

Л.Клейнрон

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ

СИСТЕМЫ

С ОЧЕРЕДЯМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР



QUEUEING SYSTEMS

VOLUME II: COMPUTER APPLICATIONS

Leonard Kleinrock

Professor

Computer Science Department
School of Engineering and Applied Science
University of California, Los Angeles

A Wiley-Interscience Publication
John Wiley & Sons
New York·London·Sydney·Toronto

Л. Клейнрок

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
СИСТЕМЫ
С ОЧЕРЕДЯМИ**

Перевод с английского
под редакцией

д-ра техн. наук
Б. С. Цыбакова

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1979**

Книга является переводом второго тома монографии по системам массового обслуживания (перевод первого тома выходит в издательстве «Машиностроение» в 1979 г.). Она посвящена приложениям теории очередей к задачам, которые возникают в вычислительных системах. Рассматриваются системы с разделением времени и множественным доступом, сети ЭВМ с коммутацией пакетов и случайным доступом. Для этих систем строятся математические модели и на основе методов теории массового обслуживания исследуются их производительность, время ответа и эффективность использования. Значительное внимание уделено представлению и качественному анализу экспериментального материала, накопленного более чем за пять лет работы сети ARPANET.

Рассчитана на инженеров и математиков, занимающихся вопросами теории массового обслуживания, специалистов по вычислительной технике и технике связи.

Редакция литературы по новой технике

© 1976 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved. Authorized translation from English language edition, published by John Wiley & Sons, Inc.

1502000000

К 31102—147
041(01)—79 147—79

© Перевод на русский язык, «Мир», 1979

Предисловие редактора перевода

На начальном этапе развития вычислительной техники считали, что быстродействие и производительность ЭВМ всецело определяются быстродействием отдельных ее элементов. Однако очень скоро стало ясно, что в конечном итоге производительность и эффективность ЭВМ существенно зависят от целого ряда, казалось бы, побочных факторов, таких, как дисциплина обслуживания заданий, близость терминалов к потребителям, наличие и доступность необходимого математического обеспечения и массивов данных, а также от многих других подобных факторов, которые в широком смысле определяют организацию и средства использования ЭВМ.

Предлагаемая читателю книга известного американского ученого Клейнрока посвящена теоретическому анализу задач организации использования ЭВМ. Подбор рассматриваемых задач, их идеализация и трактовка выполнены так, чтобы они поддавались решению с помощью математического аппарата теории массового обслуживания. Книга представляет собой второй том двухтомного труда автора по системам массового обслуживания. Первый том, перевод которого выходит в свет в издательстве «Машиностроение» в 1979 г., содержит общую теорию систем массового обслуживания.

Монография по существу распадается на две части. Первая часть (гл. 1—4) содержит наиболее разработанные в математическом отношении задачи обслуживания очередей. Наибольший интерес для практики представляют такие вопросы, как приоритетное обслуживание, обслуживание в режиме разделения времени, организация множественного доступа, модели мультипрограммирования. Значительная часть представленных здесь результатов связана с работами автора книги. К ним, в частности, относятся законы сохранения, модели коллективного использования ЭВМ, различные обобщения дисциплин обслуживания заданий для ЭВМ.

Вторая часть книги посвящена рассмотрению сетей ЭВМ. Сети представляют собой сложные системы массового обслуживания со множеством «обслуживающих приборов» (каналов, связных процессоров, ЭВМ) и пользователей. Возникающие в сетях задачи не поддаются прямому решению с помощью известных методов

теории массового обслуживания. Основная причина здесь состоит в том, что между потоками перемещающихся в сети требований (сообщений) существуют статистические зависимости. Чтобы обойти эти трудности, при теоретическом рассмотрении сетей в гл. 5 автор вводит так называемое предположение о независимости, которое, существенно огрубляя модель, позволяет получить явные аналитические выражения одного из основных параметров сети — среднего времени передачи сообщения. Наряду с вероятностными методами для задач выбора топологии, распределения потоков и выбора пропускных способностей каналов сети в книге используются методы теории графов и линейного программирования. Значительный интерес представляют разделы книги, относящиеся к сети ARPANET. На богатом экспериментальном материале показывается, как развивались и модифицировались в этой сети процедуры выбора маршрутов и управления потоками. Автор как бы вводит читателя в самый центр проблем сети ARPANET и демонстрирует принятые в США методы их решения. Два раздела (5.11 и 5.12) посвящены рассмотрению радиосетей и сетей, использующих спутниковый канал со случайным множественным доступом. Результаты этих разделов нашли важные практические применения в сети ALOHA и радиосетях с мобильными терминалами и коммутацией пакетов.

Книга Клейнрока достаточно полно отражает полученные до 1976 г. результаты, относящиеся к применению теории массового обслуживания к вычислительным системам и сетям ЭВМ. Она ясно и просто написана. При теоретическом анализе автор придерживается инженерного уровня строгости. Изложение в ряде разделов носит обзорный характер, и за деталями интересующийся читатель отсыпается к специальной литературе. При подготовке перевода были исправлены некоторые имеющиеся в оригинале опечатки, список которых любезно предоставил Клейнрок.

Книга представляет несомненный интерес для широкого круга специалистов по вычислительной технике и технике связи, желающих ознакомиться с новыми моделями и приложениями теории массового обслуживания.

Перевод выполнен д-ром техн. наук В. И. Нейманом (гл. 1—4) и д-ром техн. наук Б. С. Цыбаковым (гл. 5, 6).

Б. С. Цыбаков

Подобно тому как золото, которое нельзя тратить, никого не делает богатым, знания, которые нельзя применять, никого не делают мудрым.

Самуил Джонсон, «Айдлер», № 84

Посвящается Стелле

Предисловие

Недавно я совершил ошибку, решив лететь через всю страну на самолете «Боинг-747». Как исследователь систем массового обслуживания (СМО) я должен был понимать, что меня ждет! Приехав в аэропорт и увидев толпу пассажиров, ждущих регистрации, я сразу понял свою ошибку. Несомненно, это был типичный час пик на авиалинии, и пиковая нагрузка вызвала переполнение средств обслуживания. У меня были два чрезвычайно тяжелых чемодана, набитых записями по теории массового обслуживания (чем же еще?!), и, по всей видимости, я не мог избежать очереди. Эта СМО включала несколько приборов и несколько очередей с явно неодинаковой интенсивностью обслуживания, однако, став в одну из очередей (двигающуюся особенно медленно), я уже не мог позволить себе рискнуть уйти из нее. После регистрации я попал в зал отправления, где образовалась огромная змеевидная очередь пассажиров за посадочными талонами с указанными местами. Эта СМО с двумя приборами и общей очередью также была невероятно перегружена. Очередь завернулась так, что ее хвост прымкал к голове, поэтому нетрудно представить себе, какое здесь возникало мошенничество. Можно было полностью обойти очередь, так как она никем не контролировалась, кроме нескольких раздраженных пассажиров (прекратить мошенничество могли только пассажиры в голове очереди, но им это было безразлично, поскольку они находились уже у цели). На борту самолета, конечно, стало еще хуже, так как перегруженный персонал устроил для нас комедию ошибок и трагедию расстройств. Первый завтрак был сервирован в буфете самообслуживания; всех пассажиров пригласили встать со своих мест и пройти в переднюю часть салона самолета, где были беспорядочно расставлены различные блюда. Сначала в левом проходе пассажиры левой стороны самолета выстроились в очередь, двигающуюся вперед, а затем, взяв еду, возвращались через правый проход и при этом не могли попасть на свои места, так как левый проход был забит очередью.

Такое же «удовольствие» потом испытали пассажиры правой стороны. Я был настолько глуп, что предложил пассажирам левой стороны выстроиться в очередь в правом проходе, оставив свободным левый проход для возвращения на свои места. Но на это немедленно последовал ответ, что такое предложение «вероятно, не возымеет действия!» В таком же духе продолжалось и дальше, в том числе и с получением багажа после прибытия (нетрудно себе представить и это удовольствие!).

Описанное дорожное приключение — только один из многих подобных примеров, которые встречаются каждому из нас. Как исследователи систем мы морально обязаны изучать такие ситуации из реальной жизни и предлагать меры по их исправлению, даже если они и нелегко поддаются анализу. Мы должны быть в состоянии разрабатывать модели физических систем, с которыми взаимодействуем, проводить анализ этих систем и затем находить методы усовершенствования их работы. Первый этап — разработка математической модели, — по-видимому, наиболее трудный, так как именно здесь больше всего приходится идти на компромиссы при описании реальных физических систем. На втором этапе (анализ систем) мы ищем аппарат, который может помочь в решении задачи, а на третьем этапе разрабатываем методику проектирования. Для описания работы многих современных технических систем полезным инструментом является теория массового обслуживания. К сожалению, этот инструмент не такой «отточенный», как нам бы хотелось, поэтому приходится сталкиваться с необходимостью применения аппарата, не полностью адекватного предмету исследования. Эта проблема встречается всякий раз при применении теории, и нашей задачей в этой книге является исследование трудностей и успехов, связанных с использованием теории массового обслуживания в различных областях, и в частности в вычислительных системах.

Класс систем, для описания которого применяется теория массового обслуживания, очень большой; в системах этого класса клиенты конкурируют друг с другом за доступ к ограниченным ресурсам. Фактически очень многие важные современные проблемы могут быть сведены к проблеме *распределения и коллективного использования ресурсов*. С такими проблемами мы будем встречаться всюду в этой книге, причем особое внимание будет уделяться необходимости коллективного использования ресурсов в вычислительных системах, направленного на повышение их эффективности. Представим себе, например, что пара клиентов требует предоставить им канал связи. Классический подход к удовлетворению этого требования состоит в предоставлении в их распоряжение канала связи до тех пор, пока у них будет в нем потребность (с оплатой полной стоимости эксплуатации канала за время пользования). Однако давно признано, что такое распределение

ние ограниченных ресурсов является крайне расточительным ввиду их плохого использования. Вместо того чтобы предоставлять канал в распоряжение пары клиентов, гораздо лучше предложить большому числу клиентов коллективно использовать один быстро действующий канал, обеспечив каким-либо образом его разделение; это позволяет воспользоваться могущественными законами больших чисел, которые устанавливают, что потребность в любой момент времени с очень большой вероятностью весьма близка к сумме средних потребностей, определенной для всего множества клиентов. При этом для удовлетворения всех клиентов может потребоваться значительно меньшая пропускная способность канала, чем в случае индивидуального предоставления каналов. Такой подход уже на протяжении многих лет с успехом применяется, например, при использовании неполнодоступных пучков каналов в системах телефонной связи, введений асинхронного временного уплотнения и построении вычислительных систем множественного доступа с разделением времени, в системе с пакетной коммутацией, разработанной в 1960-х годах и недавно использованной в сети ARPANET. Следует заметить, что предоставление части канала каждой паре клиентов на полное время является крайне неэффективным по сравнению с использованием всей пропускной способности канала в течение неполного времени (в этом и состоит коллективное использование). Особенно эффективным оказывается коллективное использование, когда нагрузка создается быстрыми, но короткими *пачками* данных. Примерами неэффективного разделения каналов для таких источников пачек данных являются классические схемы синхронного временного или частотного уплотнения. При коллективном использовании канала в системе с пакетной коммутацией нужно уметь разрешать конфликты, возникающие в случае одновременного появления более одного требования на пользование каналом. Существуют два очевидных способа решения этой задачи: один состоит в отбрасывании или потере любого требования, возникающего в момент, когда канал занят, другой — в образовании очереди конкурирующих требований и обслуживания их в некотором порядке, когда канал освободится. Последний способ использован в сети ARPANET, так как в конфликтных ситуациях могут быть применены экономичные запоминающие устройства. Первый способ использован в системе ALOHA, в которой применяется пакетная коммутация с радиоканалами; в этой системе действительно все требования, одновременно поступающие в занятый канал, теряются. Эти идеи обсуждаются в гл. 5 и 6, где описаны некоторые наиболее успешные современные применения теории массового обслуживания.

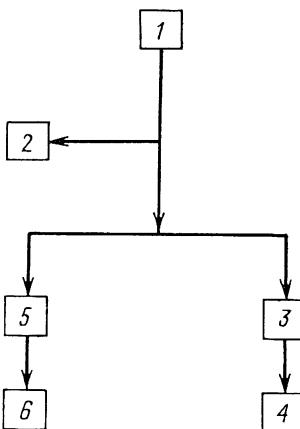
В этой книге преследуются две цели: во-первых, видоизменить аппарат теории массового обслуживания таким образом, чтобы можно было применять его к современным задачам, и, во-вторых

обеспечить широкое применение этого аппарата к разнообразным и важным вычислительным системам сегодняшнего дня. Именно поэтому глава 2 (Границы, неравенства и приближения) помещена в настоящей книге, а не в первом томе, посвященном общей теории массового обслуживания. Вычислительные системы являются одной из наиболее быстро растущих и самых передовых отраслей техники сегодняшнего дня. К сожалению, теория в этой области сильно отстает от практики. В начале 1960-х годов было найдено, что эффективным аппаратом для изучения скорости передачи, реакции и других характеристик вычислительных систем является теория массового обслуживания. С тех пор литература по теории массового обслуживания и ее применению в вычислительных системах изобилует аналитическими моделями вычислительных систем; в данной книге рассматриваются некоторые из этих новых и успешных применений. Для читателей, которые потратили много времени и усилий при разработке аппарата теории массового обслуживания, этот текст является некоторым вознаграждением. Применения теории массового обслуживания к вычислительным системам рассматриваются здесь главным образом потому, что они являются наиболее новыми и плодотворными (и также в не меньшей мере потому, что сам автор интенсивно занимался исследованиями в этом направлении). Действительно, применение теории массового обслуживания для анализа распределения ресурсов и решения задач о потоках данных в вычислительных системах является, по-видимому, единственным доступным специалистам по вычислительной технике методом, который позволяет понять сложные связи в таких системах.

Эта книга писалась в течение многих лет в процессе подготовки учебного материала для аспирантов Отделения вычислительной науки и техники Высшей школы технических и прикладных наук Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе. Большая часть материала была получена в ходе разработок с участием этого университета как научно-исследовательского центра моделирования и анализа вычислительных систем. В результате этих работ возникло большое количество важных задач и появилось много благоприятных возможностей для талантливых и способных ученых.

По своему уровню данная монография соответствует аспирантскому курсу первого года обучения и является естественным продолжением материала, содержащегося в первом томе. Для того чтобы эта книга имела самостоятельное значение, она начинается с *обзора важнейших результатов теории массового обслуживания* (гл. 1). Читатели, знакомые с курсом теории массового обслуживания, смогут легко справиться с приведенным материалом. С другой стороны, для читателей, которые не прошли такого курса, эта книга может оказаться полезной, если они воспользуются материалом гл. 1 как отправным.

Глава 2 позволяет перебросить мост от абстрактного аппарата теории массового обслуживания к реальному миру применений. В этой главе отмечаются недостатки формальной теории при описании реальных применений. Поэтому мы ищем инженерные подходы, включающие рассмотрение границ, неравенств и приближений, которые справедливы в различных случаях. В главе 3 обсуждается интересная область СМО — очереди с приоритетами. Мы рассматриваем эту главу как следующий мост между теорией и применениями, так как при помощи очередей с приоритетами можно моделировать и описывать работу вычислительных систем коллективного пользования с множественным доступом, которые описываются в гл. 4. В этой главе, посвященной реальным приложениям, вычислительные системы рассматриваются изолированно как системы, которые обрабатывают требования от большого числа конкурирующих пользователей. Здесь определяются скорость передачи и время ответа, а также показатель использования ресурса. Большая часть этой главы отведена специальному классу алгоритмов (известных как алгоритмы разделения процессора), так как только они хорошо подходят для анализа систем массового обслуживания и по существу идентичны трудным и сложным алгоритмам, которые используются в реальных задачах теории расписаний. Глава 5 посвящена анализу и разработке сетей ЭВМ. В главе 6 обсуждаются моделирование, измерения, управление потоками и узкие места в сетях ЭВМ. Эти сети представляют собой, по-видимому, наиболее быстро развивающуюся область молодой отрасли вычислительной техники. В заключении к первому тому было дано обещание опубликовать во втором томе только одну главу о сетях ЭВМ. Однако за те месяцы, которые прошли после выхода в свет первого тома, эта область расширилась так быстро, что сетям ЭВМ пришлось посвятить дополнительную главу. Если читатель посмотрит в список литературы к этим двум главам, то увидит, что большая ее часть относится к трем-четырем последним годам. Поэтому фактически нельзя написать главу, которая охватывала бы все новейшие результаты и не устарела к моменту создания книги. Возможно, наилучшим решением было бы предусмотреть файл в памяти машины, содержащий последние данные о сетях ЭВМ и доступный потребителям этих сетей. Глава 5 посвящена разработке методов анализа и проектирования сетей ЭВМ, в ней формулируется много важных нерешенных задач. В качестве примера, иллюстрирующего различные решения, везде используется существующая сеть ARPANET. Глава завершается рассмотрением некоторых новых вопросов коммутации пакетов, в частности передачи данных с использованием спутниковых и наземных радиолиний. В главе 6 описываются функциональные и измерительные аспекты сетей на примере работы сети ARPANET. Структура книги показана на следующем рисунке:



В конце монографии приводится перечень наиболее употребительных обозначений. Каждая глава снабжена списком литературы. Наиболее важные формулы обозначены знаком ■ и вынесены в сводку важнейших результатов (формулы в главе 1 составляют исключение, так как все они важные). В каждой главе (кроме первой) приведены задачи, которые в некоторых случаях расширяют излагаемый материал; читателю рекомендуется решить их.

Мы рассматриваем эту книгу как «живущую» в том смысле, что пять ее основных глав (кроме первой) должны по своей истинной природе развиваться и меняться в будущем. В эти области непрерывно вносятся усовершенствования, и поэтому книга несомненно будет переиздаваться, так как потребуется дополнять ее новыми данными.

Автор выражает признательность многим друзьям, коллегам и аспирантам, которые оказали поддержку и создали благоприятную атмосферу в Отделении вычислительной науки и техники Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе, что обеспечило возможность выполнения этой работы. Большая часть результатов, содержащихся в главах 3—6, относится к областям исследований, которые финансировались управлением перспективных исследований Министерства обороны США. За поддержку этого управления и предоставленную мне возможность участвовать в разработке некоторых наиболее перспективных проектов вычислительных систем и сетей я особенно благодарен Лоуренсу Г. Робертсу и Роберту Э. Кану. В течение 1971—1972 гг. мне посчастливилось быть стипендиатом Джона Симона Гугенхайма, и я выношу искреннюю благодарность этому Фонду. Книга, подобная предлагаемой, требует постоянной строгой оценки на этапе проверки в аспирантской аудитории. Я признателен сотням аспирантов, которые помог-

ли мне в этом, и счастлив отметить особую помощь, которую оказали Арне Нильсон, Марио Джерла, Фарук Камун, Парвиз Кермани, Симон Лэм, Вильям Нейлор, Луис Нельсон, Хольгер Оппдербек, Мишель Шолл, Фуад Тобаги, Дэвид Вонг и Джонни Вонг. Я в большом долгу перед моим исследовательским и административным персоналом. Большую часть машинописной работы выполнила Шарлотта Лярош, которой приношу глубокую благодарность. Кэрол Мэзон и Барбара Уоррен были ответственны за обработку моих бесконечных исправлений; им помогали Джейн Фуччи, Джейн Дубинская, Джордж Энн Хорнор, Кати Пфенниг и Глория Рой. Диана Скосайпек и Линн Джонсон провели утомительную работу по правке гранок. Я очень признателен им всем. Очень жаль, что я потратил на эту книгу много времени, которое мог бы провести с моими детьми, я благодарю их за снисхождение. Родителям выражают благодарность за те принципы, которые они во мне воспитали, и за предоставленные возможности. Моей жене Стелле я много обязан за ее бесконечное терпение, поддержку и понимание, без которых едва ли можно было закончить эту работу.

Леонард Клейнрок

Лос-Анджелес,
Калифорния,
январь 1976 г.

Глава 1

Основы теории массового обслуживания

В этой главе собраны наиболее важные результаты начального курса теории массового обслуживания. Материал заимствован из первого тома [4], где также приведен перечень результатов с указанием источника, откуда взят соответствующий результат. Наша цель здесь состоит в том, чтобы заложить теоретические основы, необходимые для части книги, посвященной практическим применением теории. Эти применения требуют солидного обоснования и опыта при выборе моделей и получении расчетных формул (точных или приближенных), пригодных для анализа и проектирования систем. Здесь дается довольно полный обзор результатов (без их доказательства), которые используются в последующих главах.

Рассмотрим какую-либо систему, имеющую пропускную способность C , равную максимальной скорости работы этой системы. Пусть требуется, чтобы эта система работала со средней скоростью R . Один из фундаментальных законов природы устанавливает, что если $R < C$, то система может обрабатывать поступающие к ней требования, а при $R > C$ пропускная способность системы оказывается недостаточной и в этом случае приходится сталкиваться со всеми неприятными и катастрофическими последствиями перегрузки. Однако даже при $R < C$ возможно появление различных неприятностей из-за *нерегулярности* поступления требований. Рассмотрим, например, находящийся на углу телефон-автомат, который в среднем может удовлетворять требованиям, предъявляемым к нему. Предположим теперь, что к телефону почти одновременно приближаются два человека. Ясно, что в любой данный момент времени получить обслуживание может только один из них, а другой должен ждать в очереди до тех пор, пока первый закончит. Такие очереди возникают по двум причинам: во-первых, из-за того, что моменты прихода клиентов нерегламентированы, а во-вторых, из-за случайного объема требования к системе (т. е. продолжительности обслуживания) каждого клиента. Описание этих двух непредсказуемых величин (моментов поступления требований и продолжительностей обслуживания) и определение их влияния на очередь составляют существо теории массового обслуживания. В следующем разделе вводятся некоторые стандартные для теории массового обслуживания обозначения,

а затем дается обзор наиболее важных результатов для различных систем массового обслуживания (СМО).

1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Здесь вводятся только те обозначения, которые требуются для представления результатов в этой главе. Более полный перечень обозначений дан в конце книги.

Обозначим n -е требование, поступающее в СМО, через C_n . С требованием C_n связаны следующие важные случайные величины:

τ_n —момент поступления требования C_n , (1.1)

$t_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ —время между соседними требованиями C_n и C_{n-1} , (1.2)

x_n —время обслуживания C_n . (1.3)

Последовательности случайных величин $\{t_n\}$ и $\{x_n\}$ фактически определяют работу СМО. Все эти случайные величины выбираются независимо друг от друга, и можно определить две общие случайные величины:

\tilde{t} —промежуток времени между моментами поступления соседних требований, (1.4)

\tilde{x} —время обслуживания. (1.5)

Каждая из этих величин описывается функцией распределения вероятностей (ФРВ), т. е.

$$A(t) = P[\tilde{t} \leq t], \quad (1.6)$$

$$B(x) = P[\tilde{x} \leq x], \quad (1.7)$$

и соответствующей плотностью распределения вероятностей (ПРВ), а именно

$$a(t) = \frac{dA(t)}{dt}, \quad (1.8)$$

$$b(x) = \frac{dB(x)}{dx}. \quad (1.9)$$

В последнем определении ПРВ могут быть импульсными функциями. Это обсуждается, например, в первом томе. Моменты распределения указанных случайных величин обозначаются следующим образом:

$$E[\tilde{t}] = \bar{t} = \frac{1}{\lambda}, \quad (1.10)$$

$$E[\tilde{t}^k] = \bar{t}^k, \quad (1.11)$$

$$E[\tilde{x}] = \bar{x} = \frac{1}{\mu}, \quad (1.12)$$

$$E[\tilde{x}^k] = \bar{x}^k, \quad (1.13)$$

где символ μ часто используется лишь для показательного распределения времени обслуживания. Применяется также преобразование Лапласа, связанное с ПРВ, а именно

$$E[e^{-st}] = A^*(s), \quad (1.14)$$

$$E[e^{-sx}] = B^*(s). \quad (1.15)$$

Интегральное представление этого преобразования [например, для $a(t)$] просто выражается в виде

$$A^*(s) = \int_0^\infty a(t) e^{-st} dt. \quad (1.16)$$

Причиной применения этого преобразования является его свойство производить моменты; например, момент \bar{t}^k может быть произведен функцией $A^*(s)$ с помощью равенства

$$\frac{d^k A^*(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} = (-1)^k \bar{t}^k. \quad (1.17)$$

Мы часто будем обозначать k -ю производную функции $f(t)$ при $t=t_0$ следующим образом:

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{t=t_0} = f^{(k)}(t_0). \quad (1.18)$$

Таким образом, равенство (1.17) можно представить в виде $A^{(k)}(0) = (-1)^k \bar{t}^k$.

Обе величины \bar{t} и \bar{x} являются входными случайными величинами для СМО. Определим теперь некоторые важные характеристики СМО, а именно число требований в системе, время ожидания на одно требование и общее время пребывания в системе, т. е. определим

$$N(t) — число требований в системе в момент t , \quad (1.19)$$

$$w_n — время ожидания (в очереди) для требования C_n , \quad (1.20)$$

$$s_n — время пребывания в системе (очередь и обслуживание) для требования C_n . \quad (1.21)$$

Соответствующие предельные случайные величины (после того, как система проработает долгое время) для установившейся очереди обозначаются через N , \bar{w} и \bar{s} . Так же как для \bar{t} и \bar{x} , можно

определить ФРВ, ПРВ, первый момент и соответствующее преобразование для каждой из величин N , \tilde{w} и \tilde{s} :

$$\begin{aligned} P[N \leq k], & \quad W(y) = P[\tilde{w} \leq y], & S(y) = P[\tilde{s} \leq y], \\ P[N=k], & \quad w(y) = \frac{dW(y)}{dy}, & S(y) = \frac{dS(y)}{dy}, \\ E[N] = \bar{N}, & \quad E[\tilde{w}] = W, & E[\tilde{s}] = T, \\ E[z^N] = Q(z), & \quad E[e^{-s\tilde{w}}] = W^*(s) & E[e^{-s\tilde{s}}] = S^*(s). \end{aligned}$$

Теория массового обслуживания, естественно, включает три раздела: элементарную теорию массового обслуживания, промежуточную теорию и общую теорию. Эти три теории различаются предположениями относительно $a(t)$ и $b(x)$. Для обозначения различных типов СМО, которые рассматриваются здесь, применяются довольно простые сокращения. Они содержат три позиции и имеют вид $A/B/m$; таким образом обозначается СМО с m обслуживающими приборами, а A и B указывают соответственно на распределение времени между соседними требованиями и распределение времени обслуживания. A и B принимают значения из следующего набора символов, которые указывают соответствующее распределение:

M — показательное распределение (Markovian),

E_r — распределение Эрланга порядка r (Erlangian),

H_R — гиперпоказательное распределение порядка R (Hyper-exponential),

D — постоянная величина (Deterministic),

G — произвольное распределение (General).

В частности, если перечисленные символы стоят на месте B , соответствующая ПРВ имеет следующий вид ($x \geq 0$):

$$M: \quad b(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad (1.22)$$

$$E_r: \quad b(x) = \frac{r\mu (r\mu x)^{r-1} e^{-r\mu x}}{(r-1)!}, \quad (1.23)$$

$$H_R: \quad b(x) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i x} \left(\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \right), \quad (1.24)$$

$$D: \quad b(x) = u_0 \left(x - \frac{1}{\mu} \right), \quad (1.25)$$

$$G: \quad b(x) \quad \text{произвольно},$$

где $u_0(x-1/\mu)$ в предпоследнем выражении обозначает единичный импульс в точке $x=1/\mu$ ¹⁾. В случае G возможен любой закон распределения. Иногда к трехпозиционному обозначению будет до-

¹⁾ Иными словами, $u_0(x-1/\mu) = \delta(x-1/\mu)$, где $\delta(\cdot)$ есть δ -функция. — Прим. ред.

бавляться еще одна или две позиции для того, чтобы указать емкость накопителя СМО (обозначаемую через K) или число источников требований (обозначаемое через M). При этом всегда специально указывается, какая (или какие) из позиций вводится дополнительно (при отсутствии этих позиций соответствующие числа предполагаются бесконечными). Простейшей СМО, рассматриваемой в этой главе, является $M/M/1$, в которой промежутки времени между соседними требованиями распределены по показательному закону, время обслуживания распределено по показательному закону и в системе имеется один обслуживающий прибор (так называемая однолинейная система, см. разд. 1.4). Наиболее сложной СМО, рассматриваемой в этой главе, является $G/G/1$, в которой показательные распределения заменены произвольными (см. разд. 1.2 и 1.10). В этом обзоре большинство результатов справедливо только в случае обслуживания требований в порядке их поступления (дисциплина «первым пришел — первым обслуживается»). Другие дисциплины обслуживания рассматриваются в гл. 3. Перейдем к обзору результатов.

1.2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вероятно, наиболее важным параметром СМО $G/G/1$ является коэффициент использования ρ , определяемый как произведение средней скорости поступления требований в систему на среднее время обслуживания каждого требования, т. е.

$$\rho = \lambda \bar{x}. \quad (1.26)$$

Эта величина равна доле времени, в течение которого занят единственный обслуживающий прибор, и она также равна отношению требуемой от данной системы скорости обслуживания к пропускной способности системы, т. е. R/C , как отмечалось выше¹⁾. Для многолинейной СМО $G/G/m$ аналогичное определение имеет вид

$$\rho = \frac{\lambda \bar{x}}{m} \quad (1.27)$$

и коэффициент использования равен R/C ; он может быть интерпретирован как математическое ожидание доли занятых приборов, если каждый прибор имеет одно и то же распределение времени обслуживания. В общем случае ρ — математическое ожидание доли используемой пропускной способности системы. В любом случае стабильной системой (т. е. такой системой, которая имеет ко-

¹⁾ В среднем за секунду в СМО поступает λ требований и каждое требует \bar{x} секунд на обслуживание; таким образом, $R = \lambda \bar{x}$. Однолинейная система может выполнить в течение одной секунды обслуживание, также измеряемое 1 с, поэтому $C=1$.

нечные средние задержки и длины очередей) является система, для которой

$$0 \leq \rho < 1. \quad (1.28)$$

Заметим, что случай $\rho=1$ не допускается (исключение составляет весьма частная СМО D/D/m). Как мы увидим ниже, чем ближе значение ρ к единице, тем больше очереди и время ожидания; именно в этой величине наиболее существенно отражается изменение характеристик СМО при изменении *средней* нагрузки.

Среднее время пребывания требования в системе связано со средним временем обслуживания и средним временем ожидания простым, но фундаментальным соотношением

$$T = \bar{x} + W. \quad (1.29)$$

Величина W отражает цену, которую клиент должен заплатить за совместное использование с другими клиентами имеющихся ресурсов (обслуживающих приборов). В то время как ρ является наиболее важным параметром системы, одной из наиболее замечательных формул теории массового обслуживания является *формула Литтла*, которая связывает среднее число требований в системе со средней скоростью поступления требований и средним временем пребывания требования в системе:

$$\bar{N} = \lambda T. \quad (1.30)$$

Этот результат используется во многих расчетах, которые приводятся в этой книге, и вообще широко применяется в приложениях. Соответствующий результат для числа требований и времени пребывания в очереди имеет вид

$$\bar{N}_q = \lambda W, \quad (1.31)$$

где \bar{N}_q — средняя длина очереди. Для системы G/G/m справедливо равенство

$$\bar{N}_q = \bar{N} - m_0, \quad (1.32)$$

которое следует из равенства (1.29) и формулы Литтла.

Выше уже был приведен фундаментальный закон, применимый для СМО и утверждающий, что при $R < C$ система является стационарной. Здесь используется еще один общий закон природы, который связывает скорость накопления требований внутри системы со скоростью поступления требований на вход системы и скоростью выхода их из системы. Так, если состояние системы, характеризующееся наличием в ней k требований, обозначить через E_k ,

а вероятность пребывания системы в момент t в состоянии E_k — через

$$P_k(t) = P[N(t)=k], \quad (1.33)$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dP_k(t)}{dt} &= [\text{скорость потока вероятности в состояние } \\ &\quad E_k \text{ в момент } t] - \\ &\quad - [\text{скорость потока вероятности из состояния } \\ &\quad E_k \text{ в момент } t]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Равенство (1.34) позволяет записать зависящие от времени соотношения между вероятностями в прямой форме. Рассмотрим теперь стабильную систему, для которой вероятность $P_k(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к пределу, обозначаемому через p_k (эта вероятность представляет собой долю времени, в течение которого в установившемся режиме в системе находятся k требований). Если время между соседними требованиями имеет показательное распределение (т. е. моменты поступления требований образуют пуассоновский входящий поток), то установившаяся вероятность r_k того, что требование застанет в момент поступления k требований в системе, равна установившейся вероятности того, что в системе находится k требований, т. е. $p_k = r_k$. Вместе с тем если обозначить через d_k установившуюся вероятность того, что в момент выхода требования после обслуживания в системе останется k требований, то $d_k = r_k$, если состояние системы $N(t)$ в любой момент времени может измениться не больше чем на единицу. Таким образом, если входящий поток — пуассоновский и происходят единичные изменения состояния системы, то имеет место случай, когда $p_k = r_k = d_k$.

1.3. МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС. ПРОЦЕССЫ РАЗМНОЖЕНИЯ И ГИБЕЛИ. ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Перед тем как перейти к обсуждению результатов элементарной теории массового обслуживания, удобно привести хорошо известные сведения о некоторых простых и важных вероятностных процессах, составляющих основу теории массового обслуживания.

Начнем с марковского процесса с дискретными состояниями и дискретным временем, для которого через X_n обозначим дискретное значение процесса на n -м шаге. Процесс является марковским (цепью Маркова), если выполняется условие

$$P[X_n=j | X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_1=i_1] = P[X_n=j | X_{n-1}=i_{n-1}]. \quad (1.35)$$

Оно выражает просто то, что состояние в настоящий момент полностью суммирует всю предшествующую историю процесса, влияющую на будущее течение этого процесса. Если положим

$$\pi_i^{(n)} = P[X_n = i] \quad (1.36)$$

и обозначим вектор этих вероятностей как

$$\pi^{(n)} = [\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \dots], \quad (1.37)$$

а кроме того, обозначим переходные вероятности за один шаг для однородной цепи Маркова через

$$p_{ij} = P[X_n = j | X_{n-1} = i] \quad (1.38)$$

и запишем их в виде квадратной матрицы, обозначаемой через $\mathbf{P} = (p_{ij})$, то получим основной результат для зависящих от времени вероятностей этого марковского процесса:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} \mathbf{P}, \quad (1.39)$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \mathbf{P}^n. \quad (1.40)$$

Последовательность \mathbf{P}^n ($n=0, 1, 2, \dots$) равна обратному z -преобразованию матрицы $[\mathbf{I} - z\mathbf{P}]^{-1}$, где через \mathbf{I} обозначена единичная матрица, а -1 обозначает обращение матрицы. Наиболее полезные установившиеся значения этих вероятностей можно найти путем решения уравнения

$$\pi = \pi \mathbf{P} \quad (1.41)$$

при условии

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1, \quad (1.42)$$

где использовано обозначение $\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i^{(n)}$. Заметим, что

время пребывания в любом состоянии описывается геометрическим распределением (характерное свойство всех марковских процессов). Это распределение является единственным дискретным распределением без памяти¹⁾.

Рассмотрим теперь случай однородного марковского процесса $X(t)$ с дискретными состояниями и непрерывным временем. Процесс является марковским, если выполняется условие, похожее на (1.35). Время, в течение которого процесс находится в каждом

¹⁾ Если распределение оставшегося времени пребывания системы в состоянии не зависит от того, сколько времени это пребывание уже длится, то иногда говорят, что распределение времени пребывания в состоянии является распределением без памяти. — Прим. ред.

состоянии, распределено по показательному закону у всех марковских процессов с непрерывным временем; это единственное непрерывное распределение без памяти и именно это свойство упрощает анализ. Определим теперь переходные вероятности как

$$p_{ij}(t) = P[X(s+t)=j | X(s)=i]. \quad (1.43)$$

Обозначим матрицу этих переходных вероятностей через $\mathbf{H}(t)$ и с помощью этой матрицы запишем уравнения Чепмена — Колмогорова:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(t-s) \mathbf{H}(s). \quad (1.44)$$

Фактически $\mathbf{H}(t)$ соответствует \mathbf{P}^n , а матрице \mathbf{P} соответствует $\mathbf{H}(\Delta t)$ (это переходные вероятности за бесконечно малый промежуток времени). Чаще используется матрица $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$, называемая инфинитезимальной производящей матрицей процесса. Она определяется с помощью равенства

$$\mathbf{Q} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{H}(\Delta t) - \mathbf{I}}{\Delta t}. \quad (1.45)$$

С помощью этой матрицы можно теперь описать поведение марковского процесса во времени следующим уравнением:

$$\frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \mathbf{H}(t) \mathbf{Q}; \quad (1.46)$$

решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{Qt}}. \quad (1.47)$$

Установившийся режим этого процесса, а именно стационарные вероятности π определяются из основного уравнения

$$\pi \mathbf{Q} = 0 \quad (1.48)$$

с учетом нормирующего условия (1.42). Процессы с дискретным множеством состояний и непрерывным временем и процессы с непрерывным множеством состояний и непрерывным временем будут рассматриваться в гл. 2 (Более полная сводка результатов для цепей Маркова приводится в табличной форме в перечне результатов в первом томе.)

По-видимому, наиболее фундаментальным вероятностным процессом, встречающимся в теории массового обслуживания, является пуассоновский процесс, описывающий поток моментов поступления требований, в котором промежутки времени между моментами поступления соседних требований независимы и распределены по показательному закону со средним значением $\bar{t} = 1/\lambda$.

В частности, вероятность $P_k(t)$ поступления k требований в течение промежутка времени длиной t секунд дается равенством

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (1.49)$$

Среднее число требований, поступающих в течение этого промежутка, выражается в виде

$$\bar{N}(t) = \lambda t, \quad (1.50)$$

а дисперсия определяется равенством

$$\sigma_{N(t)}^2 = \lambda t. \quad (1.51)$$

Для этого процесса среднее значение и дисперсия совпадают, z -преобразование записывается в виде

$$E[z^{N(t)}] = e^{\lambda t(z-1)}. \quad (1.52)$$

Предположение о показательном распределении промежутков времени между моментами поступления требований означает, что

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (1.53)$$

Как уже говорилось, это распределение является распределением без памяти. Среднее значение и дисперсия этого распределения соответственно равны $\bar{t} = 1/\lambda$ и $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

Среди классов марковских процессов с непрерывным временем представляет интерес частный класс процессов размножения и гибели, в которых состояние системы за любой бесконечно малый промежуток времени изменяется не больше чем на единицу (вверх или вниз). В таких случаях говорят об интенсивности размножения λ_k , являющейся средней скоростью рождений (т. е. поступления новых требований) в состоянии, когда система содержит k требований, а также об интенсивности гибели μ_k , которая равна средней скорости гибели (т. е. ухода требований из системы) в случае, когда в системе содержится k требований. Зависящее от времени поведение такой СМО описывается равенством (1.47). Для этого класса процессов размножения и гибели стационарный режим, определяемый уравнением (1.48), принимает особенно простую форму. Решение этого уравнения имеет следующий вид (для обозначения вероятности наличия k требований в системе здесь используется более распространенное обозначение p_k , а не π_k):

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad (1.54)$$

где постоянная p_0 вычисляется по формуле

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i / \mu_{i+1}}. \quad (1.55)$$

Применение этого решения для стационарного режима непосредственно приводит к классу элементарных СМО, которые обсуждаются в трех следующих разделах.

1.4. СИСТЕМА M/M/1

Система M/M/1 является простейшей. Она представляет собой классический пример, для рассмотрения которого требуется лишь элементарный математический аппарат. Хотя *метод рассмотрения* системы M/M/1 не переносится на более сложные СМО, *поведение* ее во многих отношениях подобно поведению более сложных СМО.

Поскольку на вход рассматриваемой системы поступает пуссоновский поток (с интенсивностью λ) и система совершает единичные (ординарные) переходы (обслуживание и поступление одного требования), то $p_k = r_k = d_k$. (Вспомним, что среднее время обслуживания $\bar{x} = 1/\mu$.) Это распределение имеет вид

$$p_k = (1 - \rho) \rho^k, \quad (1.56)$$

и таким образом непосредственно находим, что среднее число требований в системе дается равенством

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad (1.57)$$

а дисперсия равна

$$\sigma_N^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}. \quad (1.58)$$

Используя формулу Литтла и равенство (1.32), можно сразу записать две основные характеристики системы M/M/1 — ее средние задержки:

$$W = \frac{\rho/\mu}{1 - \rho}, \quad (1.59)$$

$$T = \frac{1/\mu}{1 - \rho}. \quad (1.60)$$

Величины \bar{N} , W и T в зависимости от коэффициента использования ρ обнаруживают одинаковое свойство, а именно: все они растут по мере убывания значения $(1 - \rho)$. Это является харак-

терным для системы $M/M/1$, а также для СМО самого общего вида. На фиг. 1.1 показано среднее время пребывания в системе, как функция коэффициента использования. При приближении ρ к единице (снизу) средние задержки и длины очередей растут неограниченно. Это справедливо по существу для любой СМО, которая может встретиться, и показывает ту высокую цену, которую нужно платить за использование системы в режиме, близком к ее пропускной способности ($\rho=1$).

Как уже указывалось выше, число требований в СМО имеет геометрическое распределение. Приведем теперь ПРВ и ФРВ времени ожидания и времени пребывания в системе для случая обслуживания в порядке поступления:

$$w(y) = (1 - \rho) u_0(y) + \lambda (1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0, \quad (1.61)$$

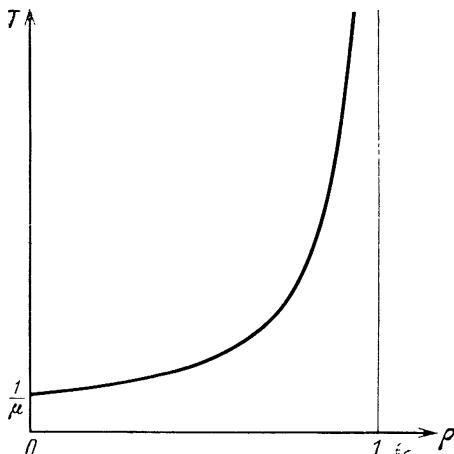
где $u_0(y)$ — единичный импульс (дельта-функция Дирака),

$$W(y) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0, \quad (1.62)$$

$$s(y) = \mu(1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0, \quad (1.63)$$

$$S(y) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0. \quad (1.64)$$

Все эти функции по своей природе показательные (если не принимать во внимание накопление вероятности в нуле для времени ожидания). Свободный период I (промежуток времени от момента ухода требования, которое оставляет систему свободной, до момента поступления следующего требования) и период между



Фиг. 1.1. Средняя задержка как функция ρ для системы $M/M/1$.

моментами ухода следующих друг за другом требований D также распределены по показательному закону с параметром λ :

$$P[D \leq y] = P[D \leq y] = 1 - e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0. \quad (1.65)$$

Период занятости (промежуток времени между соседними свободными периодами) характеризуется ПРВ, обозначаемой через $g(y)$ и определяемой через модифицированную функцию Бесселя первого рода следующим образом:

$$g(y) = \frac{1}{y \sqrt{\rho}} e^{-(\lambda+\mu)y} I_1(2y \sqrt{\lambda\mu}). \quad (1.66)$$

Вероятность f_n того, что в течение периода занятости будут обслужены n требований, равна

$$f_n = \frac{1}{n!} \binom{2n-2}{n-1} \rho^{n-1} (1+\rho)^{1-2n}. \quad (1.67)$$

Легко описываются также два простых обобщения СМО типа M/M/1. В одном из них рассматривается случай неординарного потока, когда в каждой точке пуассоновского процесса (т. е. в каждый момент поступления) в системе с вероятностью g_k поступает группа из k требований. Как обычно, определим производящую функцию этого распределения в виде $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$. С ее помощью можно записать производящую функцию для числа требований в системе M/M/1 при неординарном потоке на входе, а именно¹⁾

$$Q(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z [1 - G(z)]}. \quad (1.68)$$

Второе обобщение СМО представляет собой систему с неординарным обслуживанием, в которой свободный прибор принимает до r (но не более) требований и обслуживает их одновременно (как если бы они были одним требованием) в течение промежутка времени, распределенного по показательному закону. Вероятность застать в такой системе k требований определяется равенством

$$p_k = \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \left(\frac{1}{z_0}\right)^k, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (1.69)$$

где z_0 — единственный (лежащий вне круга единичного радиуса, т. е. $|z_0| > 1$) корень уравнения

$$r\rho z^{r+1} - (1 + r\rho) z^r + 1 = 0, \quad (1.70)$$

причем, как обычно, $\rho = \lambda/r\mu$.

¹⁾ Здесь $Q(z) = E[z^N]$; не следует смешивать эту функцию с инфинитезимальной производящей матрицей Q , определенной равенством (1.45).

Последнее обобщение (используемое в гл. 4) представляет собой СМО типа $M/M/1$ с конечным числом требований M^1 , которая работает следующим образом. Требование находится либо в системе (ожидает или обслуживается), либо вне системы (на подходе к ней). Промежуток времени от момента, когда оно покидает систему, до момента, когда оно вновь возвращается в систему, распределен по показательному закону со средним значением $1/\lambda$. В этом случае получается следующая вероятность застать k требований в системе:

$$p_k = \frac{[M!/(M-k)!] (\lambda/\mu)^k}{\sum_{i=0}^M [M!/(M-i)!] (\lambda/\mu)^i}. \quad (1.71)$$

Здесь заканчивается рассмотрение классической системы $M/M/1$. В следующем разделе, сохранив марковские предположения, исследуем многолинейный случай.

1.5. СИСТЕМА $M/M/m$

Рассмотрим теперь обобщение на случай m обслуживающих приборов. Перед совокупностью m обслуживающих приборов образуется одна очередь, и требование из головы очереди поступает в первый доступный прибор. Как обычно, λ — интенсивность входящего потока, а $1/\mu$ — среднее время обслуживания, причем $\rho = \lambda/m\mu$. Стационарная вероятность застать в системе k требований определяется равенствами

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^k}{k!}, & k \leq m, \\ p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!}, & k \geq m, \end{cases} \quad (1.72)$$

где

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m! (1-\rho)} \right]^{-1}. \quad (1.73)$$

В начале текущего столетия эту СМО рассматривал в качестве одной из моделей работы телефонной сети отец теории массового обслуживания А. К. Эрланг [1]. Его именем названа *C-формула Эрланга*, которая определяет вероятность того, что поступившее требование должно ждать обслуживания. Эта формула определя-

¹⁾ Обозначение одной и той же буквой M марковского процесса и числа требований не совсем удачно, однако менять обозначения автора, по-видимому, нецелесообразно: читатель вряд ли смешает эти два понятия. — *Прим. перев.*

ет $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ из равенства (1.72). Обширные таблицы этой величины приводятся во многих книгах, посвященных телефонии [6].

Другие результаты о системе $M/M/m$ содержатся в разд. 1.9, в котором рассматривается система $G/M/n$. В частности, W и $W(y)$ определяются соответственно равенствами (1.113) и (1.114), где для СМО типа $M/M/m$ следует положить $\sigma = \rho$.

Эрланг рассматривал и другую модель телефонной системы, которая во всем совпадает с СМО типа $M/M/m$, но не допускает возможности ожидания; иначе говоря, это система с потерями, в которой в любой момент времени могут находиться не более m требований. В этом случае вероятность застать k требований в системе дается равенством

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k/k!}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i/i!}, \quad (1.74)$$

справедливым для $0 \leq k \leq m$. Важной величиной здесь является вероятность того, что требование в момент поступления в систему не застает ни одного свободного прибора и поэтому будет потеряно; она задается B -формулой Эрланга, или формулой потерь Эрланга, которая также табулирована¹⁾ и определяет p_m из равенства (1.74).

1.6. МАРКОВСКИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Перед тем как закончить рассмотрение систем с показательным распределением, остановимся еще на одном классе задач, относящихся к сетям из СМО, в которых требования перемещаются из одной СМО в другую некоторым случайным образом до тех пор, пока они не покинут систему в какой-либо точке. В частности, рассмотрим сеть с N узлами, в i -м узле которой находится СМО с одной очередью и m_i приборами, время обслуживания в каждом из которых распределено по показательному закону со средним значением $1/\mu_i$. В i -й узел поступает извне (по отношению к сети) последовательность требований из независимого пуссоновского источника с интенсивностью γ_i требований в секунду. После обслуживания в i -м узле требование переходит в следующий j -й узел с вероятностью r_{ij} ; таким образом, это требование поступает в j -й узел изнутри (по отношению к сети). Вместе с тем, уходя из i -го узла, требование может покинуть сеть с вероятностью $1 - \sum_{j=1}^N r_{ij}$.

¹⁾ См., например, Башарин Г. П. Таблицы вероятностей и средних квадратичных отклонений потерь на полнодоступном пучке линий.—М.: Изд-во АН СССР, 1972.—Прим. перев.

Определим полную интенсивность потока требований в i -й узел как λ_i требований в секунду; в среднем она включает в себя как внутренние, так и внешние требования. Система уравнений для определения интенсивностей λ_i имеет вид

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j r_{ji}. \quad (1.75)$$

Между узлами рассматриваемой сети в значительной мере существует независимость. Это можно видеть из выражения для совместного распределения вероятностей застать k_1 требований в первом узле, k_2 требований во втором узле и т. д.:

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_1(k_1) p_2(k_2) \dots p_N(k_N). \quad (1.76)$$

В этом равенстве о независимости свидетельствует произведение распределений в правой части. Мы воспользуемся этой независимостью в гл. 4 и 5. В частности, каждый множитель $p_i(k_i)$ в приведенном равенстве является решением для *изолированной* СМО типа $M/M/m$, работающей самостоятельно при интенсивности поступающих требований λ_i ; $p_i(k_i)$ дается равенством (1.72).

Еще один класс марковских сетей массового обслуживания включает такие сети, в которых требования не могут ни уходить, ни поступать извне. В частности, предположим, что в сети, подобной описанной выше, находится k требований и что они перемещаются из узла в узел, но уйти из сети не могут; иначе говоря,

для всех i справедливо равенство $1 - \sum_{j=1}^N r_{ij} = 0$. Для таких замкнутых сетей совместное распределение вероятностей наличия определенного числа требований в различных узлах выражается следующим образом:

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N \frac{x_i^{k_i}}{\beta_i(k_i)}, \quad (1.77)$$

где множество чисел $\{x_i\}$ должно удовлетворять линейным уравнениям [аналогичным уравнениям (1.75) при $j_i = 0$]

$$\mu_i x_i = \sum_{j=1}^N \mu_j x_j r_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.78)$$

$$G(K) = \sum_{k \in A} \prod_{i=1}^N \frac{x_i^{k_i}}{\beta_i(k_i)}, \quad (1.79)$$

причем $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$, A — множество векторов \mathbf{k} , для которого $k_1+k_2+\dots+k_N=K$, а

$$\beta_i(k_i) = \begin{cases} \frac{k_i!}{m_i! m_i^{k_i-m_i}}, & k_i \leq m_i \\ 0, & k_i > m_i \end{cases} \quad (1.80)$$

Открытые и замкнутые сети описанного вида будут рассматриваться подробнее в гл. 4.

