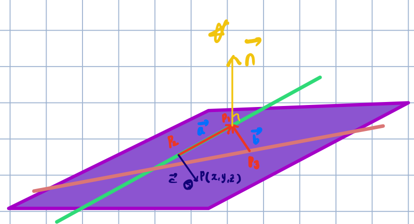
(2) ⇒ $(2, 3, 4)$ — P_3

$(5, 7, 9)$ — P_4

③ 이때, 평면 상의 점을 이용해, 평면 S상에 두 벡터를 구하면

$\vec{a} = (\vec{P_1} - \vec{P_2}) = -2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{b} = (\vec{P_1} - \vec{P_3}) = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$



④ 우리는, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적을 통해 평면에 perpendicular 한 벡터를 도출할 수 있다.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = ((-3)(-1) - (-1)(-4))i - ((-2)(-1) - (-1)(-4))j + ((-2)(-1) - (-1)(-3))k$$

$$= -i + 2j - k$$

⑤ 또, 점 P_2에서 평면 S상의 임의의 점 $P(x, y, z)$ 로 향하는 벡터 $\vec{c}$와 수직인 벡터 $\vec{n}$ 의 내적을 통해,

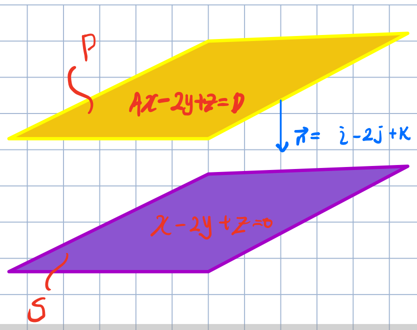
평면 S을 정의할 수 있다.

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = ((x-3)i + (y-5)j + (z-7)k) \cdot \vec{n} = 0$$

$$= ((x-3)i + (y-5)j + (z-7)k) \cdot (-i + 2j - k)$$

$$= -x + 3 + 2y - 10 - z + 7$$

$\therefore$ $S: -x + 2y - z = 0 \Rightarrow = x - 2y + z = 0$

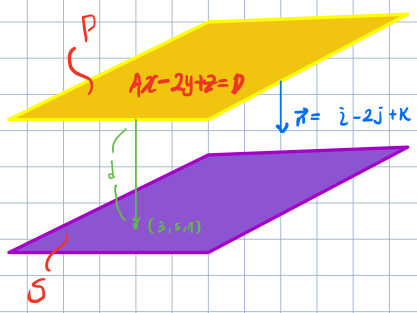


⑥ 평면 P와 S는 평행 관계이기 때문에,

두 평면의 각 계수의 비율은 동일해야 한다

$\therefore\ A = 1$

⑦ 따라서, 평면 P의 법선 벡터 $\vec{n}_p = i - 2j + K$ 가 성립한다.



⑧ 따라서, 평면 S위의 한 점 (3, 5, 7)과

평면 P 사이의 거리는

$$\text{distance} = \frac{(1\times3)+[(-2)\times5]+(1\times7) - D}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$= \frac{-D}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore\ \frac{-D}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$D = -6$$

$$\therefore\ |D| = 6$$