* Matrix : to solve system of Equation

- ① 행 사다리꼴 행렬을 이용하여 3차 연립방정식과 4개의 변수 풀기
- ② 행렬을 이용하여 선형계 풀기
- ③ 행 사다리꼴을 이용하여 선형계는 해가 없음을 증명하기

① 행 사다리꼴 (RREF, Reduced Row Echelon Form) 행렬

Q. 4개의 미지수를 포함하는 3개의 연립 방정식 문제 → 제약 조건이 없다면? → 무수한 해를 갖는다.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

→ 이를 행렬의 형태로 변환시키면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

→ 이는 첨가행렬(Augmented matrix)로 표현 가능하다.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

→ ★ 이를, 기약행 사다리꼴 행렬 (RREF, Reduced Row Enchelon Form)로 변환하면

여기서 잠깐!

행 사다리꼴 행렬 (Row enchelon form Matrix)

조건 ① 0행(모든 원소가 0인 행)이 아닌 행의, 처음으로 등장하는 0이 아닌 숫자가 1임. 이를 선행1이라함

② 0행이 존재할 경우, 이들 0행은 행렬의 바닥에 몰려 있음

③ 0행이 아닌 서로 연속된 위·아래 행에서, 아래행의 선행 1은 윗행의 선행 1보다 오른쪽에 위치

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (o) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (x) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (x)

기약 행 사다리꼴 행렬 (Reduced row enchelon form)

조건 ① 0행(모든 원소가 0인 행)이 아닌 행의, 처음으로 등장하는 0이 아닌 숫자가 1임. 이를 선행1이라함

② 0행이 존재할 경우, 이들 0행은 행렬의 바닥에 몰려 있음

③ 0행이 아닌 서로 연속된 위·아래 행에서, 아래행의 선행 1은 윗행의 선행 1보다 오른쪽에 위치

④ 선행 1이 속한 열의 → 나머지 성분은 모두 0이어야 함.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (o) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (x)

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 - r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pivot entry : 피봇성분 - 각 열에서 0이 아닌 유일한 성분.

$$\therefore \operatorname{rref}(A) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

zeroed out row

→ 이를 다시 연립 방정식으로 나타내면,

Free variables - 피봇 변수와 관련이 없는 변수들

$$x_1 + 2x_2 + \quad + 3x_4 = 2$$
$$x_3 - 2x_4 = 5$$

Pivot entry

→ Pivot variables

→ 피봇 변수에 대해 풀어주면,

$x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_4$

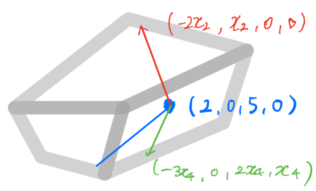
$x_3 = 5 \quad + 2x_4$

에 속하는 모든 결과에 해가 된다.

→ 벡터의 결합으로 나타내면,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

즉, 해가 존재할 수 있는 해공간은 하나의 표현식이 된다.



기약 행 사다리꼴 행렬이 중요한 이유.

① 모든 행렬은 고유한 형태의 기약행사다리꼴 행렬을 갖는다.

(↔ 반면, 하나의 행렬에 대해 여러개의 행사다리꼴 형태를 가질 수 있다)

② 어떤 정방행렬의 기약행 사다리꼴 행렬은 → 단위행렬 이거나 or 0행을 갖는다.

→ 이는 추후 특이행렬 판별여부에 사용(0행이 존재하면 → 역행렬 존재 X = 특이행렬)

② 행렬을 이용하여 선형계 (선형 연립 방정식, Linear Equation System) 풀기

Q. 3개의 변수를 갖는 3개의 연립 방정식 풀이.

$$
\begin{cases}
x + y + z = 3 \\
x + 2y + 3z = 0 \\
x + 3y + 4z = -2
\end{cases}
$$

① Augment Matrix.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right]
$$

② Make RREF

$$
A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 - R_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - R_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{R_1 - R_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - 2R_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{-R_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_1 + R_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 - 2R_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]
$$

③ Answer

$$
\begin{aligned}
x &= 5 \\
y &= -1 \\
z &= 1
\end{aligned}
$$

③ 선형계의 해 존재 여부 판별

Q. 4개의 미지수와 3개의 방정식이 존재할 경우의 해 → n of variable > n of equation 의 경우 : 다수의 해가 존재하거나 해가 존재하지 않는다.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

① Augment Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

② RREF

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right]$$

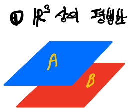
$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = RREF(A)$$

→ 이때, 3번째 행에서, $0 = -4$: 해가 존재하지 않는다

+

Why $0 = a \ (a \in R)$ 가 해가 없는 경우를 의미하는 이유

① R^3 상의 평행한 두 평면 A와 B는 서로 평행하다.



② 이때, 두평면의 교점이 존재하지 않기 때문에 → 해가 존재하지 않는다.

③ 이를 연립 방정식의 형태로 나타내면,

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = a & - 식(1) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = b & - 식(2) \end{cases}$$

④ 이때, 식(1)과 식(2)를 연립하면

$$\begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma z = a \quad - 식(1) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = b \quad - 식(2) \\ \hline 0 = a-b \ (a-b \in R) \end{array}$$

이 도출된다.

∴ $0 = a \ (a \in R)$은 해가 없는 경우를 나타낸다.

+ RREF의 형태별 해의 존재 유무.

① $0 = a$ → No Solution

② $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$ → unique Solution

③ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right]$ → Non - unique Solution

→ free entry가 존재하는 경우