1.7. СИСТЕМА M/G/1

В этом и двух следующих разделах исследуются системы, которые рассматриваются в промежуточной теории массового обслуживания. Эта теория распространяется на СМО, для которых предполагается, что промежутки между моментами поступления требований или продолжительности обслуживания (но не то и другое одновременно) распределены не по показательному закону. Случай, когда обе эти случайные величины распределены не по показательным законам, относится к общей теории массового обслуживания, которая описывается в разд. 1.10. Для системы M/G/1 мы не можем привести распределения числа требований или времени пребывания в системе в явном виде, как это было сделано в случае M/M/1 [см. формулы (1.56) и (1.64)]. Однако можно найти преобразования этих распределений.

Система M/G/1 характеризуется пуассоновским процессом с интенсивностью λ требований в секунду на входе и произвольным, или общим, распределением продолжительности обслуживания $B(x)$ при среднем времени обслуживания \bar{x} секунд и k -м моментом, равным \bar{x}^k . Благодаря входящему пуассоновскому процессу и тому, что число требований в системе изменяется не больше чем на единицу, опять справедливо равенство $p_k=r_k=d_k$.

Основное (разностное) уравнение, описывающее зависимость между случайными величинами в СМО типа M/G/1 при обслуживании в порядке поступления, имеет вид

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + v_{n+1} & \text{при } q_n > 0, \\ v_{n+1} & \text{при } q_n = 0, \end{cases} \quad (1.81)$$

где q_n — число требований, остающихся в системе после ухода требования C_n , а v_n — число требований, поступающих в систему в течение времени обслуживания (x_n). Последовательность $\{q_n\}$ образует цепь Маркова (с дискретными состояниями и непрерывным временем). Из этого уравнения, в котором содержится полная информация относительно переходов в системе и ее стационарного поведения, можно вывести большинство результатов для M/G/1.

Несомненно, наиболее известным результатом для системы M/G/1 является формула Поллячека — Хинчина, которая дает сле-

дующее компактное выражение для среднего времени ожидания в очереди в состоянии равновесия:

$$W = \frac{\lambda \bar{x}^2 / 2}{1 - \rho}. \quad (1.82)$$

Числитель в этом выражении $W_0 = \lambda \bar{x}^2 / 2$ равен математическому ожиданию времени, в течение которого вновь поступающее требование должно ждать в очереди, пока закончится обслуживание того требования (если оно имеется), которое в момент поступления нового требования находилось в обслуживающем приборе¹⁾. С помощью этой формулы и равенства (1.29) легко найти T . Объединяя этот результат с равенствами (1.31) и (1.32), сразу же приходим к формуле Поллячека — Хинчина для среднего числа требований в системе

$$\bar{N} = \rho + \frac{\lambda \bar{x}^2 / 2}{1 - \rho}. \quad (1.83)$$

Как было сказано выше, максимум того, что можно сделать для получения распределений различных величин, задающих ха-

¹⁾ Эта величина связана с понятием *остаточного времени* (residual life), которое будет использоваться в этой книге. Для уточнения этого понятия рассмотрим последовательность точек на реальной оси времени, для которых множество расстояний между соседними точками является множеством независимых, однаково распределенных случайных величин, плотность распределения которых обозначается как $f(x)$. (Иначе говоря, мы имеем дело с процессом восстановления.) Обозначим через t_n n -й момент распределения длины интервала. Выберем теперь случайную точку на оси времени. Интервал, в который попадает эта точка, назовем отобранным интервалом. Длину отобранного интервала называют *временем жизни* интервала, время от начала отобранного интервала до рассматриваемой точки — *возрастом* интервала, а расстояние от этой точки до конца отобранного интервала — *остаточным временем* интервала. Рассмотрим статистику остаточного времени. ПРВ остаточного времени дается равенством $\hat{f}(x) = = [1 - F(x)]/m_1$, а преобразование Лапласа этой плотности равно $\hat{F}^*(s) = = [1 - F^*(s)]/(sm_1)$, где приняты обозначения $F(x) = \int_0^x f(y) dy$, $F^*(s)$ — преобра-

зование Лапласа ПРВ $f(x)$. Вероятно, наиболее существенной статистикой является *среднее остаточное время*, равное $m_2/2m_1$; иначе говоря, математическое ожидание оставшейся жизни интервала просто равно второму моменту, деленному на удвоенный первый момент длины самого интервала. Таким образом, ПРВ времени жизни отобранного интервала равна $x\hat{f}(x)/m_1$.

Наконец, опишем вероятность того, что длина интервала (или какая-либо случайная величина) находится между x и $x+dx$ при условии, что она превышает x . Разделив эту вероятность на dx , получим так называемую *интенсивность отказов* случайной переменной, которая определяется как $f(x)/[1 - F(x)]$, где f и F — соответственно ПРВ и ФРВ самой случайной величины.

Очевидно, что W_0 равно среднему остаточному времени обслуживания (т. е. среднему времени, остающемуся до конца обслуживания) $\bar{x}^2/2x$, умноженному на вероятность ($\rho = \lambda \bar{x}$) того, что обслуживающий прибор занят.

рактеристики системы, — это найти их преобразования. С этой целью напомним определение z -преобразования распределения p_k , которое имеет вид $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, и найдем, что оно дается равенством

$$Q(z) = B^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1-\rho)(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (1.84)$$

где $B^*(\lambda - \lambda z)$ — преобразование Лапласа плотности распределения времени обслуживания $b(x)$ в точке $s = \lambda - \lambda z$. Последнее равенство называется преобразованным равенством Поллячека — Хинчина для числа требований в системе; из него легко выводится равенство (1.83)¹⁾. Преобразование Лапласа ПРВ времени ожидания равно

$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}, \quad (1.85)$$

а преобразование Лапласа времени пребывания в системе имеет вид

$$S^*(s) = B^*(s) \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}. \quad (1.86)$$

Два последних равенства также называются преобразованными равенствами Поллячека — Хинчина. Благодаря независимости продолжительностей обслуживания равенство (1.86) связывается с равенством (1.85) очевидным соотношением $S^*(s) = B^*(s) W^*(s)$, т. е. преобразование ПРВ суммы двух независимых случайных величин равно произведению преобразований ПРВ каждой из них в отдельности. Посредством обычного дифференцирования формулы (1.85) легко получается W , определяемая равенством (1.82); аналогично может быть найден второй момент и, следовательно, дисперсия времени ожидания, обозначаемая через σ_W^2 :

$$\sigma_W^2 = W^2 + \frac{\lambda x^3}{3(1-\rho)}. \quad (1.87)$$

Поскольку входящий процесс — пуассоновский, непосредственно получается, что время свободного состояния I распределено по показательному закону, т. е.

$$P[I \leq y] = 1 - e^{-\lambda y}. \quad (1.88)$$

¹⁾ В случае неординарного потока, обсуждавшегося выше в связи с равенством (1.68), для системы $M/G/1$ получается выражение для $Q(z)$, аналогичное (1.84), за исключением того, что $B^*(s)$ рассматривается в точке $s = \lambda - \lambda G(z)$, где $G(z)$ находится из равенства (1.68).

Преобразование ПРВ времени занятости $G^*(s)$ дается функциональным уравнением

$$G^*(s) = B^*(s + \lambda - \lambda G^*(s)), \quad (1.89)$$

которое в общем виде не разрешимо. Однако можно найти различные моменты распределения периода занятости благодаря свойству этого преобразования производить моменты. Например, среднее время занятости g_1 и дисперсия этого времени σ_g^2 даются равенствами

$$g_1 = \frac{\bar{x}}{1 - \rho}, \quad (1.90)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{\sigma_b^2 + \rho(\bar{x})^2}{(1 - \rho)^3}, \quad (1.91)$$

где σ_b^2 — дисперсия времени обслуживания. Аналогично z -преобразование числа требований, обслуженных в течение периода занятости, которое обозначается через $F(z)$, дается функциональным уравнением

$$F(z) = zB^*[\lambda - \lambda F(z)] \quad (1.92)$$

со средним значением и дисперсией, соответственно равными

$$h_1 = \frac{1}{1 - \rho} \quad (1.93)$$

и

$$\sigma_h^2 = \frac{\rho(1 - \rho) + \lambda^2 \bar{x}^2}{(1 - \rho)^3}. \quad (1.94)$$

Важным вероятностным процессом, который пока не рассматривался, является незаконченная работа $U(t)$ в системе в момент времени t . Это марковский процесс, величина которого представляет собой время, необходимое для освобождения системы от всех требований, имеющихся в момент времени t , при условии, что после этого момента в систему не поступают новые требования; иначе говоря, $U(t)$ — это задолженность системы, выраженная в единицах времени.

Для системы с обслуживанием в порядке поступления незаконченная работа также представляет собой время ожидания требования, поступающего в момент t , поэтому $U(t)$ иногда называется «виртуальным» временем ожидания. В случае системы с обслуживанием в порядке поступления и пуассоновским входящим потоком ($M/G/1$) незаконченная работа имеет ту же статистику, что и фактическое время ожидания для поступающих требований. Функция $U(t)$ будет встречаться во многих местах этой книги. Сейчас же представим два важных результата, относящихся к ее

распределению. С этой целью определим функцию

$$F(w, t) = P[U(t) \leq w] \quad (1.95)$$

и рассмотрим хорошо известное интегродифференциальное уравнение Такача

$$\frac{\partial F(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(w, t)}{\partial w} - \lambda F(w, t) + \lambda \int_{x=0}^w B(w-x) d_x F(x, t), \quad (1.96)$$

которое описывает временное поведение распределения незаконченной работы. Определяя двумерное преобразование Лапласа $F^{**}(r, s)$ функции $F(w, t)$, где r соответствует w , а s соответствует t , получим следующее преобразованное уравнение:

$$F^{**}(r, s) = \frac{(r/\eta) e^{-\eta w_0} - e^{-rw_0}}{\lambda B^*(r) - \lambda + r - s}. \quad (1.97)$$

Здесь η — единственный корень уравнения (относительно r) $s - r + \lambda - \lambda B^*(r) = 0$ в области $\operatorname{Re}(s) > 0$, $\operatorname{Re}(r) > 0$, а w_0 — начальное значение незаконченной работы в момент 0, т. е. $U(0) = w_0$. Эти результаты используются в гл. 2.

О системе M/G/1 можно было бы сказать гораздо больше, но здесь мы ограничимся вышеизложенным. Далее естественно перейти к системе M/G/m, но, к сожалению, для нее имеется совсем немного существенных результатов, которые можно сообщить. Предельный случай M/G/∞ является довольно тривиальным, так как в такой системе не возникает очереди. Очень красивый результат для числа занятых приборов (т. е. числа требований в системе) выражается в виде

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}. \quad (1.98)$$

Заметим, что этот результат не зависит от вида распределения $B(x)$, а определяется только его первым моментом. Аналогично можно непосредственно записать, что $T = x$ и $s(y) = b(y)$.

Используя метод коллективных меток, некоторые из приведенных выше преобразований можно интерпретировать как вероятности. Это основано на предположении, что независимо на каждое поступающее требование ставится метка с вероятностью $(1-z)$. Тогда производящую функцию $P(z, t) = E[z^{N(t)}]$ для входящего потока (например, для пуассоновского потока $P(z, t) = e^{\lambda t(z-1)}$) можно интерпретировать как вероятность того, что ни одно из требований, поступающих в промежутке $(0, 1)$, не будет отмечено меткой. Аналогично рассмотрим любой промежуток, длина которого задается случайной величиной X , а ПВР X имеет преобразование Лапласа $X^*(s)$. Если затем рассмотреть независимый от этого промежутка пуассоновский входящий поток (с интенсивностью λ) и вероятность P того, что ни одно из требований, поступающих в течение времени X , не будет отмечено меткой, то

получим $P = X^*(\lambda - \lambda z)$. Рассмотрим опять, как и выше, промежуток и независящий от него пуассоновский процесс. Предположим, что точки, генерируемые пуассоновским процессом, являются катастрофами. Если мы интересуемся вероятностью Q того, что в случайный промежуток времени не произойдет ни одной катастрофы, то $Q = X^*(\lambda)$. Таким образом, можно дать интересную вероятностную интерпретацию для ряда основных преобразований, которые встречаются в теории массового обслуживания.

1.8. СИСТЕМА G/M/1

Система G/M/1 является двойственной по отношению к системе M/G/1. Однако неожиданно анализ G/M/1 оказался проще, чем анализ M/G/1, и можно непосредственно привести соответствующие распределения. Рассматриваемая система характеризуется произвольным законом распределения промежутков между моментами поступления требований, ФРВ которого обозначается через $A(t)$, а ПРВ — как $a(t)$. Преобразование $a(t)$ обозначается через $A^*(s)$; время обслуживания в системе распределено по показательному закону со средним значением $1/\mu$.

Основное рекуррентное соотношение, описывающее работу системы G/M/1 (а также системы G/M/m), подобно уравнению (1.81) для системы M/G/1 и имеет следующий вид:

$$q'_{n+1} = q'_n + 1 - v'_{n+1}, \quad (1.99)$$

где q'_n — число требований, которое застает в системе поступающее требование C_n , а v'_{n+1} — число требований, обслуженных за время между моментами поступлений требований C_n и C_{n+1} . Последовательность $\{q_n\}$ образует цепь Маркова. Из этого уравнения следуют многие результаты для системы G/M/m.

Все эти результаты выражаются через корень σ , который является единственным (в области $0 \leq \sigma < 1$) корнем уравнения

$$\sigma = A^*(\mu - \mu\sigma). \quad (1.100)$$

После того как определено σ , непосредственно находятся следующие результаты. Распределение числа требований, которые застает в системе вновь поступающее требование, дается формулой

$$r_k = (1 - \sigma) \sigma^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.101)$$

ФРВ времени ожидания представляется равенством

$$W(y) = 1 - \sigma e^{-\mu(1-\sigma)y}, \quad y \geq 0, \quad (1.102)$$

а среднее время ожидания равно

$$W = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)}. \quad (1.103)$$

Время ожидания распределено по показательному закону и не зависит от вида распределения промежутков времени между моментами поступления требований (иначе, чем через σ).

1.9. СИСТЕМА G/M/m

В противоположность системе M/G/m СМО типа G/M/m дает материал для исследований, результаты которых излагаются в настоящем разделе. Система G/M/m характеризуется произвольным распределением промежутков времени между моментами поступления требований и одной очередью, обслуживающей m приборами, каждый из которых имеет показательный закон распределения времени обслуживания со средним значением $1/\mu$. Требования обслуживаются в порядке их поступления. Как и для СМО типа G/M/1, здесь основным параметром является σ ; в данном случае σ определяется как единственное в области $0 \leq \sigma < 1$ решение уравнения

$$\sigma = A^* (m\mu - m\mu\sigma). \quad (1.104)$$

Распределение длины очереди, которую застает новое требование, при условии, что это требование должно стать в очередь, определяется равенством

$$P[\text{длина очереди } = n | \text{поступающее требование становится в очередь}] = (1 - \sigma) \sigma^n, \quad n \geq 0. \quad (1.105)$$

Заметим, что, как и в системе G/M/1, длина очереди описывается геометрическим распределением. Обозначим опять через r_k вероятность того, что вновь поступающее требование застает k требований в системе впереди себя. Используя эти вероятности, определим

$$R_k = \begin{cases} r_k/J, & 0 \leq k \leq m-2, \\ \sigma^{k-m+1}, & m-2 < k. \end{cases} \quad (1.106)$$

Необходимо вычислить J и $m-1$ значений R_k при $0 \leq k \leq m-2$. Уравнение для J имеет вид

$$J = \frac{1}{[1/(1-\sigma)] + \sum_{k=0}^{m-2} R_k}, \quad (1.107)$$

а значения R_k определяются при помощи системы уравнений

$$R_{k-1} = \frac{R_k - \sum_{i=k}^{m-2} R_i p_{ik} - \sum_{i=m-1}^{\infty} \sigma^{i+1-m} p_{ik}}{p_{k-1, k}}, \quad (1.108)$$

где переходные вероятности p_{ij} нетривиальны и вычисляются при помощи следующих четырех равенств, зависящих от индексов i и j :

$$p_{ij} = 0, \quad j > i + 1, \quad (1.109)$$

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \binom{i+1}{j} [1 - e^{-\mu t}]^{i+1-j} e^{-\mu t j} dA(t), \quad j \leq i + 1 \leq m, \quad (1.110)$$

$$\beta_n = p_{i, i+1-n} = \int_0^{\infty} \frac{(m\mu t)^n}{n!} e^{-m\mu t} dA(t), \quad 0 \leq n \leq i + 1 - m, \quad m \leq i, \quad (1.111)$$

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \binom{m}{j} e^{-j\mu t} \left[\int_0^t \frac{(m\mu y)^{i-m}}{(i-m)!} (e^{-\mu y} - e^{-\mu t})^{m-j} m\mu dy \right] dA(t), \\ j \leq m < i + 1. \quad (1.112)$$

После того как эти постоянные вычислены, можно найти среднее время ожидания

$$W = \frac{J\sigma}{m\mu(1-\sigma^2)}. \quad (1.113)$$

ФРВ времени ожидания имеет вид

$$W(y) = 1 - \frac{\sigma e^{-m\mu(1-\sigma)y}}{m-2}, \quad y \geq 0. \quad (1.114)$$

$$1 + (1-\sigma) \sum_{k=0}^{\infty} R_k$$

Тогда как два последних равенства требуют трудоемких вычислений постоянных, ПРВ времени ожидания при условии, что поступающее требование становится в очередь, имеет простой вид

$w(y | \text{поступающее требование становится в очередь}) =$

$$= (1-\sigma) m\mu e^{-m\mu(1-\sigma)y}, \quad y \geq 0. \quad (1.115)$$

Здесь требуется только вычислять σ . Заметим, что даже для $G/M/m$ условное время ожидания распределено по показательному закону.

1.10. СИСТЕМА G/G/1

В общей теории массового обслуживания рассматриваются системы $G/G/1$ и более сложные системы (например, система $G/G/m$, о которой можно сказать очень немногое — вспомним, что даже система $M/G/m$ ставит нас в тупик). В этом разделе при-

водятся некоторые основные хорошо известные результаты для системы G/G/1 и описан подход, который иногда приводит к получению требуемого решения или по крайней мере некоторых упрощенных характеристик. Кроме того, излагается точка зрения, которая позволяет понять сущность операций, применяемых при анализе системы G/G/1.

Как указывалось в первом разделе этой главы, работа любой СМО задается следующими случайными величинами: промежутками времени t_n между моментами поступления соседних требований и продолжительностями обслуживания x_n . В общем описании системы G/G/1 можно обнаружить, что эти случайные величины не появляются отдельно, а всегда фигурируют в виде разности; поэтому рассмотрим новую случайную величину, связанную с n -м требованием C_n , а именно

$$u_n = x_n - t_{n+1} \quad (1.116)$$

Эта случайная величина представляет собой разность между величиной работы x_n , которую требование C_n запрашивает у системы, и «передышкой» t_{n+1} , т. е. временем между поступлением этого требования и поступлением следующего требования C_{n+1} . Можно надеяться, что эта разность в среднем будет отрицательна, так что передышка будет больше нагрузки системы. В самом деле, если взять среднее значение величины u_n из формулы (1.116), то получится равенство

$$E[u_n] = \bar{t}(\rho - 1). \quad (1.117)$$

Выражение (1.117), во-первых, не зависит от n (как и можно было ожидать) и, во-вторых, имеет отрицательное значение при $\rho < 1$. Это ничем не отличается от условия $R < C$, которое требуется для того, чтобы система была стабильной. Для случайной величины u_n , которую запишем теперь в общем виде как u , обозначим ФРВ через $C(u)$, ПРВ — через $c(u)$, а преобразование Лапласа этой ПРВ пусть будет $C^*(s)$. Выражая две последние функции через плотности распределений и преобразования Лапласа промежутков между поступлениями требований и продолжительностей обслуживания, получаем

$$c(u) = \int_{-\infty}^{\infty} b(u+t) a(t) dt \quad (1.118)$$

и

$$C^*(s) = A^*(-s) B^*(s). \quad (1.119)$$

Интеграл в (1.118) — это свертка $a(-u)$ и $b(u)$, которую будем обозначать как $c(u) = a(-u) * b(u)$. Таким образом, если известна ПРВ промежутков между поступлениями требований и ПРВ про-

должжительностей обслуживания, то, следовательно, известна ПРВ случайной величины u .

При исследовании системы G/G/1 в первую очередь интересуются временем ожидания w_n для требования C_n . Эта случайная величина последовательно связана с другими следующим уравнением:

$$w_{n+1} = \max [0, w_n + u_n], \quad (1.120)$$

в котором главную роль играет случайная величина u_n . Это основное уравнение для системы G/G/1 [как уравнение (1.81) для M/G/1 и уравнение (1.99) для G/M/1]. Последовательность $\{w_n\}$ образует марковский процесс с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний (фактически вложенный марковский процесс). Введенный выше оператор выбора максимума часто записывается в следующем виде: $(x)^+ = \max(0, x)$. Для стабильной системы ($\rho < 1$) существует предельная случайная величина \tilde{w} , описывающая стационарное время ожидания. Из уравнения (1.120) можно видеть, что \tilde{w} должна иметь тот же закон распределения, что и $(w + \tilde{u})^+$. ПРВ, которая удовлетворяет этому условию, является единственным решением для ПРВ времени ожидания. Обозначим ПРВ для w_n через $w_n(y)$. Функциональное (нелинейное) уравнение, которое определяет эту ПРВ, имеет вид

$$w_{n+1}(y) = \pi(w_n(y) * c(y)), \quad (1.121)$$

где $*$ — оператор свертки, а π — некоторый оператор, который ви- доизменяет ПРВ своего аргумента путем замены всей вероятности, связанной с отрицательными значениями (аргумента ПРВ), на импульс в точке $y=0$, площадь которого равна этой вероятности. ПРВ $w(y)$ для рассматриваемой предельной случайной величины \tilde{w} должна на основании формулы (1.121) удовлетворять следующему основному уравнению:

$$w(y) = \pi[w(y) * c(y)], \quad (1.122)$$

решение которого дает стационарную плотность для времени ожидания в системе G/G/1. Из уравнения (1.122) следует, что эта стационарная ПРВ должна быть такой, что когда она образует свертку с $c(y)$ и результирующая плотность переносит всю свою вероятность с отрицательной полусоси в импульс, расположенный в нуле, результирующая ПРВ имеет такой же вид, как и $w(y)$, с которой начиналось рассмотрение.

Еще один путь описания случайной величины \tilde{w} состоит в использовании равенства

$$\tilde{w} = \sup_{n>0} U_n, \quad (1.123)$$

где $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ ($n \geq 1$) и $U_0 = 0$.

Связанная с w_n случайная величина, которая образует «другую половину» w_n , равна

$$y_n = -\min[0, w_n + u_n]. \quad (1.124)$$

Таким образом,

$$w_{n+1} - y_n = w_n + n_n. \quad (1.125)$$

Усредняя это уравнение при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\bar{y} = -\bar{u}. \quad (1.126)$$

Другое соотношение, определяющее ФРВ времени ожидания, дается хорошо известным интегральным уравнением Линдли

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (1.127)$$

Это уравнение такого же типа, как и уравнение Винера — Хопфа. Обозначим через $\Phi_+(s)$ преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания $W(y)$. Заметим, что это преобразование ФРВ, а не ПРВ $w(y)$, которое раньше обозначалось через $W^*(s)$ и связано с этим новым преобразованием равенством $W^*(s) = s\Phi_+(s)$. Необходимо найти $\Phi_+(s)$. Процедура, которая будет описана, формально справедлива для систем G/G/1, у которых $A^*(s)$ и $B^*(s)$ могут быть записаны как дробно-рациональные функции s . В случае рассматриваемой задачи необходимо найти подходящее представление следующего выражения:

$$A^*(-s) B^*(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}, \quad (1.128)$$

где при $\operatorname{Re}(s) > 0$ функция $\Psi_+(s)$ должна быть аналитической по s и не иметь нулей в этой полуплоскости. Аналогично при $\operatorname{Re}(s) < -D$ функция $\Psi_-(s)$ должна быть аналитической по s и не иметь нулей ($D > 0$). Кроме того, при стремлении $|s|$ к бесконечности должно выполняться соотношение $\Psi_+(s) \approx s$ при $\operatorname{Re}(s) > 0$ и $\Psi_-(s) \approx -s$ при $\operatorname{Re}(s) < D$. Выполнив эту спектральную факторизацию, можно записать решение для $\Phi_+(s)$ в виде

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\Psi_+(s)}, \quad (1.129)$$

где постоянная K может быть вычислена по формуле

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(s)}{s}. \quad (1.130)$$

Эта постоянная представляет вероятность того, что поступающее требование не должно стоять в очереди. Заметим, что если най-

дено $\Phi_+(s)$, то тем самым найдено и преобразование ПРВ времени ожидания, что и требовалось сделать.

Хотя выше была описана процедура определения ПРВ времени ожидания, мы не смогли определить свойства ПРВ и фактически даже не дали выражения для среднего времени ожидания W в системе G/G/1. К сожалению, это выражение в общем виде неизвестно. Однако W можно выразить через другие величины следующим образом. Например, среднее время ожидания равно отрицательной сумме значений среднего остаточного времени случайных величин u и \bar{y} (последняя является предельной случайной величиной для последовательности y_n), т. е.

$$W = -\frac{\bar{u}^2}{2u} - \frac{\bar{y}^2}{2\bar{y}}. \quad (1.131)$$

Можно показать, что среднее остаточное время величины \bar{y} в частности равно среднему остаточному времени случайной величины I , которая обозначает продолжительность свободного состояния в системе G/G/1. Учитывая последнее замечание, а также то, что два первых момента случайной величины u легко рассчитать, можно получить следующее выражение для среднего времени ожидания в G/G/1:

$$W = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + (\bar{t})^2 (1 - \rho)^2}{2\bar{t}(1 - \rho)} - \frac{\bar{t}^2}{2\bar{t}}, \quad (1.132)$$

где σ_a^2 и σ_b^2 — соответственно дисперсии промежутка между соседними моментами поступления требований и продолжительности обслуживания. Формула (1.132) будет использована в гл. 2 при отыскании границ для среднего времени ожидания.

Точные результаты исследований системы G/G/m здесь не приводятся. Читатель может обратиться к гл. 2, где даны оценки и границы. Кифер и Вольфович [3] разработали изящный способ точного анализа системы G/G/m, включающий (обычно невыполнимое) решение интегрального уравнения (которое сводится к интегральному уравнению Линдли для системы G/G/1). Сравнительно недавно де Смит [2] распространил теорию Поллячека [5] на систему G/G/m и разработал теорию систем G/M/m и G/H_R/m.

Этим завершается очень краткий обзор элементов теории массового обслуживания. Большая часть приведенного материала будет использоваться в следующих главах. Необходимо подчеркнуть что ряд важных задач теории массового обслуживания остается нерешенным. Тем не менее на практике мы вынуждены применять теорию массового обслуживания при решении актуальных задач. Эти задачи, так же как и методы использования описанной теории, рассматриваются в настоящей книге. Мы начнем с довольно

трудной с точки зрения теории массового обслуживания главы, цель которой состоит не в том, чтобы продолжать изложение строгой теории (как это делалось здесь), а в том, чтобы найти *эффективные приближенные методы*, которые позволяют применять теорию в подлинно инженерном смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brockmeyer E. H. L., Halstrøm H. L., Jensen A., The Life and Works of A. K. Erlang, *Transactions of the Danish Academy of Technology and Science*, 2 (1948).
2. De Smit J. H. A., Some General Results for Many Server Queues, p. 153—169; On the Many Server Queue with Exponential Service Times, *Advances in Applied Probability*, 5, No. 1 (April 1973).
3. Kiefer J., Wolfowitz J., On the Theory of Queues with Many Servers, *Transactions of the American Mathematics Society*, 78, 1—18 (1955).
4. Kleinrock L., Queueing Systems, Volume I, Theory, Wiley, New York, 1975.
5. Pollaczek F., Théorie Analytique des Problèmes Stochastiques Relatifs à un Groupe de Lignes Téléphoniques avec Dispositif d'attente, Gauthiers-Villars, Paris, 1961.
6. Telephone Traffic Theory Tables and Charts, Part 1, Siemens Aktiengesellschaft, Telephone and Switching Division, Munich, 1970.

Глава 2

Границы, неравенства и приближения

Развитие нового интересного направления теории массового обслуживания связано с поисками методов приближенного описания систем массового обслуживания (СМО)¹⁾. Легко убедиться, что теория массового обслуживания — довольно сложная дисциплина и получить точные результаты в ней очень трудно. Многие интересные задачи до сих пор не поддаются точному анализу (и, возможно, никогда не будут исследованы точно!). Более того, точные результаты, которые можно получить для простых систем, нередко настолько сложные, что делает их малопригодными для практических применений.

Если задаться вопросом, почему мы изучаем теорию массового обслуживания, то легко прийти к выводу, что это делается прежде всего для получения знаний о свойствах реальных очередей в реальной жизни. Математические модели, описывающие реальные явления, представляют собой идеализированные функции, и, если действительно интересоваться ответами на практические вопросы, не следует слишком увлекаться этими моделями. Нужно учитывать, что подлинные задачи массового обслуживания редко удовлетворяют предположениям, которые делаются в большинстве работ по теории массового обслуживания. Стационарность встречается редко, независимость имеет место лишь иногда, эргодичность неправдоподобна и установить ее путем измерений за конечное время просто невозможно!. Следовательно, поскольку математические модели грубые, мы должны быть готовы удовлетворяться гораздо меньшим, чем точные решения систем уравнений, к которым приводят эти модели, а именно нужно довольствоваться приближенными решениями для этих «приближенных» математических моделей и надеяться, что такие решения могут дать полезные сведения о свойствах реальных СМО. Гораздо более важным является отыскание «робастного» качественного описания

¹⁾ Вероятно, первые приближения в теории массового обслуживания были сделаны Эрлангом, который пользовался методом каскадов ([27], разд. 4.2). Эрланг пытался приближенно описать при помощи простых аналитических функций основные распределения теории массового обслуживания. По этим вопросам читателю могут быть рекомендованы монография [49] и обзор трудов Эрланга [5], представляющий также некоторый исторический интерес.

СМО, которое позволяет оценить работу сложных систем «на пальцах». Хороший пример успешного использования робастной модели приводится в гл. 4, где используются марковские сети массового обслуживания для моделирования вычислительной системы с множественным доступом. В работе [8] обсуждается способ, с помощью которого простые робастные модели могут быть построены на основе структуры СМО. Второй пример — использование диффузионных приближений в разнообразных приложениях (см. разд. 2.9, 4.13 и 4.14). Третий пример приведен в гл. 5, где разрабатывается робастная модель, описывающая задержку в сети ЭВМ. Эти три примера показывают, насколько успешно можно применять простые (чисто марковские) модели для исследования работы довольно сложных реальных систем. Вопросы, подобные этим, обсуждаются в настоящей главе, где подчеркивается, что рассматриваемый подход к исследованию СМО сравнительно нов и представляет большой потенциальный интерес.

Глава построена следующим образом. Сначала устанавливается робастное приближение для распределения времени ожидания в очереди в системе $G/G/1$ при большой нагрузке ($\rho \rightarrow 1$ снизу). Именно это приближение скрывается под формой многих результатов, которые были уже приведены. Затем из первоначальных принципов (хороших при $0 \leq \rho < 1$) устанавливается довольно точная верхняя граница для среднего времени ожидания W ; нижние границы для W получить труднее, хотя приводятся некоторые известные результаты и для этого случая. (К сожалению, даже W не может быть точно выражено через простые параметры СМО типа $G/G/1$.) В разд. 2.4 дается также граница для хвоста распределения времени ожидания. Большинство результатов первых четырех разделов основаны на работах Кингмана [22—26] и его продолжателей [6, 7, 32, 35, 48]. В разд. 2.5 приводится простое дискретное приближение для системы $G/G/1$, полученное с использованием методов элементарной теории массового обслуживания. Затем делаются некоторые замечания относительно границ для W в системе $G/G/m$. В этой части главы мы отказываемся от нашего первоначального подхода к отысканию приближенных решений для заданных систем уравнений и предпринимаем попытку приближения самих вероятностных процессов (т. е. процессов на входе и выходе). Мы начинаем с приближения первого порядка, при котором вероятностные процессы заменяются их средними значениями (возможно, зависящими от времени), что приводит к *непрерывным приближениям* (fluid approximation) для СМО. Затем исследуется приближение второго порядка, при котором вероятностный процесс представляется как его средним значением, так и дисперсией; это дает *диффузионное приближение* СМО. Диффузионное приближение совершенствует непрерывное приближение, так как оно описывает зависящие от времени процессы средними значе-

ниями, определяемыми непрерывным приближением, но с флуктуациями относительно среднего значения (возможно, меняющегося во времени) в соответствии с нормальным (гауссовским) распределением. В случае стабильной СМО ($\rho < 1$) предел этого диффузионного приближения при $t \rightarrow \infty$ в действительности совпадает с приближением при большой нагрузке, рассмотренным в разд. 2.1. Эти результаты связаны между собой, так как диффузионное приближение предполагает, что очередь никогда не исчезает. Такое приближение используется при большой нагрузке. Далее приводится подробное обсуждение диффузионного приближения для системы $M/G/1$. Затем находится приближенное решение для часа пик, столь часто встречающееся в практической жизни. Методы диффузионного приближения исследуются в ряде работ [13, 18, 19, 28, 29, 36, 39, 40, 41].

2.1. ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ БОЛЬШОЙ НАГРУЗКЕ

В данном разделе исследуется работа системы $G/G/1$ при *большой нагрузке* [23]. Это случай, когда $\rho \approx 1$ (но остается строго меньше единицы для сохранения стабильности). Будет получен центральный результат теории большой нагрузки, согласно которому распределение времени ожидания приближенно описывается показательным законом со средним значением $(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)/2(1-\rho)\bar{t}$. Этот результат используется в большинстве методов приближения. (Он справедлив, когда знаменатель мал по сравнению с квадратным корнем числителя.)

При выводе центрального результата отправным выражением является равенство (1.128), имеющее следующий вид:

$$A^*(-s) B^*(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим это равенство в случае $\rho \approx 1$. Начнем с разложения $B^*(s)$ и $A^*(-s)$ в ряды Тейлора. Имеем

$$B^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} B^{*(k)}(0). \quad (2.2)$$

Из равенства (1.17) следует, что $B^{*(k)}(0) = (-)^k \bar{x}^k$. Учитывая это и рассматривая $B^*(s)$ вблизи нуля ($s \rightarrow 0$), получаем¹⁾

$$B^*(s) = 1 - \bar{x}s + \frac{\bar{x}^2 s^2}{2!} + o(s^2). \quad (2.3)$$

¹⁾ Как обычно, $o(x)$ обозначает произвольную функцию, которая стремится к нулю быстрее, чем x , т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

Аналогично находим

$$A^*(-s) = 1 + \bar{t}s + \frac{\bar{t}^2 s^2}{2!} + o(s^2). \quad (2.4)$$

Теперь, поскольку рассматривается случай большой нагрузки, представляет интерес распределение *больших* значений времени ожидания. Напомним, что преобразование Лапласа для распределения времени ожидания $\tilde{W}(y)$ обозначается как $\Phi_+(s)$, а преобразование плотности $w(y)$ имеет вид $W^*(s) = s\Phi_+(s)$. Можно заметить, что поведение функции $W(y)$ при больших значениях y определяется тем полюсом (особой точкой) функции $\Phi_+(s)$, который имеет наименьшее абсолютное значение $\operatorname{Re}(s)$. Это следует из того, что скорость уменьшения каждого показательного члена в $w(y)$ или $W(y)$ связана обратной зависимостью с (отрицательной) действительной частью полюса, относящегося к указанному члену. Выражение в формуле (2.1) обращается в нуль при $s=0$ и имеет дополнительный нуль вблизи $s=0$ в случае большой нагрузки. Как увидим, дополнительный нуль образует полюс функции $\Phi_+(s)$, который определяет поведение больших значений времени ожидания (это теорема о финальном значении из теории преобразования Лапласа)¹⁾. Найдем дополнительный нуль (который имеет небольшую, но отрицательную действительную часть). Используя разложения (2.3) и (2.4), получаем

$$\begin{aligned} A^*(-s)B^*(s)-1 &= \left(1 - \bar{x}s + \frac{\bar{x}^2 s^2}{2}\right) \left(1 + \bar{t}s + \frac{\bar{t}^2 s^2}{2}\right) - 1 + o(s^2) = \\ &= 1 + s(\bar{t} - \bar{x}) + s^2 \left(\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{t}^2}{2} - \bar{x}\bar{t}\right) - 1 + o(s^2) = \\ &= s \left[\bar{t} - \bar{x} + s \left(\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{t}^2}{2} - \bar{x}\bar{t}\right)\right] + o(s^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из этого выражения видно, что имеется корень $s=0$. В поисках второго корня в окрестности точки $s=0$ сначала заметим, что

$$\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{t}^2}{2} - \bar{x}\bar{t} = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2} + \frac{(\bar{x} - \bar{t})^2}{2}. \quad (2.6)$$

Так как $\rho \approx 1$, предположим, что в равенстве (2.6) последний член правой части (квадрат разности первых моментов) пренебрежимо мал по сравнению с первым членом (суммой дисперсий). Используя равенство (2.6) при этом приближении и отбрасывая $o(s^2)$ (так как рассматривается окрестность нулевой точки), мож-

¹⁾ Благодаря этому единственному критическому полюсу возникает показательное распределение.

но записать уравнение для второго корня (который обозначим через s_0) в виде

$$\bar{t} - \bar{x} + s_0 \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2} \approx 0.$$

Следовательно,

$$s_0 \approx -\frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}, \quad (2.7)$$

Очевидно, что $s_0 < 0$. Из этого соотношения и равенства (2.5) можно заметить, что корень s_0 приближенно равен обратному значению среднего остаточного времени (см. сноску на стр. 32) случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \bar{t}$. Таким образом, в качестве приближения вблизи нулевой точки имеем

$$A^*(-s) B^*(s) - 1 \approx s(s - s_0) \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2}.$$

Возвращаясь теперь к нашей цели, заметим, что, когда s находится вблизи начала координат, используя выражение (2.1), можно получить приближение

$$\Psi_+(s) \approx s(s - s_0) C, \quad (2.8)$$

где $C = \Psi_-(0) [\sigma_a^2 + \sigma_b^2]/2$. Из равенства (1.129) видно, что для того, чтобы перейти к решению для $\Phi_+(s)$, нужно вычислить постоянную K . Используя равенство (1.130), это можно сделать следующим образом:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} (s - s_0) C = -s_0 C.$$

Из формулы (1.129) с учетом этого выражения получаем

$$\Phi_+(s) \approx \frac{-s_0}{s(s - s_0)}.$$

Неизвестная постоянная C сокращается! Выполняя разложение на простые дроби, находим

$$\Phi_+(s) \approx \frac{1}{s} - \frac{1}{s - s_0}.$$

Наконец, используя выражение для s_0 и преобразование Лапласа, получаем

$$W(y) \approx 1 - \exp\left(-\frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} y\right). \quad ■ \quad (2.9)$$

Последнее равенство дает аппроксимацию распределения времени ожидания в области больших значений времени ожидания при $\rho \approx 1$. Значение s_0 дается равенством (2.7). Заметим, что среднее время ожидания W определяется выражением $1/s_0$, и, таким образом,

$$W \approx \frac{(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)}{2(1-\rho)t}. \quad \blacksquare \quad (2.10)$$

Равенства (2.9) и (2.10) представляют собой *центральные результаты* теории системы G/G/1 при большой нагрузке. Эти результаты в высшей степени робастные и дают общую характеристику СМО с большими значениями времени ожидания. Из соотношения (2.10) видно, что числитель среднего времени ожидания определяется флуктуациями процессов поступления требований и обслуживания, тогда как знаменатель (преобладающий в случае большой нагрузки) зависит только от первых моментов (в частности, от ρ). Показательный характер распределения этих больших значений времени ожидания составляет содержание в некотором смысле центральной предельной теоремы теории массового обслуживания; он опять появится в дальнейшем при диффузионном приближении¹⁾.

2.2. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Приближение при большой нагрузке, исследованное в предыдущем разделе, приводит к показательному распределению больших значений времени ожидания и среднему значению, которое задается равенством (2.10). В настоящем разделе интерес представляет не приближение, а строгая верхняя граница для среднего времени ожидания W в системе G/G/1.

Приводимые здесь простые выкладки предложены Кингманом [24]. Как указано в разд. 1.10, предельная случайная величина \tilde{w} имеет такое же распределение, как и случайная величина $(\tilde{w} + \tilde{u})^+$. Поэтому, предполагая существование используемых ниже моментов, имеем

$$E[(\tilde{w})^k] = E\{[(\tilde{w} + \tilde{u})^+]^k\}. \quad (2.11)$$

Введем обозначение

$$X^- \triangleq -\min[0, X]. \quad (2.12)$$

¹⁾ Метод приближения при большой нагрузке использовался также при исследовании последовательности СМО [16]. Было показано, что распределение полного времени ожидания асимптотически зависит только от средних значений и дисперсий распределений интервалов между поступающими требованиями и времени обслуживания. Если все дисперсии одинаковы, распределение времени ожидания является показательной функцией этих моментов.

Далее, учитывая, что $(X)^+ \Deltaq \max[0, X]$, получаем простое соотношение

$$X = (X)^+ - (X)^-. \quad (2.13)$$

Из этих определений также следует, что

$$(X)^+ (X)^- = 0. \quad (2.14)$$

Возводя в квадрат выражение (2.13) и учитывая равенство (2.14), находим

$$X^2 = [(X)^+]^2 + [(X)^-]^2. \quad (2.15)$$

Считая X случайной величиной, можно взять математическое ожидание в равенстве (2.13):

$$\bar{X} = (\bar{X})^+ - (\bar{X})^-. \quad (2.16)$$

Аналогично из равенства (2.15) получаем

$$\bar{X}^2 = \overline{[(X)^+]^2} + \overline{[(X)^-]^2}.$$

Так как $\sigma_X^2 = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$, с помощью указанных соотношений можно получить следующее выражение:

$$\sigma_X^2 = \sigma_{(X)^+}^2 + \sigma_{(X)^-}^2 + 2(\bar{X})^+ (\bar{X})^- . \quad (2.17)$$

Последний результат справедлив для любой случайной величины X .

Теперь считая, что $X = \tilde{w} + \tilde{u}$, на основании формулы (2.16) получаем, что $\bar{X} = \bar{w} + \bar{u}$ дается следующим выражением:

$$\bar{w} + \bar{u} = \overline{(\tilde{w} + \tilde{u})^+} - \overline{(\tilde{w} + \tilde{u})^-}. \quad (2.18)$$

Однако из равенства (2.11) (при $k=1$) имеем $\bar{w} = \overline{(\tilde{w} + \tilde{u})^+}$ и, следовательно, соотношение (2.18) может быть представлено в виде¹⁾

$$\bar{u} = -\overline{(\tilde{w} + \tilde{u})^-}.$$

Кроме того, из равенства (2.11) имеем

$$\sigma_{\tilde{w}}^2 = \sigma_{(\tilde{w} + \tilde{u})^+}^2. \quad (2.19)$$

Опять принимая $X = \tilde{w} + \tilde{u}$, видим, что член $\sigma_{(X)^+}^2$ в (2.17) может быть положен равным $\sigma_{\tilde{w}}^2$ на основании соотношения (2.19). Кро-

¹⁾ Заметим, что предельная случайная величина $\tilde{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ должна иметь такое же распределение, как и $(\tilde{w} + \tilde{u})^-$; это можно увидеть из равенства (1.124).

ме того, поскольку w_n и u_n независимы, $\sigma_{(\tilde{w}+\tilde{u})}^2 = \sigma_{\tilde{w}}^2 + \sigma_{\tilde{u}}^2$, и, таким образом, равенство (2.17) окончательно принимает вид

$$\sigma_{\tilde{w}}^2 + \sigma_{\tilde{u}}^2 = \sigma_{\tilde{w}}^2 + \sigma_{(x)}^2 - + 2(\tilde{w} + \tilde{u})^+ (\tilde{w} + \tilde{u})^-.$$
 (2.20)

Относительно последнего члена этого равенства уже установлено, что $(\tilde{w} + \tilde{u})^+ = \bar{w}$ и $(\tilde{w} + \tilde{u})^- = -\bar{u}$. Учитывая это и сокращая дисперсию w в обеих частях последнего равенства, получаем

$$\sigma_{\tilde{u}}^2 = \sigma_{(x)}^2 - 2\bar{w}\bar{u}.$$
 (2.21)

По определению $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$ и, как мы уже видели много раз, $\bar{u} = -\tilde{t}(\rho - 1)$. Аналогично, поскольку \tilde{x} и \tilde{t} независимы, должно быть справедливо соотношение $\sigma_{\tilde{x}}^2 = \sigma_{\tilde{t}}^2 + \sigma_{\tilde{x}}^2$. Однако мы уже обозначили дисперсии промежутков между требованиями и дисперсии времени обслуживания соответственно через σ_a^2 и σ_b^2 . Учитывая это и находя w (которое раньше обозначалось через W), из равенства (2.21) получаем

$$W = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2\tilde{t}(1-\rho)} - \frac{\sigma_{(x)}^2}{2\tilde{t}(1-\rho)}.$$

Так как дисперсия всегда неотрицательна, можно опустить последний член в этом равенстве и тем самым получить окончательную верхнюю границу для среднего времени ожидания

$$W \leq \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2\tilde{t}(1-\rho)}. \blacksquare \quad (2.22)$$

Этот результат справедлив при $0 \leq \rho < 1$ и улучшается при $\rho \rightarrow 1^+$. Полученный результат уже знаком. В действительности это сред-

¹⁾ Заметим, что верхняя граница превышает известное точное значение среднего времени ожидания для системы $M/G/1$ [определенное формулой Поллячека — Хинчина (1.82)] на величину $(\bar{x} + \bar{t})/2$, которая меньше, чем один промежуток времени между поступающими требованиями. Марчэл предложил нормировать верхнюю границу (2.22), чтобы она снизилась и стала точной для системы $M/G/1$; его приближение имеет вид

$$W \approx \frac{1 + C_b^2}{(1/\rho)^2 + C_b^2} \left[\frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2\tilde{t}(1-\rho)} \right],$$

где C_b — коэффициент изменчивости времени обслуживания, определяемый как $C_b = \sigma_b/\bar{x}$. В работах [15, 32] рассматривается эффективность этого (и других) приближения для W . Численные исследования в этих работах показывают, что приближения хорошо соответствуют системе $G/M/1$ в смысле относительной ошибки. Для системы $G/G/1$ соответствие удовлетворительное, но ухудшается с увеличением коэффициента изменчивости промежутков между требованиями или времени обслуживания и улучшается с увеличением ρ .

нее время ожидания, полученное в предыдущем разделе для приближения при большой нагрузке. Теперь видно, что приближение среднего времени ожидания при большой нагрузке дает строгую верхнюю границу для среднего времени ожидания в любой системе G/G/1. В разд. 1.4 утверждалось, что поведение среднего времени ожидания в системе M/M/1 является типичным для большинства СМО в том отношении, что оно определяется простым полюсом при $\rho = 1$. Это утверждение подтверждается основными результатами настоящего и предыдущего разделов.

Полученная верхняя граница по существу не зависит от закона распределения. Она определяется только первыми двумя моментами распределений промежутков между требованиями и времени обслуживания. Это является важным преимуществом, так как нередко можно определить только некоторые простые свойства на входе (например, среднее значение и дисперсию), но, к сожалению, оно не распространяется на нижнюю границу, которая обсуждается в следующем разделе.

2.3. НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Простая верхняя граница, полученная в предыдущем разделе, может быть также легко выведена (см. задачу 2.6) из равенства (1.132), которое представляется в следующем виде:

$$W = W_U + \frac{1}{2} \bar{t}(1-p) - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{t}}, \quad (2.23)$$

где W_U — верхняя граница, которая имеет вид

$$W_U \triangleq \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2t(1-p)}. \quad (2.24)$$

Другое выражение для среднего времени ожидания, эквивалентное (2.23), записано в виде (1.131). Воспроизведем его здесь:

$$W = -\frac{\bar{u}^2}{2u} - \frac{\bar{y}^2}{2y}. \quad (2.25)$$

Два последних выражения для W являются исходными при выводе нижних границ для среднего времени ожидания в системе G/G/1. Очевидно, что для получения нижних границ нужно найти верхнюю границу для $\bar{I}^2/2\bar{t}$ — среднего остаточного времени свободного периода I . Выше уже была введена случайная величина $\tilde{y} = (\tilde{w} + \tilde{u})^-$ (см. разд. 1.10, равенства (1.124) и (2.12) и сноску на стр. 50), среднее остаточное время которой, как показано в

задаче 2.6, равно среднему остаточному времени свободного периода, т. е.

$$\frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}} = \frac{\bar{y}^2}{2\bar{y}}.$$

Поскольку $\bar{y}^2 = \sigma_y^2 + (\bar{y})^2$, то, очевидно, нашей главной задачей является отыскание верхней границы для дисперсии случайной величины \tilde{y} . При ее решении используем подход, развитый Кингманом [24]. Во-первых, вспомним, что равенства (1.116) и (1.126) дают

$$\bar{t}(1-\rho) = -\bar{u} = \bar{y}. \quad (2.26)$$

Далее, так как \tilde{y} имеет такое же распределение, что и $(\tilde{w} + \tilde{u})^-$, и $\tilde{w} \geq 0$, то стохастически¹⁾ $\tilde{w} + \tilde{u} \geq \tilde{u}$ и $(\tilde{w} + \tilde{u})^- \leq (\tilde{u})^-$. Таким образом, можно записать

$$(\bar{y})^2 = [(\tilde{w} + \tilde{u})^-]^2 \leq [(\tilde{u})^-]^2.$$

Наконец, имеем

$$\bar{y}^2 \leq [\bar{(u)}^-]^2.$$

Используя последнее соотношение и равенство (2.15) (при $X = \tilde{u}$), находим также

$$\bar{y}^2 \leq (\bar{u})^2 - [\bar{(u)}^+]^2;$$

применяя равенство (2.26), получаем

$$\frac{[(\bar{u})^+]^2}{2\bar{y}} \leq -\frac{\bar{u}^2}{2\bar{u}} - \frac{\bar{y}^2}{2\bar{y}}. \quad (2.27)$$

Окончательно, используя эти выражения вместе с равенством (2.25), устанавливаем следующую нижнюю границу для среднего времени ожидания²⁾:

$$W_K \triangleq \frac{[(\bar{u})^+]^2}{2\bar{t}(1-\rho)} \leq W. \quad ■ (2.28)$$

Это первая из приводимых здесь нижних границ. Заметим, что она зависит не только от первых двух моментов входящего процесса. Это не особенно точная граница, и для того, чтобы добиться лучшего результата, необходимо, как будет показано, наложить некоторые ограничения на входящий процесс.

¹⁾ Утверждение, что случайная величина X_1 стохастически меньше, чем X_2 , означает, что $P[X_1 \leq x] \geq P[X_2 \leq x]$.

²⁾ Индекс K в обозначении W_K этой нижней границы показывает, что речь идет об оценке Кингмана.

Другую нижнюю границу для W , отличающуюся от (2.28), установил Маршалл [33, 34]. Эта граница лучше границы из (2.28) в случае небольшой нагрузки и хуже ее в случае большой нагрузки. Чтобы установить эту новую границу, вновь будем исходить из основного соотношения

$$w_{n+1} = \max[0, w_n + u_n].$$

Это кусочно-линейное выражение принимает нулевое значение при $u_n < -w_n$. Следовательно, при условии, что $w_n = y \geq 0$, любое вычисление математического ожидания w_{n+1} требует рассмотрения лишь области, в которой $u_n \geq -y$, и должно удовлетворяться соотношение $w_{n+1} = y + u_n$. Поэтому условное математическое ожидание w_{n+1} имеет вид

$$E[w_{n+1} | w_n = y] = \int_{-y}^{\infty} (y + u) dP[u_n \leq u]. \quad (2.29)$$

Напомним, что $P[u_n \leq u] = C(u)$. С помощью интегрирования по частям легко показать, что интеграл в следующем соотношении

$$E[w_{n+1} | w_n = y] = \int_{-y}^{\infty} [1 - C(u)] du \quad (2.30)$$

равен интегралу из (2.29). Равенство (2.30) справедливо при всех значениях $y \geq 0$. Удобно обозначить приведенный интеграл через $g(y)$, т. е.

$$g(y) \triangleq \int_{-y}^{\infty} [1 - C(u)] du.$$

Покажем, что $g(y)$ — выпуклая функция¹⁾. Заметим, что ФРВ $C(u)$ — неубывающая функция u (для всех u в диапазоне $-\infty \leq u \leq \infty$) и, таким образом, $C(-u)$ — невозрастающая функция u . Следовательно, $1 - C(-u)$ — неубывающая функция u . Кроме того,

$$\frac{dg(y)}{dy} = 1 - C(-y). \quad (2.31)$$

Таким образом, $dg(y)/dy$ — неубывающая функция y , и следовательно, $g(y)$ — выпуклая функция.

Перейдем теперь к вычислению W . Определим $W_n(y) \triangleq \Delta P[w_n \leq y]$. Снимая условие в математическом ожидании (2.30),

¹⁾ Это значит, что при $y_1 \leq y_2$ и $0 \leq a \leq 1$ функция $g(y)$ обладает следующим свойством: $g[ay_1 + (1-a)y_2] \leq ag(y_1) + (1-a)g(y_2)$. Это эквивалентно требованию, чтобы производная $dg(y)/dy$ была неубывающей.

получаем

$$\begin{aligned} E[w_{n+1}] &= \int_0^{\infty} E[w_{n+1} | w_n = y] dW_n(y) = \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-y}^{\infty} [1 - C(u)] du dW_n(y) = \\ &= \int_0^{\infty} g(y) dW_n(y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E[w_{n+1}] = E[g(w_n)], \quad (2.32)$$

где математическое ожидание в правой части равенства берется в соответствии с распределением случайной величины w_n . Однако, как было показано, $g(y)$ является выпуклой функцией своего аргумента. Таким образом, можно применить неравенство Енсена, которое устанавливает, что для любой выпуклой функции g случайной переменной X

$$E[g(X)] \geq g(E[X]). \quad (2.33)$$

Таким образом, из равенств (2.32) и (2.33) находим

$$E[w_{n+1}] \geq g(E[w_n]).$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$W \geq g(W). \quad (2.34)$$

Рассмотрим теперь уравнение $y = g(y)$, т. е.

$$y = \int_{-y}^{\infty} [1 - C(u)] du, \quad (2.35)$$

где $y \geq 0$. Представляет интерес значение y , которое удовлетворяет уравнению (2.35), поскольку, как будет показано, это значение является искомой нижней границей, обозначаемой через W_m (индекс означает, что граница установлена Маршаллом). Соотношение (2.35) можно представить в следующем виде:

$$y = \int_{-y}^0 [1 - C(u)] du + g(0), \quad y \geq 0. \quad (2.36)$$

На фиг. 2.1 представлены кривые y и $g(y)$ в зависимости от y . Заметим, что $g^{(1)}(0) = 1 - C(0^-) = P[u_n \geq 0] \geq 0$. Очевидно, что ре-

решение уравнения (2.35) может быть получено тогда и только тогда, когда кривые на фиг. 2.1 пересекаются; точка их пересечения есть, конечно, W_M . Покажем теперь, что эти кривые пересекаются *ровно один раз* (при $y \geq 0$), и, следовательно, решение W_M единственno. Из уравнения (2.36) видно, что при $g(0)=0$ решением является $y=0=W_M$ (если W_M — нижняя граница для W , то такая граница бесполезна). Если же $g(0)>0$, две кривые пересекутся тогда и только тогда, когда при достаточно больших значениях y

$$y > g(y) = g(0) + \int_{-y}^0 [1 - C(u)] du = g(0) + y - \int_{-y}^0 C(u) du.$$

Последнее условие сводится к

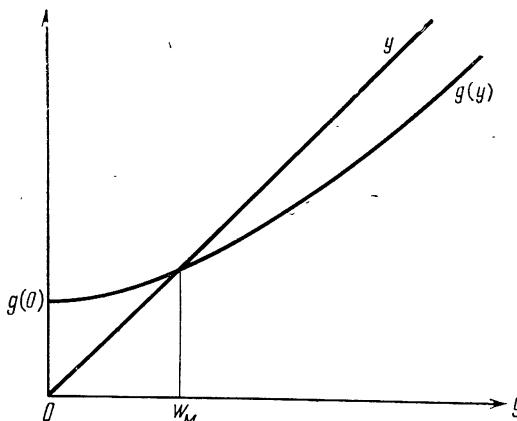
$$g(0) < \int_{-y}^0 C(u) du. \quad (2.37)$$

Теперь при $y \rightarrow \infty$ для последнего интеграла имеем

$$\int_{-\infty}^0 C(u) du = -E[\min(0, u_n)] = E[(u_n)^-].$$

Кроме того, $g(0)$ можно представить в виде

$$g(0) = \int_0^\infty [1 - C(u)] du = E[\max(0, u_n)] = E[(u_n)^+].$$



Фиг. 2.1. Определение нижней границы W_M .

Следовательно,

$$E[\tilde{u}] = E[(u_n)^+] - E[(u_n)^-] = g(0) - \int_{-\infty}^0 C(u) du.$$

Но $E[\tilde{u}] = -\bar{t}(1-\rho)$, и, таким образом, при $y \rightarrow \infty$ условие (2.37) эквивалентно условию $\bar{t}(\rho-1) < 0$, или

$$\rho < 1. \quad (2.38)$$

Условие, выражаемое неравенством (2.38), гарантирует, что две кривые пересекаются, и, следовательно, гарантирует наличие (нестривиального) решения уравнения (2.35); но неравенство (2.38) — это обычное условие стабильности СМО! Более того, как только что было показано, при $\rho < 1$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (y - g(y)) > 0$$

и, так как $g(y)$ является выпуклой функцией, эти кривые пересекутся ровно один раз. (Если бы они пересекались более одного раза, то по условиям выпуклости $g(y)$ они пересеклись бы ровно два раза; но тогда последнее неравенство должно быть записано в другую сторону, т. е. получается противоречие.) Естественно поинтересоваться, могут ли эти две кривые совпадать на некотором интервале, например $a \leq y < b$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $dg(y)/dy = 1$ на этом интервале. Однако на основании равенства (2.31) эти предположения требуют также выполнения на рассматриваемом интервале условия $1 - C(-y) = 1$. Но функция $1 - C(-y) \leq 1$ и является неубывающей по y , поэтому она требует соблюдения условия $dg(y)/dy = 1$ на *всем интервале* $a \leq y$. Таким образом, приходим к заключению, что если кривые совпадают на любом конечном интервале, они совпадают на полу бесконечном интервале и никогда не отходят друг от друга. Однако условие (2.38) гарантирует, что они отходят друг от друга. Следовательно, приходим к противоречию, что исключает возможность совпадения этих двух кривых на любом конечном интервале.

Таким образом, при $\rho < 1$ число W_M является *единственным* решением уравнения (2.35). Далее, если $W_M = 0 = g(0)$, то очевидно, что $W \geq W_M$. Если $W_M > 0$, то, как было показано, $g(0) > 0$ и, следовательно, для всех $0 \leq y \leq W_M$ имеет место неравенство

$$y < g(0) + \int_{-y}^0 [1 - C(u)] du \quad (2.39)$$

вследствие установленной выше единственности (см. также фиг. 2.1). Предположим теперь, что $W < W_M$; при этом

$$W < g(W), \quad (2.40)$$

так как W находится в диапазоне, для которого справедливо неравенство (2.39). Однако неравенство (2.40) прямо противоречит (2.34), и, следовательно,

$$W_M \leq W, \quad \blacksquare \quad (2.41)$$

что представляет собой искомую нижнюю границу. Нижняя граница W_M определяется как единственное решение уравнения (2.35). Сравнение приведенных расчетов с расчетами, необходимыми для определения нижней границы Кингмана W_K , показывает, что в обоих случаях требуются нетривиальные вычисления.

В задаче 2.7 методами, подобными описанным выше, показывается, что верхняя и нижняя границы дисперсии σ^2_D промежутков времени между уходами (среднее значение которых, очевидно, равно t) могут быть получены в виде

$$\sigma^2_b \leq \sigma^2_D \leq \sigma^2_a + 2\sigma^2_b - 2W_M t(1-p). \quad \blacksquare \quad (2.42)$$

Если ввести некоторые простые ограничения на распределение промежутков между моментами поступления требований $A(t)$, то можно убедиться, что нижняя граница для среднего времени ожидания значительно упрощается. Для введения этих ограничений определим для функций распределения некоторые свойства среднего остаточного времени и интенсивности отказов; среднее остаточное время и интенсивность отказов определены в примечании на стр. 32. В теории надежности [2] обычно используются следующие определения.

Определение γ-ВГСОВ и γ-НГСОВ. Недискретная функция распределения F имеет верхнюю (нижнюю) границу γ для среднего остаточного времени ВГСОВ (НГСОВ) [и называется распределением типа γ-ВГСОВ (γ-НГСОВ)] тогда и только тогда, когда

$$\int_t^\infty \frac{1-F(u)}{1-F(t)} du \leq (\text{или соответственно} \geq) \gamma \quad (2.43)$$

для всех t и $1-F(t) > 0$.

Определение УСОВ и ВСОВ. Недискретная функция распределения F имеет убывающее (возрастающее) среднее остаточное время УСОВ (ВСОВ) тогда и только тогда, когда

$$\int_t^\infty \frac{1-F(u)}{1-F(t)} du \quad \begin{cases} \text{убывает (или соответственно} \\ \text{возрастает) с ростом } t \end{cases} \quad (2.44)$$

при $t \geq 0$ и $1-F(t) > 0$.

Определение ВИО и УИО. Недискретная функция распределения F имеет возрастающую (убывающую) интенсивность отказов ВИО(УИО) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ функция

$$\frac{F(t + \varepsilon) - F(t)}{1 - F(t)} \text{ возрастает (убывает)} \quad (2.45)$$

с ростом t при всех $t > 0$ и $1 - F(t) > 0$.

Первое определение характеризует распределения, у которых среднее остаточное время может быть ограничено независимо от возраста случайной величины. Второе определение относится к функциям распределения, у которых среднее остаточное время изменяется монотонно с возрастом случайной величины. Третье определение характеризует функции распределения, у которых интенсивность гибели (интенсивность отказов) изменяется монотонно с возрастом. Можно показать, что

$$\text{ВИО} \subset \text{УСОВ} \subset \bar{X} - \text{ВГСОВ}, \quad (2.46)$$

где \subset означает «влечет за собой», а \bar{X} — среднее значение рассматриваемой случайной величины.

Теперь применим понятие среднего остаточного времени и приведенные выше определения к случаю распределения промежутков между моментами поступления требований $A(t)$ в системе G/G/1. Для распределения промежутков между поступающими требованиями типа γ -ВГСОВ в системе G/G/1 будем пользоваться следующим обозначением: γ -ВГСОВ/G/1; если $A(t)$ имеет ВИО, будем писать ВИО/G/1. В задаче 2.8 показывается, что для системы γ -ВГСОВ/G/1

$$\frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}} \leq \gamma, \quad (2.47)$$

где I — случайная величина, описывающая, как и ранее, продолжительность свободного состояния. Как было отмечено ранее, если удается получить верхнюю границу для среднего остаточного свободного времени (что только что сделано), то с помощью формулы (2.23) сразу же можно найти нижнюю границу для среднего времени ожидания W . Положив $\gamma = \bar{t}$, из формул (2.23) и (2.47) получим

$$W \geq W_U + \frac{1}{2} \bar{t}(1 - \rho) - \bar{t} = W_U - \frac{1}{2} \bar{t}(1 + \rho).$$

Таким образом, для системы \bar{t} -ВГСОВ/G/1 верхняя и нижняя границы для среднего времени ожидания имеют вид

$$W_U - \frac{1}{2} \bar{t}(1 + \rho) \leq W \leq W_U. \quad ■(2.48)$$

Если теперь к последнему соотношению применить формулу Литтла и вспомнить, что \bar{N}_q — среднее число требований в очереди, то получим границы для \bar{N}_q :

$$\lambda W_U - \frac{1+\rho}{2} \leq \bar{N}_q \leq \lambda W_U, \quad ■ (2.49)$$

где $\lambda = 1/\bar{t}$ — интенсивность поступления требований в рассматриваемую очередь. Последнее неравенство дает верхнюю и нижнюю границы для средней длины очереди. Заметим, что разность этих границ меньше единицы!

В задаче 2.11 требуется показать, что в системе ВИО/G/1

$$\frac{\bar{t}^2}{2\bar{t}} \leq \frac{\bar{t}^2}{2t} = \frac{1}{2} \bar{t} (1 + C_a^2), \quad (2.50)$$

где \bar{t}^2 и $C_a = \sigma_a/\bar{t}$ — соответственно второй момент и коэффициент изменчивости для промежутков времени между моментами поступления требований. Таким образом, опять получается верхняя граница для средней продолжительности свободного состояния. Применяя ее в формуле (2.23), можно найти следующую нижнюю границу для среднего времени ожидания:

$$W \geq W_U + \frac{1}{2} \bar{t} (1 - \rho) - \frac{1}{2} \bar{t} (1 + C_a^2) = W_U - \frac{1}{2} \bar{t} (\rho + C_a^2).$$

Используя этот результат вместе с верхней границей, получаем следующие границы для среднего времени ожидания в системе ВИО/G/1:

$$W_U - \frac{1}{2} \bar{t} (C_a^2 + \rho) \leq W \leq W_U. \quad ■ (2.51)$$

Легко показать, что любое распределение с ВИО должно иметь коэффициент изменчивости, меньший единицы. Следовательно, нижняя граница в неравенстве (2.51) лучше, чем нижняя граница (2.48). Это следствие соотношения (2.46), которое устанавливает, что ограничение, дающее ВИО, наиболее сильное среди трех рассмотренных выше. Применяя формулу Литтла, получаем

$$\lambda W_U - \frac{C_a^2 + \rho}{2} \leq \bar{N}_q \leq \lambda W_U, \quad ■ (2.52)$$

что опять сводит область неопределенности для средней длины очереди к величине, меньшей единицы. Например, система D/G/1 с ВИО, для которой $C_a^2 = 0$, имеет среднюю длину очереди, лежащую внутри границ, разность между которыми равна $1/2$.

Кроме последних двух случаев \bar{t} -ВГСОВ/G/1 и ВИО/G/1, нижние границы, исследованные в настоящем разделе, не выражались

просто через первые два момента распределений промежутков между моментами поступления требований и времени обслуживания (как в более благоприятном случае верхних границ в разд. 2.2). Получим теперь нижнюю границу такого простого типа, следуя выводу Марчэла [32]. Опять используем верхнюю границу для $\bar{I}^2/2\bar{I}$ в равенстве (2.23) и возьмем выражение (1.124) для y_n в качестве исходного. Уже отмечалось, что предельная случайная величина \tilde{y} представляется в виде

$$\tilde{y} = \min [0, \tilde{\omega} + \tilde{u}].$$

Как было упомянуто (см. задачу 2.6), $\bar{I}^2/2\bar{I} = \bar{y}^2/2\bar{y}$ и поэтому рассмотрим моменты \tilde{y} . Можно представить \tilde{y} в виде

$$\tilde{y} = \max [0, -\tilde{\omega} - \tilde{u}] = \max [0, \tilde{t} - \tilde{x} - \tilde{\omega}].$$

Поскольку \tilde{x} , \tilde{t} и $\tilde{\omega}$ являются неотрицательными случайными величинами, из последнего выражения следует, что \tilde{y} стохастически меньше, чем \tilde{t} . Отсюда $\bar{y}^k \leq \bar{t}^k$. Далее, так как $\bar{t}^2 = \sigma_a^2 + (1/\lambda)^2$, то имеем

$$\bar{y}^2 \leq \sigma_a^2 + 1/\lambda^2.$$

Но $\bar{y} = (1-\rho)/\lambda$ и, таким образом,

$$\frac{\bar{y}^2}{2\bar{y}} = \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}} \leq \frac{\lambda(\sigma_a^2 + 1/\lambda^2)}{2(1-\rho)}.$$

Подставляя эту верхнюю границу в формулу (2.23), окончательно получаем

$$W_U - \frac{\rho(2-\rho) + C_a^2}{2\lambda(1-\rho)} \leq W. \quad ■ (2.53)$$

Граница также может быть представлена в виде

$$\frac{\rho^2 C_b^2 + \rho(\rho-2)}{2\lambda(1-\rho)} \leq W. \quad ■ (2.54)$$

Таким образом, искомая нижняя граница найдена. Заметим, что в отличие от границы W_U в (2.22) она несимметрична относительно σ_a и σ_b . Эта граница неотрицательна только для коэффициентов изменчивости времени обслуживания, удовлетворяющих неравенству $C_b^2 \geq (2-\rho)/\rho$. Точное значение W в системе M/G/1 превышает эту нижнюю границу на величину $\bar{x}/(1-\rho)$. Следовательно, при увеличении ρ граница ухудшается (а мы видели, что при

увеличении ρ верхняя граница улучшается). Главное достоинство этой границы, очевидно, состоит в ее простоте.

Найдем теперь границы для распределения времени ожидания, а не для его среднего.

2.4. ГРАНИЦЫ ДЛЯ ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Время ожидания для требования является суммой продолжительностей обслуживания всех требований, которые это требование застало в очереди, и остаточного времени обслуживания требования, которое в момент поступления рассматриваемого требования находилось на обслуживании. Естественно, что продолжительности обслуживания всех стоящих в очереди требований независимы и одинаково распределены, поэтому можно ожидать, что результат, подобный границе Чернова [27], даст верхнюю и нижнюю границы для хвоста распределения времени ожидания. Это действительно так; здесь при выводе таких границ используется подход, развитый Кингманом [26].

Начнем опять с уравнения $w_{n+1} = \max[0, w_n + u_n]$. При $y > 0$ имеем

$$P[w_{n+1} \geq y] = P[w_n + u_n \geq y].$$

Рассматривая вероятности при условии, что задано u_n , и учитывая, что $P[w_n \geq 0] = 1$, получаем

$$\begin{aligned} P[w_{n+1} \geq y] &= \int_{-\infty}^{\infty} P[w_n \geq y - u] dC(u) = \\ &= \int_{-\infty}^y P[w_n \geq y - u] dC(u) + 1 - C(y). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Рассмотрим теперь $C^*(-s) \triangleq E[e^{su_n}]$, где s — действительная переменная, которая должна лежать в ограниченной области для того, чтобы рассматриваемое преобразование было ограниченным. В частности, если существует такое действительное значение s' , что $B^*(-s') \triangleq E[e^{s'\tilde{x}}] < \infty$, то допустимый диапазон значений s дается неравенством $0 \leq s \leq s'$. Кроме того, найдется область, в которой $C^*(-s) \leq 1$. (Например, в этом стабильном случае $C^*(0) = 1$ и $dC^*(-s)/ds = \bar{u} < 0$ при $s = 0$, что определяет окрестность в этой области.) Обозначим через s_0 такое наибольшее значение s ,

при котором это условие остается справедливым. Таким образом, имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} e^{-s_0 y} &\geq e^{-s_0 y} C^*(-s_0) = e^{-s_0 y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 u} dC(u) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0(y-u)} dC(u). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Далее, так как $s_0 > 0$, в диапазоне $u \geq y$ должно удовлетворяться неравенство $e^{-s_0(y-u)} \geq 1$. Таким образом, из неравенства (2.56) при $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} e^{-s_0 y} &\geq \int_{-\infty}^y e^{-s_0(y-u)} dC(u) + \int_y^{\infty} dC(u) = \\ &= \int_{-\infty}^y e^{-s_0(y-u)} dC(u) + 1 - C(y). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Предположим теперь, что w_0 (время ожидания для первоначального требования) выбирается так, что $P[w_0 \geq y] \leq e^{-s_0 y}$, и докажем, что это неравенство выполняется для всех w_n . Доказательство проведем по индукции, предполагая, что мы уже установили справедливость гипотезы на n -м шаге, т. е. что $P[w_n \geq y] \leq e^{-s_0 y}$. Тогда, используя это предположение вместе с равенством (2.55), получим

$$P[w_{n+1} \geq y] \leq \int_{-\infty}^y e^{-s_0(y-u)} dC(u) + 1 - C(y).$$

Но правая часть этого неравенства в точности равна выражению, для которого построена граница в (2.57). Таким образом, приходим к заключению, что $P[w_{n+1} \geq y] \leq e^{-s_0 y}$, и заканчиваем доказательство по индукции. В результате получаем следующую экспоненциальную границу для хвоста распределения времени ожидания в установленном режиме (при $n \rightarrow \infty$):

$$P[\tilde{w} \geq y] \leq e^{-s_0 y}, \quad (2.58)$$

где, как и ранее, s_0 находится из условия

$$s_0 = \sup \{s > 0 : C^*(-s) \leq 1\}.$$

Как и предсказывалось, результат (2.58) по форме похож на границу Чернова. Можно также доказать, что этот хвост имеет ана-

логичную нижнюю границу [26], которая в сочетании с неравенством (2.58) дает

$$\gamma e^{-s_0 y} \leq 1 - W(y) \leq e^{-s_0 y}, \quad (2.59)$$

где используется обычное обозначение $W(y) \triangleq P[\tilde{w} < y]$ и γ удовлетворяет неравенству

$$\gamma \leq \frac{1 - C(y)}{\int_y^{\infty} e^{-s_0(y-u)} dC(u)} \quad (2.60)$$

для всех значений $y > 0$. Следовательно, γ — наименьшее значение, которое принимает дробь в правой части (2.60). Из этих границ для функции распределения легко получить границы для среднего времени ожидания:

$$\frac{\gamma}{s_0} \leq W \leq \frac{1}{s_0}. \quad (2.61)$$

Эти границы для W иногда точнее, чем границы, рассмотренные ранее.

Верхнюю границу Кингмана (2.58) получил также Кобаяси [30], который воспользовался неравенством Колмогорова для субмартиналов. Росс [47] улучшил верхнюю границу Кингмана и исследовал эти результаты в некоторых частных случаях.

2.5. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СИСТЕМЕ G/G/m

О системе G/G/m известно так мало, что любой результат, который позволяет хотя бы приближенно описать такую систему, чрезвычайно полезен. Многие работы посвящены построению границ для среднего времени ожидания; эти работы обсуждаются ниже.

Известно, что коэффициент использования рассматриваемой системы определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{\bar{x}}{mt}, \quad (2.62)$$

и, как показано в работе [21], условие стабильности системы по-прежнему имеет вид $\rho < 1$.

Наиболее общей многолинейной СМО, которая рассматривалась до сих пор, является система G/M/m. Из формулы (1.115) видно, что условная ПРВ времени ожидания описывается показательной функцией с параметром $mt\mu(1-\sigma)$, где $\bar{x}=1/\mu$. При большой нагрузке можно ожидать, что безусловная ПРВ времени ожи-

дания сходится к этой условной плотности, и, таким образом, в этом случае

$$W \approx \frac{1}{m\mu(1-\sigma)}, \quad \rho \rightarrow 1. \quad (2.63)$$

Необходимо найти значение σ , которое является соответствующим корнем уравнения (1.104), имеющего вид

$$\sigma = A^*(m\mu - m\mu\sigma).$$

Производя замену переменной $a = m\mu(1-\sigma)$, последнее уравнение можно привести к виду

$$1 - \frac{\alpha \bar{x}}{m} = A^*(\alpha).$$

Разлагая $A^*(\alpha)$ в степенной ряд в окрестности начала координат, как в равенстве (2.4), получаем

$$1 - \frac{\alpha \bar{x}}{m} = 1 - \bar{t}\alpha + \frac{\bar{t}^2 \alpha^2}{2!} + o(\alpha^2)$$

Так как рассматривается случай большой нагрузки, то очевидно, что $\alpha \ll 1$, [т. е. $W \gg \bar{x}$ и $\sigma \approx 1$, см. (2.63)], и можно пренебречь членами высшего порядка. Отбрасывая $o(\alpha)^2$ и решая уравнение относительно α , находим

$$\alpha \approx \frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \bar{t}^2};$$

но поскольку $m\bar{t} \approx \bar{x}$ и для показательного распределения времени обслуживания $\sigma_b^2 = \bar{x}^2$, последнее выражение представляется в виде

$$\alpha \approx \frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + (1/m^2)\sigma_b^2}.$$

Наконец, можно воспользоваться этим результатом и равенством (2.63), чтобы получить следующее приближенное выражение¹⁾ для среднего времени ожидания в системе G/M/m при $\rho \rightarrow 1$:

$$W \approx \frac{\sigma_a^2 + (1/m^2)\sigma_b^2}{2\bar{t}(1-\rho)}. \quad ■ (2.64)$$

Этот факт позволил Кингману [25] распространить результаты для системы G/M/m на G/G/m и сделать предположение, что при большой нагрузке время ожидания для системы G/G/m должно быть распределено по показательному закону со средним значе-

¹⁾ Это приближение при $m=1$ в точности сводится к приближенной формуле Кингмана для системы G/G/1.

нием, определяемым равенством (2.64). Эта гипотеза недавно была доказана Кёллерстрёмом [31]. Таким образом, приближение Кингмана — Кёллерстрёма для распределения времени ожидания в системе G/G/m имеет вид

$$W(y) \approx 1 - \exp\left(-\frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2(\sigma_b^2/m^2)}y\right). \quad ■ (2.65)$$

Доказательство этого результата основано на использовании G/G/1 в качестве приближения для G/G/m при большой нагрузке с промежутками между моментами поступления требований t_n и продолжительностями обслуживания x_n/m . (Такой же подход был применен при получении приводимой далее нижней границы Брумеля.) Использование G/G/1 в качестве приближения было предложено ранее Кифером и Вольфвицем [21]. Из этой аппроксимации функции $W(y)$ в случае большой нагрузки также вытекает, что приближение W при большой нагрузке для системы G/G/m определяется равенством (2.64).

Судзуки и Иосида [48] показали, что гипотеза Кингмана дает в действительности верхнюю границу для W при $\rho \leq 1/m$. Кингман [26] полагает, что его приближение является верхней границей при $0 \leq \rho < 1$, но он не доказал это, и, таким образом, утверждение остается лишь гипотезой. Здесь приводятся известные *границы* для W без доказательства. Кингман получил следующую верхнюю границу для среднего времени ожидания:

$$W \leq \frac{\sigma_a^2 + (1/m)\sigma_b^2 + [(m-1)/m^2]\bar{x}^2}{2\bar{t}(1-\rho)}. \quad (2.66)$$

Такая граница для системы G/G/m была найдена также Брумелем [6].

Кингман [26] показал, что нижняя граница для системы G/G/m имеет вид

$$W \geq \frac{2W^*\bar{t} - (\sigma_b^2 + m\sigma_a^2) - [(m-1)/m]\bar{x}^2}{2\bar{x}} \triangleq K_L, \quad (2.67)$$

где W^* — среднее время ожидания в системе G/G/1 с продолжительностями обслуживания $\{x_n\}$ и промежутками между моментами поступления требований $\{mt_n\}$. Брумель [6] дал нижнюю границу в следующем виде:

$$W \geq \hat{W} - \frac{[(m-1)/m]\bar{x}^2}{2\bar{x}} \triangleq B_L, \quad (2.68)$$

где \hat{W} — среднее время ожидания в системе G/G/1 с продолжительностями обслуживания $\{x_n/m\}$ и промежутками между моментами поступления требований $\{t_n\}$. Сравним две последние гра-

ницы. Если рассмотреть незаконченную работу однолинейной СМО Кингмана (со средним временем ожидания W^* и средней незаконченной работой, обозначаемой через \bar{U}^*) и незаконченную работу эквивалентной однолинейной СМО Брумеля (со средним временем ожидания \hat{W} и средней незаконченной работой, обозначаемой через \bar{U}), то можно найти, что

$$\bar{U}^* = m\bar{U}. \quad (2.69)$$

В этом легко убедиться, если сравнить две функции незаконченной работы, учитывая, что средняя продолжительность незаконченной работы не зависит от выбора масштаба по оси времени. В гл. 3 будет показано [см. формулу (3.23)], что средняя незаконченная работа \bar{U} для системы G/G/1 равна

$$\bar{U} = \rho W + \frac{\bar{x}^2}{2t}.$$

Если получить выражения для \bar{U}^* и \hat{U} , то из последнего уравнения можно найти

$$W^* = m\hat{W}. \quad (2.70)$$

Вычтем теперь из нижней границы Брумеля нижнюю границу Кингмана:

$$B_L - K_L = \hat{W} - \frac{\bar{t}}{\bar{x}} W^* + \frac{m\sigma_a^2 + (1/m)\sigma_b^2}{2\bar{x}}.$$

Используя равенство (2.70), получаем

$$B_L - K_L = \hat{W} \left(\frac{\rho - 1}{\rho} \right) + \frac{\sigma_a^2 + (1/m^2)\sigma_b^2}{2\bar{t}\rho}.$$

Среднее время ожидания \hat{W} в однолинейной СМО Брумеля очевидно имеет верхнюю границу, определяемую формулой (2.22), причем среднее время обслуживания равно \bar{x}/m , а дисперсия времени обслуживания равна σ_b^2/m^2 . Всюду сохраняется определение ρ , соответствующее равенству (2.62). Поэтому можно записать

$$\hat{W} \leq \frac{\sigma_a^2 + (1/m^2)\sigma_b^2}{2\bar{t}(1-\rho)}.$$

Используя это неравенство в выражении для $B_L - K_L$, сразу получаем

$$B_L - K_L \geq 0;$$

очевидно, что нижняя граница Брумеля лучше нижней границы Кингмана.

Следовательно, наилучшие из опубликованных границ для среднего времени ожидания в системе G/G/m имеют вид¹⁾

$$\hat{W} - \frac{[(m-1)/m] \bar{x}^2}{2\bar{x}} \leq W \leq \frac{\sigma_a^2 + (1/m) \sigma_b^2 + [(m-1)/m^2] \bar{x}^2}{2\bar{t}(1-\rho)}. \quad ■ (2.71)$$

Можно заметить, что эти границы находятся в соответствии с приближением Кингмана — Кёllerстрёма для большой нагрузки с показательным распределением времени ожидания [формула (2.65)] при среднем значении (2.64). Член \hat{W} относится к однолинейной системе Брумеля, для которой применима любая из предыдущих границ; в частности, использование большей информации о промежутках между моментами поступления требований, как в разд. 2.3 (например, распределение может иметь ВИО), позволяет получить более точную нижнюю границу.

Улучшение верхней границы можно получить в частном случае системы G/M/m. Хотя, как было показано в разд. 1.9, система G/M/m поддается точному анализу, решение связано со сложными вычислениями J и R_k ($k=0, 1, \dots, m-2$). Поэтому полезно найти более простые способы вычисления границ. Основной результат здесь принадлежит Брумелю [7]. Он получил границу, рассмотрев однолинейную систему G/M/1 с продолжительностями обслуживания $\{x_n/m\}$ и промежутками между моментами поступления требований $\{t_n\}$. Все переменные в системе опять обозначаются крышечкой (~). Брумель показал, что $P[\omega_n > y] < P[\hat{\omega}_n < y]$ и поэтому $W < \hat{W}$. Для вычисления \hat{W} нужно оперировать только с однолинейной системой, что позволяет избежать вычислений J и R_k . Среднее время ожидания \hat{W} дается равенством (1.103), которое включает величину σ , определяемую формулой (1.100), т. е. это гораздо более простая задача. Вместе с тем, чтобы еще больше упростить расчет системы G/M/1, можно воспользоваться приведенным ранее неравенством (2.22) (справедливым для любой системы G/G/1); при этом для системы G/M/m получается следующий результат:

$$W \leq \hat{W} \leq \frac{\sigma_a^2 + (\sigma_b^2/m^2)}{2\bar{t}(1-\rho)}. \quad ■ (2.72)$$

Этот результат улучшает границу (2.71) и показывает, что приближение Кингмана — Кёllerстрёма при большой нагрузке является по существу верхней границей W для системы G/M/m. В дей-

¹⁾ При $\rho \leq 1/m$ верхняя граница может быть улучшена, если использовать упомянутый выше результат Судзуки и Иосида.

ствительности эти границы достаточно хорошие, так как теперь показано¹⁾, что для системы G/M/m

$$\hat{W} - \left(\frac{m-1}{m} \right) \bar{x} \leq W \leq \hat{W} \quad (\text{G/M/m}). \quad \blacksquare \quad (2.73)$$

Используя формулу Литтла, получаем

$$\bar{N} - \rho(m-1) \leq \bar{N} \leq \bar{N} \quad (\text{G/M/m}), \quad \blacksquare \quad (2.74)$$

и поскольку $\rho < 1$, то границы для среднего числа требований в системе отличаются не более чем на $m-1$ от его истинного значения [это истинное значение также отличается не более чем на $m-1$ от среднего числа требований в эквивалентной системе G/M/1, т. е. $\hat{N} - \bar{N} \leq \rho(m-1)$].

Если теперь нижнюю границу Марчэла (2.54) для системы G/G/1 использовать совместно с нижней границей Брумеля (2.68), то можно прийти к простой явной нижней границе для системы G/G/m. В частности, для \hat{W} будем иметь

$$\frac{\rho^2 C_b^2 - \rho(2-\rho)}{2\lambda(1-\rho)} \leq \hat{W}.$$

Используя эту границу и формулу (2.68), получим

$$\frac{\rho^2 C_b^2 - \rho(2-\rho)}{2\lambda(1-\rho)} - \frac{[(m-1)/m] \bar{x}^2}{2\bar{x}} \leq W. \quad \blacksquare \quad (2.75)$$

Это наиболее простая явная нижняя граница для системы G/G/m.

Результаты настоящего раздела дают лишь первые сведения о системах G/G/m; в этой области нужно выполнить еще очень много исследований.

2.6. ДИСКРЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

До сих пор в настоящей главе обсуждались способы преодоления трудностей при изучении системы G/G/1 путем построения приближений и границ для точных решений. В остальной части главы используется другой подход: поиск не приближенного решения исходной задачи, а точного решения приближенно сформулированной исходной задачи. Иначе говоря, уравнения, описывающие работу системы G/G/1, преднамеренно искажаются и преобразуются к такому виду, при котором система уравнений может быть решена. В этом разделе обсуждается довольно грубое дискретное приближение.

¹⁾ Заметим, что при показательном времени обслуживания $\bar{x}^2/2\bar{x} = \bar{x}$.

Идея подхода, развиваемого в этом разделе, состоит в изменении входных распределений $A(t)$ и $B(x)$ таким образом, чтобы основное рекуррентное соотношение (воспроизведенное здесь опять)

$$w_{n+1} = \max [0, w_n + u_n] \quad (2.76)$$

позволяло получить прямое аналитическое решение для распределения времени ожидания. Заметим, что итеративное применение этого уравнения совершенно просто, когда как промежутки между моментами поступления требований, так и продолжительности обслуживания являются дискретными случайными величинами, которые в моменты $k\tau$ ($k=0, 1, 2, \dots$, а τ — единица отсчета времени), принимают только ненулевые значения. В этих случаях можно записать предел такой рекуррентной процедуры и получить систему линейных разностных уравнений [27]. Как видим, здесь требуется лишь немногим более сложный подход, чем в элементарной теории массового обслуживания. Когда исходные случайные величины являются дискретными, можно довольно просто определить точное распределение времени ожидания. Но если случайные величины непрерывные, то приходится столкнуться с задачей приближения, состоящей в том, что непрерывные случайные величины аппроксимируются дискретными таким образом, чтобы сохранилось существование искомого решения. Вопрос о том, как выбирать такое приближение, еще не исследован, и единственная рекомендация, которая может быть дана по этому поводу, состоит в следующем: если необходимо описать непрерывное распределение конечным множеством скачков, то нужно применять это приближение таким образом, чтобы согласовать как можно больше моментов первоначального распределения, начиная с первого момента и следуя дальше к моментам более высокого порядка. Однако нужно опять подчеркнуть, что исследование точности такого приближения только начинается.

Возможно, лучше всего проиллюстрировать этот метод на примере. Оставим пока вопрос о том, как аппроксимировать непрерывную случайную величину, и предположим, что рассматриваются дискретные распределения промежутков времени между моментами поступления требований и продолжительностей обслуживания. Таким образом, рассмотрим в качестве примера распределения

$$A(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\tau, \\ 1, & t \geq 2\tau, \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 3\tau, \\ 1, & 3\tau \leq x. \end{cases}$$

Так как здесь берутся только дискретные случайные величины, определим $a(k) = P[t_n=k\tau]$ и $b(k) = P[x_n=k\tau]$, которые изображены на фиг. 2.2. Конечно, эти дискретные функции могут быть также представлены как ПРВ с импульсами в соответствующих точках.

Если пользоваться уравнением (2.76), то нужно найти распределение вероятностей для u_n . Определим $c(k) = P[u_n=k\tau]$. Так как $u_n = x_n - t_{n+1}$, то очевидно, что $c(k)$ в общем виде определяется следующей дискретной сверткой:

$$c(k) = a(-k) * b(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(-k+i) b(i).$$

Поскольку выражения для $a(k)$ и $b(k)$ содержат небольшое число членов, эту свертку легко вычислить непосредственно. В нашем примере это тривиально и дает

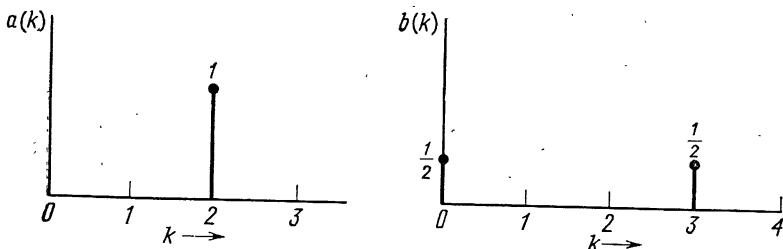
$$c(k) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } k = -2, \\ 1/2, & \text{если } k = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

что показано на фиг. 2.3.

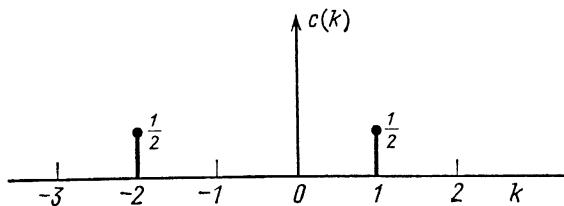
Чтобы выполнить рекуррентную процедуру в уравнении (2.76), необходимо иметь начальную величину, поэтому предположим для рассматриваемого примера, что $w_0 = 0$. Кроме того, определим вероятность

$$p_n(k) = P[w_n = k\tau].$$

Теперь можно применить рекурсию, которая состоит в выполнении операций, описанных уравнением (1.121). Предполагая, что эта рекурсия применяется к расчету $p_n(k)$, можно действовать следующим образом. Сначала найдем распределение вероятностей для случайной величины $w_n + u_n$, для чего необходимо взять свертку $p_n(k)$ с $c(k)$. Далее применим оператор π , действие ко-



Фиг. 2.2. Дискретные вероятности.



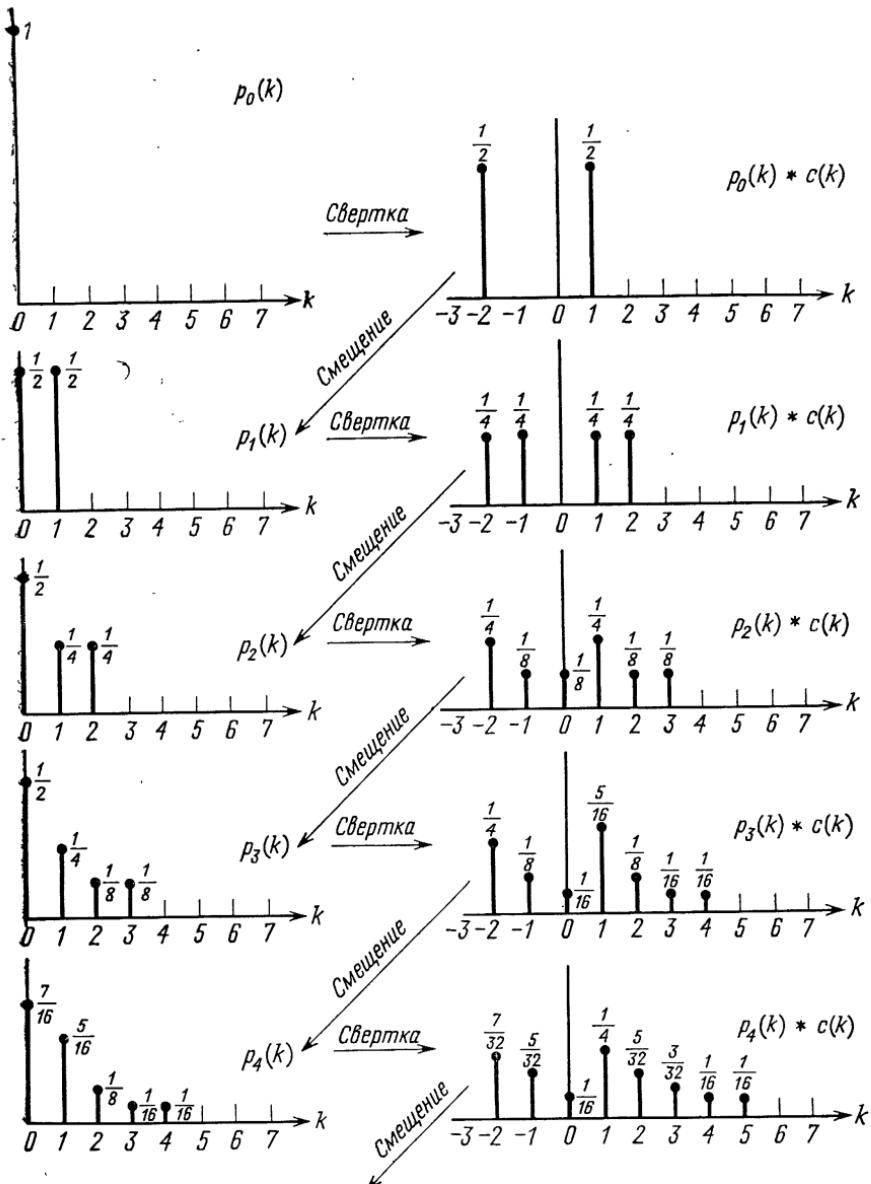
Фиг. 2.3. Вероятность $P[u_n = kt]$.

торого означает, что вероятность, распределенная на отрицательной полуоси, смещается в начало координат (эта операция в рассматриваемой дискретной задаче сводится к сложению); в результате получаем $p_{n+1}(k)$ и переходим к следующему этапу рекуррентной процедуры. Выполняя эту операцию, мы генерируем последовательность, показанную на фиг. 2.4. Образуя свертку начального распределения времени ожидания, приведенного в верхнем левом углу фиг. 2.4, с $c(k)$, получим распределение, показанное в верхнем правом углу. Смещающая вероятность, распределенную на отрицательной полуоси, в начало координат, легко находим $p_1(k)$. В результате свертки этого выражения с $c(k)$ получается картина, показанная на фигуре справа, которая после смещения ее отрицательной части в начало координат дает $p_2(k)$ и т. д., как указывают стрелки. Наша цель — найти предельное распределение вероятностей, определяемое равенством

$$p(k) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k).$$

Для того, чтобы существовало это эргодическое распределение, примем $\rho < 1$. Это эквивалентно требованию $E[u_n] < 0$. Для этого примера мы имеем $\bar{x} = -\frac{3}{2}$, $\bar{t} = 2$ и, таким образом, $\rho = \bar{x}/\bar{t} = -\frac{3}{4}$ и $E[u_n] = \bar{x} - \bar{t} = -\frac{1}{2}$. Процедура записи уравнений, описывающих вероятности $p(k)$, становится ясной, если понять то, что изображено на фиг. 2.4. Потребуем, чтобы стационарное распределение после его свертки с $c(k)$ и затем смещения в начало координат в точности было таким, как до проведения этих двух операций; иначе говоря, должно выполняться уравнение (1.122), которое в принятых здесь обозначениях выражается в виде $p(k) = \pi(p(k) * * c(k))$. Кроме того, заметим, что оператор π влияет только на член $p(0)$ и, таким образом, вид $c(k)$ точно показывает, как любой данный член $p(k)$ связан с соседними. В частности, для рассматриваемого примера

$$p(k) = \frac{1}{2} p(k-1) + \frac{1}{2} p(k+2), \quad k=1,2,3,\dots, \quad (2.77)$$



Фиг. 2.4. Рекуррентная процедура $p_{n+1}(k) = \pi(p_n(k) * c(k))$.

и граничное уравнение для $p(0)$ имеет вид

$$p(0) = \frac{1}{2} p(0) + \frac{1}{2} p(1) + \frac{1}{2} p(2), \quad k=0. \quad (2.78)$$

Теперь имеем знакомую задачу решения системы линейных разностных уравнений, а остальное не вызывает затруднений (см. задачу 2.12). К такому же результату приводит метод факторизации спектра, кратко описанный в разд. 1.10. Достоинство описанного здесь метода состоит в том, что он использует в явном виде дискретную природу рассматриваемых случайных величин. В обоих случаях трудная часть решения состоит в нахождении корней многочлена [в рассматриваемом случае это корни знаменателя функции $P(z) = \sum_k p(k)z^k$, тогда как при методе факторизации

спектра находятся корни выражения $A^*(-s)B^*(s)-1$]. Однако предлагаемая схема приближения служит для того, чтобы преобразовать непрерывные задачи в дискретные, для которых применимы довольно простые методы. Важный вопрос относительно того, как обеспечивается адекватное приближение, здесь не обсуждался. Вопрос о приближении недавно был исследован в работе [50], где рассмотрено, насколько хорошо совпадают распределения и моменты случайных величин, описывающих входящий процесс и время ожидания. Результаты этой работы, в которой сравниваются точные средние значения времени ожидания W с величиной W_A , полученной в результате итерации, показанной на фиг. 2.4, и верхней границей W_U Кингмана, приводятся в следующей таблице.

Отметим отличное соответствие между W и W_A .

Система	ρ	W	W_A	W_U
M/M/1	2/3	0,13	0,13	0,22
M/E2/1	2/3	0,10	0,10	0,18
M/E3/1	2/3	0,09	0,09	0,17
M/E5/1	2/3	0,08	0,08	0,16
M/E10/1	2/3	0,07	0,07	0,16
E2/M/1	2/3	0,09	0,09	0,14
E3/M/1	2/3	0,08	0,08	0,12
E5/M/1	2/3	0,06	0,07	0,10
E10/M/1	2/3	0,06	0,06	0,08
M/D/1	2/3	0,07	0,07	0,15
D/M/1	2/3	0,05	0,05	0,07
E2/E2/1	2/3	0,06	0,06	0,11
M/H2/1	5/6	0,43	0,40	0,53
H2/M/1	4/5	0,28	0,29	0,36
H2/H2/1	5/9	0,12	0,14	0,26

Упомянем также работу [9], в которой описывается процедура решения задачи для случая системы $G/G/1$, причем используется усечение распределения времени обслуживания и рассматривается новое распределение $B_c(x)$, такое, что $B_c(x) = B(x)$ при $x \leq x_c$ и $B_c(x) = 1$ при $x > x_c$. Используя упрощения, получающиеся при усеченном распределении, Коэн предложил метод решения и рассмотрел следствия при $x_c \rightarrow \infty$, т. е. при исключении эффекта усечения. Система $G/G/1$ с усеченным временем обслуживания рассматривается также в работе [38], где сделан переход к дискретному времени (аналогичный тому, который описан здесь). В указанной работе исследуются также пути облегчения численного анализа в этом случае.

2.7. НЕПРЕРЫВНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Когда инженер сталкивается с задачей системного анализа, первое, что он пытается сделать, это оценить работу системы, хотя такая оценка может быть грубой. Иначе говоря, он пытается составить общее мнение о работе системы, чтобы провести инженерные расчеты первого порядка. После этого задача состоит в усовершенствовании оценок и приближенного анализа. Такое усовершенствование должно проводиться только до тех пор, пока это необходимо для обеспечения удовлетворительной работы в пределах некоторых границ. Задача состоит в том, чтобы получить ответы (оценки) по *всем* аспектам работы системы, включая переходную характеристику, условия перегрузки и т. д., а не только изящные решения установившегося режима. Большую часть теории массового обслуживания составляют эти изящные результаты. Даже в первых разделах этой главы границы и неравенства применялись только к установившемуся режиму. В данном и трех последующих разделах используется другой подход, при котором работа СМО рассматривается как *непрерывно протекающий процесс*, а не как дискретный процесс, связанный с потоком требований. Это дает возможность исследовать переходы и перегрузки.

Известно, что в любой СМО как число требований, так и не законченная работа в зависимости от времени являются вероятностными процессами со *скачками* (например, в моменты поступления требований в систему). Приближение, которое здесь исследуется, основано на следующем факте: когда система находится в условиях большой нагрузки (а именно, когда длины очередей значительно больше единицы, а времена ожидания значительно больше среднего времени обслуживания), становится разумной замена этих скачков сглаженными непрерывными функциями времени. Преимуществом такого приближения является то, что величины отдельных скачков малы по сравнению со средними зна-

чениями функций. Здесь имеют место малые относительные приращения. Таким образом приходим к непрерывному вероятностному приближению дискретных СМО¹⁾. Большинство описываемых здесь работ выполнены Ньюэллом [39, 40, 41] и Гейзером [13]. Рассматриваемые методы приближения исследовались также Боровковым [3, 4], Иглхартом [18, 19], Кингманом [25], Прохоровым [45] и другими.

Рассмотрим следующие фундаментальные вероятностные процессы, описывающие СМО: процесс поступления (требований) и процесс уходов (требований), определяемые как

$$\alpha(t) \triangleq \text{число поступлений на интервале } (0, t), \quad (2.79)$$

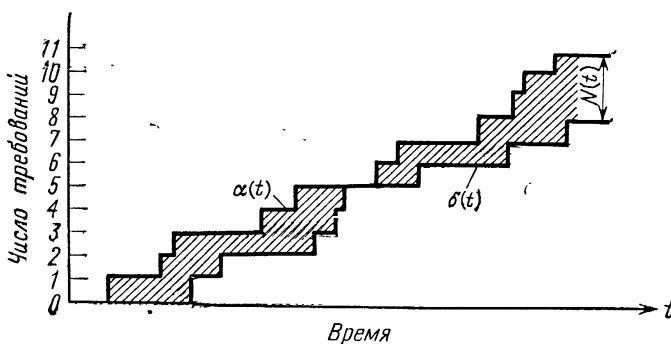
$$\delta(t) \triangleq \text{число уходов на интервале } (0, t). \quad (2.80)$$

Типичные реализации таких ступенчатых вероятностных процессов показаны на фиг. 2.5. Очевидно, что в любой момент времени их разность должна представлять собой число требований $N(t)$, находящихся в системе (причем $N(0)=0$), т. е.

$$N(t) = \alpha(t) - \delta(t). \quad (2.81)$$

Когда $\alpha(t)$ становится значительно больше единицы, можно ожидать лишь небольшого относительного отклонения этой величины от ее среднего значения $E[\alpha(t)] \triangleq \bar{\alpha}(t)$. Иначе говоря, на основании закона больших чисел с вероятностью единица имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)}{\bar{\alpha}(t)} = 0. \quad (2.82)$$



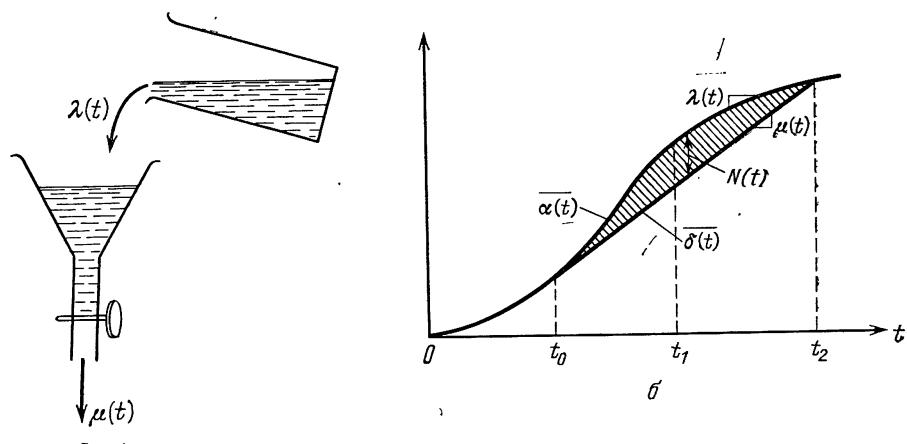
Фиг. 2.5. Ступенчатые процессы поступлений и уходов.

¹⁾ Заметим, что обычно анализ СМО является важным именно в случае длинных очередей и большого времени ожидания; случай малых очередей и задержек менее интересен, так как при этом в работе системы, как правило, не возникает серьезных трудностей.

Это наводит на мысль о том, что приближение первого порядка вероятностного процесса может заключаться в замене вероятностного процесса его средним значением, зависящим от времени. Такое приближение называется *непрерывным приближением СМО*, при котором разрывный вероятностный процесс $\alpha(t)$ заменяется непрерывным детерминированным процессом $\overline{\alpha(t)}$. Как будет показано, такое приближение является очень полезным. Аналогично разрывный вероятностный процесс уходов $\delta(t)$ заменяется его средним значением $\overline{\delta(t)}$. Следовательно, если предположить, что $N(0)=0$, то непрерывное приближение предсказывает, что число требований в системе в момент t должно определяться равенством

$$N(t) = \overline{\alpha(t)} - \overline{\delta(t)} \quad (2.83)$$

и представлять собой детерминированную непрерывную функцию времени. Существует полная аналогия между непрерывным приближением и потоком жидкости. Эта аналогия может быть пояснена на следующем примере (фиг. 2.6, а). Рассмотрим воронку с регулятором, который управляет потоком, вытекающим из воронки. В воронку заливается жидкость со скоростью $d\alpha(t)/dt \triangleq \lambda(t)$ (интенсивность поступления требований), а вытекает она со скоростью $d\delta(t)/dt \triangleq \mu(t)$ (интенсивность обслуживания). Конечно, общее количество вытекшей жидкости никогда не может превысить поступившее количество. Следовательно, в данном случае очевидно, что общее количество жидкости, содержащейся в во-



Фиг. 2.6. Непрерывное приближение СМО.

ронке в момент t , может быть определено равенством (2.83). Таким образом,

$$\overline{\alpha(t)} = \overline{\alpha(0)} + \int_0^t \lambda(y) dy,$$

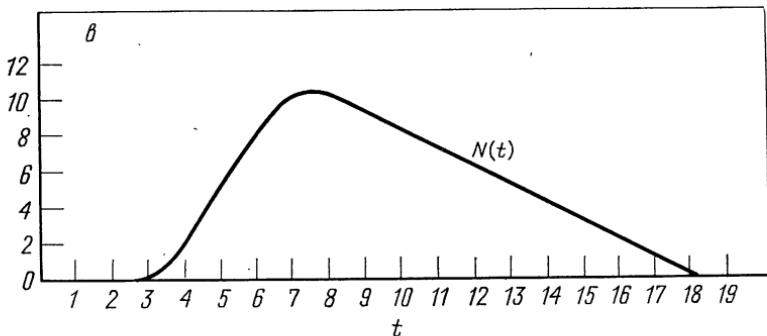
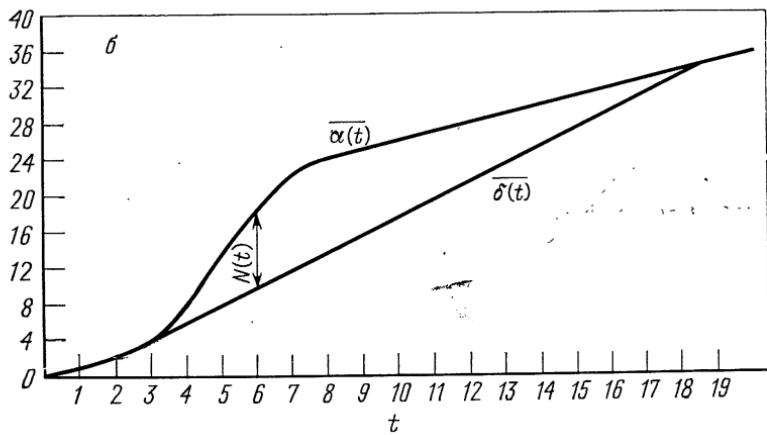
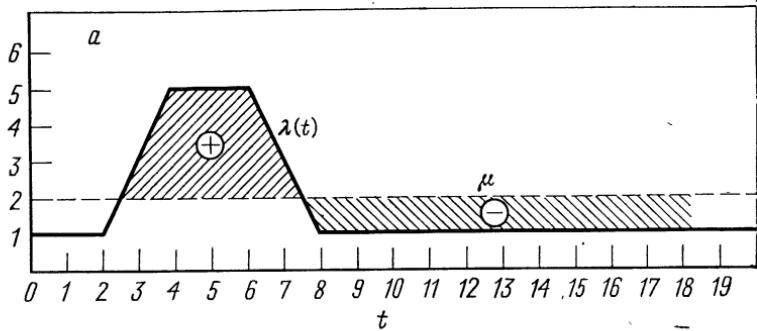
$$\overline{\delta(t)} = \overline{\delta(0)} + \int_0^t \mu(y) dy.$$

Рассмотрим, например, случай, когда $\lambda(t)$ зависит от времени, а $\mu(t)$ фиксировано¹⁾ и равняется μ . Такой пример иллюстрируется фиг. 2.6, б, где $\lambda(t)$ сначала возрастает от небольшого значения в момент времени 0 до значения μ , которое $\lambda(t)$ принимает впервые в момент времени t_0 . С этого момента начинает расти задолженность, достигая максимального значения в момент t_1 , когда опять $\lambda(t) = \mu$; после этого она уменьшается до 0 в момент t_2 . Такое простое приближение имеет ряд серьезных недостатков. Например, из него следует, что в системе нет очередей, когда она приближается к насыщению слева в момент t_0 . Конечно, размер задолженности в это время строго зависит от закона, по которому $\lambda(t)$ стремится к μ в интервале, предшествующем t_0 . В результате рассматриваемого приближения длины очередей могут быть сильно занижены.

Но несмотря на грубость рассматриваемого метода непрерывного приближения, он позволяет качественно описать некоторые интересные стороны работы СМО, к изложению которых мы сейчас переходим. Большая часть этого материала заимствована из работы Ньюэлла [41]. Одним из важных вопросов теории массового обслуживания является исследование законов возрастания очередей и задержек во время часа пик и после него. Точное исследование в этих случаях чрезвычайно трудно даже при простейших предположениях о вероятностных процессах. Однако очень грубую картину можно представить при помощи рассматриваемого непрерывного приближения (которое будет усовершенствоваться в трех следующих разделах). Рассмотрим, например, фиг. 2.7, где показана идеализированная модель для часа пик. На фиг. 2.7, а до момента $t=2$ интенсивность поступления требований постоянна и равняется одному требованию в секунду, затем с начала часа пик она растет линейно и за короткое время достигает постоянной величины, а в конце часа пик линейно убывает опять до первоначального значения, которое затем не меня-

¹⁾ Точнее

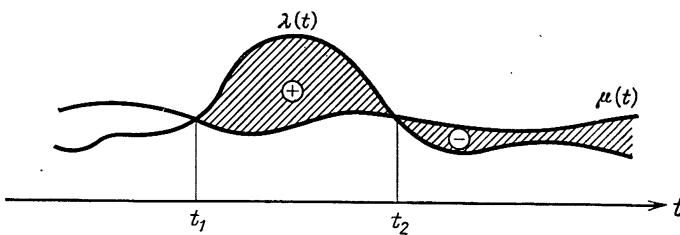
$$\mu(t) = \begin{cases} \mu & \text{при } N(t) > 0, \\ \lambda(t) & \text{при } N(t) = 0. \end{cases}$$



Фиг. 2.7. Непрерывное приближение часа пик.
а — интенсивность потока; *б* — поступления и уходы; *в* — число требований в системе.

ется. Видно также, что интенсивность обслуживания (см. сноску на стр. 76) постоянна и равна $\mu=2$. В интервале $(2,5; 7,5)$ система серьезно перегружена. На фиг. 2.7, б показаны непрерывный процесс поступлений $\alpha(t)$ и непрерывный процесс уходов $\delta(t)$. Рост числа поступающих требований вблизи часа пик очевиден (предполагается, что $\alpha(0)=\delta(0)=0$). Как видно, до момента $t=2,5$ имеем $\delta(t)=\alpha(t)$. Однако в течение следующих пяти единиц времени интенсивность поступления требований превышает максимальную интенсивность уходов, так что эти две кривые расходятся, образуя задолженность системы $N(t)$. Она показана на фиг. 2.7, в (в масштабе, вдвое большем, чем на фиг. 2.7, б). Очевидно, что задолженность быстро растет, достигая пикового значения в момент, когда интенсивность поступления требований опять падает до значения, меньшего интенсивности обслуживания в точке $t=7,5$. Следует отметить, что в конце часа пик (когда опять $\lambda(t) \leq \mu$) задолженность достигает своего *пика*, и влияние часа пик будет наблюдаться еще в течение некоторого (возможно, длительного) времени. Из фиг. 2.7 видно, что это влияние распространяется до точки $t=18,25$, в которой задолженность исчезает. Легко понять, что происходит, если вернуться к фиг. 2.7, а, где заштрихованная область \oplus равна дефициту интенсивности обслуживания по отношению к интенсивности поступления требований и, следовательно, представляет собой общее количество требований, накопленных в рассматриваемой системе. Когда интенсивность поступлений падает ниже интенсивности ухода, этот дефицит можно устранить за счет избыточной емкости, показанной заштрихованной областью \ominus . Задолженность системы падает до нуля только тогда, когда отрицательная площадь становится равной положительной площади. Если величина $\lambda(t)$ не в часы пик лишь ненамного ниже интенсивности уходов μ , устранение дефицита занимает довольно много времени и это приводит к образованию длинного хвоста у задолженности $N(t)$. Наоборот, если интенсивность для отрицательной области велика по сравнению с интенсивностью положительной области, задолженность уменьшается довольно быстро. Естественно, что эти замечания справедливы для любых процессов поступлений и уходов, например, таких, как показанный на фиг. 2.8. Здесь предполагается, что задолженность равна 0 до момента t_1 , а затем начинает расти, поскольку интенсивность поступлений превышает интенсивность уходов. $N(t)$ растет по мере накопления положительной площади и достигает пика в момент t_2 ; затем начинается снижение на величину накапливаемой отрицательной площади, и когда эта площадь становится равной положительной площади, задолженность обращается в нуль.

Возможно, теперь станет ясно, почему автомобильные дороги надолго остаются перегруженными после окончания рабочего дня.



Фиг. 2.8. Устранение дефицита.

Следует предупредить, что хотя непрерывное приближение правильно предсказывает появление длинного хвоста, называемого часом пик, даваемая им величина задолженности, если она вообщедается, является оптимистически заниженной, так как при этом не учитываются очереди, которые возникают за счет *флуктуаций* процессов поступления и уходов. Эти флуктуации могут быть велики по сравнению со средними значениями потоков. Например, на фиг. 2.6 $\lambda(t)$ медленно приближается к интенсивности уходов μ и, наконец, становится равной ей в момент t_0 . В этом случае, как можно заключить из предыдущих результатов, при приближении к t_0 имеет место также сходимость ρ к 1 и поэтому нужно ожидать, что в этой окрестности очереди будут сильно возрастать. Такие очереди возникают вследствие случайной природы входных процессов. Непрерывное же приближение (которое фактически является непрерывным приближением D/D/1), показывает, что до момента t_0 задолженность не возникает, и в этом (важном) смысле оно является несовершенным. В следующих разделах исследуемое приближение усовершенствуется с тем, чтобы учсть случайные явления.

2.8. ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В предыдущем разделе использовалось приближение первого порядка для СМО, при котором процессы поступлений и уходов заменялись их средними значениями и тем самым были построены детерминированные непрерывные процессы; иначе говоря, использовалось непрерывное приближение для СМО. Но упомянутые процессы по своей природе являются случайными, и в настоящем разделе (а также в двух следующих) рассмотренное приближение усовершенствуется путем учета *флуктуаций* $a(t)$ и $\delta(t)$ относительно среднего значения. При этом вводятся дисперсии $\sigma_{a(t)}^2$ и $\sigma_{\delta(t)}^2$ соответственно для процессов поступлений и уходов. Естественный способ введения в рассмотрение указанных флуктуаций относительно среднего значения процесса состоит в описании их при помощи нормального (гауссовского) распределения. Это мож-

но обосновать следующим образом. Заметим, что $\alpha(t)$ представляет собой общее число требований, поступивших к моменту времени t . Вероятность того, что $\alpha(t) \geq n$, равна вероятности поступления требования C_n в момент τ_n , меньший или равный t :

$$P[\alpha(t) \geq n] = P[\tau_n \leq t]. \quad (2.84)$$

Это равенство указывает на важную эквивалентность событий, которая широко используется при рассмотрении решетчатых индексов и комбинаторных методов в теории массового обслуживания [44]. Здесь эта эквивалентность используется следующим образом. Время поступления требования C_n представляет собой сумму n промежутков времени между моментами поступления требований, т. е. $\tau_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, причем предполагается, что $\tau_0 = 0$. Для системы G/G/1 считается, что $\{t_i\}$ является множеством независимых одинаково распределенных случайных величин [с функцией распределения $A(t)$]. Когда время t и, следовательно, число n становятся большими, τ_n является суммой большого числа независимых (и одинаково распределенных) случайных величин. Поэтому можно ожидать, что здесь применима центральная предельная теорема, которая позволяет описать случайную величину τ_n , а следовательно, и случайный процесс $\alpha(t)$ как гауссовские. Это предположение о нормальном распределении $\alpha(t)$ [и $\delta(t)$] является краеугольным камнем диффузационного приближения, которое детально рассматривается в этом разделе.

При диффузационном приближении предполагается, что процесс поступлений $\alpha(t)$ и процесс уходов $\delta(t)$ аппроксимируются непрерывными вероятностными процессами (с независимыми приращениями), которые в момент времени t распределены по нормальному закону со средними значениями $\bar{\alpha}(t)$ и $\bar{\delta}(t)$ и дисперсиями $\sigma_{\alpha(t)}^2$ и $\sigma_{\delta(t)}^2$ соответственно. Определив четыре параметра (два средних значения и две дисперсии), получим полное описание указанных двух случайных процессов, так как гауссовский процесс с независимыми приращениями (приводящий к тривиальной функции ковариации) является двупараметрическим процессом (фактически рассматривается процесс, описывающий броуновское движение, т. е. проинтегрированный белый шум с ненулевым средним значением [20]). Как было упомянуто, дисперсии вводятся для того, чтобы описать случайные флуктуации процессов относительно их средних значений. Эти приближения используются здесь для определения числа требований $N(t)$ и неоконченной работы $U(t)$ в системе. Как хорошо известно [43], если имеются два независимых нормально распределенных случайных процесса, например $\alpha(t)$ и $\delta(t)$, любая линейная комбинация этих процессов представляет собой также нормально распределенный процесс (с соответствующим образом заданными средним значением и дис-

персиией). Одна из интересующих нас линейных комбинаций, а именно $a(t) - \delta(t)$, есть $N(t)$, т. е. задолженность системы, выраженная через число требований. (Для нас также значительный интерес представляет неоконченная работа $U(t)$, т. е. задолженность в единицах времени.) Ниже будет показано [см. формулу (2.132)], что задолженность описывается переходным распределением, которое является взвешенной разностью двух гауссовских распределений. При $\rho < 1$ существует стационарное распределение, которое оказывается показательным распределением (2.9), полученным в случае большой нагрузки. При $\rho > 1$, естественно, стационарного распределения не существует. Однако в этом случае оказывается, что надлежащим образом сдвинутое и нормированное время ожидания w_n , а именно

$$\frac{w_n - nw}{\sigma_w \sqrt{n}},$$

удовлетворяет центральной предельной теореме [24], что позволяет говорить и здесь о частном случае сходимости.

При попытке воспользоваться преимуществами линейной комбинации $N(t) = a(t) - \delta(t)$ двух независимых гауссовских процессов сразу же возникает трудность: процесс уходов $\delta(t)$ зависит от процесса поступлений, а именно $\delta(t) \leq a(t)$. Но, к счастью, когда $N(t) > 0$, процесс уходов возрастает на единицу в каждый момент времени, когда заканчивается обслуживание, и, таким образом, промежутки времени между моментами ухода распределены, как время обслуживания, по закону $B(x)$ независимо от процесса поступлений [если $N(t) > 0$]. Следовательно, в случае, когда $N(t)$ велико, процесс уходов приближенно не зависит от процесса поступлений, а это как раз интересующий нас случай. Вместе с тем можно ожидать, что применяемое приближение окажется плохим, когда нагрузка системы невелика.

Таким образом, намечается основа для приближения второго порядка (диффузионного приближения) рассматриваемых СМО. Замена $a(t)$ его средним значением $\bar{a}(t)$ и дисперсией $\sigma_{a(t)}^2$ эквивалентна разложению процесса в ряд Тейлора относительно его среднего значения с отбрасыванием всех членов разложения, кроме двух первых [см. (2.102)]. Установим теперь зависимость между средними значениями и дисперсиями рассматриваемых процессов поступлений и уходов и параметрами распределений $A(t)$ и $B(x)$. Уже было показано, что для любых t и n справедливо равенство $P[a(t) \geq n] = P[\tau_n \leq t]$. Аналогично если представить суммой $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ общее время обслуживания первых n требований, то очевидно, что $P[\delta(t) \geq n] = P[X_n \leq t]$ в предположении что система никогда не пустеет. В этом смысле процессы поступлений и уходов аналогичны, и исследование одного

из них дает сведения о другом. Рассмотрим процесс уходов. Если при заданном n использовать ранее введенные обозначения, то будем иметь

$$\bar{X}_n = n\bar{x}, \\ \sigma_{X_n}^2 = n\sigma_b^2.$$

Применяя центральную предельную теорему, устанавливаем, что при $n \rightarrow \infty$ нормированная сумма $(X_n - n\bar{x})/\sigma_b/\sqrt{n}$ распределена по нормальному закону со средним значением, равным нулю, и дисперсией, равной единице; иначе говоря, при $n \gg 1$

$$P\left[\frac{X_n - n\bar{x}}{\sigma_b \sqrt{n}} \leq x\right] \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy. \quad (2.85)$$

В дальнейшем правая часть (2.85) будет обозначаться через $\Phi(x)$. Обозначение $N(m, \sigma^2)$ по отношению к X означает, что X является случайной величиной, распределенной поциальному закону со средним значением m и дисперсией σ^2 . Таким образом, можно сказать, что X_n — это $N(n\bar{x}, n\sigma_b^2)$, а $(X_n - n\bar{x})/\sigma_b/\sqrt{n}$ — это $N(0, 1)$. Очевидно, что вторая случайная величина представляет собой сдвинутую и измененную по масштабу величину X_n . Заметим, что среднее значение случайной величины X_n растет линейно с увеличением n , а стандартное отклонение растет по закону \sqrt{n} . Следовательно, отношение стандартного отклонения к среднему значению — убывающая функция n . Отсюда следует, что флуктуации около среднего значения становятся незначительными по сравнению с этим средним, когда n стремится к бесконечности.

Событие $(X_n - n\bar{x})/\sigma_b \sqrt{n} \leq x$ является таким же, как и событие $X_n \leq x\sigma_b \sqrt{n} + n\bar{x}$. Введем обозначение

$$t \triangleq x\sigma_b \sqrt{n} + n\bar{x}. \quad (2.86)$$

В соответствии с вышеизложенным при больших n

$$P[X_n \leq t] = P[\delta(t) \geq n] \longrightarrow \text{Гауссовское распределение.} \quad (2.87)$$

Задача состоит в том, чтобы доказать, что $\delta(t)$ действительно является случайным процессом с нормальным распределением. Последнее равенство почти доказывает это утверждение, но в него входит величина n . Теперь необходимо воспользоваться зависимостью (2.86) между t и n . Заметим, что при больших n преобладает член $t \approx n\bar{x}$, поэтому в качестве приближения [с поправочным членом из равенства (2.86)] можно записать

$$n \approx \frac{t}{\bar{x}} - x \left(\frac{\sigma_b}{\bar{x}} \right) \sqrt{\frac{t}{\bar{x}}}. \quad (2.88)$$

Таким образом, событие $\delta(t) \geq n$ с использованием последнего приближения может быть записано в виде

$$\frac{\delta(t) - (t/\bar{x})}{(\sigma_b/\bar{x})\sqrt{t/\bar{x}}} \geq -x.$$

Если это выражение подставить в равенство (2.87) и воспользоваться симметрией $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, то для больших t получим

$$P\left[\frac{\delta(t) - (t/\bar{x})}{(\sigma_b/\bar{x})\sqrt{t/\bar{x}}} \leq x\right] \approx \Phi(x). \quad (2.89)$$

В результате приходим к выводу, что процесс уходов является гауссовой случайной величиной со средним значением t/\bar{x} и стандартным отклонением $(\sigma_b\sqrt{t/\bar{x}})/\bar{x}$. Иначе говоря, $\delta(t)$ при больших t есть $N(t/\bar{x}, \sigma_b^2 t / (\bar{x})^3)$. Этот же результат применим к процессу поступлений $a(t)$, если среднее значение и дисперсию времени обслуживания заменить средним значением и дисперсией промежутков времени между моментами поступления требований. Иначе говоря, $a(t)$ — это $N(t/\bar{t}, \sigma_a^2 t / (\bar{t})^3)$. Необходимо заметить, что оба эти приближения хорошие только для больших t и СМО с умеренной или большой нагрузкой.

В результате приходим к выводу, что число требований в системе в момент t , определяемое равенством $N(t) = a(t) - \delta(t)$, также является нормальным случайным процессом со средним значением $\bar{N}(t) = \bar{a}(t) - \bar{\delta}(t)$ и дисперсией $\sigma_{N(t)}^2 = \sigma_{a(t)}^2 + \sigma_{\delta(t)}^2$, так как дисперсии независимых процессов складываются. Заметим, что среднее число требований в системе для этого приближения второго порядка такое же, как и в случае приближения первого порядка (непрерывного приближения) из предыдущего раздела. Следовательно, при помощи рассматриваемого приближения показано, что для системы G/G/1 среднее значение и дисперсия $N(t)$ равны

$$\bar{N}(t) = \frac{t}{\bar{t}} - \frac{t}{\bar{x}} = \left(\frac{\rho - 1}{\bar{x}} \right) t, \quad (2.90)$$

$$\sigma_{N(t)}^2 = \left[\frac{\sigma_a^2}{(\bar{t})^3} + \frac{\sigma_b^2}{(\bar{x})^3} \right] t. \quad (2.91)$$

Заметим, что как среднее значение, так и дисперсия растут линейно со временем. Однако приближение показывает, что при $\rho < 1$ среднее число требований в системе становится отрицательным. Очевидно, этого нельзя допустить, поэтому далее положение исправляется путем установления для $N(t)$ «отражающего экрана» в начале координат. Однако при $\rho > 1$ разработано разумное

приближение, при котором среднее число требований в системе растет линейно с увеличением t , а стандартное отклонение числа требований растет по закону \sqrt{t} и описывает флуктуации относительно растущего среднего значения.

Конечно, такое приближение при помощи нормального случайного процесса стирает дискретную природу процессов поступлений и уходов. Тем не менее в случае, когда $N(t)$ велико по сравнению с единицей, это приближение полезно. Для того чтобы получить больше информации о диффузионном приближении процесса $N(t)$, исследуем теперь дифференциальные уравнения в частных производных для ФРВ рассматриваемого процесса. Это позволит надлежащим образом ввести отражающий экран в начале координат, а также сделать более ясными утверждения, относящиеся к переходному и установившемуся режимам при таком приближении. Кроме $N(t)$, будет рассмотрена также незаконченная работа $U(t)$ в момент t , которая тоже будет аппроксимирована с помощью нормального случайного процесса. В частности, представляет интерес характер изменения этих случайных процессов за небольшой промежуток времени. Промежуток времени должен быть достаточно мал, чтобы случайный процесс изменился лишь на небольшую часть своего значения, но он должен быть и достаточно большим, чтобы имело место достаточное число дискретных скачков, обеспечивающих допустимость непрерывной аппроксимации этих двух процессов. Изучим *марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний*. Переайдем к выводу основных дифференциальных уравнений в частных производных для таких марковских процессов с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Если читатель хочет пропустить этот вывод, он может непосредственно обратиться к равенству (2.113), являющемуся исходным результатом для последующего изложения.

В разд. 1.3 рассматривались марковские процессы, непрерывные по времени, но имеющие дискретное пространство состояний, и было отмечено, что переходные вероятности удовлетворяют уравнению Чепмена—Колмогорова (1.44). Так как теперь мы хотим заменить дискретный и смешанный случайные процессы (т. е. $N(t)$ и $U(t)$) непрерывными, естественно перейти к рассмотрению марковского процесса с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний, который обозначим через $X(t)$. По аналогии с равенством (1.43) для условных переходных вероятностей дискретных состояний рассмотрим следующие условные переходные вероятности непрерывных состояний:

$$F(x, t; y, \tau) \triangleq P[X(\tau) \leqslant y | X(t) = x] \quad \text{при } t < \tau. \quad (2.92)$$

Таким образом, $F = F(x, t; y, \tau)$ является вероятностью того, что процесс принимает значение, меньшее или равное y , в момент τ

при условии, что он имел значение x в момент t . Эти (возможно, зависящие от времени) переходные вероятности, очевидно, удовлетворяют следующему уравнению Чепмена—Колмогорова:

$$F(x, t; y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u; y, \tau) d_w F(x, t; w, u),$$

где $t < u < \tau$.

Введем теперь некоторые предположения относительно случайного процесса $X(t)$, которые связаны с его непрерывностью. В частности, предположим, что для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \epsilon} d_y F(x, t - \Delta t; y, t) = 0. \quad (2.93)$$

Кроме того, допустим, что существуют непрерывные производные $\partial F / \partial x$ и $\partial^2 F / \partial x^2$. Введем теперь условное среднее значение $M(x, t; \tau)$ и условную дисперсию $V(x, t; \tau)$, где условие задается положением (x) процесса в некоторый предшествующий момент времени $t (t < \tau)$. Эти величины определяются следующим образом:

$$M(x, t; \tau) \triangleq E[X(\tau) | X(t) = x], \quad (2.94)$$

$$V(x, t; \tau) \triangleq E[(X(\tau) - M(x, t; \tau))^2 | X(t) = x]. \quad (2.95)$$

Заметим, что $M(x, t; t) = x$ и $V(x, t; t) = 0$. Более интересными, чем среднее значение и дисперсия, являются *инфinitезимальное среднее значение* $m(x, t)$ и *инфinitезимальная дисперсия* $\sigma^2(x, t)$, которые дают соответственно *скорости изменения* M и V по τ в точке $\tau = t$, а именно

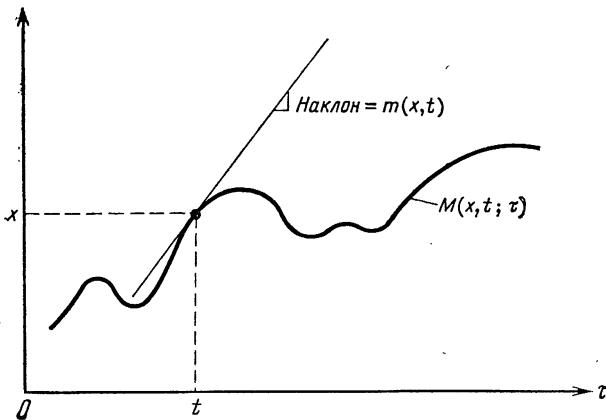
$$m(x, t) \triangleq \left. \frac{\partial M(x, t; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=t}, \quad (2.96)$$

$$\sigma^2(x, t) \triangleq \left. \frac{\partial V(x, t; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=t}. \quad (2.97)$$

Здесь производные берутся при $\tau \geq t$ (фиг. 2.9). Эти infinitезимальные характеристики могут быть выражены через переходные вероятности следующим образом:

$$m(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) d_y F(x, t - \Delta t; y, t), \quad (2.98)$$

$$\sigma^2(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 d_y F(x, t - \Delta t; y, t) \geq 0. \quad (2.99)$$



Фиг. 2.9. Связь между условным и инфинитезимальным средними значениями.

Таким образом, при малых положительных Δt имеем следующие приближения:

$$M(x, t; t + \Delta t) \approx x + m(x, t) \Delta t,$$

$$V(x, t; t + \Delta t) \approx \sigma^2(x, t) \Delta t.$$

При помощи этого описания непрерывного марковского процесса выведем теперь прямые и обратные уравнения для F . Начнем с обратных уравнений. Из уравнения Чепмена—Колмогорова имеем

$$F(x, t - \Delta t; y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w, t; y, \tau) d_w F(x, t - \Delta t; w, t).$$

На основании тривиальных соображений функцию F можно записать в виде

$$F(x, t; y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t; y, \tau) d_w F(x, t - \Delta t; w, t),$$

так как если вынести F из-под знака интеграла, то останется интеграл от ПРВ, который равен единице. Вычитая последние два уравнения и деля на Δt , получаем

$$\begin{aligned} \frac{F(x, t - \Delta t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau)}{\Delta t} &= \\ &= -\frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} [F(w, t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau)] d_w F(x, t - \Delta t; w, t). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Интеграл в правой части последнего равенства может быть разбит на два: один по области $|w-x| \geq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, а другой по области $|w-x| < \varepsilon$. На основании формулы (2.93) первый из этих двух интегралов при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к нулю, а подынтегральное выражение второго интеграла можно заменить следующим разложением в ряд Тейлора:

$$F(w, t; y, \tau) - F(x, t; y, \tau) =$$

$$= (w-x) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} (w-x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + o((w-x)^2). \quad (2.101)$$

Если теперь подставить (2.101) в равенство (2.100) и взять предел при $\Delta t \rightarrow 0$, то из формул (2.98) и (2.99) получим для F следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = m(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (2.102)$$

Это обратное уравнение Колмогорова для рассматриваемого марковского процесса с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Функция F удовлетворяет уравнению (2.102) везде, кроме точек накопления (таких, как начало координат, $y=0$).

Выведем теперь диффузионное уравнение (известное также как уравнение Фоккера—Планка), которое является прямым уравнением для рассматриваемого процесса. Функция, удовлетворяющая этому уравнению, — это ПРВ, связанная с финальным состоянием y , а именно

$$f(x, t; y, \tau) \triangleq \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial y}. \quad (2.103)$$

Плотность f также удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова

$$f(x, t; y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, u; y, \tau) f(x, t; w, u) dw, \quad (2.104)$$

где $t < u < \tau$. Рассмотрим теперь произвольную функцию $Q(y)$, которая вместе со своими производными достаточно быстро стремится к нулю на $\pm\infty$, так что интеграл I сходится, где

$$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \frac{\partial f(x, t; y, \tau)}{\partial \tau} dy. \quad (2.105)$$

На основании определения производной и равенства (2.104) интеграл I можно представить в виде

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) [f(x, t; y, \tau + \Delta\tau) - f(x, t; y, \tau)] dy = \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t; w, \tau) f(w, \tau; y, \tau + \Delta\tau) dw dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} Q(w) f(x, t; w, \tau) dw \right]. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Рассмотрим двойной интеграл в последнем равенстве. Изменяя порядок интегрирования и разлагая функцию Q в ряд Тейлора по w , этот двойной интеграл (обозначаемый через I_2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t; w, \tau) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n Q(w)}{dw^n} \frac{1}{n!} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} f(w, \tau; y, \tau + \Delta\tau) (y-w)^n dy \right] dw. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Теперь точно так же, как были определены инфинитезимальные среднее значение и дисперсия в равенствах (2.98) и (2.99), определим инфинитезимальные n -е моменты в виде

$$A_n(w, \tau) \triangleq \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y-w)^n f(w, \tau; y, \tau + \Delta\tau) dy, \quad (2.108)$$

предполагая их конечными. Очевидно, что

$$A_1(w, \tau) = m(w, \tau) \quad \text{и} \quad A_2(w, \tau) = \sigma^2(w, \tau).$$

Заметим, что момент $A_0(w, \tau)$, соответствующий (2.107) при $n=0$, исключает второй (однократный) интеграл в равенстве (2.106). Используя определение $A_n(w, \tau)$ и разложение I_2 , приходим к следующему выражению:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t; w, \tau) A_n(w, \tau) \frac{d^n Q(w)}{dw^n} dw.$$

Проинтегрируем это выражение по частям (n раз для n -го члена), положив $u = f(x, t; w, \tau) A_n(w, \tau)$ и $dv = (d^n Q(w)/dw^n) dw$. Так как

предполагалось, что функция Q и все ее производные достаточно быстро стремятся к нулю в $\pm\infty$, выражения $uv \mid_{w=\pm\infty}^w = \pm\infty$ при интегрировании по частям исчезают. Остаются только члены вида $-\int vdu$, что приводит к выражению

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial w^n} [A_n(w, \tau) f(x, t; w, \tau)] dw. \quad (2.109)$$

Вычитая (2.109) из (2.105), получаем

$$I - I = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} Q(w) \left\{ \frac{\partial f(x, t; w, \tau)}{\partial \tau} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial w^n} [A_n(w, \tau) f(x, t; w, \tau)] \right\} dw. \quad (2.110)$$

Так как $Q(w)$ — произвольная функция, то для того, чтобы выполнялось равенство (2.110), необходимо, чтобы функция $f = f(x, t; w, \tau)$ удовлетворяла условию

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial w^n} [A_n(w, \tau) f]. \quad (2.111)$$

Уравнение (2.111) справедливо для рассматриваемого марковского процесса с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний и является основным уравнением для рассматриваемого процесса. Из этого уравнения можно вывести различные приближения для СМО. Например, как будет показано, если взять только первый член этого уравнения, то можно легко получить непрерывное приближение, а именно, предполагая, что $A_n(w, t) = 0$ при $n=2, 3, 4, \dots$, находим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w} [m(w, t) f] \quad (2.112)$$

[напомним, что $A_1(w, t) = m(w, t)$], где для удобства τ заменено на t . В следующем разделе исследуется решение этого уравнения для случая постоянных интенсивностей поступлений и уходов.

Интересным является приближение второго порядка, при котором считаются ненулевыми только первые два члена рассматри-

зываемого ряда и предполагается¹⁾, что $A_n(\omega, t) = 0$ при $n=3, 4, 5, \dots$; в результате получаем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega} [m(\omega, t)f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [\sigma^2(\omega, t)f] \quad \blacksquare \quad (2.113)$$

[напомним, что $A_2(\omega, t) = \sigma^2(\omega, t)$]. Это уравнение известно как одномерное уравнение Фоккера—Планка. Уравнения (2.113) и (2.102) называются *диффузионными*, причем они являются соответственно прямым и обратным уравнениями Колмогорова. Уравнение (2.113) используется в настоящем разделе²⁾. Оно удовлетворяется во всех точках, кроме тех, в которых f имеет импульсные функции. Заметим, что если даже мы исследовали бы все члены уравнения (2.111), то получили бы опять лишь приближение для СМО, так как предполагается, что рассматриваемые процессы непрерывны (фактически же, как известно, они такими не являются!).

Начнем с детерминированного непрерывного приближения для СМО, а именно с уравнения (2.112). Как видно, в него входит только инфинитезимальное среднее значение рассматриваемого процесса, и это, конечно, эквивалентно замене (как в предыдущем разделе) случайного процесса его средним значением. Так как в предыдущем разделе рассматривалось число требований в системе $N(t)$, возьмем теперь в качестве исследуемого случайного процесса незаконченную работу $U(t)$. Иначе говоря, рассмотрим функцию

$$F(\omega_0, 0; \omega, t) = P[U(t) \leq \omega | U(0) = \omega_0],$$

которая описывает зависящее от времени распределение незаконченной работы в предположении, что начальная незаконченная работа в момент $t=0$ равна ω_0 . Допустим для простоты, что интенсивность поступлений $\lambda(t) = \lambda$, а интенсивность процесса уходов $\mu(t) = \mu$ (обе интенсивности постоянны во времени). В результате $m(\omega, t)$ также постоянна и не зависит от ω и t . Эта величина может быть выражена через параметры системы как средняя чистая скорость накопления работы в системе (при $\omega > 0$). Так как в систему в среднем поступают λ требований в секунду, каждое поступающее требование вносит среднюю незаконченную работу продолжительностью x (среднее время обслу-

¹⁾ Обоснованием пренебрежения членами высшего порядка является то, что условная ПРВ должна быть сильно сосредоточена в окрестности ω . Приближение третьего порядка рассматривается в задаче 2.23.

²⁾ Заметим, что если $m(\omega, t) = m(t)$ и $\sigma(\omega, t) = \sigma(t)$, то эти параметры могут быть вынесены из-под знаков дифференциальных операторов. В этом случае процессы поступлений и уходов не зависят от задолженности системы, хотя и допускается их изменение во времени.

живания) и предполагается, что обслуживающее устройство работает непрерывно, т. е. выполняет работу со скоростью 1 с/с (тот факт, что обслуживающий прибор никогда не бывает свободным, является предположением рассматриваемого приближения), то $m(w, t)$ является постоянной величиной m , определяемой равенством

$$\begin{aligned} m(w, t) \Delta t &\triangleq m \Delta t = E[U(t + \Delta t) - U(t) | U(t)] = \\ &= (\bar{\lambda}x - 1) \Delta t, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$m = \rho - 1. \quad (2.114)$$

Теперь не только f , но и F (с другим граничным условием) должна удовлетворять уравнению (2.112) и, таким образом, необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial F(w, t)}{\partial t} = (1 - \rho) \frac{\partial F(w, t)}{\partial w}, \quad ■ (2.115)$$

где обозначение упрощено за счет пренебрежения начальным условием, т. е. использована запись $F(w_0, 0; w, t) = F(w, t)$. Кроме того, имеются два естественных граничных условия, справедливых для всех t :

$$F(w, t) = 0 \text{ при } w < 0, \quad (2.116)$$

$$F(\infty, t) = 1. \quad (2.117)$$

Начальное условие уже было принято ранее; оно устанавливает, что время ожидания в момент $t=0$ равно w_0 с вероятностью 1, а именно

$$F(w, 0) = F_0(w) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{при } w < w_0, \\ 1 & \text{при } w \geq w_0. \end{cases} \quad (2.118)$$

Решением уравнения (2.115) является произвольная функция аргумента $(w - mt)$; применив указанные выше дополнительные условия, получим единственное решение

$$F(w, t) = \begin{cases} F_0(w + (1 - \rho)t) & \text{при } w \geq 0, \\ 0 & \text{при } w < 0. \end{cases} \quad (2.119)$$

Если исследовать это решение, то можно увидеть, что при $\rho < 1$ незаконченная работа (а именно виртуальное время ожидания) уменьшается (с вероятностью единица), начиная со значения w_0 , до нуля со скоростью $1 - \rho$ и наконец в момент $t = w_0 / (1 - \rho)$ дает нулевую задолженность, которая впоследствии сохраняется. Вместе с тем при $\rho > 1$ задолженность, начиная со значения w_0 , увеличивается неограниченно со скоростью $(\rho - 1)$ с/с. Очевидно, что мы получаем правильно описанное переходное поведение детерминированной СМО (см. разд. 2.7).

Перейдем теперь к исследованию диффузионного приближения, которое, как было показано, является приближением второго порядка, учитывающим среднее значение и дисперсию исходного процесса. (Это соответствует замене случайногопроцесса броуновским движением [20].) Опять будем интересоваться зависящим от времени распределением незаконченной работы, т. е. $F = F(w, t) = P[U(t) \leq w]$, где опущено начальное условие, которое будет введено только при необходимости. Уравнение (2.113) является основным дифференциальным уравнением движения в частных производных, которое необходимо решить. Заметим, что при соответствующих граничных условиях оно также удовлетворяется для F . Можно опять найти решение этого уравнения в случае, когда как инфинитезимальное среднее значение, так и инфинитезимальная дисперсия не зависит от w и t . Таким образом, предполагается, что

$$\begin{aligned} m(w, t) &= m, \\ \sigma^2(m, t) &= \sigma^2, \end{aligned}$$

причем считается, что они постоянны как в исходном случайному процессе $U(t)$, так и в его диффузионном приближении. Таким образом, функция F должна удовлетворять уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}. \quad (2.120)$$

Величина m была уже вычислена; она дается равенством (2.114). Для определения σ^2 выполним следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \Delta t &\triangleq D[U(t + \Delta t) - U(t) | U(t)] = \\ &= E\{|(U(t + \Delta t) - U(t)) - m \Delta t|^2 | U(t)\} = \\ &= E\{|[U(t + \Delta t) - U(t)]^2 | U(t)\} - m^2 (\Delta t)^2 = \\ &= \lambda \Delta t \bar{x}^2 + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Последняя строка вытекает из того факта, что с вероятностью $\lambda \Delta t$ (т. е. с вероятностью поступления требования) второй момент изменения незаконченной работы в течение времени $(t, t + \Delta t)$ равен \bar{x}^2 (т. е. второму моменту распределения времени обслуживания). Нужно заметить, что равенство (2.121) справедливо лишь для системы M/G/1. В результате имеем

$$\begin{aligned} m &= \rho - 1, \\ \sigma^2 &= \lambda \bar{x}^2. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Общее решение уравнения (2.120) записывается как

$$F(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(w-w_0-mt)/\sigma\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx = \Phi\left(\frac{w-w_0-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad (2.123)$$

где $\Phi(x)$ — ФРВ нормированной случайной величины, определяемой формулой (2.85). Однако это решение неудовлетворительное, так как оно не удовлетворяет граничному условию (2.116).

Упростим несколько задачу и будем искать решение уравнения (2.120) для состояния *равновесия* в случае, когда $\rho < 1$. Иначе говоря, найдем

$$F(w) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(w, t),$$

причем F должно удовлетворять уравнениям (2.116), (2.117) и (2.120). Очевидно, что левая часть уравнения (2.120) стремится в этом предельном случае к нулю, и решение получающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка, которое также удовлетворяет граничным условиям, дается в виде

$$F(w) = 1 - e^{2tw/\sigma^2}, \quad w \geq 0. \quad ■ (2.124)$$

Насколько хорошим является это решение? Мы ожидаем, что оно должно быть довольно хорошим приближением в случае большой нагрузки, при которой задолженность системы обычно велика, и предположение о том, что обслуживающий прибор никогда не становится свободным, является удовлетворительным. Таким образом, предположение о непрерывности задолженности как функции времени является разумным, если дискретные скачки малы по величине по сравнению с общей задолженностью. Расчет для системы G/G/1 в случае большой нагрузки был уже сделан и привел к результату (2.9), аналогичному по форме решению (2.124). В первом решении коэффициент в показателе степени имел значение s_0 , определяемое формулой (2.7), а именно

$$s_0 \approx \frac{-2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}.$$

Однако этот результат, принадлежащий Кингману, относился к времени ожидания, тогда как равенство (2.124) описывает незаконченную работу. Эти две величины совпадают в случае системы M/G/1 с обслуживанием в порядке поступления, когда $\sigma_a^2 = 1/\lambda^2$ и $\bar{t} = 1/\lambda$. Таким образом,

$$s_0 \approx \frac{-2(1-\rho)}{(1/\lambda) + \lambda\sigma_b^2} = \frac{-2(1-\rho)}{(1/\lambda) + \lambda\bar{x}^2 - \lambda\bar{x}^2}.$$

Однако при большой нагрузке $\rho = \lambda \bar{x} \approx 1$ и, таким образом, $1/\lambda - \lambda \bar{x}^2 \approx 1/\lambda - \bar{x} \approx 0$, что дает

$$s_0 \approx \frac{-2(1-\rho)}{\lambda \bar{x}^2}. \quad (2.125)$$

Но из равенства (2.122) и (2.124) видно, что s_0 приближенно равно показателю $2m/\sigma^2 = 2(\rho-1)/\lambda \bar{x}^2$. Таким образом, *диффузионное приближение согласуется с приближением Кингмана при большой нагрузке!*

Равенство (2.124) дает диффузионное приближение стационарного распределения времени ожидания. Аналогичный результат, конечно, справедлив для предельного распределения $N(t)$, где m и σ^2 должны быть вычислены для числа требований в системе, а не для незаконченной работы. В частности, из равенства (2.90) видно, что $m = \bar{N}(t)/t = (\rho-1)/\bar{x}$, а равенство (2.91) показывает, что $\sigma^2 = \sigma_{N(t)/t}^2 = (C_a^2/\bar{t}) + (C_b^2/\bar{x})$. Таким образом, находим, что непрерывное диффузионное приближение $F(w)$ для стационарного распределения числа требований в системе опять определяется равенством (2.124). Кобаяси [28] предложил провести дискретизацию, чтобы получить приближение \hat{p}_k для распределения числа требований в системе

$$\hat{p}_k = F(k+1) - F(k) = (1-\hat{\rho})(\hat{\rho})^k,$$

$$\text{где } \hat{\rho} = e^{-2(1-\rho)/(\rho C_a^2 + C_b^2)}.$$

Заметим, что решение для \hat{p}_k напоминает решение (1.56) для системы $M/M/1$ и фактически, когда $C_a = C_b = 1$ ($M/M/1$), ρ очень близко к ρ [28]. Предсказываемый коэффициент использования прибора равен $1 - \hat{\rho}_0 = \hat{\rho}$. Однако из формулы (1.26) видно, что точное значение коэффициента использования равно ρ . На основании этого Кобаяси рекомендует корректировать \hat{p}_k при $k=0$, а именно

$$\hat{p}_k = \begin{cases} 1-\rho & \text{при } k=0, \\ \rho(1-\hat{\rho})(\hat{\rho})^{k-1} & \text{при } k \geq 1. \end{cases}$$

В работе [46] показано, что погрешность среднего числа требований в системе N при стационарном режиме, возникающая при таком приближении, мала в случае системы $M/G/1$ при $C_b \approx 1$ и растет при отклонении C_b от единицы. Однако относительная погрешность \bar{N} стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1$. Модификация при $k=0$ является одним из методов уменьшения погрешности, возникающей из-за компромисса, который был сделан при помещении отражающего экрана в начало координат. Другой подход к реше-

нию этой задачи дан Геленбе [14]. При использовании его подхода в начале координат помещается поглощающий экран, который накапливает вероятности и сохраняет их в течение времени, имеющего показательное распределение (с параметром λ , интенсивностью процесса поступлений); после этого вероятность перескакивает в единичную точку. Накопленная вероятность в начале координат соответствует вероятности свободной системы, а скачок к единице (с интенсивностью λ) соответствует поступлению (одного) требования в систему. Решение этого диффузационного приближения для распределения числа требований в системе $M/G/1$ имеет вид

$$p_k^* = \begin{cases} 1 - \rho, & k=0, \\ K_1 \hat{\rho}, & k=1, \\ K_2 (\hat{\rho})^k, & k \geq 2, \end{cases}$$

где K_1 и K_2 — соответствующие постоянные, а $\hat{\rho}$ было определено ранее. Интересно заметить, что $1 - p_0^* = \rho$ является точным значением коэффициента использования обслуживающего прибора. Таким образом, среднее число требований в системе \bar{N} , предсываемое этим приближением, отличается от известного значения [которое определяется формулой (1.83) Поллячека—Хинчина] на $\rho/2C_b^2$.

Более интересным является поведение среднего времени ожидания в зависимости от времени. Равенство (2.123) дает приближенное решение для распределения времени ожидания в *переходном* режиме, но, как было отмечено, оно не удовлетворяет граничному условию $F(w, t) = 0$ при $w < 0$. Это граничное условие будет учтено при использовании отражающего экрана в начале координат. Однако перед тем, как перейти к этому, рассмотрим удобное *масштабное* преобразование.

Приведем опять основное диффузационное уравнение в случае постоянных интенсивностей процессов поступлений и уходов [т. е. $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$], а именно

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}. \quad (2.126)$$

при граничных условиях (2.116) и (2.117) и начальном условии (2.118). Сделаем это уравнение безразмерным, определим соответствующие характеристики системы и затем вернемся к мерам этих характеристик в их первоначальном масштабе. Основное преобразование состоит в использовании следующих выражений

для временной и пространственной переменных:

$$t' = \frac{\sigma^2}{m} t, \quad (2.127)$$

$$w' = \frac{-m}{\sigma^2} w. \quad (2.128)$$

Таким образом, время измеряется в единицах σ^2/m^2 , а работа в единицах $-\sigma^2/m$ (напомним, что $m < 0$ при $\rho < 1$). Операция изменения масштаба приводит к следующему безразмерному уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = -\frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{(\partial w')^2}, \quad (2.129)$$

где $F = F(w', t')$ — распределение величины $U'(t') \triangleq \Delta - (m/\sigma^2) U(m^2 t'/\sigma^2)$. Решение последнего уравнения позволяет решить все уравнения типа (2.126).

Решение этого безразмерного диффузационного уравнения скоро будет приведено. Однако уже сейчас можно сделать важное заключение из того, что преобразование, определяемое равенствами (2.127) и (2.128), действительно дает безразмерное уравнение, не зависящее от m и σ^2 . Заметим, что естественная единица, которой измеряются «существенные» значения незаконченной работы, равна $-\sigma^2/m$, а естественной единицей измерения времени является σ^2/m^2 . Таким образом, существенные изменения порядка $-\sigma^2/m$ величины $U(t)$ имеют место в течение естественных единиц времени порядка σ^2/m^2 . Это приводит к заключению, что основное «время релаксации» системы приближенно имеет вид

$$\text{время релаксации} \approx \frac{\sigma^2}{m^2} = \frac{\lambda \bar{x}^2}{(1 - \rho)^2}. \quad (2.130)$$

В такой форме результат впервые был приведен в работе [37]. Очевидно, что когда ρ близко к единице, время релаксации может легко превысить продолжительность часа или в практических задачах. Заметим также, что это время релаксации связано со средним временем ожидания W в системе M/G/1 следующей зависимостью: $\sigma^2/m^2 = 2W/(1 - \rho)$.

Если рассмотреть стационарное решение $F(w') = \lim_{t' \rightarrow \infty} F(w', t')$ в предположении, что $m < 0$, т. е. $\rho < 1$, то безразмерное диффузационное уравнение (2.129) даст

$$F(w') = 1 - e^{-2w'}, \quad w' \geq 0, \quad (2.131)$$

со средним значением, равным $1/2$. Этот результат аналогичен формуле (1.24).

Вернемся теперь к решению уравнения (2.120) для переходного режима. Выше было найдено, что решение $\Phi((w-w_0-mt)/\sigma\sqrt{t})$, даваемое равенством (2.123), удовлетворяет этому уравнению, но, к сожалению, нарушает граничные условия. Обозначим это решение через $a(w, t)$. Кроме того, очевидно, что стационарное решение уравнения (2.120) определяется равенством (2.124). Это приводит к рассмотрению функции $e^{2mw/\sigma^2}a(w, t)$. Если искать решение F в таком виде, то уравнение (2.120) даст

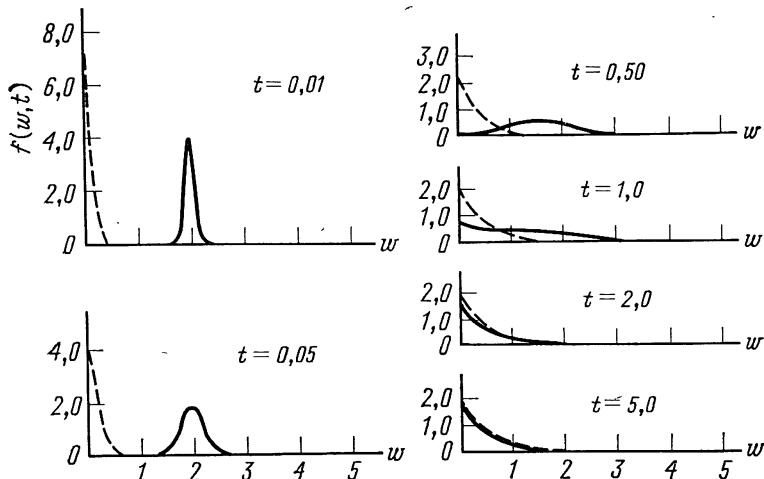
$$\frac{\partial \alpha(w, t)}{\partial t} = m \frac{\partial \alpha(w, t)}{\partial w} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \alpha(w, t)}{\partial w^2}.$$

Но это то же самое, что и уравнение (2.120), кроме знака первого члена в правой части равенства! Изменение знака может быть скорректировано путем изменения переменной w на $-w$. Таким образом, любой функции $F(w, t)$, удовлетворяющей уравнению (2.120), должно соответствовать другое решение в виде $e^{2mw/\sigma^2}F(-w, t)$. Далее, поскольку диффузионное уравнение (2.120) линейно, любая линейная комбинация этих двух решений также представляет собой решение. В частности, рассмотрим комбинацию $F(w, t) - e^{2mw/\sigma^2}F(-w, t)$. Теперь можно воспользоваться предыдущим решением $a(w, t)$ в (2.123), которое при такой комбинации также удовлетворяет нарушенному ранее граничному условию (2.116). Таким образом, нестационарное решение диффузионного уравнения (2.120) имеет вид [41]

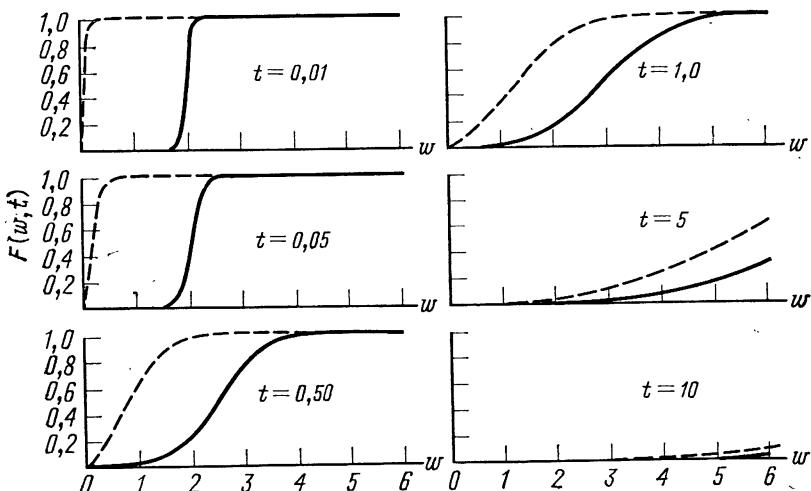
$$F(w, t) = \Phi\left(\frac{w-w_0-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2mw/\sigma^2}\Phi\left(\frac{-w-w_0-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right). \quad ■ (2.132)$$

Это решение соответствует процессам с постоянной интенсивностью поступлений и уходов и справедливо при $\rho \leq 1$ и $\rho \geq 1$. (Если w_0 выражено через функцию распределения, решение получается путем интегрирования по этому распределению.) В работе Кобаяси [29] вычисляется ПРВ $f(w, t) = \partial F(w, t) / \partial w$ для некоторых примеров при $\rho < 1$ (фиг. 2.10) и ФРВ $F(w, t)$ при $\rho > 1$ (фиг. 2.11). Из фиг. 2.10 видно, как $f(w, t)$ стремится к своему показательному пределу при $0 < t \leq 5$ в двух случаях: $w_0 = 0$ (штриховая кривая) и $w_0 = 2$ (сплошная кривая). При $\rho > 1$ на фиг. 2.11 можно видеть нестабильное переходное поведение $F(w, t)$; те же два случая: $w_0 = 0$ (штриховые кривые) и $w_0 = 2$ (сплошные кривые) показаны для диапазона $0 < t \leq 10$.

Удивительно, что существует такое простое решение рассматриваемого диффузионного уравнения. Ведь это уравнение должно содержать элементы непрерывного приближения, а также предельное распределение равновесия и должно дать зависящее от времени решение для всех значений ρ . Заметим, что первый член



Фиг. 2.10. Поведение во времени $f(w, t)$ при $\rho < 1$.



Фиг. 2.11. Поведение во времени $F(w, t)$ при $\rho > 1$.

решения содержит нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2 t$ и средним значением $w_0 + mt$. При $\rho < 1$ ($m < 0$) это среднее значение смещается влево и соответствует полученному ранее решению (2.119), где используется непрерывное приближение. При $\rho > 1$ ($m > 0$) среднее значение смещается направо, опять как в (2.119). Второй член решения соответствует нормальному распределению, смещающемуся в направлении, противоположном смещению первого члена, но с показательным убыванием (возрастанием) коэффициента в случае $\rho < (>) 1$. Этот член учитывает отражение от экрана в начале координат. Кроме того, заметим, что при $t \rightarrow \infty$ и $\rho < 1$ ($m < 0$) обе функции Φ сходятся к единице, оставляя в силе стационарное распределение (2.124). При $\rho > 1$ ($m > 0$) поведение системы не устанавливается. В следующем разделе этот вопрос обсуждается применительно к системе $M/G/1$ и значительно подробнее он рассматривается в отличной монографии Ньюэлла [41]. Теперь применим диффузионное приближение к системе $M/G/1$.

2.9. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ $M/G/1$ [13]

В настоящем разделе исследуется зависимость от времени незаконченной работы $U(t)$ в системе $M/G/1$ при обслуживании требований в порядке их поступления. Распределение для $U(t)$ в такой системе совпадает с распределением времени ожидания $W(y)$. В качестве приближения рассматриваемого пилообразного случайного процесса $U(t)$ будет использован непрерывный диффузионный процесс. Для того чтобы различать приближение и настоящий процесс, первое будет обозначаться как $U_d(t)$. Такое приближение является хорошим в случае, когда ρ близко к единице. Большая часть приводимого материала основывается на работе Гейвера [13].

Общее решение (2.132), полученное в предыдущем разделе, бесспорно дает решение для системы $M/G/1$. Тем не менее в настоящем разделе система $M/G/1$ исследуется методом преобразования Лапласа по двум причинам: во-первых, он дает другой подход к решению задачи и, кроме того, проливает новый свет на полученное решение, а во-вторых, представляется возможность сравнить это решение с точным нестационарным решением для системы $M/G/1$. Многие алгебраические преобразования и выкладки, необходимые для получения этих результатов, перенесены в задачу 2.21.

Используя обозначения и результаты предыдущего раздела, перейдем к исследованию зависящего от времени распределения

времени ожидания $F(w, t)$, которое вместе с начальными и граничными условиями имеет следующий вид:

$$F(w, t) = P[U_d(t) \leq w | U_d(0) = w_0],$$

$$F(w, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } w < w_0, \\ 1 & \text{при } w \geq w_0, \end{cases}$$

$$F(w, t) = 0 \quad \text{при } w < 0,$$

$$F(\infty,) = 1.$$

Как и выше, инфинитезимальные среднее значение и дисперсия σ^2 не зависят от w и t и равны

$$\rho = \lambda \bar{x},$$

$$\sigma^2 = \lambda \bar{x}^2,$$

где $\rho = \lambda \bar{x}$. Этот диффузионный процесс везде, кроме точек скачка функции F , должен удовлетворять уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}. \quad (2.133)$$

Чтобы описать поведение функции F , удобно воспользоваться преобразованием Лапласа приблизительно так, как это было сделано в разд. 1.7. Определим опять двойное преобразование Лапласа (по w и t) в виде

$$F^{**}(r, s) \triangleq \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-rw} d_w F(w, t) dt, \quad (2.134)$$

которое по предположению существует при $\operatorname{Re}(s) > 0$ и $\operatorname{Re}(r) > 0$. Теперь необходимо применить это двойное преобразование к дифференциальному уравнению в частных производных (2.133). Как видно из задачи 2.21, для этого преобразования получается следующее выражение:

$$F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{(r/\eta) e^{-\eta w_0} - e^{-rw_0}}{(r - r_1)(r - r_2)} \right], \quad (2.135)$$

где

$$r_1, r_2 = \frac{m}{\sigma^2} \left[1 \pm \left(1 + \frac{2s\sigma^2}{m^2} \right)^{1/2} \right], \quad (2.136)$$

причем r_1 принимает положительное значение квадратного корня, а r_2 — отрицательное. Итак,

$$\eta = \begin{cases} r_2 & \text{при } \rho < 1, \\ r_1 & \text{при } \rho > 1. \end{cases} \quad (2.137)$$

Представляет интерес сравнить функцию $F^{**}(r, s)$, которая является решением для рассматриваемого диффузионного процес-

са, с аналогичным результатом точного анализа системы $M/G/1$. Обозначим точное решение через $F_{M/G/1}(r, s)$; оно определяется равенством

$$F_{M/G/1}^{**}(r, s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} E[e^{-rU(t)} | U(0)=\omega_0] dt. \quad (2.138)$$

Этот результат приводился в разд. 1.7 [см. формулу (1.97)] в виде

$$F_{M/G/1}^{**}(r, s) = \frac{(r/\eta) e^{-\eta\omega_0} - e^{-r\omega_0}}{\lambda B^*(r) - \lambda + r - s}, \quad (2.139)$$

где η является положительным действительным корнем знаменателя. Отметим замечательное сходство между решением (2.139) для исходного дискретного вероятностного процесса и решением (2.135) при диффузионном приближении.

Рассмотрим теперь обратное преобразование $F^{**}(r, s)$ относительно переменной r для того, чтобы получить преобразованную по времени плотность распределения $U(t)$; оно определяется следующим образом:

$$F^{**}(w, s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial F(w, t)}{\partial w} dt. \quad (2.140)$$

В задаче 2.21 показано, что это приводит к равенству

$$sF^{**}(w, s) = \begin{cases} -r_1 e^{r_1 w}, & r_1 < 0, \quad \rho < 1, \\ -r_2 e^{r_2 w}, & r_2 < 0, \quad \rho > 1, \end{cases} \quad (2.141)$$

где предполагается, что $\omega_0=0$. Читатель должен отметить, что последнее выражение зависит от s неявно через корни r_i ($i=1$ или 2), определяемые равенством (2.136).

Прокомментируем последние результаты. Сначала вспомним метод коллективных меток (см. разд. 1.7), из которого следует, что преобразование Лапласа ПРВ, вычисленное при некотором (действительном) значении s , равно вероятности того, что в течение случайного промежутка времени, имеющего данную ПРВ, не произойдет «катастрофы», производимой пуассоновским процессом (причем катастрофы возникают с интенсивностью s катастроф в секунду). Аналогично $sF^{**}(w, s)$ в (2.141) может рассматриваться как ПРВ состояний рассматриваемого диффузионного процесса, если он наблюдается в момент катастрофы (катастрофы возникают с интенсивностью s катастроф в секунду). В частности, при $\omega_0=0$ состояние (значение) рассматриваемого диффузионного процесса $U_d(t)$ в момент катастрофы имеет показательную плотность, задаваемую правой частью равенства (2.141). В случае $\omega_0>0$ справедливо подобное утверждение, которое дает явное

выражение для плотности рассматриваемого процесса. Можно показать, что ПРВ будет линейной комбинацией экспонент. (Из равенства (2.139) видно, что решению для соответствующего точного процесса, а именно распределению для $U(t)$, нельзя дать такой простой интерпретации.) Устремим теперь интенсивность катастроф к нулю. Тогда случайное время наблюдения (т. е. момент появления катастрофы) будет стремиться к бесконечности. Отсюда следует, что $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF^{**}(w, s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial w} P[U_d(t) \leq w | U_d(0) = w_0]$$

является не чем иным, как теоремой о финальном значении для преобразования Лапласа [27]. В задаче 2.21 нужно найти, что при $\rho < 1$ этот предел равен

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF^{**}(w, s) = -\frac{2m}{\sigma^2} e^{2mw/\sigma^2} (\rho < 1) \quad (2.142)$$

и является ПРВ стационарного решения, найденного ранее [см. (2.124)], как это и должно быть. (При $\rho > 1$ этот предел равен нулю; это показывает, что стационарного решения не существует.) Подставив значения m и σ^2 , можно увидеть, что стационарное распределение незаконченной работы при диффузионном приближении дается равенством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[U_d(t) \leq w | U_d(0) = w_0] = 1 - e^{-2(1-\rho)w/\lambda\bar{x}^2}, \quad (2.143)$$

когда $\rho < 1$ [опять равенство (2.124)]. Это распределение, естественно, не зависит от w_0 и соответствует диффузионному приближению для распределения времени ожидания системы M/G/1 в установленвшемся режиме при обслуживании в порядке поступления.

Из равенства (2.143) непосредственно вытекает, что средняя незаконченная работа $E[U_d(t)]$ для диффузионного процесса, которая также представляет собой приближение для среднего времени ожидания, при $\rho < 1$ имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[U_d(t)] = \frac{\lambda\bar{x}^2}{2(1-\rho)}, \quad (2.144)$$

в точности соответствующий формуле Поллячека—Хинчина для среднего времени ожидания W в системе M/G/1 [см. (1.82)]. Таким образом, предельное среднее значение времени ожидания для рассматриваемого диффузионного процесса равно предельному среднему значению времени ожидания фактического процесса (для любых $\rho < 1$)! Предельное значение дисперсии времени ожи-

дания рассматриваемого диффузионного процесса, обозначаемое через $\sigma_{U_d}^2$, может быть легко найдено с помощью стационарного распределения (2.143):

$$\sigma_{U_d}^2 = \left[\frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} \right]^2. \quad (2.145)$$

Однако из равенства (1.87) следует, что дисперсия установившегося времени ожидания, обозначаемая через σ_U^2 , для рассматриваемого точного процесса дается формулой

$$\sigma_U^2 = \left[\frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} \right]^2 + \frac{\lambda \bar{x}^3}{3(1-\rho)}. \quad (2.146)$$

Далее, очевидно, что $\sigma_U^2 \rightarrow \sigma_{U_d}^2$ при $\rho \rightarrow 1$. Таким образом, рассматриваемое диффузионное приближение дает точное решение для предельного среднего значения времени ожидания и решение для дисперсии этого времени, которое улучшается, стремясь к точному, при приближении ρ к единице снизу.

Воспользуемся теперь полученными результатами для исследования зависимости от времени среднего времени ожидания $E[U_d(t) | U_d(0) = w_0]$. Сначала рассмотрим его преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-st} E[U_d(t) | U_d(0) = w_0] dt.$$

Из определения (2.134) и свойства преобразования Лапласа производить моменты можно видеть, что соотношение, которое мы ищем, получается из производной $-\partial F^{**}(r, s)/\partial r|_{r=0}$. Беря частную производную по r функции (2.135) и затем подставляя $r=0$, находим (см. задачу 2.21)

$$\int_0^\infty e^{-st} E[U_d(t) | U_d(0) = w_0] dt = \frac{m}{s^2} + \frac{w_0}{s} + \frac{e^{-\eta w_0}}{s\eta}. \quad (2.147)$$

Исследуем равенство (2.147); рассмотрим сначала случай $\rho < 1$. Уже указывалось, что при $t \rightarrow \infty$ стационарное среднее время ожидания дается равенством (2.144). Зависимость от времени в этом случае определяется соотношением (2.147). Для случая $\rho < 1$ и $w=0$ из задачи 2.21 имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} E[U_d(t) | U_d(0) = 0] dt &= -\frac{1}{r_1 s} = \\ &= \frac{\sigma^2}{sm \{1 + [1 + (2\sigma^2/m^2)s]^{1/2}\}}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

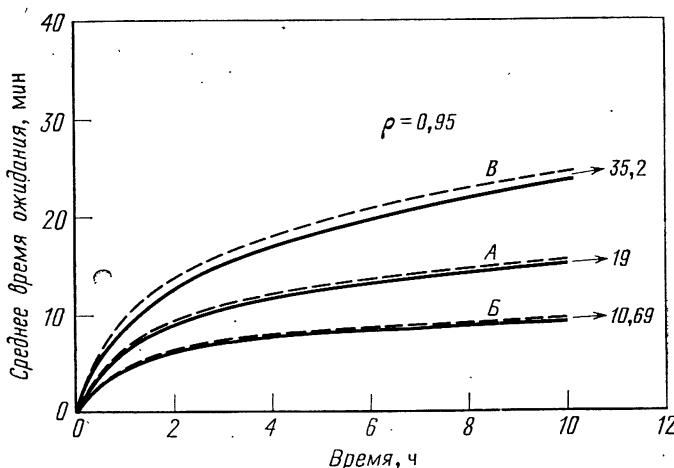
Если инвертировать равенство (2.148), то получится зависимость от времени среднего времени ожидания при рассматриваемом диффузионном приближении для системы $M/G/1$. Уместно сравнить это приближение с точным результатом, который может быть вычислен для системы $M/G/1$ путем инвертирования равенства (2.139). Такое сравнение проведено в работе [13]; ниже воспроизведются приведенные там числовые результаты. Интенсивность входящего пуссоновского потока λ принималась равной 0,95 требования в минуту, а ожидаемое время обслуживания x равнялось 1,0 мин. Следовательно, $\rho=0,95$. В частности, были рассмотрены следующие три случая:

$$A. \quad b(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad (2.149)$$

$$B. \quad b(x) = -\frac{8(8x)^7}{7!} e^{-8x}, \quad x \geq 0. \quad (2.150)$$

$$C. \quad b(x) = 0,1 \left[\frac{1}{4} e^{-x/4} \right] + 0,9 \left[(6x)^3 e^{-6x} \right], \quad x \geq 0. \quad (2.151)$$

В случае А имеет место показательное распределение, в случае Б — распределение Эрланга (с параметром 8) и в случае В — комбинация показательного распределения (со средним значением 4) и распределения Эрланга с параметром 4 и средним значением $2/3$. На фиг. 2.12 представлены графики среднего времени ожидания (в минутах) как функции времени (в часах) для диффузионного приближения и для точных результатов в трех указанных



Фиг. 2.12. Сравнение зависимостей среднего времени ожидания от текущего времени при точном анализе и диффузионном приближении в случае $\rho < 1$.
— — — диффузионное приближение; — точное решение.

случаях. Показано также асимптотическое значение среднего времени ожидания, которое, как отмечалось выше, одинаково для диффузионного приближения и точного анализа. Здесь принято $w_0=0$. Следует отметить, что диффузионное приближение в случае $\rho < 1$ очень хорошее. Можно заметить еще раз, что для рассматриваемых систем $M/G/1$ среднее время ожидания стремится к стационарному значению довольно медленно. [Из равенства (2.130) видно, что время релаксации для случаев А, Б и В составляет соответственно 12,67; 7,13 и 23,43 ч.]

Рассмотрим теперь зависимость от времени среднего времени ожидания при $\rho > 1$. Исследуем опять более общий случай произвольного w_0 . При $\rho > 1$ из равенства (2.137) имеем $\eta = r_1$. Таким образом, на основании формулы (2.147) необходимо инвертировать выражение

$$\frac{m}{s^2} + \frac{w_0}{s} + \frac{e^{-r_2 w_0}}{sr_1}.$$

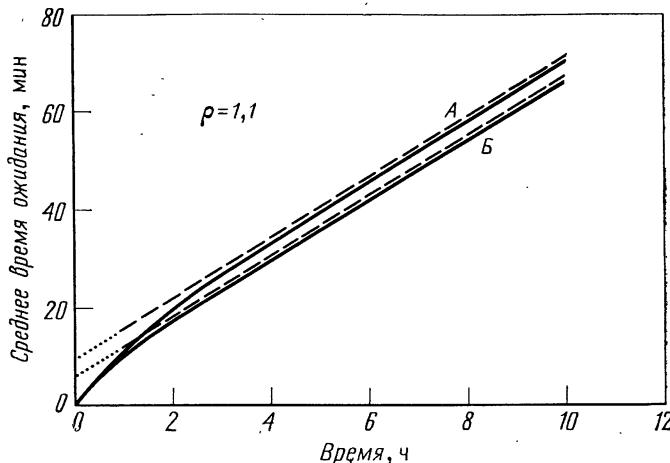
Чтобы упростить задачу, исследуем асимптотические свойства функции при $t \rightarrow \infty$ в предположении $s \rightarrow 0$. Это позволит произвести замену $r_1 = 2m/\sigma^2$ из задачи 2.21. Таким образом, инвертируя рассматриваемое выражение, получим асимптотическую зависимость от времени среднего времени ожидания при условии, что начальное время ожидания равно w_0 , а именно

$$\begin{aligned} E[U_d(t) | U_d(0) = w_0] &\rightarrow \\ &\rightarrow (\rho - 1)t + w_0 + \frac{\lambda \bar{x}^2 e^{-2(\rho-1)w_0/\lambda \bar{x}^2}}{2(\rho-1)}. \end{aligned} \quad ■ \quad (2.152)$$

Этот результат показывает, что среднее время ожидания растет линейно, как предсказано непрерывным приближением для случая $\rho < 1$ и больших t , и позволяет объяснить влияние второго члена уравнения (2.129) на среднее время ожидания при $\rho > 1$. Так же, как в случае $\rho < 1$, рассмотрим несколько примеров и при $\rho > 1$, чтобы сравнить точную зависимость от времени с рассматривающим диффузионным приближением этой зависимости. Положим опять $w_0 = 0$; при этом равенство (2.152) будет иметь вид

$$E[U_d(t) | U_d(0) = 0] \rightarrow (\rho - 1)t + \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(\rho - 1)}. \quad (2.153)$$

Заметим, что это приближение зависит от дисперсии времени обслуживания, которую часто опускают при такого рода приближениях (как, например, в [11], стр. 66). Приводимые примеры также заимствованы у Гейвера [13]. Рассмотрим случай $\lambda = 1,1$ и $\bar{x} = 1,0$; имеем $\rho = 1,1$. На фиг. 2.13 показана зависимость среднего времени ожидания (в минутах) от времени (в часах) для приведенных выше случаев А и Б [см. (2.149) и (2.150)] и сравни-



Фиг. 2.13. Сравнение зависимостей среднего времени ожидания от текущего времени при точном анализе и диффузионном приближении в случае $\rho > 1$.
 —— диффузионное приближение; —— точное решение.

ваются точные результаты, полученные по формуле (2.139), с диффузионным приближением (2.153). Отметим опять, что рассматриваемый диффузионный процесс дает отличное приближение. Заметим также, что в случаях А и Б получаются слегка различающиеся результаты за счет члена с дисперсией в формуле (2.153).

Вернемся опять к зависимости от времени среднего времени ожидания при условии, что начальное время ожидания равно нулю в случае $\rho < 1$. Иначе говоря, рассмотрим выражение $E[U_d(t)/U_d(0)=0]$, преобразование которого дается равенством (2.148). В частности, запишем это равенство в безразмерной форме. Изменим масштаб времени и незаконченной работы в соответствии с формулами (2.127) и (2.128) и, кроме того, изменим масштаб переменной преобразования s (размерность которой $1/c$) следующим образом:

$$s' \triangleq \frac{\sigma^2}{m^2} s. \quad (2.154)$$

В результате, используя только соответствующим образом нормированные величины, равенство (2.148) можно представить в следующем виде:

$$\int_0^\infty e^{-s't'} E [U'_d(t') | U'_d(0)=0] dt' = \frac{1}{s' [1 + \sqrt{1 + 2s'}]} . \quad (2.155)$$

Применяя, как и раньше, теорему о финальном значении, найдем предельное выражение для среднего времени ожидания в системе

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} E[U'_d(t') | U'_d(0)=0] = \lim_{s' \rightarrow 0} s' \frac{1}{s' [1 + \sqrt{1+2s'}]} = \frac{1}{2}. \quad (2.156)$$

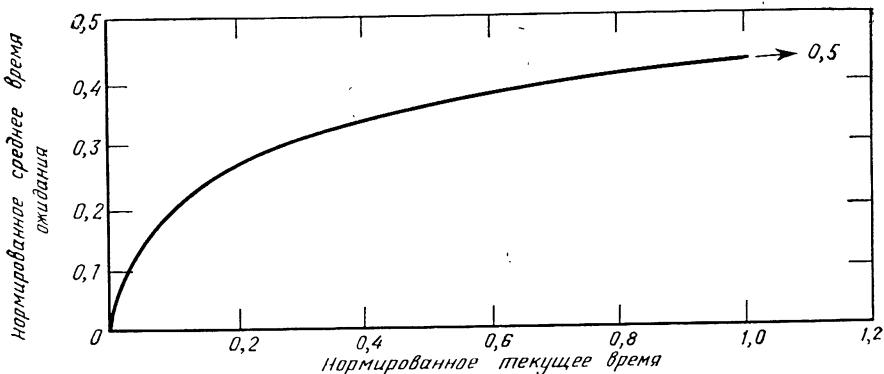
Таким образом, как и в равенстве (2.131), опять стационарное среднее время ожидания оказывается равным $\frac{1}{2}$ (в масштабе принятой единицы времени). Если инвертировать (2.155), получится зависящее от времени среднее время ожидания для рассматриваемого нормированного диффузионного приближения системы M/G/1 (см. задачу 2.22):

$$E[U'_d(t) | U'_d(0)=0] = \left(1 + \frac{t'}{2}\right) [2\Phi\sqrt{t'} - 1] - \frac{t'}{2} - \frac{1}{2} P\left(\frac{3}{2}, \frac{t'}{2}\right), \quad ■ (2.157)$$

где $\Phi(x)$ определяется равенством (2.85), а $P(a, x)$ — неполная гамма-функция

$$P(a, x) \triangleq \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-y} y^{a-1} dy, \quad (2.158)$$

причем $\Gamma(x)$ — обычная гамма-функция (см., например, [1]). Это нормированное среднее время ожидания показано на фиг. 2.14. Здесь представлена универсальная кривая для диффузионного приближения нормированного среднего времени ожидания в системе M/G/1, из которой можно получить диффузионное приближение, показанное на фиг. 2.12.



Фиг. 2.14. Среднее время ожидания при диффузионном приближении и масштабном преобразовании для системы M/G/1 ($\rho < 1$).

Компактное и интересное обсуждение этих и других асимптотических зависимостей дано в работе [10], где приводятся, например, дальнейшие подробности, связанные с приближением к состоянию равновесия.

Этим завершается исследование диффузионного приближения для систем M/G/1 в стационарном режиме. В следующем разделе мы вернемся к случаю, когда процессы поступлений и уходов могут изменяться во времени.

2.10. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ЧАСА НАИБОЛЬШЕЙ НАГРУЗКИ [40, 41]

До сих пор с помощью диффузионного уравнения (2.113) в основном рассматривался случай, когда инфинитезимальные среднее значение и дисперсия постоянны, т. е. $m(\omega, t) = m$ и $\sigma^2(\omega, t) = \sigma^2$. Из этого следует, что интенсивности процессов поступлений и уходов не зависят от времени, т. е. $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$; то же самое относится к дисперсиям. Кроме того, как уже известно, в случае $\rho (= \lambda/\mu) < 1$ существует стационарное распределение. Большая часть первого тома [27] посвящена обсуждению свойств такого состояния равновесия. Однако наиболее интересные СМО являются нестационарными, и именно эти системы обсуждаются более подробно в настоящем разделе.

В частности, если предположить, что инфинитезимальные среднее значение и дисперсия зависят только от t и не зависят от ω , то уравнение Фоккера—Планка может быть представлено в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -m(t) \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}, \quad (2.159)$$

где $m(\omega, t) = m(t)$ и $\sigma^2(\omega, t) = \sigma^2(t)$. В разд. 2.7 уже рассматривались зависящие от времени интенсивности процессов поступлений и уходов при использовании непрерывного приближения. Однако диффузионное уравнение (2.159) позволяет учесть влияние флюктуаций относительно среднего значения в случае зависящих от времени интенсивностей. Начнем с оценки характеристик СМО в некоторых экстремальных случаях, которые уже исследовались. Во-первых, если $m(t) < 0$ (т. е. интенсивность уходов сохраняется на уровне интенсивности поступлений) и колебания инфинитезимального среднего значения происходят медленно по сравнению с $[\sigma(t)/m(t)]^2$, т. е. временем релаксации рассматриваемой системы [см. (2.130)], то можно ожидать, что очереди и времена ожидания также будут медленно меняться, так что в пределах времени, равного небольшому числу интервалов релаксации, система может рассматриваться как стационарная. Будем называть такой случай квазистационарным. Квазистационарное распределение незаконченной работы определяется выражением

$$F(\omega, t) = 1 - e^{2m(t)\omega/\sigma^2(t)}, \quad \omega \geq 0, \quad (2.160)$$

которое является естественным обобщением рассмотренного ранее стационарного решения (2.124). Напомним, что $m(t) = [\lambda(t)/\mu(t)] - 1$ и $\sigma^2(t) = \lambda(t)x^2(t)$, где $x^2(t)$ — второй момент распределения продолжительности обслуживания в момент времени t . Заметим, что время релаксации существенно зависит от величины.

$$\rho(t) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}.$$

Выражаясь более точно, равенство (2.160) для квазистационарного режима удовлетворяется, если в течение времени, соизмеримого с временем релаксации, не происходит значительных изменений времени ожидания [измеряемого в масштабе, заданном равенством (2.128), т. е. не происходит изменений незаконченной работы приблизительно на $-\sigma^2(t)/m(t)$ секунд]. Таким образом, условие квазистационарности принимает вид

$$\frac{|d\bar{U}(t)/dt|}{\bar{U}(t)} \text{ (время релаксации)} \ll 1, \quad (2.161)$$

где $\bar{U}(t)$ — средняя незаконченная работа в момент t . Из равенства (2.160) видно, что $\bar{U}(t) = -\sigma^2(t)/2m(t)$; это подтверждает выбор масштаба в равенстве (2.128). Таким образом, рассматриваемое условие принимает вид

$$|2\rho(t) \frac{d\sigma(t)}{dt} - \frac{\sigma^2(t)}{m(t)} \cdot \frac{dm(t)}{dt}| [m^2(t)]^{-1} \ll 1. \quad (2.162)$$

Представляет интерес поведение процесса в случае, когда $\rho(t)$ приближается к единице (т. е. когда $m(t)$ приближается к нулю). При этом первый член обычно становится незначительным по сравнению со вторым. Используя рассмотренное выражение для $m(t)$, можно привести условие (2.162) к виду

$$\frac{\sigma^2(t)}{[1 - \rho(t)]^3} \left| \frac{d\rho(t)}{dt} \right| \ll 1. \quad (2.163)$$

При $\rho(t)$, близком к единице, левая часть неравенства неограниченно возрастает, и можно легко представить себе случаи, при которых это условие не выполняется. Тогда, конечно, рассматриваемое квазистационарное решение не будет описывать фактическую картину. Действительно, решение для $\bar{U}(t)$, приведенное выше, предсказывает, что при $\rho(t) \rightarrow 1$ среднее время ожидания будет расти до бесконечности с огромной скоростью. Но известно, что этого не может быть, так как время ожидания не может расти быстрее, чем скорость, с которой работа поступает к системе, а эта скорость конечна (несмотря на то, что система перегружена).

Таким образом, если колебания во времени происходят мед-

ленно и они невелики, рассматриваемое квазистационарное решение (2.160) приближенно описывает распределение времени ожидания в случае $\rho(t) < 1$. Однако, если $\rho(t)$ приближается к единице и даже превышает ее, фактическое время ожидания не может расти так быстро, как предсказывает квазистационарное решение. Кроме того, заметим, что в установившемся режиме в СМО задержки большей частью возникают из-за вероятностной природы изменчивости процессов поступления требований и обслуживания. Напомним из гл. 1, что если интенсивность входа меньше пропускной способности системы, при стационарном потоке никакой задолженности не образуется. Таким образом, задолженность, наблюдаемая при нестационарном потоке, вызывается факторами случайности. Если же интенсивность входа превышает пропускную способность ($\rho > 1$), то со временем образуется огромная задолженность, и факторы случайности становятся несущественными. Поэтому можно ожидать, что при $\rho > 1$ непрерывное приближение, приведенное в разд. 2.7, должно описывать главную часть роста задержки и очереди. В известном смысле этот результат можно было предвидеть на основании соотношения (2.132) при постоянных параметрах (когда $\rho > 1$). Из формулы (2.132) следовало, что время ожидания имеет нормальное распределение с линейно растущим средним значением и стандартным отклонением, растущим только по закону \sqrt{t} . Таким образом, преобладающее влияние оказывает среднее значение, а относительная величина флуктуаций уменьшается. При непостоянных параметрах, рассматриваемых в этом разделе, аналогичное утверждение может быть сделано для СМО, которая в течение некоторого времени насыщается. Таким образом, поведение системы может быть оценено в обоих крайних случаях ($\rho(t) \approx \rho < 1$ и $\rho(t) > 1$), и нашей задачей в этом разделе является описание явлений, происходящих в промежутке между этими крайними случаями.

На фиг. 2.7 были показаны характерные свойства часа наибольшей нагрузки, в частности дано непрерывное приближение для СМО (б и в). Исследуем теперь диффузионное приближение в начале часа пик, т. е. рассмотрим случай, когда $\rho(t)$ растет с увеличением t от значений, соответствующих стабильному случаю [$\rho(t) < 1$], до значений, соответствующих случаю перегрузки [$\rho(t) > 1$], переходя через критическое значение $\rho(t) = 1$. Этот «переход через насыщение», описанный Ньюэллом [40] (исследованиям которого мы здесь следуем), соответствует началу часа пик. Выберем ось времени таким образом, чтобы $\rho(t)$ проходило через критическое значение (единицу) в точке $t=0$; тогда при $t < 0$ имеет место стабильный случай, а при $t > 0$ — нестабильный. Как указано в предыдущем разделе, когда $\rho(t)$ медленно возрастает, приближаясь к своему критическому значению, поведение системы приближенно оценивается квазистационарным распреде-

лением (2.160). При этом медленное возрастание означает, что условие (2.163) удовлетворяется. Однако, как упоминалось, при приближении $\rho(t)$ к единице это условие должно нарушиться. Тогда поведение системы будет отличаться от квазистационарного, и время ожидания не будет расти так быстро, как предсказывалось. Можно предполагать, что вдали от точки $t=0$ время ожидания растет так, как описывается непрерывным приближением.

Следуя Ньюэллу [40], разложим $\rho(t)$ в ряд Тейлора вблизи начала координат

$$\rho(t) = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \dots$$

В окрестности критической точки ($t=0$) ρ ведет себя приближенно как $1 + \alpha t$, и мы будем предполагать, что такое приближение окажется хорошим в переходной области между точкой, в которой поведение времени ожидания начинает отличаться от квазистационарного, и точкой, где время ожидания начинает вести себя так, как указывает непрерывное приближение. Если использовать это линейное выражение для $\rho(t)$, то условие (2.163) примет вид

$$\left| \frac{\sigma^2(t)}{\alpha^2 t^3} \right| \ll 1,$$

т. е.

$$|t| \gg \left(\frac{\sigma^2}{\alpha^2} \right)^{1/3} \triangleq t_0, \quad (2.164)$$

где предполагается, что в рассматриваемой окрестности $\sigma^2(t) \approx \sigma^2$. Когда обе части этого неравенства приближенно одного порядка, квазистационарное решение для времени ожидания начинает отличаться от его истинного значения. Можно ожидать, что в момент $t = -t_0$ средняя незаконченная работа будет приближенно равна среднему значению распределения (2.160), а именно $-\sigma^2/2m(-t_0)$. Однако, так как удобно использовать в уравнениях $-\sigma^2/m$ в качестве масштабной единицы незаконченной работы [см. (2.128)] и поскольку такой же выбор сделал Ньюэлл, примем следующее приближение для средней работы в точке $t = -t_0$:

$$\bar{U}(-t_0) \approx \frac{-\sigma^2}{m(-t_0)} = \left(\frac{\sigma^4}{\alpha} \right)^{1/3} \triangleq \bar{U}_0. \quad (2.165)$$

За время от $-t_0$ до 0 средняя задолженность должна увеличиться на величину, приближенно равную разности работы, которая поступает в промежутке времени $(-t_0, 0)$, и работы, выполненной в этом промежутке. Следовательно, ожидаемое увеличение \bar{U} за время от $-t_0$ до 0 равно

$$[\lambda(t)/\mu(t)] t_0 - t_0 = \alpha t_0^2 = \bar{U}_0.$$

Таким образом, определены естественная единица времени t_0 и естественная единица задолженности \bar{U}_0 (виртуальное время ожидания). Важно отметить, что средняя задолженность системы изменяется пропорционально $\alpha^{-1/3}$.

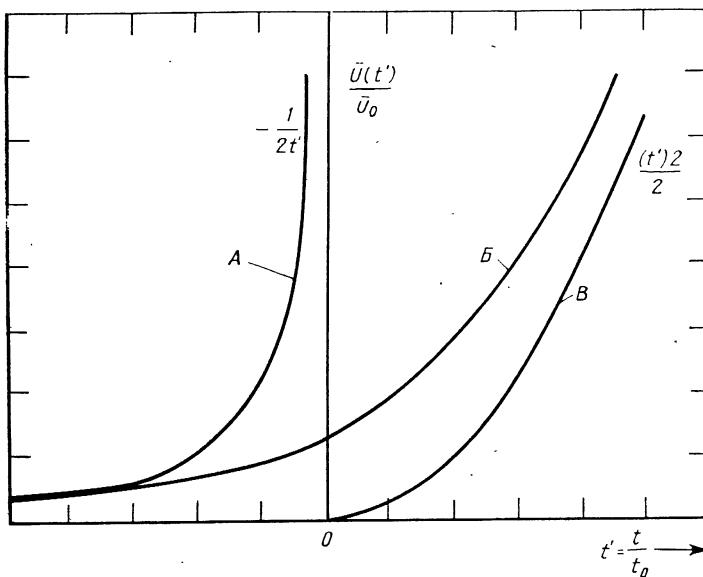
Рассмотрим теперь, что предсказывает для перехода через точку насыщения диффузионное приближение. Уравнение движения задается формулой (2.159). Так как $m(t) = \rho(t) - 1$, рассматриваемое приближение в окрестности $t=0$ имеет вид $m(t) \approx at$ (и, кроме того, уже предполагалось, что инфинитезимальная дисперсия в этой области по существу не зависит от t , т. е. $\sigma^2(t) \approx \sigma^2$). В результате получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -at \frac{\partial F}{\partial \omega} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2}.$$

Это уравнение для функции распределения, а не для ПРВ. Теперь подготовлена основа для преобразования этого уравнения в безразмерное. Определим переменные в новом масштабе: $t' = t/t_0$ и $\omega' = \omega/\bar{U}_0$. Таким образом, функция $F(\omega', t')$ определяет теперь распределение величины $U'(t') = U(t/t_0)/\bar{U}_0$. Нормированное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = -t' \frac{\partial F}{\partial \omega'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{(\partial \omega')^2}. \quad (2.166)$$

В результате нормирования удалось избавиться от специфических параметров задачи. Эти параметры теперь содержатся в масштабных коэффициентах $t_0 = \sigma^{2/3}/\alpha^{2/3}$ и $\bar{U}_0 = \sigma^{4/3}/\alpha^{1/3}$. Данное уравнение, конечно, решается с учетом граничных условий $F(\infty, t') = 1$ и $F(0^-, t') = 0$. Кроме того, при $t' \ll -1$ решение должно быть квазистационарным $F(\omega', t') = 1 - e^{2\omega' t'}$. Как указывает Ньюэлл, простое аналитическое решение уравнения (2.166), удовлетворяющее этим условиям, неизвестно. К счастью, это уравнение универсально (т. е. оно может представлять любой набор значений параметров), и поэтому его нужно решить только один раз. К тому же, если вычисления провести численно (как это сделал Ньюэлл [41]), можно получить искомое поведение системы при переходе через точку насыщения. Один из способов описания поведения системы состоит в построении графика зависимости среднего (виртуального) времени ожидания (выраженного в единицах \bar{U}_0 секунд) от нормированного времени в масштабе t_0 . Результаты численных расчетов Ньюэлла графически приведены на фиг. 2.15. Здесь изображены три кривые, одна из которых, представляющая квазистационарное среднее время ожидания в области $t' < 0$, является левой асимптотой для рассмотриваемого диффузионного приближения. Показано также непрерывное приближение среднего времени ожидания в области $t' > 0$. Эта кривая приближенно яв-



Фиг. 2.15. Диффузионное приближение для среднего времени ожидания при переходе через точку насыщения.

A — квазистационарное среднее время ожидания; *B* — диффузионное приближение; *C* — непрерывное приближение.

ляется правой асимптотой для диффузионного приближения. Из равенства (2.160) видно, что квазистационарное среднее время ожидания равно

$$\bar{U}(t) = \frac{-\sigma^2(t)}{2m(t)}. \quad (2.167)$$

Нормировав на \bar{U}_0 и выразив через нормированное время t' , получим при $\rho(t) = 1 + at$

$$\frac{\bar{U}(t')}{\bar{U}_0} = -\frac{1}{2t'}. \quad (2.168)$$

Равенство (2.168) также легко может быть получено из квазистационарного решения $F(w', t')$, приведенного ранее в показательной форме. Для непрерывного приближения при $t' > 0$ дефицит работы возрастает со скоростью at^2 с/с и к моменту t приводит к задолженности в работе в объеме $at^2/2$. Нормируя задолженность на \bar{U}_0 и выбирая масштаб времени t' , легко найти, что нормированная задолженность в момент t' равна $(t')^2/2$. Таким образом получается непрерывное приближение для среднего времени ожи-

дания. Из изложенного в предыдущем разделе видно, что при углублении в состояние насыщения (когда вероятность того, что система свободна, незначительна) изменение задолженной работы в системе распределено по нормальному закону на любом промежутке времени. Действительно, среднее изменение этой задолженности (при диффузионном приближении) такое же, как и среднее изменение, предсказываемое непрерывным приближением, и в точности равно интегралу от перегрузки за этот промежуток времени. Последнее утверждение не зависит от того, что перегрузка в этой области растет линейно. Как показал Ньюэлл, распределение F при $t' < -1$ по существу является показательным распределением приведенного ранее вида, тогда как при $t' > 1$ распределение F начинает приближаться к нормальному распределению, среднее значение которого растет в соответствии с законом, определяемым непрерывным приближением. Более подробно эти вопросы освещены в прекрасной монографии Ньюэлла [41], а также в его более ранней работе [40].

Таким образом, выше описано поведение времени ожидания, когда система вступает в час пик и продолжает в нем находиться. Было показано, какую важную роль в этом случае играет непрерывное приближение. Однако нужно опять заметить, что, если приближение к насыщению происходит медленно, нулевое время ожидания до насыщения, предсказываемое непрерывным приближением, вносит очень большую погрешность, поскольку система работает в квазистационарном режиме, при котором время ожидания растет до очень больших значений. Тем не менее среднее изменение длины очереди в случае насыщения будет совпадать с непрерывным приближением в течение времени порядка одной нормированной единицы. Результат медленного стремления к насыщению вызывает расхождение между диффузионной и непрерывной асимптотами при $t' > 1$.

Исследуем теперь поведение времени ожидания за весь цикл часа наибольшей нагрузки. В некотором смысле при этом требуется исследовать задачу, обратную к только что рассмотренной задаче. Представляется, что непрерывное приближение будет точным предсказанием при $\rho(t) > 1$, и так как система переходит обратно из состояния насыщения в область $\rho(t) < 1$, то она устанавливается в квазистационарном режиме. Из непрерывного приближения, показанного на фиг. 2.7, следует, что в момент, когда $\rho(t)$ впервые падает ниже 1, задолженность имеет максимальное значение и, следовательно, влияние «длинного хвоста» будет ощущаться до тех пор, пока система не станет свободной. В то время когда оказывается влияние длинного хвоста, доминирующим будет поведение, описываемое непрерывным приближением, т. е. время ожидания будет распределено поциальному закону с убывающим средним значением, определяемым этим приближе-

нием. После того как влияние хвоста прекратится, начинает действовать квазистационарное решение, а очередь и задержки определяются вероятностными факторами. В своей монографии Ньюэлл постулирует как пример параболический закон для $\rho(t)$ в течение часа пик и показывает, что получается только что описанное поведение времени ожидания. Он выводит еще одно безразмерное диффузионное уравнение для исследования в области переходов в этом случае, а также дает кривые, описывающие поведение времени ожидания, которое во многом соответствует предполагаемому результату.

В работе [36] дается хороший обзор некоторых диффузионных моделей, включающих процесс блокировки в час наибольшей нагрузки, а также некоторые «почти стационарные» случаи.

Ньюэлл [42] исследовал также приближения для поведения системы $G/G/m$ при $m \gg 1$. Он классифицирует различные типы поведения системы $G/G/m$, описывает их количественно и обсуждает графические и аналитические методы (например, диффузионное приближение), которые могут быть использованы для получения количественных характеристик. В работе [42] отмечается, что, когда типичная длина очереди велика и все обслуживающие приборы большую часть времени заняты, система $G/G/m$ ведет себя как система $G/G/1$ с продолжительностями обслуживания $\{x_n/m\}$. Кроме того, когда $\rho(t)$ остается меньше, чем (приближенно) $1 - 1/m$, система ведет себя как $G/G/\infty$. Между этими двумя крайними случаями можно наблюдать много различных типов поведения системы в зависимости от того, как $\rho(t)$ проходит через переходную область; это обсуждается в работе [42].

С философской точки зрения рассмотренное непрерывное приближение чрезвычайно привлекательно из-за его простоты как в смысле вычислений, так и в смысле физической интерпретации. Было найдено, что это неплохое приближение в случае перегрузки, но интересно, можно ли его использовать при описании стационарного случая. Как можно было видеть, для стационарного случая при $\rho < 1$ непрерывное приближение предсказывает нулевое время ожидания. Это обусловлено тем, что интенсивность, с которой поступает работа, усредняется на всей бесконечной оси времени при установлении того, что в среднем $\lambda x < 1$. Последнее неравенство означает, что работа поступает с интенсивностью, меньшей пропускной способности системы (которая равна 1 с работы за 1 с текущего времени) и, следовательно, «жидкость в воронке» не накапливается. Фактически же, конечно, усреднять нужно не по всей оси времени. Например, можно утверждать, что как только требование поступает в свободную систему, она перегружает ее в том смысле, что за бесконечно малый промежуток времени, включающий момент прихода требования, поступает больше работы, чем может быть выполнено за этот промежуток.

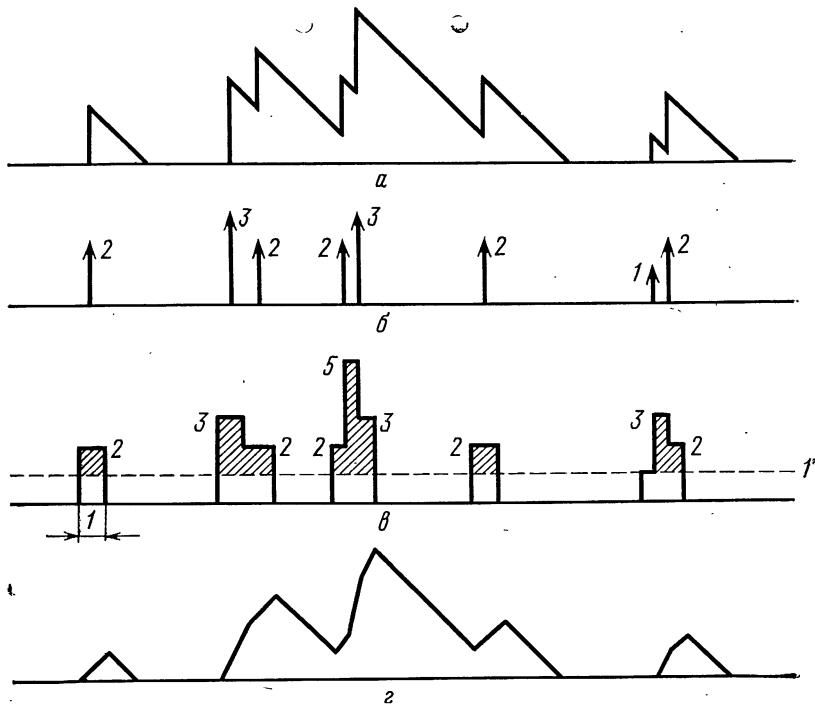
Поэтому производная поступающей работы на рассматриваемом бесконечно малом промежутке не ограничена. Получается импульс, площадь которого равна времени обслуживания этого требования; этот импульс представляет собой задолженность работы в данный момент. Если другая работа не поступает, рассматриваемая работа будет выполняться со скоростью, равной единице, до ухода требования. Время пребывания требования в системе соответствует «длинному хвосту» рассмотренного непрерывного приближения. Это во многом совпадает с фиг. 2.7, где общая положительная площадь ниже кривой рассматривается как поступление в нулевой момент времени, что приводит к ступеньке на фиг. 2.7, в, а не к слаженному подъему до максимального значения. Конечно, если до того, как ликвидируется задолженность системы, поступят еще другие требования, перегрузка будет иметь место и примет вид вертикальных скачков, равных времени обслуживания каждого поступившего требования. При помощи такого «мгновенного» непрерывного приближения фактически описывается незаконченная работа $U(t)$. На фиг. 2.16 дается пример незаконченной работы $U(t)$, а непосредственно под ним показаны импульсы, описывающие увеличение работы в моменты поступления требований. Число, стоящее возле импульса, показывает его площадь и равно числу секунд обслуживания соответствующего требования¹⁾. Пусть теперь $\omega(t)$ — случайный процесс, описывающий поступление работы в систему, т. е. последовательность импульсов, таких, как на фиг. 2.16, б:

$$\omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_0(t - \tau_n),$$

где, как обычно, x_n и τ_n — соответственно продолжительность обслуживания и момент поступления требования C_n , а $u_0(y)$ является единичной импульсной функцией с импульсом в момент $y=0$. Исследуем теперь континuum промежуточных непрерывных приближений, которые лежат между первоначальным предельным непрерывным приближением, при котором поступления усредняются по бесконечному промежутку времени, и точным результатом, при котором поступления требований усредняются по бесконечно малому промежутку времени (т. е. не усредняются совсем). Рассмотрим промежуток усреднения длины A . Континум слаженных входных функций определяется следующим образом:

$$\omega_A(t) \triangleq \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\omega\left(y + \frac{A}{2}\right) - \omega\left(y - \frac{A}{2}\right) \right] dy. \quad (2.169)$$

¹⁾ Таким образом, $U(t)$ можно рассматривать как выход линейной системы, импульсным откликом которой является линейный склон (с наклоном, равным -1) с единичной высотой (т. е. небольшой треугольник), а входом которой является последовательность поступающих требований, показанная на фиг. 2.16, б.



Фиг. 2.16. Промежуточное непрерывное приближение.
а — приближение $U(t)$; *б* — фактическое поступление требований; *в* — сглаженный вход;
г — промежуточное непрерывное приближение.

Таким образом, мы берем импульсы и равномерно распределяем площадь каждого из них по интервалу длины A с центром около момента его поступления. На фиг. 2.16, *в* дан пример с $A=1$ для поступающих требований, показанных на фиг. 2.16, *б*. Если такой сглаженный вход рассматривается как мгновенная интенсивность потока, входящего в СМО, пропускная способность которой равна 1 с работы за 1 с текущего времени, то заштрихованные области представляют кратковременные перегрузки этой системы. Они аналогичны положительным областям на фиг. 2.7. Интегрируя перегрузку, получим фиг. 2.16, *г*, которая соответствует промежуточному непрерывному приближению для первоначальной незаконченной работы $U(t)$ на фиг. 2.16, *а*. Совсем неплохое приближение! Оно дает сравнительно хорошие результаты, так как A имеет порядок среднего времени обслуживания. Если бы A было значительно больше, чем среднее время обслуживания, мы приблизи-

лись бы к первоначальному непрерывному приближению, которое предсказало бы нулевую задолженность на большей части оси времени. Конечно, не нужно выбирать равномерное усреднение, как в случае (2.169). Значение этих промежуточных непрерывных приближений состоит в том, что они дают новую точку зрения для понимания работы СМО и образования очередей и задержек.

В остальных главах настоящей книги будут использованы многие из рассмотренных приемов приближения. Следует отметить, что разработка хороших приближений для сложных вероятностных процессов, связанных с СМО, даст мощный толчок развитию теории массового обслуживания и ее применений в ближайшие годы. Это направление представляется очень интересным и обещает большие вознаграждения; мы призываем читателя заняться им (и заслужить это вознаграждение).

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Wash., D. C., 1964.
2. Barlow R. E., Proschan F., *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York, 1965.
3. Боровков А. А., Некоторые предельные теоремы в теории массового обслуживания, I, Теория вероятности и ее приложения, т. 9, вып. 4, 1964, с. 608—625.
4. Боровков А. А., Некоторые предельные теоремы в теории массового обслуживания, II, Многоканальные системы, Теория вероятности и ее приложения, т. 10, вып. 3, 1965, с. 409—437.
5. Brockmeyer E., Halstrøm H. L., Jensen A., *The Life and Works of A. K. Erlang, Transactions of the Danish Academy of Technology and Science*, 2 (1948).
6. Brumelle S. L., Some Inequalities for Parallel Server Queues, *Operations Research*, 19, 402—413 (1971).
7. Brumelle S. L., Bounds on the Wait in GI/M/k Queue, *Management Science*, 19, No. 7, 773—777 (1973).
8. Buzen J. P., Structural Considerations for Computer System Models, Proceedings of the Eighth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, March 1974.
9. Cohen J. W., *The Single Server Queue*, Wiley, New York, 1969.
10. Cohen J. W., Asymptotic Relations in Queueing Theory, *Stochastic Processes and Their Applications*, 1, No. 2, 107—124 (1973).
11. Cox D. R., Smith W. L., *Queues*, Methuen, London, Wiley, New York, 1961.
12. Cox D. R., Miller H. D., *The Theory of Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1965.
13. Gaver D. P., Jr., Diffusion Approximations and Models for Certain Congestion Problems, *Journal of Applied Probability*, 5, 607—623 (1968).
14. Gelenbe E., On Approximate Computer Systems Models, in E. Gelenbe, R. Mahl, eds., *Computer Architectures and Networks*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974, p. 187—206.
15. Gross D., Sensitivity of Queueing Models to the Assumption of Exponentiality: I — Single-channel Queues, Technical Memorandum Serial 64121, Institute for Management Science and Engineering, The George Washington University, 1973.
16. Harrison J. M., The Heavy Traffic Approximation for Single Server Queues in Series, *Journal of Applied Probability*, 10, No. 3, 613—629 (1973).

17. Heyman D. P., An Approximation for the Busy Period of the M/G/1 Queue Using a Diffusion Model, *Journal of Applied Probability*, **11**, 159–169 (1974).
18. Iglehart D., Multiple Channel Queues in Heavy Traffic, IV: Law of the Iterated Logarithm, Technical Report No. 8, Dept. Operations Research, Stanford University, 1969.
19. Iglehart D., Whitt W., Multiple Channel Queues in Heavy Traffic, I, *Advances in Applied Probability*, **2**, 150–177 (1970); Multiple Channel Queues in Heavy Traffic, II: Sequences, Networks, and Batches, *Advances in Applied Probability*, **2**, 355–369 (1970).
20. Itô K., McKean H. P., Jr., *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Academic Press, New York, 1965.
21. Kiefer J., Wolfowitz J., On the Theory of Queues with Many Servers, *Transactions of the American Mathematics Society*, **78**, 1–18 (1955).
22. Kingman J. F. C., The Single Server Queue in Heavy Traffic, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **57**, 902–904 (1961).
23. Kingman J. F. C., On Queues in Heavy Traffic, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **24**, 383–392 (1962).
24. Kingman J. F. C., Some Inequalities for the Queue GI/G/1, *Biometrika*, **49**, 315–324 (1962).
25. Kingman J. F. C., The Heavy Traffic Approximation in the Theory of Queues, in W. L. Smith, R. I. Wilkinson, eds., *Proceedings of the Symposium on Congestion Theory*, Univ. of North Carolina, Chapel Hill, 1964, p. 137–169.
26. Kingman J. F. C., Inequalities in the Theory of Queues, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **32**, 102–110 (1970).
27. Kleinrock L., *Queueing Systems, Volume I: Theory*, Wiley, New York, 1975. [Готовится перевод: Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1979.]
28. Kobayashi H., Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks, I. Equilibrium Queue Distributions, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **21**, No. 2, 316–328 (1974).
29. Kobayashi H., Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks, II. Nonequilibrium Distributions and Computer Modeling, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **21**, No. 3, 459–469 (1974).
30. Kobayashi H., Bounds for the Waiting Time in Queueing Systems, in E. Gelenbe, R. Mahl, eds., *Computer Architectures and Networks*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974, p. 263–274.
31. Kölnerström J., Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers. I, *Journal of Applied Probability*, **11**, 544–552 (1974).
32. Marchal W. G., Some Simple Bounds and Approximations in Queueing, Technical Memorandum Serial T-294, Institute for Management Science and Engineering, The George Washington University, January 1974.
33. Marshall K. T., Some Inequalities in Queueing, *Operations Research*, **16**, 651–665 (1968).
34. Marshall K. T., Bounds for Some Generalizations for the GI/G/1 Queue, *Operations Research*, **16**, 841–848 (1968).
35. Marshall K. T., Some Relationships between the Distributions of Waiting Time, Idle Time and Interoutput Time in the GI/G/1 Queue, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **16**, 324–327 (1968).
36. McNeil D. R., Diffusion Limits for Congestion Models, *Journal of Applied Probability*, **10**, 368–376 (1973).
37. Morse P. M., Stochastic Properties of Waiting Lines, *Operations Research*, **3**, 255–261 (1955).
38. Neuts M. F., The Single Server Queue in Discrete Time-Numerical Analysis, *Naval Research Logistics Quarterly*, Part I, **20**, No. 2, 297–304 (1973); Part II (with E. M. Klimko), **20**, No. 2, 305–320 (1973); Part III (with E. M. Klimko), **20**, No. 3, 557–568 (1973).

39. Newell G. F., Approximate Methods for Queues with Application to the Fixed-Cycle Traffic light, *SIAM Review*, 7, 223—240 (1965).
40. Newell G. F., Queues with Time-Dependent Arrival Rates I—III, *Journal of Applied Probability*, 5, 436—451, 579—606 (1968).
41. Newell G. F., Applications of Queueing Theory, Chapman and Hall, Ltd, London, 1971.
42. Newell G. F., Approximate Stochastic Behavior of n -Server Service Systems with Large n , Springer-Verlag, Berlin, 1973.
43. Papoulis A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1965.
44. Prabhu N. U., Queues and Inventories, Wiley, New York, 1965.
45. Прохоров Ю. В., Переходные явления в процессах массового обслуживания, Литовский математический сборник, т. 3, 1963, № 1, с. 199—205.
46. Reiser M., Kobayashi H., Accuracy of the Diffusion Approximation for Some Queueing Systems, *IBM Journal of Research and Development*, 18, 110—124 (1974).
47. Ross S. M., Bounds on the Delay Distribution in GI/G/1 Queues, *Journal of Applied Probability*, 11, 417—421 (1974).
48. Suzuki T., Yoshida Y., Inequalities for Many-Server Queue and Other Queues, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 13, 59—77 (1970).
49. Syski R., Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems, Oliver and Boyd, London, 1962.
50. Wong D. K., A Discrete Approximation fo G/G/1 Queue, M. S. Thesis, Computer Science Department, School of Engineering and Applied Science, University of California at Los Angeles, December 31, 1974.

Задачи

- 2.1. Покажите, что среднее время ожидания в системе M/G/1, найденное с использованием приближения при большой нагрузке, превышает истинное значение не более чем на средний промежуток времени между моментами поступления требований.
 - 2.2. Рассмотрите систему G/D/1, в которой постоянное время обслуживания равно $a+c$, а промежуток времени между моментами поступления требований равномерно распределен в интервале между c и $a+b+c$, где a , b и c — неотрицательные постоянные.
 - а) Какая зависимость должна существовать между указанными постоянными, чтобы система была стабильной?
 - б) Найдите W_U .
 - в) Найдите W_M .
 - г) При решении задачи *в* докажите, что решение уравнения (2.35) является в данном случае единственным.
 - 2.3. Джо нанялся измерять среднюю длину очереди перед медпунктом завода. В час в среднем имеют место шесть случаев, требующих помощи (со вторым моментом 100 мин²), и в среднем оказание помощи занимает 5 мин (с дисперсией 50 мин²). Предполагается, что поведение этой СМО такое же, как системы G/G/1 в стационарном режиме.
- Через несколько недель Джо представил отчет, в кото-

ром утверждал, что измеренная им средняя длина очереди равна 1,05. Согласны ли Вы с ним? Почему?

- 2.4. Рассмотрите систему G/G/1, такую, что при $0 \leq \alpha \leq 1$

$$A(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \alpha, & 0 \leq t < T_0, \\ 1, & T_0 \leq t, \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} 0, & x < -(1-\alpha) \log \alpha, \\ 1, & -(1-\alpha) \log \alpha \leq x. \end{cases}$$

- a) Найдите \bar{t} , σ_a^2 , x , σ_b^2 и ρ , выразив их через α и T_0 . Какое соотношение должно связывать α и T_0 при стабильном режиме?
- b) Выразите через α и T_0 верхнюю границу для W_U .
- v) Для заданного значения T_0 найдите значение α , которое минимизирует W_U .
- g) Для заданного значения α найдите W_U в зависимости от T_0 .
- d) Для заданного значения α найдите величину T_0 , которая максимизирует W_U . Какое значение получится теперь для W_U ?
- 2.5. Рассмотрите систему G/G/1 с неординарным потоком требований при среднем числе одновременно поступающих требований g и дисперсией σ_g^2 . Предполагается, что $A(t)$ описывается функцией типа t -ВГСОВ, где $\lambda = 1/\bar{t}$ — интенсивность поступления групповых требований. Найдите верхнюю и нижнюю границы для W_g и среднее время пребывания группы требований в очереди до того момента, когда первое требование данной группы начнет обслуживаться.
- 2.6. Получите выражение для \bar{W}_U другим способом.
- a) Очевидно, что в системе G/G/1 вероятность того, что поступающее требование застает систему свободной, $r_0 = P[\tilde{y} > 0]$ удовлетворяет неравенству $0 < r_0 < 1$. Покажите, что $E[\tilde{y}^k]$ таково, что $\bar{y}^k = r_0 \bar{I}^k$. На основании этого установите простую нижнюю границу для \bar{I} . Определите также простую нижнюю границу для \bar{t}^2 , выразив ее через \bar{I} .
- b) Используя результаты задачи a, получите нижнюю границу для среднего остаточного времени свободного времени, выразив ее только через λ и ρ .
- v) С помощью результата б и равенства (1.132) докажите основную верхнюю границу (2.22).
- 2.7. Рассмотрите дисперсию промежутков времени между уходами σ_D^2 .
- a) Используя выражение (1.125) и записав математическое

ожидание в пределе при $n \rightarrow \infty$, выразите σ_y^2 через первые два момента \tilde{t} , \tilde{x} и y .

- б) Используя результат а, докажите неравенство (2.42).
2.8. Докажите неравенство (2.47) для системы γ -ВГСОВ/G/1.
 а) Пусть ФРВ случайной величины $w+x$ имеет вид
 $S(x) = P[\tilde{w} + \tilde{x} \leq x]$. Докажите, что

$$P[\tilde{y} > y] = \int_0^\infty [1 - A(y+x)] dS(x).$$

- б) Покажите, что свободное время I должно удовлетворять равенству

$$P[I > y] = \frac{1}{a_0} P[\tilde{y} > y].$$

- в) Используя свойства γ -ВГСОВ распределения $A(t)$ и применяя результаты а и б, докажите следующее соотношение:

$$\int_t^\infty P[I > x] dx \leq \gamma P[I > t].$$

- г) Образуйте среднее остаточное время для I на основании результата в и покажите, что

$$\frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}} \leq \gamma.$$

- 2.9.** Используя приближение, подобное приближению в задаче 2.8, докажите для системы G/G/1, что если в ней функция $A(t)$ имеет УСОВ и $t \geq 0$, то

$$\int_t^\infty \frac{P[I > x]}{P[I > t]} dx \leq \int_t^\infty \frac{1 - A(x)}{1 - A(t)} dx.$$

- 2.10.** Рассмотрите СМО G/G/1, в которой функция $A(t)$ имеет ВИО.

- а) Исходя из выражения для вероятности $P[I > t]$, приведенного в п. б задачи 2.8, найдите интенсивность отказов для I .
 б) Используя свойство ВИО функции $A(t)$, покажите, что для $\epsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{P[I > t + \epsilon]}{1 - A(t + \epsilon)} \leq \frac{P[I > t]}{1 - A(t)}.$$

- в) С помощью результата б покажите, что следующий опре-

делитель меньше или равен нулю:

$$\left| \begin{array}{l} \int\limits_t^{\infty} P[I > x] dx \quad \int\limits_0^t P[I > x] dx \\ \int\limits_t^{\infty} [1 - A(x)] dx \quad \int\limits_0^t [1 - A(x)] dx \end{array} \right| \leq 0.$$

- г) Используя результат в, докажите, что для системы ВИО/G/1

$$\int\limits_t^{\infty} \frac{P[I > x]}{I} dx \leq \int\limits_t^{\infty} \frac{1 - A(x)}{I} dx,$$

- 2.11. Рассмотрите опять систему ВИО/G/1.

- а) Докажите, что любая случайная величина X со вторым моментом \bar{X}^2 и ФРВ $\Phi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{\infty} \int\limits_t^{\infty} [1 - F(x)] dx dt = \frac{\bar{X}^2}{2}.$$

- б) Используя последний результат задачи 2.10 и результат а, докажите справедливость равенства (2.50).

- 2.12. Решите систему уравнений (2.77) — (2.78).

- а) Найдите $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)z^k$ в зависимости от $p(0)$.

- б) Оцените $p(0)$ и найдите $\{p(k)\}$ в явном виде.

- 2.13. Повторите решение задачи 2.12 (для примера из разд. 2.6), используя метод спектральной факторизации.

- 2.14. Рассмотрите, как в разд. 2.6, дискретную СМО, для которой

$$A(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \alpha, & 0 \leq t < 2, \\ 1, & 2 \leq t. \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

- а) Найдите ρ .

- б) Получите $c(k)$.

- в) Пусть $w_0 = 0$ с вероятностью единица. Постройте график $p_n(k)$ при $n = 0, 1, 2, 3$.

- г) Запишите уравнение равновесия для $p(k)$.

- д) Используя z -преобразование, получите $p(k)$ в явном виде.

- 2.15. Повторите предыдущую задачу для

$$A(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq t < 2, \\ 1, & 2 \leq t. \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

2.16. Повторите задачу 2.14 для

$$a(k) = \begin{cases} 1/3, & k=0, \\ 2/3, & k=1, \end{cases} \quad b(k) = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ 1/2, & k=1. \end{cases}$$

2.17. Для примера, приведенного в разд. 2.6,

- а) дайте верхнюю границу для W ;
- б) дайте самую лучшую нижнюю границу для W , используя методы разд. 2.3;
- в) найдите точное значение W (используя результаты задачи 2.12).

2.18. Рассмотрите систему G/G/1 из задачи 2.4 при a и T_0 , найденных в пп. в и д этой задачи. Какие трудности возникнут, если пытаться решить эту систему методом, рассмотренным в разд. 2.6?

2.19. Запишите равенство (2.132) в безразмерной форме.

2.20. а) Выразите верхнюю границу через \bar{W}_U для корня σ , связанного с системой G/M/1.

- б) Повторите ту же задачу для системы G/M/m.

2.21. В этой задаче развиваются некоторые вопросы диффузионного приближения для системы M/G/1.

- а) С помощью уравнения Фоккера—Планка (2.133) запишите функцию $F^{**}(r, s)$, определяемую равенством (2.134), и покажите, что

$$F^{**}(r, s) = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{C_1 + rC_2 - e^{-rw_0}}{r^2 - (2m/\sigma^2)r - (2/\sigma^2)s} \right],$$

где w_0 — начальная задолженность, а C_1 и C_2 — постоянные, не зависящие от r .

- б) Как видно из формулы (2.136), r_1 и r_2 являются корнями знаменателя. Определите η равенством (2.137). Покажите, что $\eta > 0$ при $0 \leq \rho$.
- в) Положив $r = \eta$, найдите соотношение между C_1 и C_2 .
- г) Какое значение должна принять функция $sF^{**}(0, s)$?
- д) С помощью результата г найдите C_1 . Используя полученное значение C_1 и результат в, найдите C_2 . Таким образом доказывается равенство (2.135).
- е) Пусть $w_0 = 0$. Разложите $F^{**}(r, s)$ на простые дроби. Учитывая, что $r_1, r_2 = -2s/\sigma^2$, докажите (2.141).
- ж) Покажите, что $\lim_{s \rightarrow 0} r_2 = -s/m$ и $\lim_{s \rightarrow 0} r_1 = 2m/\sigma^2$.
- з) С помощью результата ж покажите, что равенство (2.142) справедливо при $\rho < 1$.
- и) Докажите справедливость равенства (2.147) путем непосредственного расчета.
- к) При $w_0 = 0$ и $\rho < 1$ докажите справедливость (2.148), заметив, что $\eta = r_2$ и $r_1 r_2 = -2s/\sigma^2$.

л) Покажите, что нормированный вариант (2.148) соответствует (2.155).

м) Докажите справедливость (2.152) при $\rho > 1$.

- 2.22.** Покажите, что (2.157) является обращением преобразования, данного равенством (2.155). Используйте для этого общие свойства преобразований (см. табл. 1.3 в [27]) и полезную пару преобразований

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - 2ae^{at^2} [1 - \Phi(a\sqrt{2t})] \iff \frac{1}{a + \sqrt{s}}.$$

- 2.23.** Рассмотрите приближение третьего порядка для уравнения (2.111), в котором предполагается, что три первых члена $A_n(w, t)$ при $n=1, 2, 3$ ненулевые, а все остальные равны нулю (при $n>3$). Исследуйте это решение для незаконченной работы в системе M/G/1 в состоянии равновесия ($\rho = 1 - \varepsilon$, где $1 \gg \varepsilon > 0$) [10].

а) Покажите, что общее безразмерное решение [см. (2.127) — (2.128)] для состояния равновесия имеет вид

$$F(w') = C_1 + C_2 e^{s_1 w'} + C_3 e^{s_2 w'},$$

где s_1 и s_2 — корни уравнений

$$\frac{\gamma}{4} s^2 - \frac{1}{2} s - 1 = 0$$

и

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{\bar{x}^3}{\lambda (\bar{x}^2)^2} (1 - \rho).$$

- б) Очевидно, что два корня предыдущего упражнения имеют противоположные знаки. Пусть $s_1 < 0$, $s_2 > 0$. Покажите, что

$$F(w') = 1 - e^{s_1 w'}, \quad w' \geq 0.$$

- в) Рассмотрите приближение

$$s_1 \approx a + bw + cw^2$$

и найдите наилучшие значения a , b и c (заметим, что $|\gamma| \ll 1$).

- г) С учетом результатов задач б и в найдите явное выражение для $F(w')$ и сравните его с (2.131).

- 2.24.** Рассмотрите диффузионное приближение для $U(t)$ в случае системы M/G/1 [17]. Исследуйте период занятости требованием, время обслуживания которого равно x секунд. Пусть $g(y, x)$, $G^*(s, x)$ и $g_k(x)$ — соответственно ПРВ, преобразование Лапласа ПРВ и k -й момент продолжительности такого периода занятости, который аппроксимируется диф-

фузионным процессом со средним $m=\rho=1$ и дисперсией $\sigma^2=\lambda\bar{x}^2$. В работе [12] показано, что

$$G^*(s; x) = \exp \left\{ -\frac{mx}{\sigma^2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2 s}{m^2}} \right] \right\}.$$

- a)* Найдите $g_k(x)$ при $k=1, 2, 3$.
 - б)* Пусть $g(y)$, $G^*(s)$ и g_k — соответственно ПРВ, преобразование Лапласа ПРВ и k -й момент безусловной продолжительности периода занятости при диффузионном приближении. Выразите $g(y)$ через $g(y; x)$.
 - в)* С помощью результата *а* найдите g_k при $k=1, 2, 3$ и сравните с известными значениями моментов точного периода занятости в системе М/G/1.
 - г)* Выразите $G^*(s)$ через $B^*(s)$.
 - д)* В каком смысле выражение *г* лучше соответствующего выражения для точной системы М/G/1?
- 2.25. Для потока входящей работы, показанного на фиг. 2.16, изобразите графики *в* и *г* этой фигуры в случае, когда сглаживающий фильтр действует так, что он распространяет единичный импульс равномерно по двум единичным окнам, окружающим этот импульс (следовательно, высота этого прямоугольного импульса будет равна $1/2$). Повторите это в случае, когда единичный импульс распространяется как небольшой треугольник, который растет линейно от 0 (расположенного за $1/2$ с до импульса) до значения 2 в момент появления импульса, а затем убывает линейно до нуля через $1/2$ с после импульса.

Глава 3

Системы массового обслуживания с приоритетами

Никому не нравится стоять в очереди; однако одни не любят это больше других. Действительно, некоторым настолько не нравится стоять в очереди, что они считают необходимым что-нибудь предпринять. Для того чтобы улучшить положение, можно пустить в ход обман, подкуп, давление или уйти из очереди. Однако более целесообразным могло бы быть использование такого класса структур, который обеспечивает предпочтительную обработку одних требований перед другими. Именно такие структуры встречаются в системах массового обслуживания с приоритетами, и они составляют предмет исследования настоящей главы.

При рассмотрении СМО с приоритетами приходится непосредственно обращаться к задаче минимизации некоторой функции стоимости относительно задержки различных требований. Удивительно, что опубликовано сравнительно немного работ по оптимальным дисциплинам обслуживания приоритетных требований, в которых минимизируются хорошо определенные и реальные стоимостные функции. В изобилии же имеется литература, посвященная построению математических моделей простых СМО с приоритетами и последующему анализу характеристик таких систем¹⁾.

Целью настоящей главы является обсуждение нескольких СМО с приоритетами, представляющих (в частности, по мнению автора) определенный интерес, однако в ней ни в коей мере не предпринимается попытка и не дается обещание охватить с какой-либо степенью полноты весь существующий материал по рассматриваемым проблемам. Здесь только ставятся вопросы и иллюстрируются методы подхода, которые, как нам представляется, являются существенными и важными. Приводимые рассмотрения лежат в основе некоторых применений теории к вычислительной технике, рассматриваемых в гл. 4—6. Значительно более полной работой по этим вопросам является книга Джейсуола [21].

¹⁾ Вместе с тем существует литература по оптимальным методам управления СМО, в которой речь идет о регулировании обслуживания и поступающих потоков в СМО при различных стоимостных соотношениях. Обзор этого материала дан в работах [12, 35], где приведена полезная библиография. В работе [44] рассматриваются применения теории к замкнутым сетям массового обслуживания. Новый подход описывается также в [36].

3.1. МОДЕЛЬ

Дисциплина обслуживания — это способ определения того, какое требование в очереди должно обслуживаться следующим. Решение может основываться на одной из приведенных ниже характеристик или на их совокупности:

- 1) мера, определяемая относительным временем поступления рассматриваемого требования в очередь;
- 2) мера (точное значение, оценка, ПРВ) требуемого или полученного до сих пор времени обслуживания;
- 3) функция, определяющая принадлежность требования к той или иной группе.

Обычно к дисциплинам обслуживания с приоритетами относят третий случай, хотя в настоящей главе используется более широкое определение, включающее любой из трех дискриминирующих факторов. Примерами дисциплин обслуживания, которые зависят только от времени поступления требования, являются обслуживание в порядке поступления (дисциплина ОПП, «первый поступивший первым обслуживается»), обслуживание в обратном порядке (дисциплина ООП, «последний поступивший первым обслуживается») и обслуживание в случайному порядке. Дискриминация, основанная только на времени обслуживания, может включать дисциплины первоочередного обслуживания требований с кратчайшей продолжительностью обработки, первоочередного обслуживания требований с наиболее длительной обработкой, аналогичные дисциплины, основанные на учете средних значений, и т. д. Порядок обслуживания, учитывающий структуру приоритетных классов, определяемую внешними условиями, может иметь много различных форм, как, например, форму описываемой ниже системы обслуживания в порядке приоритета. Применяются также смешанные дисциплины обслуживания; один такой пример обсуждается в разд. 3.7.

Предположим, что поступающие требования принадлежат одному из P различных приоритетных классов, обозначаемых через p ($p=1, 2, \dots, P$). Будем считать, что чем *больше* индекс класса, тем *выше* приоритет этого класса; иначе говоря, требованиям из приоритетного класса p предоставляется в среднем в той или другой форме преимущественное обслуживание перед требованиями из приоритетного класса $p-1$. Здесь будет рассматриваться только установившийся режим. Однако ниже встретятся системы, в которых некоторые приоритетные классы не имеют стабильных характеристик, тогда как другие классы достигают предельных стабильных характеристик, и в таких случаях рассматривают стабильные классы.

Предполагается, что поступающему требованию приписывается набор параметров (либо случайно, либо на основе некоторых

свойств требования), который определяет относительное положение этого требования в очереди при помощи решающего правила, называемого дисциплиной обслуживания. Это положение может меняться в зависимости от времени вследствие появления в очереди требования высшего или низшего приоритета. В момент времени t приоритет требования вычисляется как функция приписанных ему параметров, его времени обслуживания и времени пребывания в системе. Фактически в момент t с требованием из приоритетного класса p связывается принимающая числовые значения приоритетная функция $q_p(t)$. Чем больше значение этой функции, тем выше приоритет требования. Всякий раз, когда применяется решающее правило для выбора требования для обслуживания, выбор делается в пользу требования с наибольшим значением $q_p(t)$. В случае появления требований с равными значениями приоритетных функций ситуация разрешается в соответствии с дисциплиной ОПП.

Рассмотрим достаточно общую модель, основанную на системе M/G/1 (в некоторых случаях, однако, будем ограничиваться системой M/M/1, а в других случаях, наоборот, рассматривать наиболее общую систему G/G/1). Предположим, что требования из приоритетного класса p образуют пуссоновский поток с интенсивностью λ_p требований в секунду. Время обслуживания каждого требования этого класса выбирается независимо в соответствии с распределением $B_p(x)$ со средним значением x_p секунд. Введем следующие определения:

$$\lambda = \sum_{p=1}^P \lambda_p, \quad (3.1)$$

$$\bar{x} = \sum_{p=1}^P \frac{\lambda_p}{\lambda} \bar{x}_p, \quad (3.2)$$

$$\rho_p = \lambda_p \bar{x}_p, \quad (3.3)$$

$$\rho = \bar{x} = \sum_{p=1}^P \rho_p. \quad (3.4)$$

Здесь ρ интерпретируется как доля времени, в течение которого обслуживающий прибор занят ($\rho < 1$); ρ_p — доля времени, в течение которого обслуживающий прибор занят обслуживанием требований из приоритетного класса p . Если требование в процессе обслуживания может быть удалено из прибора и возвращено в очередь при поступлении требования более высокого приоритета, говорят, что система работает с *абсолютным* приоритетом; если такая возможность исключена, приоритет называется *относич-*

тельным. В тех случаях, когда в обслуживающем приборе в любой момент времени может находиться не более чем одно требование, связь между требованиями (если она существует) разрушается в соответствии с дисциплиной ООП.

3.2. ПОДХОД К РАСЧЕТУ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Согласно принятой ранее системе обозначений, символы W и T используются для обозначения соответственно среднего времени ожидания для требования (в очереди) и среднего общего времени пребывания требования в системе (ожидание плюс обслуживание). Очевидно, что имеет место соотношение $T = W + x$. Теперь введем следующие обозначения для случая приоритетных классов:

$$W_p \triangleq E [время ожидания для требования из приоритетного класса p], \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} T_p \triangleq E [\text{общее время пребывания в системе} \\ \text{требования из приоритетного класса } p] = \\ = W_p + \bar{x}_p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Время ожидания для требования легко разлагается на три составляющие: время, связанное с тем, что в момент поступления данного требования другое требование находится в обслуживающем приборе; время, обусловленное требованиями, находящимися в очереди в момент поступления данного требования, и, наконец, время, связанное с требованиями, поступающими позже данного. Это основное замечание, на котором строится система уравнений для определения величин W_p и T_p .

Начнем с рассмотрения систем с *относительным* приоритетом и найдем среднее время ожидания W_p . Система исследуется с точки зрения вновь поступившего требования из приоритетного класса p . Будем называть это требование «меченым». Первая составляющая времени ожидания для меченого требования связана с другим требованием, которое оно застает в обслуживающем приборе; эта составляющая равна остаточному времени обслуживания другого требования, а распределение времени обслуживания зависит от приоритета другого требования. Обозначим через W_0 *среднюю задержку меченого требования, связанную с наличием другого требования на обслуживании*. Так как ρ_i — доля времени, в течение которого обслуживающий прибор занят требованиями i -го класса, и поскольку имеет место пуассоновский процесс, то ρ_i — вероятность того, что меченое требование застает в приборе требование из i -го класса. В разд. 1.7 установлено, что при пуассоновском входящем потоке среднее остаточное время обслуживания в момент поступления требования равно второму моменту вре-

времени обслуживания, деленному на удвоенный первый момент; это положение позволяет найти

$$W_0 = \sum_{i=1}^P p_i \frac{\bar{x}_i^2}{2\bar{x}_i} = \sum_{i=1}^P \frac{\lambda_i \bar{x}_i^2}{2}, \quad \blacksquare \quad (3.7)$$

где \bar{x}_i^2 — второй момент времени обслуживания требования из класса i .

Рассмотрим теперь вторую составляющую времени ожидания, а именно задержку, связанную с тем, что перед меченым требованием обслуживаются другие требования, которые меченое требование застало в очереди. Введем обозначение:

$N_{ip} \triangleq$ число требований из класса i , которые застало в очереди меченое требование (из класса p) и
которые обслуживаются перед ним, (3.8)

причем среднее значение этой величины равно $E[N_{ip}] \triangleq \bar{N}_{ip}$. Так как время обслуживания любого требования из класса i выбирается независимо согласно распределению $B_i(x)$, вторая составляющая среднего времени ожидания для меченое требования дается выражением

$$\sum_{i=1}^P \bar{x}_i \bar{N}_{ip}. \quad (3.9)$$

Аналогично можно определить третью составляющую среднего времени ожидания (задержку меченоого требования за счет требований, поступающих после него). Введем обозначение:

$M_{ip} \triangleq$ число требований из класса i , поступающих в СМО,
когда меченое требование (из класса p) находится
в очереди, и получающих обслуживание раньше
меченоого требования. (3.10)

Среднее значение этой величины обозначается через \bar{M}_{ip} . Таким образом, третья составляющая среднего времени ожидания подобна выражению (3.9). Следовательно, общее среднее время ожидания в очереди меченоого требования может быть окончательно записано в виде

$$W_p = W_0 + \sum_{i=1}^P \bar{x}_i (\bar{N}_{ip} + \bar{M}_{ip}), \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (3.11)$$

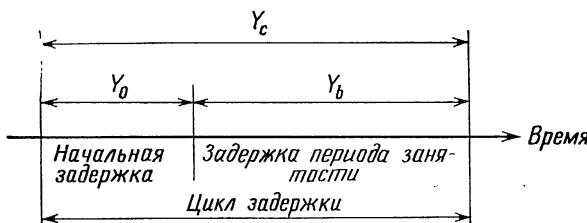
Таким образом, при любой заданной дисциплине обслуживания процедура решения состоит из двух этапов: 1) определения средних значений \bar{N}_{ip} и \bar{M}_{ip} и 2) решения системы уравнений (3.11).

В общем случае как \bar{N}_{ip} , так и \bar{M}_{ip} могут быть выражены через средние времена ожидания W_i , и, следовательно, (3.11) приводит к системе линейных уравнений относительно W_i . Описанный здесь простой подход к расчету средних времен ожидания возможен, так как среднее значение суммы всегда равно сумме средних значений. Этот подход будет использоваться в последующих разделах данной главы. Высшие моменты получаются не так просто, и в следующем разделе рассматривается подход к определению *распределения времени ожидания* для требований различных приоритетов.

Расчет СМО с *абсолютным* приоритетом подобен приведенному выше, но включает дополнительные трудности, связанные с описанием того, как прерванное требование возвращается к обслуживанию. Обычно здесь различают три случая. В первом случае требование, вытесненное из прибора, при возвращении обслуживается с того места, где оно было прервано (возможно, с отнесением стоимости времени либо на счет требования, либо на счет системы). Такая система работает с *абсолютным приоритетом и дообслуживанием*. Во втором и третьем случаях предполагается, что требование при перерыве теряет результат незавершенного обслуживания и должно обслуживаться сначала. Во втором случае обслуживание возвращающегося требования начинается сначала, но с тем же общим временем обслуживания, которое требовалось при первом поступлении этого требования на обслуживание. Такая система работает с *абсолютным приоритетом и повторным обслуживанием без повторного выбора времени обслуживания*. В третьем случае предполагается, что при повторном обслуживании время обслуживания определяется заново; в этом случае говорят об *абсолютном приоритете с повторным обслуживанием и повторным выбором времени обслуживания*. (Некоторые примеры систем с абсолютным приоритетом и дообслуживанием рассматриваются ниже в этой главе, и в гл. 4.)

3.3. ЦИКЛ ЗАДЕРЖКИ, ОБОБЩЕННЫЙ ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

В настоящем разделе проводится анализ так называемого цикла задержки, который позволяет вычислить преобразование Лапласа для ПРВ общшенного периода занятости. Это дает возможность получить преобразование Лапласа ПРВ времени ожидания (как в разд. 5.10 первого тома [32]) для ряда дисциплин обслуживания. Идея анализа цикла задержки, по-видимому, впервые была введена Гейвером в работе [15], где применяется термин «время завершения». Подобные идеи высказываются в работе Кейлсона [23], где говорится об «основном времени пребывания в обслуживающем приборе», и в работе [3], в которой использует-



Фиг. 3.1. Цикл задержки.

ся термин «продолжительность жизни». Последняя работа была обобщена Миллером [10], терминология которого используется здесь.

Цикл задержки подобен периоду занятости и показан на фиг. 3.1. Цикл задержки Y_c состоит из двух частей: начальной задержки продолжительностью Y_0 и задержки периода занятости продолжительностью Y_b . Начальная задержка — это обычно интервал, который может соответствовать либо завершению обслуживания некоторого частично обслуженного требования, либо выполнению некоторой другой специальной задачи. Задержка периода занятости соответствует времени обслуживания обычных требований и может рассматриваться как последовательность периодов субзанятости¹⁾; задержка периода занятости заканчивается, когда больше не остается обычных требований, ждущих обслуживания. Обобщенное понятие периода занятости отличается от обычного периода занятости: первое допускает произвольное распределение начальной задержки, второе же требует, чтобы начальная задержка была временем обслуживания, распределенным по тому же закону, что и индивидуальные продолжительности обслуживания, являющиеся элементами задержки периода занятости. Однако в любом случае

$$Y_c = Y_0 + Y_b.$$

Моменты поступления обычных требований образуют пуссоновский процесс. Будем предполагать в этом разделе, что они поступают с интенсивностью λ . Заметим, что в течение начальной задержки могут накопиться несколько обычных требований, ожидающих обслуживания. Каждое из них генерирует свой период

¹⁾ Период субзанятости — это такой промежуток времени, который требуется для обслуживания произвольного требования и всех других требований (его потомков), которые поступают в систему в течение его времени обслуживания или времени обслуживания любого из его потомков. В системе M/G/1 ПРВ продолжительности периода субзанятости такая же, как и периода занятости. Говорят, что период субзанятости «генерируется» требованием, которым этот период начинается (см. гл. 5 в [32]).

субзанятости, а эти периоды субзанятости образуют задержку периода занятости.

Теперь условимся относительно некоторых обозначений. Раньше преобразования ПРВ времени обслуживания и продолжительности периода занятости обозначались соответственно через $B^*(s)$ и $G^*(s)$ и основное уравнение, связывающее эти две величины, записывалось в виде (1.89). Теперь обозначим для случайных величин Y_0 , Y_b и Y_c соответствующие ФРВ через $G_0(y)$, $G_b(y)$ и $G_c(y)$ и преобразования их ПРВ через $G_0^*(s)$, $G_b^*(s)$ и $G_c^*(s)$.

Предположим, что задана $G_0^*(s)$; в противном случае обычно можно вычислить. Необходимо найти $G_b^*(s)$ и $G_c^*(s)$ через известные функции $B^*(s)$, $G^*(s)$ и $G_0(s)$, причем для определения $G^*(s)$ через $B^*(s)$ потребуется уравнение (1.89). Приводимый здесь вывод является довольно сокращенным, так как он близок аналогичному выводу из разд. 5.8 первого тома [32]. Начнем с вычисления $G_b^*(s) = E[e^{-sY_b}]$. Обозначим через N_0 число обычных требований, поступающих в течение промежутка времени Y_0 . Для получения простого выражения будем отыскивать преобразование при заданных Y_0 и N_0 :

$$E[e^{-sY_b} | Y_0=y, N_0=n] = [G^*(x)]^n.$$

Это соотношение следует из того, что все периоды субзанятости (каждый из которых генерируется одним из требований, поступающих в течение периода Y_0) независимы и каждый из них распределен точно так же, как и период занятости. Переходим теперь к выражению, которое не является условным по N_0 :

$$\begin{aligned} E[e^{-sY_b} | Y_0=y] &= \sum_{n=0}^{\infty} [G^*(s)]^n \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} = \\ &= e^{-(\lambda - \lambda G^*(s))y}, \end{aligned}$$

а затем к выражению, которое не является условным по Y_0 :

$$E[e^{-sY_b}] \triangleq G_b^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda G^*(s))y} dG_0(y).$$

В этом интеграле нетрудно узнать преобразование ПРВ для Y_0 ; в результате будем иметь

$$G_b^*(s) = G_0^*(\lambda - \lambda G^*(s)).$$

■ (3.12)

Теперь рассмотрим $G_c^*(s)$. Действуя, как выше, получим

$$E[e^{-sY_c} | Y_0=y, N_0=n] = e^{-sy} [G^*(s)]^n,$$

а устранив условия на N_0 и Y_0 , будем иметь

$$G_c^*(s) \triangleq E[e^{-sY_c}] = \int_0^{\infty} e^{-sy} \sum_{n=0}^{\infty} [G^*(s)]^n \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} dG_0(y),$$

что приводит к результату

$$G_c^*(s) = G_0^*(s + \lambda - \lambda G^*(s)). \quad (3.13)$$

Таким образом, равенства (3.12) и (3.13) позволяют получить уравнения для определения неизвестных функций, причем $G^*(s)$ находится из уравнения (1.89), т. е.

$$G^*(s) = B^*(s + \lambda - \lambda G^*(s)). \quad (3.14)$$

Отметим, что в частном случае, когда Y_0 распределено как время обслуживания обычного требования, Y_c является регулярным периодом занятости, а уравнение (3.13) сводится к (3.14).

Как мы вскоре увидим, анализ цикла задержки является чрезвычайно эффективным методом исследования СМО, особенно СМО с приоритетами.

3.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В большинстве физических систем нельзя получить «что-либо из ничего». Это относится и к СМО с приоритетами — предпочтительное обслуживание, предоставляемое одному классу требований, осуществляется за счет других требований. Фактически мы «занимаем у Петра, чтобы заплатить Павлу». В этом разделе исследуются инварианты, или законы сохранения, в СМО с приоритетами.

Законы сохранения основываются на том факте, что незаконченная работа $U(t)$ в течение любого периода занятости не зависит от порядка обслуживания, пока система является «консервативной». Под консервативной системой понимается такая СМО, в которой никакая работа (требование на обслуживание) не создается и не исчезает внутри системы; например, уничтожение работы могло бы произойти, если требование покинуло бы систему до окончания его обслуживания, а создание работы соответствовало бы простою обслуживающего прибора при наличии очереди. В этом разделе рассматриваются только системы, сохраняющие работу. Простейшим случаем является система с обслуживанием в порядке поступления, о которой уже много известно. Большинство СМО с приоритетами сопоставимы с системой обслуживания в порядке поступления, и, как увидим, их характеристики, естественно, входят в рассматриваемые законы сохранения.

Начнем с замечания о том, что *распределение времени ожидания* существенно зависит от порядка обслуживания. Однако теперь покажем, что если дисциплина обслуживания выбирает требования независимо от их времени обслуживания (или любой меры, связанной с временем обслуживания), то распределение числа требований в системе инвариантно относительно порядка обслуживания; можно показать, что такой же результат справедлив для среднего времени ожидания для требований. Рассмотрим систему

M/G/1. Основное уравнение для этой системы имеет вид (1.81). Величина q_n определялась как число требований, остающихся после ухода требования C_n . Теперь изменим точку зрения и определим эту величину иначе, а именно как число требований, остающихся после ухода n -го уходящего требования (следовательно, предполагается произвольный порядок обслуживания). Аналогично будем рассматривать v_n как число требований, поступающих в течение времени обслуживания n -го требования. Очевидно, что уравнение (1.81) теперь справедливо даже для более общих дисциплин обслуживания (и сводится к прежней интерпретации для систем с обслуживанием в порядке поступления). Шаги, аналогичные тем (см. [32]), которые ведут от этого уравнения к z -преобразованию $[Q(z)]$ числа требований в системе с обслуживанием в порядке поступления, приводят также от этого уравнения к $Q(z)$ для системы с произвольным порядком обслуживания. Таким образом, для любой дисциплины обслуживания, решающие правила которой не зависят от времени обслуживания, можно установить, что z -преобразование числа требований в системе должно иметь следующий вид:

$$Q(z) = B^* (\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (3.15)$$

где используются те же обозначения, что и в разд. 1.7. Следовательно, непосредственно может быть получена полная информация о числе требований в системе. Необходимо учитывать, что эта независимость числа требований в системе от порядка обслуживания была показана только для случая, когда решающее правило само не зависит от любого аспекта, связанного с временем обслуживания требований.

Рассмотрим теперь закон сохранения для незаконченной работы $U(t)$. Из определения функции $U(t)$ следует, что она а) является убывающей со скоростью 1 с/с, когда $U(t) > 0$, б) остается насыщенной в точке нуль, когда достигает горизонтальной оси, и в) в моменты поступления требований имеет вертикальные скачки, равные по величине времени обслуживания поступающих требований. Таким образом, при любом порядке обслуживания (зависящем от времени обслуживания или нет) $U(t)$ не меняется; это справедливо для системы G/G/1. Следующий закон сохранения для системы M/G/1 был впервые установлен и доказан в работах [26, 28].

Закон сохранения для СМО типа M/G/1. Для любой системы M/G/1 и любой относительной сохраняющей работу дисциплины обслуживания должно выполняться равенство

$$\sum_{p=1}^P \rho_p W_p = \begin{cases} \frac{\rho W_0}{1 - \rho}, & \rho < 1, \\ \infty, & \rho \geqslant 1 \end{cases} \quad ■ (3.16)$$

(напомним [см. разд. 1.7 и равенство (3.7)], что W_0 представляет собой остаточное время обслуживания требования, находящегося в приборе в момент поступления рассматриваемого требования). Таким образом, эта взвешенная сумма времен ожидания W_p , никогда не изменяется независимо от того, насколько сложна или искусно подобрана дисциплина обслуживания. Докажем справедливость этого закона сохранения. Если в момент времени t в очереди имеются $N_p(t)$ требований из приоритетного класса p , причем i -е требование из них [$i=1, 2, \dots, N_p(t)$] должно обслуживаться в течение времени x_{ip} , а x_0 представляет собой работу, которая должна быть доделана в момент t для требования, находящегося на обслуживании в приборе (т. е. является остаточным временем обслуживания), то можно утверждать, что независимо от порядка обслуживания

$$U(t) = x_0 + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{N_p(t)} x_{ip}.$$

Взяв математическое ожидание обеих частей равенства, получим¹⁾

$$E[U(t)] = W_0 + \sum_{p=1}^P \sum_{n_p=0}^{\infty} P[N_p(t)=n_p] \sum_{i=1}^{n_p} E[x_{ip}].$$

Заметим, что $E[x_{ip}] = \bar{x}_p$ не зависит от индекса i . Если t выбирается случайным образом (и достаточно большим), можно записать $\bar{U} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E[U(t)]$, что является предельным средним значением незаконченной работы. Таким образом, имеем

$$\bar{U} = W_0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P \sum_{n_p=0}^{\infty} n_p P[N_p(t)=n_p] \bar{x}_p = W_0 + \sum_{p=1}^P \bar{x}_p E[N_p].$$

Однако из формулы Литтла (1.31) видно, что $E[N_p] = \lambda_p W_p$, так как этот результат справедлив также для отдельных приоритетов. Таким образом, получаем

$$\bar{U} = W_0 + \sum_{p=1}^P \rho_p W_p. \quad (3.17)$$

¹⁾ Здесь принято $E[x_0] = W_0$, где W_0 определяется из равенства (3.7). Величина $E[x_0]$, которая является средней незаконченной работой для обслуживаемого требования, верна даже для системы G/G/l, так как усреднение проводится не по моментам поступления требований, а равномерно по всему времени. Как известно, пуассоновские требования также влияют на систему равномерно в течение всего времени, и по этой причине результат получается таким же, как среднее остаточное время обслуживания, наблюдаемое поступающими пуассоновскими требованиями.

Далее, так как \bar{U} не зависит от порядка обслуживания, можно воспользоваться результатом для случая обслуживания в порядке поступления, устанавливающим, что при пуассоновском потоке требований средняя незаконченная работа (среднее виртуальное время ожидания) равна W — среднему времени ожидания для требований. Эта величина дается равенством (1.82); здесь второй момент времени обслуживания легко выражается через вторые моменты времен обслуживания каждого класса, а именно

$$\bar{x}^2 = \sum_{p=1}^P \frac{\lambda p}{\lambda - \rho} \bar{x}_p^2 = \frac{2W_0}{\lambda},$$

и, таким образом,

$$\bar{U} = W = \frac{W_0}{1 - \rho}. \quad (3.18)$$

Если воспользоваться этой величиной для \bar{U} в равенстве (3.17), получится закон сохранения, представленный равенством (3.16) (где при $\rho \geq 1$, очевидно, получается ∞), что и требовалось доказать.

Таким образом, закон сохранения накладывает линейные ограничения типа равенства на множество средних времен ожидания W_p . Очевидно, любая попытка модифицировать дисциплину обслуживания, чтобы уменьшить одно из W_p , приведет к увеличению некоторых других W_p , однако это не будет сбалансированным обменом, так как весовые коэффициенты для W_p в общем случае различны. В специальном случае, когда $x_p = x$ для всех p , закон сохранения дает (при $\rho < 1$)

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p W_p = \frac{\lambda W_0}{1 - \rho}, \quad \bar{x}_p = \bar{x}. \quad (3.19)$$

Однако на основании формулы Литтла опять имеем $\lambda_p W_p = E[N_p]$ и, следовательно,

$$\sum_{p=1}^P E[N_p] = \frac{\lambda W_0}{1 - \rho}.$$

Но эта сумма является средним общим числом требований в очереди, для которого используется обозначение $\bar{N}_q = E$ [число требований в очереди]. Теперь получаем

$$\bar{N}_q = \frac{\lambda W_0}{1 - \rho} = \text{const} \left| \begin{array}{l} \text{дисциплина} \\ \text{обслуживания} \end{array} \right., \quad \bar{x}_p = \bar{x}, \quad (3.20)$$

и затем на основании формулы Литтла имеем

$$W = \frac{W_0}{1 - \rho} = \text{const} \Big|_{\substack{\text{дисциплина} \\ \text{обслуживания}}}, \quad \bar{x}_p = \bar{x}. \quad (3.21)$$

Таким образом, в случае, когда $\bar{x}_p = \bar{x}$, среднее число требований и среднее время ожидания в очереди не зависят от дисциплины обслуживания. Отметим соответствие между этим утверждением и приведенным выше утверждением относительно инвариантности распределения числа требований в системе (когда порядок обслуживания не зависит от времени обслуживания). При $x_p = x$ все требования, по крайней мере в том, что касается первых моментов, ведут себя одинаково в отношении времени обслуживания и, следовательно, порядок обслуживания не зависит от среднего времени обслуживания. Это приводит к инвариантным свойствам, отмеченным в равенствах (3.20) и (3.21). Если средние продолжительности обслуживания не равны между собой, то в общем случае неверно, что средняя длина очереди и среднее время ожидания не зависят от дисциплины обслуживания [которая, конечно, зависит от (среднего) времени обслуживания]. Эти утверждения, бесспорно, применимы к среднему числу требований в системе (поскольку $M_q + \rho = \bar{N}$) и среднему времени пребывания в системе (так как $W + x = T$). Кроме того, заметим, что речь идет не о равенстве $W_p = W$, а просто о том, что сумма в равенстве (3.19) постоянна.

Этот закон сохранения был обобщен [38] на случай G/G/1, где не только отбрасывается допущение о пуассоновском потоке, но также не делается никаких предположений относительно независимости; единственное требование состоит в том, что должно существовать стационарное распределение. В приведенном выше доказательстве для системы M/G/1 сначала используется предположение о пуассоновском входящем потоке, затем получается равенство (3.17). Однако это равенство справедливо для системы G/G/1, что приводит к следующему обобщению закона сохранения.

Закон сохранения для системы G/G/1 имеет вид

$$\sum_{p=1}^P \rho_p W_p = \bar{U} - W_0. \quad ■ (3.22)$$

Конечно, для каждой задачи должна быть вычислена величина \bar{U} , так как она для системы G/G/1 неизвестна! Однако, согласно закону сохранения, для любой заданной системы G/G/1 с сохранением работы и относительным приоритетом линейные ограничения, определяемые равенством (3.22), должны удовлетворяться независимо от дисциплины обслуживания. Естественно, что равенство (3.22) в случае M/G/1 сводится к равенству (3.16).

Нетрудно представить себе дисциплину обслуживания с приоритетами, при которой некоторые классы требований имеют конечное время ожидания, тогда как другие классы находятся в невыгодном положении с бесконечным временем ожидания. Примером такой системы является система, рассматриваемая ниже в разд. 3.6. Интересно узнать, существует ли закон сохранения для тех классов, которые имеют конечное время ожидания даже в таком нестабильном случае. Можно установить, что соответствующие законы сохранения существуют и содержат больше информации, чем равенство (3.16) в случае $\rho \geq 1$. Этот материал можно найти в работе [28]; он разрабатывается также в задачах 3.5 и 3.6.

Равенство (3.22), безусловно, применимо также к системе G/G/1 без приоритетов. В этом случае из формулы (3.7) видно, что $W_0 = \lambda \bar{x}^2 / 2$, и, таким образом, закон сохранения для системы G/G/1 без приоритетов принимает вид

$$\bar{U} = \rho W + \frac{\bar{x}^2}{2t}, \quad (3.23)$$

где $t = 1/\lambda$, что соответствует обычному обозначению для системы G/G/1. В работе [7] это равенство выводится как частный случай общего класса формул, имеющих вид: среднее по времени = $\lambda \times \bar{x}$ среднее по требованиям. Самым хорошим примером этого класса соотношений является, конечно, формула Литтла. Равенство (3.23) также довольно важно, но в некоторых отношениях оно недостаточно разъясняется в литературе по теории массового обслуживания. Брумель допускает случай, когда существует зависимость между основными процессами; при этом член $\rho \bar{W}$ заменяется выражением $E[\bar{x} \bar{w}] / \bar{t}$.

3.5. ОБРАТНЫЙ ПОРЯДОК ОБСЛУЖИВАНИЯ

Вернемся опять к системе M/G/1 и рассмотрим случай, когда обслуживание предоставляется последнему из поступивших требований в порядке относительного приоритета. Здесь $P=1$ (нет никаких внешних приоритетов). Обратный порядок обслуживания необычен и может показаться странным. Однако таким образом работает, например, стек, а также хранилище, где предметы укладываются в штабеля. Из того что решающее правило не зависит от времени обслуживания, непосредственно следует, что средняя длина очереди и среднее время ожидания при обслуживании в обратном порядке должны быть такими же, как и при обслуживании в порядке поступления [см. формулы (3.20) и (3.21)]. Кроме того, известно, что равенство (3.15) дает распределение числа требований в системе. Однако можно предполагать, что распределение времени ожидания при обслуживании в обратном порядке от-

личается от распределения при обслуживании в порядке поступления; этот вопрос и рассматривается ниже. Интуиция справедливо подсказывает, что в этом случае по сравнению с обслуживанием в порядке поступления даже при одинаковом среднем значении дисперсия времени ожидания будет больше.

Рассматриваемая дисциплина обслуживания особенно удобна для анализа. Заметим, что момент поступления нового требования никоим образом не зависит от длины очереди, которую оно застает при поступлении в СМО; новое требование может заставить ждать только требование, которое находится в обслуживающем приборе, а общий баланс времени его задержки определяется требованиями, которые поступают в СМО после него, но до начала его обслуживания. Для анализа цикла задержки, рассмотренного в разд. 3.3, это совершенно простой случай, когда начальной задержкой является остаточное время обслуживания требования, застигнутого в приборе, а задержкой периода занятости является время, необходимое для освобождения СМО от всех требований, которые пришли вслед за рассматриваемым, но до момента начала его обслуживания. Преобразование Лапласа ПРВ остаточного времени обслуживания приводится в сноске на стр. 32; запишем это преобразование, используя обозначения, принятые при анализе цикла задержки:

$$G_0^*(s) = \frac{1 - B^*(s)}{sx}.$$

Преобразование Лапласа ПРВ цикла задержки $G_c^*(s)$ выражается через $G_0^*(s)$ и $G^*(s)$ при помощи равенств (3.13) и (3.14). Здесь цикл задержки соответствует времени ожидания для рассматриваемого требования при обслуживании в обратном порядке. Воспользовавшись этими преобразованиями, можно получить условное преобразование времени ожидания в виде

$$\begin{aligned} E \left[e^{-sw} \middle| \begin{array}{l} \text{в момент поступления} \\ \text{требования СМО занята} \end{array} \right] &= G_c^*(s) = \\ &= G_0^*(s + \lambda - \lambda G^*(s)) = \\ &= \frac{1 - B^*(s + \lambda - \lambda G^*(s))}{[s + \lambda - \lambda G^*(s)] \bar{x}}. \end{aligned}$$

На основании равенства (3.14) числитель можно упростить следующим образом:

$$E \left[e^{-sw} \middle| \begin{array}{l} \text{в момент поступления} \\ \text{требования СМО занята} \end{array} \right] = \frac{1 - G^*(s)}{[s + \lambda - \lambda G^*(s)] \bar{x}}.$$

Чтобы освободить это равенство от условия, превратив его в безусловное, нужно учесть, что рассматриваемое требование с вероятностью $1-p$ имеет нулевое время ожидания, а с вероятностью p

ϱ — время ожидания, преобразование которого задается последним равенством. Следовательно,

$$W^*(s) = E[e^{-\bar{sw}}] = 1 - \rho + \frac{\lambda [1 - G^*(s)]}{s + \lambda - \lambda G^*(s)}, \quad ■ \quad (3.24)$$

что как раз и является искомым результатом. Отметим, что он значительно отличается от преобразованного уравнения Поллячека — Хинчина (1.85) для системы с ОПП. В задаче 3.4 проводится сравнение среднего времени и дисперсии времени ожидания для этих двух систем. Можно видеть, что, как указывалось выше, первые моменты в обоих случаях равны, а дисперсия при обслуживании в обратном порядке больше, чем при обслуживании в порядке поступления.

Рассмотрим теперь случай *внешних* приоритетов.

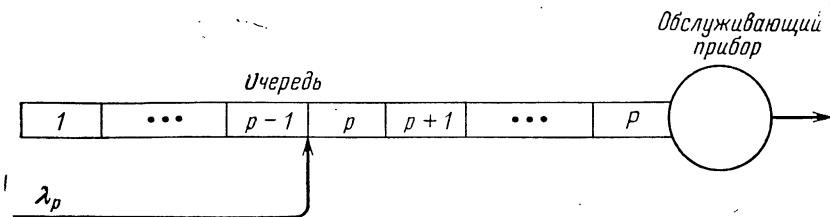
3.6. ОБСЛУЖИВАНИЕ В ПОРЯДКЕ ПРИОРИТЕТА

Среди дисциплин обслуживания, устанавливающих *внешние* приоритеты для поступающих требований, обслуживание в порядке приоритета (head-of-the line priority)¹¹ является, по-видимому, наиболее общим и наиболее естественным. Система с таким обслуживанием, которая впервые была исследована Кобхэмом в 1954 г. [8], известна также под названием СМО со строгими, или фиксированными, приоритетами. Структура такой системы показана на фиг. 3.2. В этой СМО требования устанавливаются в очереди в соответствии с их приоритетами и строго разделяются на этой основе на соответствующие классы. Таким образом, требование, поступающее из приоритетного класса p , присоединяется к требованиям своего класса и становится за всеми требованиями из класса p (и выше) и перед всеми требованиями из класса $p-1$ (и ниже). Значение приоритета требования в этом случае остается постоянным во времени, и, таким образом, можно определить приоритетную функцию в виде

$$q_p(t) = p. \quad (3.25)$$

Чтобы определить среднее время ожидания W_p для требований из приоритетного класса p в случае СМО с относительным приоритетом и обслуживанием в порядке приоритета, воспользуемся ме-

¹¹ Смысъ этого термина состоит в том, что устанавливаемый порядок обслуживания требований может отличаться от порядка их поступления (обслуживание в порядке *установленной* очереди, а не в порядке поступления). В изданных до сих пор переводах книг по теории массового обслуживания на русский язык (см., например, [21]) рассматриваемый термин переводился просто как «относительный приоритет». Здесь, однако, приходится отступить от такой традиции, так как в данном разделе рассматривается как относительный (relative), так и абсолютный приоритет. — Прим. перев.



Фиг. 3.2. СМО с обслуживанием в порядке приоритета.

тодом, изложенным в разд. 3.2. В качестве исходного используем равенство (3.11). Нужно вычислить две функции \bar{N}_{ip} и \bar{M}_{ip} , описывающие среднее число требований из приоритетного класса i , которые обслуживаются перед меченым требованием (из класса p) и стоят в очереди в момент его поступления (\bar{N}_{ip}) или поступили в нее во время пребывания меченого требования в очереди (\bar{M}_{ip}). В соответствии со строгим порядком установления требований в очередь и предположением, что внутри приоритетного класса требования обслуживаются в порядке поступления, имеем

$$\bar{N}_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$\bar{M}_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Все требования из класса p и выше, находящиеся в очереди в момент поступления меченого требования, очевидно, должны быть обслужены перед ним. Из формулы Литтла известно, что в среднем в очереди в момент поступления меченого требования находится $\lambda_i W_i$ требований из класса i , и, следовательно,

$$\bar{N}_{ip} = \lambda_i W_i, \quad i = p, p+1, \dots, P. \quad (3.26)$$

Аналогично все требования из классов $p+1, p+2, \dots, P$, которые поступают в систему, когда меченое требование находится в очереди, также обслуживаются перед ним. Так как меченое требование находится в очереди в среднем W_p секунд и процесс поступления требований каждого класса не зависит от длины очереди, в среднем за время ожидания меченого требования поступит $\lambda_i W_p$ требований из класса i . Следовательно,

$$\bar{M}_{ip} = \lambda W_p, \quad i = p+1, p+2, \dots, P. \quad (3.27)$$

Таким образом, в случае СМО с относительным приоритетом и обслуживанием в порядке приоритета равенство (3.11) принимает вид

$$W_p = W_0 + \sum_{i=p}^P \bar{x}_i \lambda_i W_i + \sum_{i=p+1}^P \bar{x}_i \lambda_i W_p, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (3.28)$$

С помощью простых рассуждений мы получили систему уравнений с неизвестными W_p . Решая (3.28) относительно W_p , получаем

$$W_p = \frac{W_0 + \sum_{i=p+1}^P \rho_i W_i}{1 - \sum_{i=p}^P \rho_i}, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (3.29)$$

Эта система уравнений без труда может быть решена рекуррентно, так как она является треугольной, т. е. сначала находится W_p , затем W_{p-1} и т. д. Удобно определить

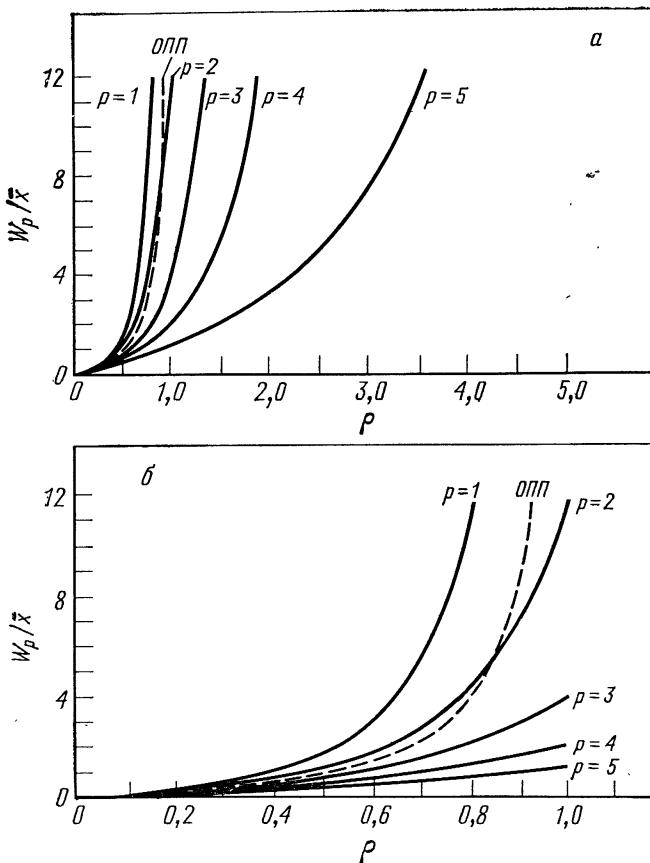
$$\sigma_p = \sum_{i=p}^P \rho_i. \quad (3.30)$$

Решая (3.29) рекуррентно, получаем

$$W_p = \frac{W_0}{(1 - \sigma_p)(1 - \sigma_{p+1})}, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad ■ (3.31)$$

Последнее равенство является одним из важнейших результатов работы [8]. Оно наводит на важные размышления. Так, мы видим, что влияние требований равного или более высокого приоритета, находящихся в очереди в момент поступления рассматриваемого требования, учитывается выражением $(1 - \sigma_p)$ в знаменателе, а влияние требований более высокого приоритета, поступающих во время пребывания рассматриваемого требования в очереди, — выражением $(1 - \sigma_{p+1})$ в знаменателе. Кроме того, мы замечаем, что W_p не зависит от требований низших приоритетных классов (т. е. из классов $i = 1, 2, \dots, p-1$) иначе, как через числитель W_0 . Таким образом, решение (3.31) показывает, что W_p могут быть конечными (при p , больших или равных некоторому критическому значению) и принимать нестабильные (неограниченные) значения (для низших приоритетных классов)¹⁾. На фиг. 3.3, а показаны такие смешанные (стабильно-нестабильные) характеристики для СМО с $P=5$ классами. Здесь представлено нормированное время ожидания W_p/x , поскольку такая безразмерная форма является более удобной. Штриховая кривая, представляющая среднее время ожидания в системе с обслуживанием в порядке поступления, иллюстрирует закон сохранения [см. (3.16)]. Эта кривая построена по формуле (3.18). Те же кривые изображены на фиг. 3.3, б в увеличенном масштабе. Здесь можно видеть, как действует закон сохранения. В частности, если измерить эти кривые, станет ясно, что

¹⁾ Заметим, что требование из класса p имеет конечное среднее время ожидания при $\rho < 1 + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho P_{p-1}$.



Фиг. 3.3. Обслуживание в порядке приоритетов в случае относительных приоритетов ($P=5$, $\lambda_p = \lambda/5$, $x_p = x$).

$\sum_p (\rho_p / \rho) W_p = W_0 / (1 - \rho)$; при $\rho > 1$ это среднее значение стремится к бесконечности.

При помощи метода, описанного в разд. 3.3, можно найти распределение времени ожидания для каждого приоритетного класса. Обозначим преобразование Лапласа времени ожидания в очереди для требований из класса p через $W_p^*(s)$. Тогда решение будет иметь вид [10, 24]

$$W_p^*(s) = \frac{(1-\rho) [s + \lambda_H - \lambda_H G_H^*(s)] + \lambda_L [1 - B_L^*(s + \lambda_H - \lambda_H G_H^*(s))] }{s - \lambda_p + \lambda_p B_p^*(s + \lambda_H - \lambda_H G_H^*(s))}, \quad (3.32)$$

где

$$\lambda_H = \sum_{i=p+1}^P \lambda_i, \quad (3.33)$$

$$\lambda_L = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i, \quad (3.34)$$

$$B_H^*(s) = \sum_{i=p+1}^P \frac{\lambda_i}{\lambda_H} B_i^*(s), \quad (3.35)$$

$$B_L^*(s) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_L} B_i^*(s), \quad (3.36)$$

$$G_H^*(s) = B_H^*(s + \lambda_H - \lambda_H G_H^*(s)), \quad (3.37)$$

и, конечно, обычное обозначение $B_i^*(s)$ соответствует преобразованию Лапласа ПРВ времени обслуживания требований из класса i . В этих обозначениях индекс H относится к множеству приоритетных классов, более высоких по отношению к классу меченого требования, а индекс L — к множеству более низких классов. Отметим, что определение (3.37) является таким же, как и функциональное уравнение (3.14); кроме того, выражение для $W_p^*(s)$ удивительно похоже на преобразованное уравнение Поллячека—Хинчина для времени ожидания в системе с обслуживанием в порядке поступления. В частности, заметим, что в случае $P=1$ справедливы соотношения $\lambda_H = \lambda_L = B_H^*(s) = B_L^*(s) = G_H^*(s) = 0$ и $\lambda_p = \lambda$ и тогда $W_1^*(s)$ сводится, как и следовало ожидать, к преобразованному уравнению Поллячека—Хинчина для системы с обслуживанием в порядке поступления. С помощью равенства (3.32) можно расчитать среднее время ожидания (3.31) путем дифференцирования.

Так как требования из различных приоритетных классов получают обслуживание разного качества и могут иметь различные распределения времени обслуживания, они дискриминируются на практике по (распределению) времени обслуживания. Таким образом, когда закон сохранения определено выполняется, распределение числа требований в системе будет отличаться от распределения требований при обслуживании в порядке поступления. Попытаемся дискриминировать требования только на основе *точно известного* времени обслуживания. Это можно выполнить при помощи введенной здесь модели обслуживания в порядке приоритетов. В частности, существует дисциплина приоритетного обслуживания, при которой наивысший приоритет предоставляется таким требованиям, которые имеют самое короткое время обслуживания. Эта дисциплина рассматривается в работе [34], где континuum приоритетных классов определяется таким образом, что

индекс класса p является какой-либо строго убывающей функцией времени обслуживания \tilde{x} . Итак, получается модель, в которой поступающие требования с временем обслуживания, точно равным x секунд, устанавливаются в очереди позади всех других требований, имеющих время обслуживания, меньшее (или равное) x , и впереди всех требований с временем обслуживания, большим x (заметим, что в случае, когда ПРВ общего времени обслуживания имеет импульсы, любая конкуренция требований разрешается на основе порядка поступления). Такой является $M/G/1$, в которой предполагается, что время обслуживания требований выбирается в соответствии с распределением $B(x)$ до их поступления, и, следовательно, они могут быть установлены в очередь сразу же при их поступлении, как описано выше. Требования, время обслуживания которых попадает в интервал $x < \tilde{x} < x + dx$, объединяются в один приоритетный класс, и плотность распределения времени обслуживания, связанная с этим классом, представляет собой просто единичный импульс в точке, соответствующей x секунд обслуживания. Конечно, доля требований, попадающих в этот класс, равна $b(x)dx$, и эта величина является бесконечно малой, если $B(x)$ не имеет разрыва в точке x . Такова природа континуума приоритетных классов. Вычислим теперь среднее время ожидания $W(x)$ для требования, время обслуживания которого лежит в интервале $(x, x + dx)$. Напомним, что приоритетный индекс p является строго убывающей функцией времени обслуживания \tilde{x} . Следовательно, в пределе равенство (3.30) принимает вид

$$\sum_{i=p}^P \rho_i \longrightarrow \int_0^{x^+} \rho(y) dy,$$

где $\rho(x) = \lambda(x)x$ и $\lambda(x) = \lambda b(x)$. Это точное выражение для ρ , так как среднее время обслуживания таких требований точно составляет x секунд, а интенсивность их поступления равна $\lambda dB(x)/dx$. Таким образом, равенство (3.31) в пределе принимает следующий вид:

$$W(x) = \frac{W_0}{[1 - \lambda \int_0^{x^-} y b(y) dy] [1 - \lambda \int_0^{x^+} y b(y) dy]}.$$
■ (3.38)

Заметим, что, когда функция $B(x)$ непрерывна в точке x , знаменатель становится равным $[1 - \lambda \int_0^x y b(y) dy]^2$. Здесь, как и в дискретном случае, полученное решение применимо только для тех приоритетных классов, которые имеют конечное среднее время

ожидания. Таким образом, равенство (3.38) дает для требования с временем обслуживания x среднее время ожидания при дисциплине первоочередного обслуживания самых коротких требований. Заметим, что для требования с очень большим временем обслуживания $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = W_0/(1-\rho)^2$, а для требования с очень малым временем обслуживания $\lim_{x \rightarrow 0} W(x) = W_0$.

Рассмотрим теперь систему с абсолютными приоритетами и обслуживанием в порядке приоритета. Будем предполагать, что это абсолютные приоритеты с дообслуживанием. В таком случае подход во многом подобен подходу, описанному в разд. 3.2, и состоит в следующем. Обозначив, как и ранее, через T_p среднее общее время пребывания в системе меченого требования из класса p , заметим, что его средняя задержка состоит из трех составляющих: первая составляющая — это среднее время обслуживания \bar{x}_p , вторая — задержка из-за обслуживания тех требований равного или более высокого приоритета, которые данное требование застало в системе. Согласно законам сохранения, меченое требование застает в среднем работу, равную $(\sum_{i=p}^P \lambda_i \bar{x}_i^2 / 2) / (1 - \sigma_p)$, которая должна быть выполнена до того, как это требование поступит на обслуживание. [Средняя задолженность в работе равна среднему времени ожидания в системе $M/G/1$, и, таким образом, этот член равен выражению $W_0/(1-\rho)$ для системы, в которую поступают только требования из классов $p, p+1, \dots, P$. Остальные классы остаются для меченого требования незамечеными!] Третья составляющая средней задержки меченого требования представляет собой задержку за счет любых требований, поступающих в систему до ухода меченого требования и принадлежащих строго более высоким приоритетным классам. Среднее число таких требований из класса i равно $\lambda_i T_p$, и каждое из них задерживает меченое требование в среднем на \bar{x}_i секунд. Таким образом, можно утверждать, что

$$T_p = \bar{x}_p + \frac{\sum_{i=p}^P \lambda_i \bar{x}_i^2 / 2}{1 - \sigma_p} + \sum_{i=p+1}^P \rho_i T_p.$$

Следовательно, решение для T_p имеет вид

$$T_p = \frac{\bar{x}_p(1 - \sigma_p) + \sum_{i=p}^P \lambda_i \bar{x}_i^2 / 2}{(1 - \sigma_p)(1 - \sigma_{p+1})}. \quad \blacksquare \quad (3.39)$$

Сформулируем теперь интересную задачу оптимизации, решение которой входит в круг рассматриваемых вопросов. При назна-

чении требованиям внешних приоритетов представляется естественным руководствоваться некоторыми правилами. Рассмотрим случай относительных приоритетов. Предположим, что стоимость использования системы равна C_p долларов за каждую секунду задержки, допускаемой для требований из приоритетного класса p . Ясно, что средняя стоимость на секунду для системы, которую обозначим через C , равна

$$C = \sum_{p=1}^P C_p \bar{N}_p,$$

где \bar{N}_p — среднее число требований из класса p в системе. Из формулы Литтла известно, что независимо от дисциплины обслуживания выполняются равенства $\bar{N}_p = \lambda_p T_p = \lambda_p [W_p + \bar{x}_p]$ и, следовательно, справедливо соотношение

$$C = \sum_{p=1}^P \rho_p C_p + \sum_{p=1}^P C_p \lambda_p W_p. \quad (3.40)$$

Необходимо найти такую (сохраняющую работу) дисциплину обслуживания с относительным приоритетом, которая минимизирует C . Решим эту задачу для системы M/G/1 с P приоритетными классами, средней интенсивностью поступления λ_p требований из класса p в секунду и распределением времени обслуживания требований из класса p , задаваемым функцией $B_p(x)$. Перенесем *постоянную* сумму в равенстве (3.40) в его левую часть:

$$C - \sum_{p=1}^P \rho_p C_p = \sum_{p=1}^P (C_p / \bar{x}_p) (\rho_p W_p).$$

Задача состоит в минимизации суммы в правой части этого равенства путем соответствующего выбора дисциплины обслуживания. Пусть $f_p = C_p / \bar{x}_p$ (заданная величина) и $g_p = \rho_p W_p$ (переменная величина, изменяющаяся в зависимости от W_p). Нужно найти минимум суммы произведений $\sum_{p=1}^P f_p g_p$. Однако из закона сохранения, определяемого равенством (3.16), известно, что

$$\sum_{p=1}^P g_p = \text{const} \quad (\text{по отношению к дисциплине обслуживания}). \quad (3.41)$$

Иначе говоря, нужно минимизировать площадь под кривой произведения двух функций, площадь под кривой одной из которых постоянна. Теперь если изменить порядок индексов так, чтобы

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_P, \quad (3.42)$$

то можно увидеть, что оптимальный путь подбора g_p для f_p [при ограничении, выражаемом условием (3.41)] состоит в выборе как можно меньшей «массы» для g_p , соответствующей наибольшей величине f_p . После этого необходимо выбрать как можно меньшую оставшуюся массу для g_{p-1} , соответствующей наибольшей из оставшихся величин f_{p-1} , и т. д. Теперь из определения ($g_p = \rho_p W_p$) видно, что, поскольку ρ_p является заданной постоянной, можно минимизировать g_p путем минимизации W_p . Сохраняющая работу дисциплина с относительным приоритетом, которая минимизирует W_p , — это дисциплина обслуживания в порядке приоритета с высшим приоритетным классом P (как обычно). Выполнив такую минимизацию, можно минимизировать W_{p-1} , сделав этот класс вторым по важности в системе обслуживания в порядке приоритета и т. д. Таким образом, *решение рассматриваемой задачи оптимизации состоит в том, что из всех возможных сохраняющих работу дисциплин обслуживания с относительным приоритетом обслуживание в порядке приоритета с упорядочением (3.42)¹⁾ является дисциплиной, минимизирующей среднюю стоимость* (3.40). При получении этого результата использовался закон сохранения, но можно дать другое прямое доказательство [11], при котором рассматриваются только стационарные дисциплины, представляющие собой достаточный класс (последнее показано в работе [33]). Удивительно, что получение такого результата возможно и притом так просто.

3.7. ПРИОРИТЕТЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

Смысл назначения приоритетов поступающим требованиям состоит в обеспечении льготной обработки требований с высоким приоритетом за счет требований с низким приоритетом. Выше было показано, что в случае линейной стоимостной функции система с обслуживанием в порядке приоритетов является оптимальной в смысле минимизации средней (линейной) стоимости. Однако линейная стоимостная функция не всегда оказывается пригодной, а фактическая стоимостная функция часто бывает неизвестна. Несмотря на это, на практике встречается очень много примеров СМО с приоритетами, в которых решения принимаются в зависимости от соответствующих желаемых относительных характеристик приоритетных классов (и в которых, следовательно, подразумеваются некоторые стоимостные функции, которые могут быть неизвестны для клиентов или для системы). Например, в большинстве военных систем применяется обслуживание в порядке приоритета и с абсолютным приоритетом. Общее число приоритетных

¹⁾ Полагая $\bar{x}_p = 1/\mu_p$, получим $f_p = \mu_p C_p$. Поэтому это оптимальное упорядочение называют «правилом μC ».

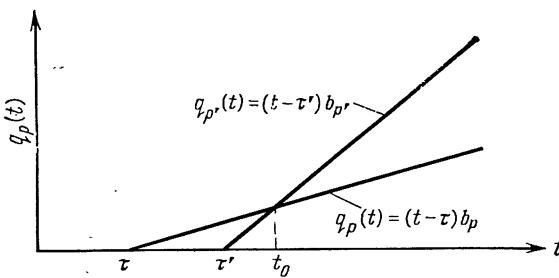
классов в этих системах равно четырем или пяти. Другой пример — обслуживание автомобилей на станции обслуживания, где механик выбирает среди автомобилей, ожидающих обслуживания, те, которые требуют, например, самого непродолжительного (или, может быть, самого дорогого) обслуживания. Поэтому нередко определяют не стоимостную функцию, а относительное время ожидания требований различных приоритетных классов. Например, перед проектировщиком системы может быть поставлена задача — синтезировать дисциплину обслуживания, при которой желааемая характеристика задается в виде отношений W_{p+1}/W_p ($p=1, 2, \dots, P-1$). Таким образом, проектировщик должен добиваться получения этого отношения при данных свойствах требований [т. е. предполагается, что имеется система $M/G/1$ с заданными λ_p , x_p и $B_p(x)$]. Тем самым заданы также величины ρ_p , σ_p и W_0 [фактически задавать функцию $B_p(x)$ не требуется, а для определения указанных трех параметров нужны только \bar{x}_p и \bar{x}^2_p]. Следовательно, при обслуживании в порядке приоритета из равенства (3.31) характеристика W_p определяется полностью и, следовательно, находится отношение W_{p+1}/W_p . К сожалению, это фиксирует систему и в общем случае для системы с обслуживанием в порядке приоритета все указанные отношения независимо выбираться не могут!

Таким образом, для удовлетворения поставленных условий в рассматриваемую систему приоритетов необходимо ввести некоторые добавочные степени свободы. Описываемая ниже СМО с приоритетами, зависящими от времени, дает ряд переменных параметров b_p , где $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_p$. Эти параметры находятся в распоряжении проектировщика при подборе величин относительного времени ожидания [26, 27].

Предположим, что некоторое меченое требование поступает в момент τ и получает в момент t приоритет $q_p(t)$, определяемый при помощи равенства

$$q_p(t) = (t - \tau)b_p,$$

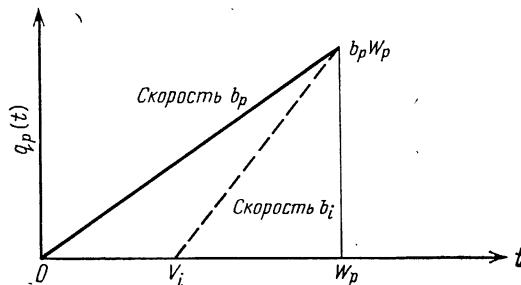
где t изменяется от τ до момента окончания обслуживания этого требования. Рассмотрим следующую систему с относительными приоритетами. Всякий раз, когда обслуживающий прибор готов к приему нового требования, в него поступает требование с наивысшим мгновенным приоритетом $q_p(t)$ [т. е. в момент t требование с приоритетом $q'(t)$ получает преимущество перед требованием с приоритетом $q(t)$, где $q'(t) > q(t)$]. Конкуренция, возникающая между требованиями наивысшего приоритета, разрешается на основе порядка поступления. Заметим, что требования из более высокого приоритетного класса наращивают приоритет с большей скоростью (b_p), чем требования из более низких приоритетных классов.



Фиг. 3.4. Взаимодействие между приоритетными функциями для СМО с приоритетами, зависящими от времени.

На фиг. 3.4 показан пример того, как такая структура приоритетов допускает взаимодействие приоритетных функций двух требований. В частности, в момент τ поступает требование из класса p , приоритет которого растет со скоростью b_p . В момент τ' поступает другое требование из более высокого класса p' , т. е. $p' > p$. Когда обслуживающий прибор становится свободным, из очереди для обслуживания выбирается требование с наивысшим мгновенным приоритетом. Следовательно, в рассматриваемом примере первое требование будет иметь преимущество перед вторым, если обслуживающий прибор освободится в любой момент между τ и t_0 (несмотря на то, что первое требование принадлежит более низкому приоритетному классу); но в любой момент после t_0 предпочтение будет отдано второму требованию, а не первому.

Исследуем эту систему при показательных продолжительностях обслуживания. При использовании метода, описанного в разд. 3.2, непосредственно возникает необходимость расчета величин \bar{N}_{ip} и \bar{M}_{ip} . Начнем с расчета \bar{M}_{ip} и обратимся к фиг. 3.5. Очевидно, что $\bar{M}_{ip} = 0$ при $i \leqslant p$, так как никакое последующее требование с меньшей (или равной) скоростью роста приоритета никогда не сможет



Фиг. 3.5. График приоритета $q_p(t)$, используемый для получения \bar{M}_{ip} .

«догнать» меченое требование. Рассмотрим теперь поступление требования класса p (меченого требования) в момент 0. Так как его среднее время пребывания в очереди равно W_p , среднее значение приоритета, достигнутого за среднее время до начала обслуживания, равно $b_p W_p$ (фиг. 3.5). Вычисляя \bar{M}_{ip} , необходимо найти, сколько в среднем поступает требований из класса i (при $i > p$) после момента 0, которые достигают приоритета, по крайней мере $b_p W_p$, до истечения времени W_p . Из фигуры легко видеть, что требования из класса i , которые поступают в промежутке времени $(0, V_i)$, удовлетворяют этим условиям. Вычислим величину V_i . Очевидно, что

$$b_p W_p = b_1 (W_p - V_i)$$

и, таким образом,

$$V_i = W_p \left(1 - \frac{b_p}{b_i} \right).$$

Следовательно, при интенсивности λ_i входящего потока для требований i -го класса находим

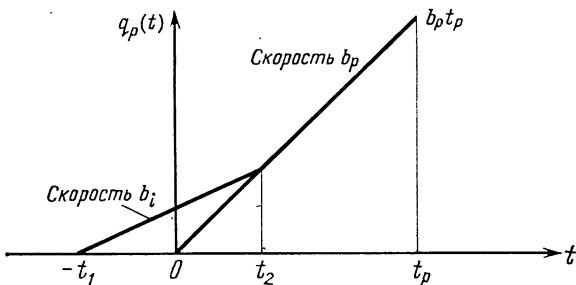
$$\bar{M}_{ip} = \lambda_i V_i$$

и, таким образом,

$$\bar{M}_{ip} = \lambda_i W_p \left(1 - \frac{b_p}{b_i} \right) \text{ для всех } i > p. \quad (3.43)$$

Докажем теперь, что при $i \leq p$ имеет место равенство $\bar{N}_{ip} = \lambda_i W_p (b_i / b_p)$. Рассмотрим опять меченое требование из класса p , поступающее в момент $\tau=0$ и находящееся в очереди в течение времени t_p . Его приоритет, достигнутый к моменту поступления в обслуживающий прибор, будет равен $b_p t_p$ (фиг. 3.6). При поступлении меченое требование застает в очереди n_i требований из класса i . Рассмотрим одно из таких требований класса i , показанное на фиг. 3.6, которое поступает в момент $t = -t_1$. Для определения \bar{N}_{ip} необходимо вычислить число требований из класса i , которые поступают до момента $t=0$, в момент $t=0$ находятся еще в очереди и получают обслуживание раньше меченого требования. Из фиг. 3.6 видно, что требование из класса i , которое поступает в момент $-t_1$ ($t_1 > 0$) и ожидает в очереди в течение времени $w_i = w_i(t_1)$, $t_1 < w_i(t_1) \leq t_1 + t_2$, будет удовлетворять этим условиям. Очевидно, что $w_i(t_1)$ не должно превышать $t_1 + t_2$, так как иначе требование из класса i имело бы более низкий приоритет по сравнению с меченым требованием и, следовательно, не удовлетворяло бы условиям, указанным выше. Определим t_2 . Очевидно, что

$$b_p t_2 = b_i (t_1 + t_2)$$



Фиг. 3.6. График приоритета $q_p(t)$, используемый для получения \bar{N}_{ip} .

и, следовательно,

$$t_2 = \left(\frac{b_i}{b_p - b_i} \right) t_1$$

или

$$t_1 + t_2 = \left(\frac{b_p}{b_p - b_i} \right) t_1. \quad (3.44)$$

Таким образом, математическое ожидание \bar{N}_{ip} числа требований из класса i , находящихся в очереди в момент $t=0$ и получающих обслуживание раньше меченого требования, может быть выражено в виде

$$\bar{N}_{ip} = \int_0^{\infty} \lambda_i P \left\{ t < w_i(t) \leq \left(\frac{b_p}{b_p - b_i} \right) t \right\} dt, \quad (3.45)$$

где $\lambda_i dt$ — математическое ожидание числа поступающих требований из класса i в промежутке времени $\{-t-dt, -t\}$, а $P\{t < w_i(t) \leq [b_p/(b_p - b_i)]t\}$ — вероятность того, что требование, поступающее в этом промежутке, находится в очереди самое меньшее t и самое большее $[b_p/(b_p - b_i)]t$ секунд. Равенство (3.45) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \bar{N}_{ip} &= \lambda_i \int_0^{\infty} [1 - P(w_i \leq t)] dt - \\ &- \lambda_i \int_0^{\infty} \left[1 - P \left\{ w_i \leq \left(\frac{b_p}{b_p - b_i} \right) t \right\} \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \lambda_i \int_0^\infty \left[1 - P(w_i \leq t) \right] dt - \lambda_i \left[1 - \left(\frac{b_i}{b_p} \right) \right] \int_0^\infty [1 - P(w_i \leq y)] dy,$$

где произведена замена переменной $y = \left(\frac{b_p}{b_p - b_i} \right) t$. Далее, так как

$$E[w_i] = \int_0^\infty [1 - P(w_i \leq x)] dx$$

(w_i — неотрицательная случайная величина) и в принятых обозначениях $W_i = E[w_i]$, получаем

$$\bar{N}_{ip} = \lambda_i W_i - \lambda_i \left(1 - \frac{b_i}{b_p} \right) W_i;$$

следовательно,

$$\bar{N}_{ip} = \lambda_i W_i \frac{b_i}{b_p} \quad \text{для всех } i \leq p. \quad (3.46)$$

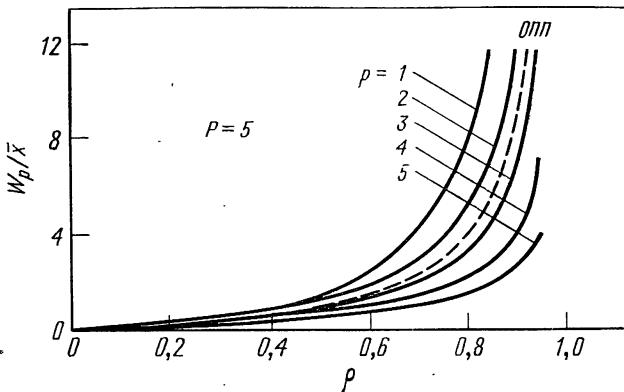
Кроме того, из равенства (3.26) видно, что $\bar{N}_{ip} = \lambda_i W_i$ при $i \geq p$, поскольку рассматриваемое меченое требование никогда не сможет догнать эти требования из более высокого класса (все они присутствуют при его поступлении).

Получив выражения для \bar{N}_{ip} и \bar{M}_{ip} , можно подставить их в равенство (3.11), что дает

$$W_p = \frac{W_0 + \sum_{i=p}^P \rho_i W_i + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i (b_i/b_p)}{1 - \sum_{i=p+1}^P \rho_i [1 - (b_p/b_i)]}, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (3.47)$$

Эта система P линейных уравнений при неизвестных W_p достаточна для решения поставленной задачи. Однако из этой системы с помощью закона сохранения (3.16) можно построить гораздо более простую треугольную систему уравнений. В частности, первую сумму в числителе (3.47) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=p}^P \rho_i W_i = \frac{\rho W_0}{1 - \rho} - \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i.$$



Фиг. 3.7. W_p/\bar{x} для СМО с относительными приоритетами, зависящими от времени ($P=5$, $\lambda_p=\lambda/5$, $x_p=x$).

Подставив это выражение в (3.47), получим

$$W_p = \frac{[W_0/(1-\rho)] - \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i [1 - (b_i/b_p)]}{1 - \sum_{i=p+1}^P \rho_i [1 - (b_p/b_i)]}, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad \blacksquare \quad (3.48)$$

Это главный результат для рассматриваемой дисциплины обслуживания с относительным приоритетом, зависящим от времени. Интересно, что зависимость \bar{W}_p от параметров b_i чрезвычайно простая: эти параметры входят в (3.48) только в виде отношений [26, 27].

Типичная характеристика такой зависящей от времени дисциплины обслуживания показана на фиг. 3.7. Штриховая кривая относится к системе обслуживания в порядке поступления и опять иллюстрирует действие закона сохранения на дисциплины обслуживания с приоритетами.

Таким образом, была проанализирована дисциплина обслуживания, допускающая свободный выбор системы параметров b_p/b_{p+1} , которые могут использоваться для удовлетворения конкретных требований к характеристикам системы, заданным в виде отношений W_p/W_{p+1} при $p=1, 2, \dots, P-1$. Как видно, могут быть заданы только $P-1$ таких отношений, и имеется точно столько же степеней свободы при удовлетворении этих условий. P -е условие задается как нормирующий множитель (т. е. закон сохранения) для всех времен ожидания и, конечно, является коэффициентом использу-

зования системы. Ясно также, что W_p для этого класса систем никогда не окажется ниже соответствующей кривой для системы с обслуживанием в порядке приоритета вследствие того, что наибольшее предпочтение при обслуживании в порядке приоритета отдается высшему приоритетному классу.

Естественным обобщением этой дисциплины является такая дисциплина, при которой приоритет требования возрастает пропорционально некоторой *произвольной степенной функции* времени ожидания, а не линейной, как рассматривалось выше [30]. Обратимся теперь к этому обобщению. Определим для любого неотрицательного числа r зависящую от времени дисциплину обслуживания r -го порядка как дисциплину, при которой приоритет $q_p^{(r)}(t)$ в момент времени t для требования, поступающего в момент τ , задается равенством

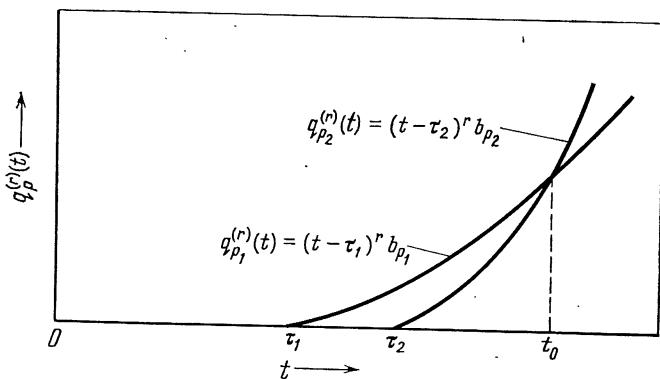
$$q_p^{(r)}(t) = (t - \tau)^r b_p.$$

Затем определим $W_p^{(r)}$ как среднее время пребывания в очереди системы r -го порядка для требования из класса p .

Взаимоотношение требований из различных приоритетных классов иллюстрируется на фиг. 3.8. Так же как и в случае $r=1$, относительные положения требований в очереди могут меняться. Следует заметить, что может произойти самое большое *одна* перестановка двух требований и именно это упрощает анализ.

Рассмотрим две обобщенные СМО с приоритетами, зависящими от времени, одну порядка r с набором параметров $\{b_p\}$ и другую порядка r' с набором параметров $\{b'_p\}$. В задаче 3.14 требуется доказать, что если подобрать параметры в соответствии с равенством

$$\left(\frac{b_p}{b_{p+1}}\right)^{1/r} = \left(\frac{b'_p}{b'_{p+1}}\right)^{1/r'}, \quad p=1, 2, \dots, P-1, \quad (3.49)$$



Фиг. 3.8. Взаимоотношение требований из различных приоритетных классов.

то

$$W_p^{(r)} = W_p^{(r')}. \quad (3.50)$$

Таким образом, все СМО r -го порядка можно описать (в смысле средних времен ожидания) с помощью системы порядка r_0 (при любом $r_0 > 0$), если изменить параметры в соответствии с равенством (3.49). Случай $r_0 = 1$ уже рассматривался выше. Для получения W_p^r обратимся к указанным выражениям (см. задачу 3.14) и получим главный результат: для СМО r -го порядка с зависящим от времени относительным приоритетом и $0 \leq \rho < 1$

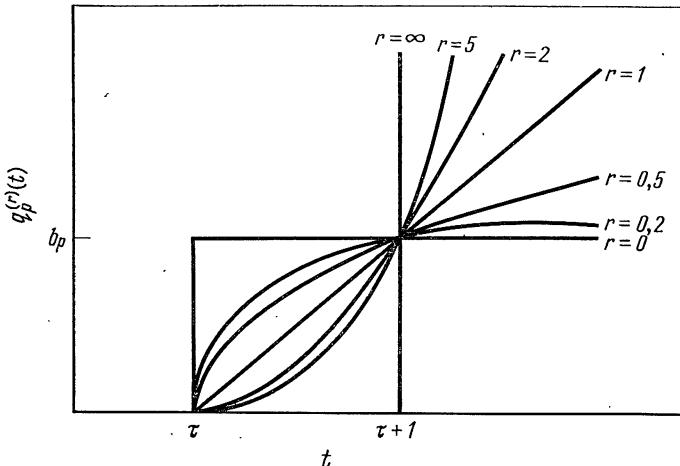
$$W_p^{(r)} = \frac{[W_0/(1-\rho)] - \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i [1 - (b_i/b_p)^{1/r}]}{1 - \sum_{i=p+1}^P \rho_i [1 - (b_p/b_i)^{1/r}]}, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (3.51)$$

Это выражение по существу имеет тот же вид, что и при $r=1$. Кроме того, из равенства (3.50) видно, что не получается никакого большего обобщения для W_p с произвольным r , так как все они эквивалентны приведенному выше результату для $r=1$.

Однако при помощи этого обобщения можно проникнуть в сущность явления. На фиг. 3.9 графически представлена функция $q_p^{(r)}(t)$ для требования, поступающего в момент времени τ , при параметре r . Можно видеть, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} q_p^{(r)}(t) = b_p u_{-1}(t - \tau), \quad (3.52)$$

где $u_{-1}(t - \tau)$ — единичная ступенчатая функция в точке τ . Таким образом, при $r=0$ поступающее требование из класса p получает фиксированное значение приоритета, равное b_p . Это соответствует исследованному выше случаю системы с обслуживанием в порядке приоритета. Кроме того, при $r \rightarrow \infty$ в момент $\tau + 1$ функция $q_p^{(r)}(t)$ становится ступенчатой функцией бесконечной высоты. Таким образом, требования, которые находятся в системе более 1 с, имеют бесконечный приоритет, а требования, находящиеся в системе менее 1 с, имеют нулевой приоритет. Принимая во внимание, что при разрешении конкурентной ситуации используется критерий порядка поступления, получаем, что в пределе, когда r стремится к бесконечности, систему можно рассматривать как систему с обслуживанием в порядке поступления. Эти два предельных случая также могут быть получены при следующем предель-

Фиг. 3.9. Функция $q_p^{(r)}(t)$ для некоторых r .

ном переходе для $W_p^{(r)}$. Из равенства (3.51) при $b_p < b_{p+1}$ ($p = 1, 2, \dots, P-1$) находим

$$\lim_{r \rightarrow 0} W_p^{(r)} = \lim_{(b_p/b_{p+1})^{1/r} \rightarrow 0} W_p^{(r)} = \frac{W_0/(1-\rho) - \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i}{1 - \sum_{i=p+1}^P \rho_i}.$$

Рекуррентное решение последней системы уравнений дает

$$\lim_{r \rightarrow 0} W_p^{(r)} = \frac{W_0}{(1 - \sum_{i=p}^P \rho_i)(1 - \sum_{i=p+1}^P \rho_i)}, \quad (3.53)$$

что представляет собой результат, который был получен для обслуживания в порядке приоритета. Заметим также, что $\lim_{r \rightarrow \infty} (b_p/b_{p+1})^{1/r} = 1$ и, таким образом,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W_p^{(r)} = \frac{W_0}{1 - \rho} \quad (3.54)$$

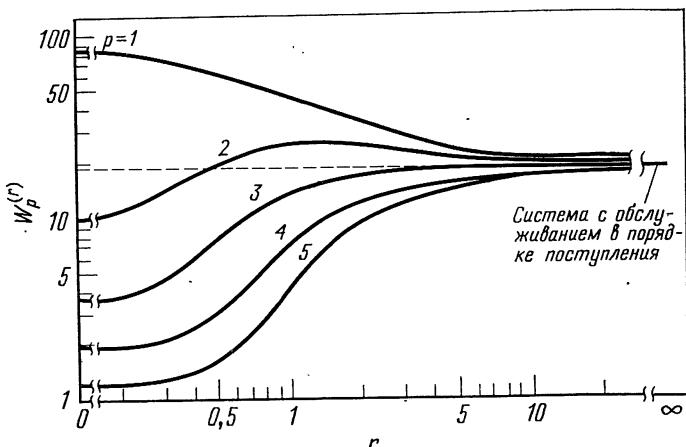
в случае обслуживания в порядке поступления.

Рассмотрим теперь случай фиксированных $\{b_p\}$ и выявим зависимость $W_p^{(r)}$ от r . Как указывалось выше, при $r \rightarrow 0$ имеем систему с обслуживанием в порядке приоритета, а при $r \rightarrow \infty$ — систему

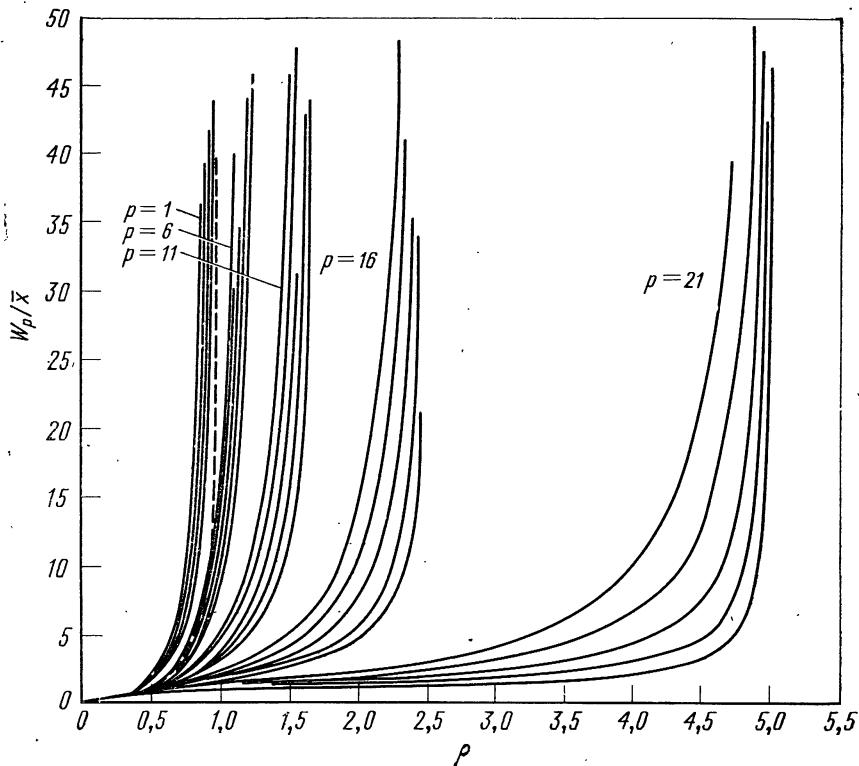
с обслуживанием в порядке поступления. При $r=1$ получается зависящая от времени система первого порядка. На фиг. 3.10 показано общее поведение среднего времени пребывания в очереди в зависимости от приоритетной дисциплины в классе систем r -го порядка при $0 \leq r$. Здесь приведен случай, когда $P=5$, $b_p/b_{p+1}=1/2$, $\rho_p=\rho/5$, $x_p=x$ при $p=1, 2, \dots, 5$, $\rho=0,95$ и $W_0=1$. Штриховой линией представлен закон сохранения для этого конкретного случая. Большой разброс $W_p^{(r)}$ в зависимости от приоритетных классов объясняется большим значением $\rho=0,95$, при котором возникает значительная конкуренция между требованиями. Для меньших значений ρ разброс не столь велик. Однако, как было показано, относительные времена ожидания могут быть отрегулированы путем изменения r при данных $\{b_p\}$; кроме того, при данном r изменением $\{b_p\}$ достигается регулировка относительных времен ожидания.

Интересно, что класс СМО с зависящими от времени приоритетами r -го порядка перекрывает диапазон дисциплин обслуживания от дисциплины, различающей приоритетные классы в наибольшей степени (т. е. дисциплины обслуживания в порядке приоритета), до дисциплины, которая не различает их совсем (т. е. дисциплины обслуживания в порядке поступления).

Сравнивая характеристики системы с обслуживанием в порядке приоритета, показанные на фиг. 3.3, с характеристиками системы, зависящей от времени (фиг. 3.7), можно видеть, что в последнем случае некоторая общность, по-видимому, исчезает, а именно все приоритетные классы достигают насыщения в одной и той же точке $\rho=1$. Но это нарушение общности иллюзорно. Действитель-



Фиг. 3.10. Зависимость $W_p^{(r)}$ от r ($b_p/b_{p+1}=0,5$; $\rho=0,95$).



Фиг. 3.11. Функция W_p/x для СМО с относительными приоритетами, в которой используется комбинация дисциплины обслуживания в порядке приоритета и дисциплины с приоритетами, зависящими от времени.

но, стабильная характеристика обслуживания высших классов при бесконечном среднем времени ожидания требований низших классов может быть реализована при помощи зависящей от времени дисциплины путем устремления определенных отношений b_p/b_{p+1} к нулю. Это позволяет эффективно отделить $(p+1)$ -й класс (и все высшие) от p -го класса (и всех низших) при обслуживании в порядке приоритета [29]. Так, например, на фиг. 3.11 приведены характеристики этой более общей, зависящей от времени дисциплины обслуживания с приоритетами при $P=25$, $\lambda_p=\lambda/25$, $x_p=x$ на пяти классах обслуживания в порядке приоритета; внутри каждого класса имеются пять приоритетных классов, которые взаимодействуют так, как показано на фиг. 3.7.

Другие динамические дисциплины обслуживания с приоритетами рассматриваются в работах [18—20].

3.8. ОПТИМАЛЬНАЯ ПЛАТА ЗА МЕСТО В ОЧЕРЕДИ

Приоритеты, предоставляемые требованиям в исследованных до сих пор дисциплинах обслуживания (и большинстве дисциплин, описанных в литературе), не зависят от самих требований. В самом деле, требование не может выбирать для себя приоритетный класс.

В настоящем разделе центр внимания несколько смешается и вводится допущение, что каждое поступающее требование может «купить» соответствующий приоритет [31]. Размер платы устанавливается в общем случае на основании определенных экономических факторов, присущих совокупности клиентов. В частности, чем богаче клиент и чем больше его нежелание ждать в очереди, тем большей будет его плата¹⁾.

Рассмотрим систему $M/G/1$ с интенсивностью поступающего пуассоновского потока λ требований в секунду и произвольной ФРВ времени обслуживания $B(x)$ со средним временем обслуживания x секунд. Пусть плата клиента Y является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\beta(y) = P[Y \leq y]$. Предполагается, что время поступления, время обслуживания и плата являются независимыми случайными величинами для каждого требования и не зависят от соответствующих величин, относящихся к другим требованиям.

Система функционирует следующим образом: новое требование, поступающее в систему, «предлагает»²⁾ неотрицательную плату Y «организатору очереди». После этого требованию предоставляется место в очереди, такое, что все требования, плата которых $Y' \geq Y$, оказываются впереди него, а все требования, «внесшие» плату $Y'' < Y$, оказываются позади него. Следовательно, вновь поступившее требование может находиться впереди или позади данного требования в зависимости от внесенной им платы. В каждый момент времени, когда прибор заканчивает обслуживание очередного требования (которое покидает систему), он принимает на обслуживание требование, находящееся в голове очереди. До полного завершения обслуживания требование не может покинуть прибор (т. е. рассматриваются относительные приоритеты)³⁾. Всякий раз, когда требования вносят одинаковую плату, они обслуживаются в порядке поступления.

¹⁾ Здесь и ниже термин «требование» иногда заменяется на «клиент». — *Прим. ред.*

²⁾ Можно полагать, что плата вносится до того, как клиент узнает длину очереди [в этом случае меру его богатства и нетерпения отражает распределение $\beta(x)$], и, следовательно, размер платы не зависит от длины очереди.

³⁾ Случай абсолютных приоритетов рассматривается в работе [31].

Определим при $\varepsilon > 0$ левый и правый пределы $\beta(y)$ следующим образом:

$$\beta(y^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(y - \varepsilon),$$

$$[\beta(y^+)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(y + \varepsilon).$$

Пусть $W(y)$ — среднее время ожидания (в очереди) для требования, плата которого $Y=y$. Для такого требования (меченого требования) найдем $W(y)$, воспользовавшись методом, описанным в разд. 3.2. Меченое требование должно в среднем ждать в течение времени W_0 окончания обслуживания требования, которое в момент его поступления находилось в приборе. Кроме того, оно должно ждать окончания обслуживания всех требований, поступивших раньше него и находящихся в очереди, плата которых равна или превышает его плату. Среднее число таких требований, плата которых лежит в области $(u, u+du)$, определяется по формуле Литтла

$$\lambda(u)W(u)du,$$

где

$$\lambda(u) = \frac{\lambda d\beta(u)}{du}.$$

Каждое требование заставляет ждать меченое требование в среднем \bar{x} секунд. Кроме того, меченое требование должно ждать окончания обслуживания всех требований, которые поступают в систему во время его ожидания в очереди и вносят плату, превышающую его плату. Среднее число требований, плата которых лежит в области $(u, u+du)$ и которые поступают в течение среднего времени ожидания меченого требования $W(y)$, равно

$$\lambda(u)W(y)du.$$

Каждое такое требование также прибавляет \bar{x} секунд к среднему времени ожидания меченого требования. Объединяя эти три составляющие среднего времени ожидания меченого требования, получаем¹⁾

$$W(y) = \bar{W}_0 + \int_{y^-}^{\infty} \bar{x}\lambda(u)W(u)du + \int_{y^+}^{\infty} \bar{x}\lambda(u)W(y)dy,$$

¹⁾ Нижние пределы y^- и y^+ учитывают, что все конкурентные ситуации разрешаются на основе порядка поступления требований. (Кроме того, W_0 , как обычно, равно $\lambda\bar{x}^2/2$.)

или

$$W(y) = \frac{W_0 + \int_{y^-}^{\infty} \rho W(u) d\beta(u)}{1 - \int_{y^+}^{\infty} \rho d\beta(u)},$$

где $\rho = \lambda \bar{x}$. Так как $\beta(\infty) = 1$, имеем

$$W(y) = \frac{W_0 + \rho \int_{y^-}^{\infty} W(u) d\beta(u)}{1 - \rho + \rho \beta(y^+)}. \quad (3.55)$$

В задаче 3.15 читателю предлагается показать, что решение этого уравнения имеет вид

$$W(y) = \frac{W_0}{[1 - \rho + \rho \beta(y^+)] [1 - \rho + \rho \beta(y^-)]}. \quad ■ (3.56)$$

Заметим также, что при таких размерах платы y , при которых $\beta(y)$ непрерывна,

$$W(y) = \frac{W_0}{[1 - \rho + \rho \beta(y)]^2}. \quad (3.57)$$

Интересно отметить еще раз, что распределение времени обслуживания $B(x)$ представлено в этом решении только своими первым и вторым моментами; для системы M/G/1 это не является неожиданным.

Таким образом, мы получили конечное среднее время ожидания для всех требований, которые вносят плату выше, чем $y_{\text{крит}}$, причем

$$y_{\text{крит}} = \begin{cases} 0^-, & \rho < 1, \\ \beta^{-1}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right), & \rho \geq 1; \end{cases} \quad (3.58)$$

$\beta^{-1}(u)$ — такое значение y , при котором $\beta(y) = u$. В этом случае система ведет себя аналогично системе с обслуживанием в порядке приоритета при $\rho \geq 1$. В пределе, когда размер платы стремится к бесконечности, среднее время ожидания стремится к W_0 .

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Во-первых, в случае постоянной платы y_0 (одинаковой для всех клиентов), определяемой равенством

$$\beta(y) = \begin{cases} 0, & y < y_0, \\ 1, & y > y_0, \end{cases}$$

имеем

$$W(y_0) = \frac{W_0}{1-\rho}. \quad (3.59)$$

Так как размер всех плат одинаков (что приводит вообще к устраниению влияния платы), равенство (3.59) должно соответствовать хорошо известному результату для системы M/G/1 с обслуживанием в порядке поступления, что в действительности и имеет место. Во-вторых, в случае, когда $\beta(y)$ непрерывна в начале координат и $\beta(0)=0$,

$$W(0) = \frac{W_0}{(1-\rho)^2}. \quad (3.60)$$

Эта характеристика при нулевой плате описывает время ожидания для требований низшего приоритетного класса в системе с обслуживанием в порядке приоритета при $P=2$, когда интенсивность поступления требований этого низшего класса пренебрежимо мала по сравнению с общей интенсивностью поступления требований. В самом деле, как видно из формулы (3.31) при $P=2$ и $\rho_1 \ll \rho_2$, приведенные выше равенства согласуются. Это можно заметить также из равенства (3.38) при $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x)$. Наконец, когда допускается только конечное (счетное) множество возможных плат (например, в размерах y_p), имеет место дискретное распределение, которое дает

$$W(y_p) = \frac{W_0}{[1 - \rho \sum_{i=p+1}^P \Delta\beta(y_i)] [1 - \rho \sum_{i=p}^P \Delta\beta(y_i)]}, \quad (3.61)$$

где $\Delta\beta(y_i) \triangleq \beta(y_i^+) - \beta(y_i^-)$. Это равенство в точности соответствует результату при обслуживании в порядке приоритета.

Поскольку здесь вводится понятие платы, необходимо рассмотреть также другие стоимостные факторы. В частности, введем случайный коэффициент нетерпения α (≥ 0), который указывает, сколько долларов¹⁾ стоит клиенту каждая секунда ожидания в очереди. Введем стоимостную функцию $C(\alpha)$, определяемую в виде

$$C(\alpha) = y_\alpha + \alpha W(y_\alpha), \quad (3.62)$$

где, как и ранее, α — значение, принимаемое коэффициентом нетерпения клиента $\tilde{\alpha}$ (долл./с); y_α — плата клиента, коэффициент нетерпения которого $\tilde{\alpha}=\alpha$; $W(y_\alpha)$ — среднее время ожидания (в очереди) для требования, плата которого равна y_α .

¹⁾ Эта стоимость может измеряться в «единицах» неудобства или нетерпения клиента, если таковые имеются.

Таким образом, $C(\alpha)$ — это сумма платы клиента (в долларах) и стоимости его ожидания (в долларах). Предполагается, что величины α назначаются до поступления требований в систему и совокупность клиентов в целом производит случайную величину α с функцией распределения $P(\alpha) = P[\alpha \leq \alpha]$. Рассматриваемые здесь СМО — такие же, как и описанные раньше, но теперь плата является некоторой (детерминированной) функцией случайной величины α . Таким образом, здесь центр внимания перемещается из ситуации, в которой клиент вносит случайную плату, в ситуацию, когда плата является функцией (случайного) коэффициента нетерпения α .

Сформулируем следующую задачу оптимизации: найти функцию y_α , которая минимизирует среднюю стоимость C , т. е. найти

$$\min_{y_\alpha} C \triangleq \min_{y_\alpha} \int_0^\infty C(\alpha) dP(\alpha) \quad (3.63)$$

при условии ограничения средней платы величиной B , т. е.

$$B = \int_0^\infty y_\alpha dP(\alpha). \quad (3.64)$$

Следовательно, необходимо выбрать y_α , минимизирующую

$$C = \int_0^\infty [y_\alpha + \alpha W(y_\alpha)] dP(\alpha). \quad (3.65)$$

Поскольку накладывается ограничение на среднюю плату, это эквивалентно минимизации

$$C - B = \int_0^\infty \alpha W(y_\alpha) dP(\alpha).$$

Определим

$$\rho(\alpha) = \rho \frac{dP(\alpha)}{d\alpha}. \quad (3.66)$$

Величина $\rho(\alpha)d\alpha$ может быть интерпретирована как доля времени, в течение которого обслуживающий прибор занят обслуживанием требований, коэффициент нетерпения которых лежит

в пределах $(\alpha, \alpha+da)$. Используя равенство (3.66), получаем, что при $0 < \rho$

$$C - B = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \alpha \rho(\alpha) W(y_\alpha) d\alpha. \quad (3.67)$$

Теперь закон сохранения в непрерывной форме может быть представлен как

$$\int_0^\infty \rho(\alpha) W(y_\alpha) d\alpha = \frac{\rho}{1-\rho} W_0. \quad (3.68)$$

Заметим, что минимизация (3.67) включает определение такой функции y_α , при которой площадь под кривой произведения $\rho(\alpha)W(y_\alpha)$ на α минимальна. Однако, согласно равенству (3.68), площадь под кривой первой из этих функций сама должна быть постоянна. Так как $\rho(\alpha)$ не зависит от y_α , нужно найти условия для $W(y_\alpha)$. Далее, используя тот же подход, который применялся для доказательства оптимальности обслуживания в порядке приоритета при линейной стоимостной функции (когда согласуются возрастающая и убывающая последовательности), можно заметить, что необходимое и достижимое (см. ниже) условие для времени ожидания $W(y_\alpha)$ состоит в том, что оно должно убывать по α , т. е.

$$\frac{dW(y_\alpha)}{d\alpha} < 0 \quad (3.69)$$

для всех $\alpha \notin S$ (где множество S характеризуется свойством $\int_S dP(\alpha) = 0$). Здесь возрастающей функцией является сама величина α .

Условие (3.69) может быть представлено в виде

$$\frac{dW(y_\alpha)}{dy_\alpha} \cdot \frac{dy_\alpha}{d\alpha} < 0. \quad (3.70)$$

Из равенства (3.56) имеем (полагая $y_\alpha = y$)

$$\frac{dW(y)}{dy} = -\rho W_0 \frac{A(y^+) [d\beta(y^-)/dy] + A(y^-) [d\beta(y^+)/dy]}{[A(y^+)A(y^-)]^2},$$

где $A(u) \triangleq 1 - \rho + \rho\beta(u)$. Теперь, так как $\beta(u) \leq 1$ и $\rho < 1$, то $A(y^+)A(y^-) > 0$. Кроме того, поскольку $\beta(u)$ — функция распределения, то $d\beta(u)/du \geq 0$. Отсюда следует, что при всех значениях аргумента функция $W(y_\alpha)$ имеет неположительную производную, т. е.

$$\frac{dW(y_\alpha)}{dy_\alpha} \begin{cases} < 0 & \text{для всех значений } y, \text{ при которых } \frac{d\beta(y)}{dy} > 0, \\ = 0 & \text{для всех значений } y, \text{ при которых } \frac{d\beta(y)}{dy} = 0, \end{cases} \quad (3.71)$$

Следовательно, из равенств (3.70) и (3.71) получается необходимое условие для y_α в виде

$$\frac{dy_\alpha}{d\alpha} > 0 \quad \text{при } \alpha \notin S. \quad (3.72)$$

То, что последнее условие достижимо, очевидно для большого семейства функций (например, $y_\alpha = \alpha$). Однако из этого семейства можно использовать только функции, которые удовлетворяют равенству (3.64). Такие функции, очевидно, существуют [см., например, равенство (3.73)].

Рассмотрим интервал $a_1 < \alpha < a_2$, на котором функция $P(\alpha)$ постоянна. Очевидно, что y_α может быть произвольной на любом таком интервале, не влияя на C ; то же самое справедливо в любой точке α , где $P(\alpha)$ непрерывна. Но такие области находятся в множестве S . Однако для множеств¹⁾ S_1 (определенного неравенством $a_1 - \varepsilon \leq \alpha < a_1$) и S_2 (определенного неравенством $a_2 < \alpha < a_2 + \varepsilon$), на которых предполагается, что $P(\alpha)$ возрастает, потребуем, чтобы удовлетворялось неравенство (3.69), а также чтобы

$$W(y_a) > W(y_b),$$

где $a \in S_1$ и $b \in S_2$. Последнее справедливо по тем же причинам, которые приводят к неравенству (3.69), а именно для того, чтобы минимизировать $C - B$, необходимо, чтобы $W(y_\alpha)$ уменьшалась с ростом α .

Для доказательства того, что неравенство (3.72) также достаточно, рассмотрим выражение (3.65). Первый член просто дает B и не зависит от y_α , а второй член зависит только от *относительных* размеров платы, а не от самих их значений. Однако неравенство (3.72) дает полное описание упорядочения размеров платы. Следовательно, необходимое и достаточное условие того, что y_α является оптимальной функцией платы, состоит в том, что эта функция должна удовлетворять условиям (3.64) и (3.72).

Таким образом, решение задачи минимизации, сформулированной в виде равенств (3.63) и (3.64), требует, чтобы y_α была строго возрастающей функцией α при $\alpha \notin S$. Если ограничить лишь среднюю плату, можно получить только условие для y_α вместо явного задания вида функции. В самом деле, решение не зависит от точного вида y_α , пока эта функция строго возрастает по α . Таким образом, для расчета и рассмотрения примера можно выбрать некоторую простую, например, следующую линейную зависимость:

$$y_\alpha = K\alpha.$$

¹⁾ Здесь $\varepsilon > 0$.

Применяя ограничение средней платы, получаем

$$B = K \int_0^{\infty} adP(\alpha).$$

Полагая, что A является средним коэффициентом нетерпения, из двух последних равенств находим

$$y_\alpha = \frac{B}{A} - \alpha. \quad (3.73)$$

Это даёт оптимальную функцию платы.

Для того чтобы получить некоторое более глубокое понимание поведения оптимальной процедуры платы за место в очереди и стоимостной функции, приведем следующий пример. Рассмотрим систему с показательным распределением платы:

$$\beta(y) = 1 - e^{-\sigma y}, \quad \sigma \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (3.74)$$

Время ожидания $W(y)$ можно непосредственно получить из равенства (3.57):

$$W(y) = \frac{W_0}{(1 - \rho e^{-\sigma y})^2}. \quad (3.75)$$

Используя рассмотренное правило оптимальной платы (3.73), найдем, что распределение коэффициента нетерпения $P(\alpha)$, который приводит к распределению платы (3.74), должно иметь вид

$$P(\alpha) = 1 - e^{-(B/A)\sigma\alpha},$$

и, следовательно, средняя стоимость

$$C = \frac{1}{\sigma} + \frac{AW_0}{\rho} \ln \frac{1}{1 - \rho}, \quad (3.76)$$

где A — средний коэффициент нетерпения, а $B = 1/\sigma$ — средняя плата.

Описанная оптимизация является глобальной и позволяет найти функции платы, которые минимизируют общую среднюю стоимость. Недавно [5] была исследована аналогичная система с оплатой (относительных) приоритетов, для которой найдены условия, определяющие плату клиента, минимизирующую его собственный средний расход (без учета глобального минимума). Большая часть работы [5] посвящена обсуждению *стабильной* стратегии платы; грубо говоря, стратегия платы за очередь является стабильной, если при следовании этой стратегии всеми клиентами отдельному клиенту не имеет смысла отклоняться от нее. При поступлении требования и до внесения платы клиенту (требованию) сообщается о размерах платы, внесенной всеми другими клиентами в системе (при этом, следовательно, сообщается и для-

на очереди). Первый полученный результат показывает, что при $\rho < 1$ в системе G/G/1 с конечным вторым моментом времени обслуживания и $C(a)$, определяемой равенством (3.62), глобальная оптимальная стратегия должна требовать от всех клиентов нулевую плату. Однако эта стратегия, очевидно, нестабильна, так как бесконечно малая плата приводит к перемещению любого требования в голову очереди. Для системы M/M/1 стратегия платы b_k (размер платы при длине очереди k) стабильна тогда и только тогда, когда

$$(1-\rho) \max_k \Delta b_k \leq \bar{ax} \leq \frac{(1+\rho)(1-\rho)}{\rho} \min_k \Delta b_k, \quad (3.77)$$

где $\Delta b_k = b_k - b_{k-1}$. Здесь подразумевается, что каждый клиент характеризуется одним и тем же коэффициентом нетерпения $a = \bar{a}$. Кроме того, для системы G/M/1 можно показать, что стратегия платы, при которой $b_{2k} = b_{2k+1}$, но последовательность b_k строго растет на четных числах ($2k$), является стабильной тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2} \max_k \Delta b_k \leq \frac{\bar{ax}}{1-\rho} \leq \frac{1}{1+p_1+p_2} \min_k \Delta b_k, \quad (3.78)$$

где p_i — вероятность того, что между моментом поступления и моментом окончания текущего обслуживания поступит по крайней мере i новых требований. Рассмотрение системы M/G/1 является значительно более сложным. В работе [5] исследуется случай абсолютного приоритета с дообслуживанием (см. также [6]). В работе [2] описывается стратегия локальной оптимизации платы в системе M/M/1 с точки зрения клиента (как при абсолютном, так и при относительном приоритете) и обслуживающего прибора.

3.9. ДИСЦИПЛИНЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В разд. 3.4 было показано, что дисциплины обслуживания, которые не проводят никакой дискриминации на основе времени обслуживания, должны характеризоваться одним и тем же средним временем ожидания. Кроме того, были рассмотрены примеры (такие, как обслуживание в порядке приоритета), в которых приоритеты определенным образом зависят от времени обслуживания. В настоящем разделе приводятся некоторые результаты, в которых время обслуживания требований используется в более явном виде. Проводимое здесь обсуждение является довольно сокращенным, но оно служит отправным материалом для гл. 4, где рассматриваются модели вычислительных систем коллективного пользования; при исследовании этих моделей прилагаются большие усилия

для построения дисциплины со строгой дискриминацией требований на основе необходимого времени обслуживания.

Интуитивно чувствуется, что предпочтительная обработка требований (заданий) с более коротким временем обслуживания ведет к уменьшению общего среднего времени ожидания, как и среднего числа требований в приоритетной СМО. Фактически уже приводился такой результат в разд. 3.6, где неравенство (3.42) определяло правильное упорядочение приоритетов в оптимальной системе обслуживания в порядке приоритета при линейной стоимостной функции. Отметим, что если все стоимости идентичны (т. е. $C_p = C_0$ при $p=1, 2, \dots, P$), то такой порядок строго соответствует наименьшей средней работе. Действительно, в непрерывном случае [см. (3.38)] было найдено, что дисциплина первоочередного обслуживания требований с кратчайшей длительностью обслуживания дает наименьшее возможное среднее время ожидания для дисциплин с относительным приоритетом (т. е. при использовании в этом случае правила μC).

Существует ряд интересных дисциплин, зависящих от времени обслуживания требований. Ниже приводится перечень некоторых из них, в том числе уже рассмотренных (при этом используются обозначения, принятые в приложениях и в литературе по теории расписаний [10]):

1. ОПП — обслуживание в порядке поступления (FCFS).
2. ООП — обслуживание в обратном порядке, т. е. последний поступивший обслуживается первым (LCFS).
3. ПК — первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью обслуживания (SPT или SJE).
4. ПКД — первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью дообслуживания (SRPT).
5. ПКС — первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью обслуживания (SEPT).
6. ПКСД — первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью дообслуживания (SERPT).

Приведем теперь без доказательства результаты, относящиеся к этим различным дисциплинам. Поскольку подобные задачи возникают не только при исследовании СМО, но и при изучении расписаний, здесь рассматривается также случай, когда требования не поступают (случай расписаний), а все задания¹⁾, которые требуется выполнить, имеются в начале «периода занятости». (Часто в этом случае говорят не о времени обслуживания, а о времени обработки.) При отсутствии поступающих требований возможна дополнительная дисциплина обслуживания, которая также должна быть рассмотрена. Эта дисциплина была введена недавно в работе [40].

¹⁾ Здесь и далее термин «задание» иногда используется вместо термина «требование». — Прим. ред.

7. ПКОВ — первоочередное обслуживание требований с кратчайшим обязательным временем (SPT).

Дисциплина ПКОВ состоит в следующем: если i -е требование имеет распределение времени обработки $B_i(x)$ и уже обрабатывалось в течение x секунд, а допускаемые моменты времени, когда этому требованию может быть предоставлено преимущественное обслуживание, равны t_{i1} , t_{i2} и т. д., то приоритет $q_i(x)$ этой работы вычисляется при рассматриваемой дисциплине следующим образом:

$$\frac{1}{q_i(x)} = \min_{(j: t_{ij} > x)} \left[\frac{\int_x^{t_{ij}} [1 - B_i(y)] dy}{B_i(t_{ij}) - B_i(x)} \right].$$

Требование, у которого функция $q_i(x)$ максимальна, определяется как имеющее высший приоритет. Приведенное отношение является средним временем, затраченным на требование i , если ему полагается время обслуживания, самое большое, равное $t_{ij} - x$.

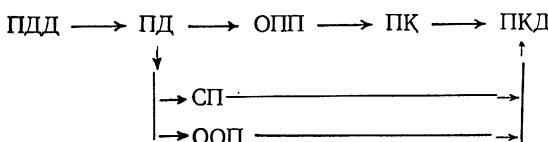
Для некоторых из этих семи случаев представляет интерес определить соответствующие дисциплины, при которых рассматривается *стоимость*. Часто имеют дело с линейными стоимостными функциями (т. е. стоимость изменяется линейно в зависимости от среднего времени ожидания). В новом классе дисциплин, который здесь вводится, используется одна из мер, упомянутых выше (например, для ПКС), которая делится для каждого задания на скорость роста стоимости, связанную с этим заданием (так, например, образуется новая дисциплина ПКС/С). Это дополнительное определение потребуется для случаев ПК/С, ПКС/С (заметим, что эта дисциплина является правилом μC), ПКД/С и ПКОВ/С.

Прокомментируем теперь некоторые из известных результатов. Во всех случаях система предполагается консервативной (нет создания или уничтожения работы, нет платы за преимущество и нет простоя обслуживающего прибора при наличии заданий).

Рассмотрим прежде всего случай отсутствия поступающих требований и линейной зависимости стоимостей от среднего времени ожидания. Показано, что при точно известных продолжительностях обслуживания оптимальной является дисциплина ПК/С (т. е. она минимизирует среднюю стоимость). Доказательство и обсуждение этого результата приведено, например, в [10]. Если известно только распределение времени обслуживания для каждого задания, то в случае относительного приоритета среднюю стоимость минимизирует дисциплина ПКС/С [41]. В случае абсолютного приоритета (когда может быть определено множество допускаемых точек прерывания) оптимальным является расписание ПКОВ/С [40].

Рассмотрим теперь более интересный случай поступления требований (т. е. СМО). Необходимо найти оптимальное расписание (если ограничиться только дисциплинами приоритетного обслуживания, то это значит, что нужно найти правила, по которым оценивается приоритет заданий лишь на основании их параметров) для заданных типов стоимостной функции [линейная, выпуклая, вогнутая, минимальная дисперсия времени пребывания в системе (σ_s^2), максимум σ_s^2]. В статье [39] дан очень хороший обзор некоторых из этих оптимальных дисциплин управления. Там рассматриваются три возможных уровня информации относительно времени обслуживания: 1) известно точное значение времени обслуживания; 2) известно только распределение времени обслуживания; 3) нет никакой информации относительно времени обслуживания. Заметим, что случай 2 наиболее общий. Случай 1, очевидно, является частным (вырожденным) случаем 2¹⁾. Случай 3 подразумевает, что имеется только один класс требований. Соответствующие результаты и ссылки на литературу даны в табл. 3.1; в работах, на которые делаются ссылки, более подробно рассмотрены эти результаты оптимизации.

Другое сравнение некоторых из рассматриваемых дисциплин проведено в работе [42]. Обозначим через $D_1 \rightarrow D_2$ тот факт, что среднее время ожидания при использовании дисциплины D_1 больше или равно среднему времени ожидания при дисциплине D_2 . Тогда справедливы следующие соотношения:



Здесь ПД (ПДД) означает первоочередное обслуживание требований с максимальной длительностью обслуживания (дообслуживания), а СП — случайный порядок обслуживания.

В некоторых случаях нет данных о точных временах обработки, но известно больше, чем распределение времени обслуживания. Например, может оказаться возможным разделить требования на два класса: требования с большим и малым временем обработки. В частности, из многих примеров видно [10], что такое разделение на два класса обеспечивает значительное уменьшение средних времен ожидания по сравнению с дисциплиной обслуживания ОПП (см. задачи 3.8 и 3.9).

¹⁾ Отметим, что при известном времени обслуживания дисциплина ПКС/С превращается в ПК/С, а ПКСД/С — в ПКД/С.

Таблица 3.1

Оптимальные расписания, зависящие от времени обслуживания

Относительные приоритеты	Время обработки известно	Известно только распределение времени обработки	Нет никакой информации о времени обработки	
			ПК/С для $M/G/1$, выпуклые стоимостные функции [16]	ПК/С для $G/G/1$, выпуклые стоимостные функции [16]
	ПК/С для $G/G/1$, линейные, стоимостные функции, только два класса [45, 39]	ПК/С для $G/G/1$, линейные стоимостные функции, только два класса [45, 39]	ОПП для $G/G/1$, минимум σ_s^2 [25]	ОПП для $G/G/1$, максимум σ_s^2 [43]
Абсолютные приоритеты	ПКД для $G/G/1$, одинаковые линейные стоимости ($C_p = C_0$) [37]	ПКС/С для $G/M/1$, линейные стоимостные функции [39]	ОПП для $G/(BIO/1)$, выпуклые стоимостные функции [19, 39 ^b]	ОПП для $G/(M/1)$, выпуклые стоимостные функции [19, 39 ^b]
	ПКД для $M/G/1$, линейные стоимостные функции [3, 13, 21] для двух классов [39 ^b]	ПКОВ/С для $M/G/1$, линейные стоимостные функции [40 ^b]	ООП для $G/(M/1)$, вогнутые стоимостные функции [39 ^b]	ООП для $G/(M/1)$, вогнутые стоимостные функции [39 ^b]
			ПЗП для $G/(UIO/1^b)$	ПЗП для $G/(UIO/1^b)$
			линейные стоимостные функции [22] для $M/(UIO/1$ [39 ^b]	линейные стоимостные функции [22] для $M/(UIO/1$ [39 ^b]

^a См. также эвристические доказательства оптимальности правила μ_C (разд. 3.6).^b Только гипотеза (в некоторых случаях с эвристическим доказательством), в См. определение ПЗП, дисциплины с передним и задним планом, в гл. 4.

Как указывалось выше, другие дисциплины обслуживания, зависящие от времени обработки, будут рассмотрены в гл. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczel M. A., The Effect of Introducing Priorities, *Operations Research*, 8, 730—733 (1960).
2. Adiri I., Yechiali V., Optimal Pricing and Priority Purchasing Policies, IBM Research Report RC-3581, September 2, 1972.
3. Avi-Itzhak B., Naor P., Some Queueing Problems with the Service Station Subject to Breakdown, *Operations Research*, 11, 303—320 (1963).
4. Avi-Itzhak B., Brosh I., Naor P., On Discretionary Priority Queueing, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 6, 235—242 (1964).
5. Balachandran K. R., Purchasing Priorities in Queues, *Management Science*, 18, No. 5, 319—326 (1972).
6. Balachandran K. R., Lukens J. C., Stable Pricing Policies in Service Systems, Report MS 1, College of Industrial Management, Georgia Institute of Technology, October 1973.
7. Brumelle S. L., Some Inequalities for Multi-Server Queues, ORC 69—17, Operations Research Center, University of California, Berkeley, 1969.
8. Cobham A., Priority Assignment in Waiting Line Problems, *Operations Research*, 2, 70—76 (1954).
9. Cole G. C., Computer Network Measurements: Techniques and Experiments, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, UCLA-ENG-7165, 1971.
10. Конвой Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. Пер. с англ./Под ред. Г. П. Башарина. — М.: Наука, 1975.
11. Cox D. R., Smith W. L., Queues, Methuen, London, Wiley, New York, 1961.
12. Crabill T. B., Cross D., Magazine M. J., A Survey of Research on Optimal Design and Control of Queues, Serial T-280, School of Engineering and Applied Science, The Geogre Washington University, June 1, 1973.
13. Etschmaier, Discretionary Priority Processes, M. S. Thesis, Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio, 1966.
14. Fife D. W., Scheduling With Random Arrivals and Linear Loss Functions, *Management Science*, 11, No. 3, 429—437 (1965).
15. Gaver D. P., Jr., A Waiting Line with Interrupted Service, Including Priorities, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 24, 73—90 (1962).
16. Haji R., Newell G. F., Optimal Strategies for Priority Queues with Nonlinear Costs of Delay, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 20, 224—240 (1971).
17. Harrison J. M., Dynamic Scheduling of a Multi-Class Queue, I: Problem Formulation and Descriptive Results, Technical Report 36, and Dynamic Scheduling of a Multi-Class Queue, II: Discount Optimal Dynamic Policies, Technical Report 37, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, June 1972.
18. Jackson J. R., Some Problems in Queueing with Dynamic Priorities, *Naval Research Logistics Quarterly*, 7, 235—249 (1960).
19. Jackson J. R., Queues with Dynamic Priority Discipline, *Management Science*, 8, No. 1, 18—34 (1961).
20. Jackson J. R., Waiting-Time Distributions for Queues with Dynamic Priorities, *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 31—36 (1962).
21. Джейсуол Н. К. Очереди с приоритетами. Пер. с англ./Под ред. В. В. Калашникова. — М.: Мир, 1973.
22. Kalro A. L., Optimal Processor Scheduling in a Computer Time Shared System, ORC 71-25, University of California, Berkeley, California, September 1971.
23. Keilson J., Queues Subject to Service Interruption, *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1314—1322 (1962).

24. Kesten H., Runnenberg J. Th., Priority in Waiting-Line Problems I and II, Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, *Proceedings, Series A*, 60, 312—324, 325—336 (1957).
25. Kingman J. F. C., The Effect of the Queue Discipline on Waiting-Time Variance, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 58, 163—164 (1962).
26. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. Стохастические потоки и задержки сообщений. Пер. с англ./Под ред. А. А. Первозванского.—М.: Наука, 1970.
27. Kleinrock L., A Delay Dependent Queue Discipline, *Naval Research Logistics Quarterly*, 11, 329—341 (1964).
28. Kleinrock L., A Conservation Law for a Wide Class of Queueing Disciplines, *Naval Research Logistics Quarterly*, 12, 181—192 (1965).
29. Kleinrock L., Queueing with Strict and Lag Priority Mixtures, Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research, Boston, Mass., K-I-46 — K-I-67, 1966.
30. Kleinrock L., Finkelstein R. P., Time Dependent Priority Queues, *Operations Research*, 15, 104—116 (1967).
31. Kleinrock L., Optimum Bribing for Queue Position, *Operations Research*, 15, 304—318 (1967).
32. Kleinrock L., Queueing Systems, Vol. I: Theory, Wiley, New York, 1975. [Готовится перевод: Клейнрок Л. Теория массового обслуживания.—М.: Машиностроение, 1979.]
33. Lippman S. A., On Dynamic Programming with Unbounded Rewards, *Management Science*, 21, No. 11, 1225—1233 (1975).
34. Phipps T. E., Jr., Machine Repair as a Priority Waiting-Line Problem, *Operations Research*, 4, 76—85 (1956).
35. Prabhu N. U., Stidham S., Jr., Optimal Control of Queueing Systems, Technical Report No. 186, Dept. of Operations Research, Cornell University, June 1973.
36. Reed F. C., Difference Equations and the Optimal Control of Single Server Queueing Systems, Technical Report No. 23, Stanford University, Dept. of Operations Research, March 22, 1974.
37. Schrage L., A Proof of the Optimality of the Shortest Remaining Processing Time Discipline, *Operations Research*, 16, 687—690 (1968).
38. Schrage L., An Alternative Proof of a Conservation Law for the Queue G/G/1, *Operations Research*, 18, 185—187 (1970).
39. Schrage L., Optimal Scheduling Disciplines for a Single Machine Under Various Degrees of Information, Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago, 1974.
40. Sevcik K., A Proof of the Optimality of ‘Smallest Rank’ Scheduling, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21, 66—75 (1974).
41. Smith W. E., Various Optimizers for Single-Stage Production, *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 59—66 (1956).
42. Suzuki T., Hayashi K., On Queue Disciplines, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 13, 43—58 (1970).
43. Tambouratzis D. G., On the Property of the Variance of the Waiting Time of a Queue, *Journal of Applied Probability*, 5, 702—703 (1968).
44. Torbett E. A., Models for the Optimal Control of Markovian Closed Queueing Systems with Adjustable Service Rates, Technical Report No. 20, Dept. of Operations Research, Stanford University, January 15, 1973.
45. Wolf R. W., Work Conserving Priorities, *Journal of Applied Probability*, 7, 327—337 (1970).

Задачи

- 3.1. Используя понятие остаточного времени, покажите, что $W_0 = \lambda x^2 / 2$.

- 3.2. Рассмотрите систему $M/G/1$ с двумя приоритетными классами и некоторой дисциплиной обслуживания, которая является консервативной. Известно, что

$$W_2 = \frac{W_0}{1 - \alpha\rho_1 - \beta\rho_2},$$

где $\rho_p = \lambda_p x_p$ — коэффициент использования для класса p ($p=1, 2$), $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Найдите W_1 как функцию $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta$ и W_0 .

- 3.3. Найдите средние значения и дисперсии Y_b и Y_c на фиг. 3.1.
 3.4. Сравните прямой (ОПП) и обратный (ООП) порядки обслуживания для системы $M/G/1$.

- a) Используя свойство функции $W^*(s)$ производить моменты, покажите, что $W_{\text{опп}} = W_{\text{ооп}}$ ($= W$).
 б) Аналогично покажите, что

$$\sigma_{\text{опп}}^2 = (1 - \rho)\sigma_{\text{ооп}}^2 - \rho W^2.$$

■

- 3.5. Рассмотрите систему $M/M/1$ с относительным приоритетом и обслуживанием в порядке приоритета. Пусть j — наименьшее целое число, такое, что $\sum_{i=j}^P \rho_i < 1$. Найдите W_p ($p=j, j+1, \dots, P$). Обратите внимание, что $W_p = \infty$ при $p < j$.
 3.6. Для системы, описанной в предыдущей задаче, установите закон сохранения для суммы

$$\sum_{p=j}^P \rho_p W_p.$$

- 3.7. Вычислите W_p на основании равенства (3.32) для системы с относительными приоритетами и обслуживанием в порядке приоритета.
 3.8. Рассмотрите СМО с относительными приоритетами и обслуживанием в порядке приоритета при $P=2$, построенную следующим образом. Предполагается, что время обслуживания для всех требований распределено по закону $B(x)$, но для каждого требования известно при его поступлении. Пусть x_0 — число, определяющее границу между двумя классами, т. е. если $x < x_0$, то задание из класса $p=2$, а если $x \geq x_0$, то оно из класса $p=1$.
 а) Покажите, что

$$W = \sum_{p=1}^2 \frac{\lambda_p}{\lambda} W_p = \frac{W_0}{1 - \rho} \left[\frac{1 - \rho B(x_0)}{1 - \rho_2} \right].$$

- б) Покажите, что такая простая дискриминация требований улучшает W при обслуживании в порядке поступления.

- 3.9. Рассмотрите СМО с относительными приоритетами и обслуживанием в порядке приоритета при $P=2$. Пусть

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_2.$$

Предполагается, что

$$\rho < 1 [9].$$

- a) Докажите, что

$$W = W_{\text{опп}} \frac{1 - \lambda_2 \bar{x}}{1 - \lambda_2 \bar{x}_2},$$

где

$$\bar{x} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \bar{x}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \bar{x}_2,$$

$W_{\text{опп}}$ — среднее время ожидания при обслуживании в порядке поступления.

- б) Предположим теперь, что класс 2 состоит из требований с продолжительностью обслуживания, меньшей или равной τ , а класс 1 — из требований с $\bar{x} > \tau$, где \bar{x} распределено по закону общего вида $B(x)$. Пусть τ_0 — оптимальное значение этого порога τ , при котором минимизируется W , и пусть $W_{\text{мин}}$ — минимум среднего времени ожидания.

- 1) Покажите, что

$$\frac{W_{\text{мин}}}{W_{\text{опп}}} = \frac{\bar{x}}{\tau_0}.$$

- 2) Покажите, что τ_0 определяется при помощи равенства

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \frac{(\lambda_1/\lambda)(\bar{x}_1 - \tau_0)}{\tau_0 - \bar{x}}.$$

- 3.10. Рассмотрите систему M/G/1 с двумя приоритетами, для которой

$$W_0 = 2, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1/4.$$

- a) Определите W_2 , если $W_1 = 5$.
 б) Определите W_1 и W_2 в случае относительного приоритета с обслуживанием в порядке приоритета.
 в) Определите W_1 и W_2 при обслуживании в порядке поступления.
 г) Определите W_1 и W_2 при обслуживании в обратном порядке.

- 3.11. Рассмотрите СМО с относительным приоритетом при $P=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$, $x_1=1/2$ и $x_2=1/4$.
- Постройте систему, в которой достигается отношение $W_2/W_1=\alpha < 1$.
 - Предполагается, что требование поступает в некоторый случайный момент времени и ждет обслуживания до освобождения системы. Определите отношение среднего времени ожидания для этого требования к среднему времени ожидания при обслуживании в порядке поступления и одинаковых условиях на входе.
- 3.12. Рассмотрите зависящую от времени дисциплину обслуживания, для которой $0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_p$. Найдите систему уравнений, аналогичную (3.48), для определения W_p ($p=1, 2, \dots, P$).
- 3.13. Рассмотрите зависящую от времени дисциплину обслуживания с приоритетами r -го порядка при $P=2$, используя следующую стоимостную функцию (m — некоторая постоянная):

$$C = \sum_{p=1}^2 C_p \lambda_p [W_p^{(r)}]^{m+1}.$$

- Для заданной пары (b_1, b_2) определите $W_p^{(r)}$ как функцию W_0, ρ_p, b_p и r ($p=1, 2$).
 - При $0 \leq (b_1/b_2)^{1/r} < 1$ найдите оптимальное значение b_1/b_2 , минимизирующее C .
- 3.14. Рассмотрите зависящую от времени дисциплину обслуживания r -го порядка с приоритетами и докажите, что (3.50) следует из (3.49).
- Пусть $r'=1$ (без потери общности). Рассмотрите любые три требования, функции приоритетов которых могут пересекаться. Покажите, что точки пересечения при произвольном r являются в точности такими же, как и при $r'=1$, если справедливо равенство (3.49).
 - Используйте метод индукции для доказательства эквивалентности всех точек пересечения в общем случае M требований и докажите равенство (3.50) (т. е. эквивалентность точек пересечения влечет за собой эквивалентность порядков обслуживания).
 - Докажите равенство (3.51).
- 3.15. а) Покажите, что (3.56) является решением (для условного среднего времени ожидания при заданном размере платы x) равенства (3.55).
- б) Покажите справедливость равенства (3.76), задающего среднюю стоимость C .
- в) Для размера платы, равномерно распределенной в интервале $[0, M]$, найдите среднюю стоимость C .

- 3.16.** Рассмотрите систему M/M/m с относительными приоритетами, в которой среднее время обслуживания i -го прибора равно $1/\mu_i$, где $1/\mu_1 < 1/\mu_2 < \dots < 1/\mu_m$. Иначе говоря, i -й прибор в среднем является более быстродействующим, чем $(i+1)$ -й. Требования устанавливаются в очередь в порядке поступления. Когда i -й обслуживающийся прибор освобождается, он предлагается первому требованию в очереди; если от этого требования поступает отказ (т. е. требование ждет освобождения более быстродействующего прибора), прибор предлагается второму требованию и т. д. Если ни одно из ожидающих требований не поступит в прибор, последний остается свободным до возможного занятия некоторым из вновь поступивших требований. Каждое требование пользуется (местной) стратегией, минимизирующей его среднее время пребывания в системе. Время обслуживания ни одного из требований не известно (требованиям не известно даже их собственное время обслуживания). Пусть k_i — такое положение в очереди, с которого некоторое требование впервые поступает на обслуживание прибором i [26].

Покажите, что критическое положение k_i должно удовлетворять условию

$$k_i < \frac{S_{i-1}}{\mu_i} \leq k_i + 1,$$

где $S_i = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$ и $k_i = 1$.

- 3.17.** Рассмотрите систему M/G/1 с N очередями Q_1, Q_2, \dots, Q_N . Поступающие требования устанавливаются в хвост очереди Q_1 ; после обслуживания [распределение времени обслуживания $B(x)$] они переходят в хвост очереди Q_2 и т. д. до очереди Q_N . После N -кратного обслуживания, независимого в каждом приборе с распределением времени обслуживания $B(x)$, требование покидает систему. Предполагается также, что очереди обслуживаются в порядке приоритета, который обозначим через $P = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$; это означает, что Q_i имеет приоритет перед Q_j , если $q_i < q_j$; например, $P = \{1, 3, 2\}$ означает, что Q_1 имеет высший приоритет, Q_3 — следующий, а Q_2 — низший. В таком порядке выбирается для обслуживания очередь всякий раз, когда заканчивается обслуживание. В пределах данной очереди обслуживание происходит в порядке поступления.

Пусть $p_k = P$ [k обслуживаний в системе в моменты ухода], причем каждое вновь поступающее требование проходит N обслуживаний. Пусть $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ и $\rho = \bar{x}N$.

a) Найдите $Q(z)$.

Пусть теперь $N=2$ и $P=\{2, 1\}$. Пусть

$$R(z_1, z_2) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} p(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

где $p(k_1, k_2) = P[k_1 \text{ требований в } Q_1 \text{ и } k_2 \text{ требований в } Q_2]$ также определяется в моменты ухода.

- б) Какие значения может принять k_2 при заданном приоритетном упорядочении?
 в) Покажите, что ответ б позволяет записать

$$p(k_1, k_2) = p_{2k_1+k_2}.$$

г) Покажите, что

$$R(z_1, z_2) = \frac{(1-\rho)B^*(\lambda - \lambda z_1)[z_2 - z_1 + (1-z_2)B^*(\lambda - \lambda z_1)]}{[B^*(\lambda - \lambda z_1)]^2 - z_1}.$$

[Указание. Рассмотрите ряды, получающиеся для суммы $Q(z) + Q(-z)$ и для разности $Q(z) - Q(-z)$.]

- д) Используя результат д, найдите $E[k_2]$. Рассмотрите теперь случай $P=\{1, 2\}$.
 е) Найдите T , среднее время пребывания требования в системе.

3.18. Для изучения одного из вариантов стоимостной функции, определяемой равенством (3.65), рассмотрите систему М/М/1 с обслуживанием в порядке поступления, для которой $C = \mu C_s + \lambda T_a$, где C_s — стоимость на единицу интенсивности обслуживания прибора. Таким образом, C — средняя стоимость текущего обслуживания. Найдите оптимальное значение μ , минимизирующее C .

3.19. Покажите, что для системы М/М/1 среднее время ожидания при дисциплине первоочередного обслуживания требований с кратчайшей длительностью обслуживания $W_{\text{ПК}}$ связано со средним временем пребывания в системе при дисциплине первоочередного обслуживания требований с кратчайшей длительностью дообслуживания $T_{\text{ПКД}}$ следующим равенством:

$$W_{\text{ПК}} = \rho T_{\text{ПКД}}.$$

Рассчитайте и сравните $W_{\text{ПК}}$, $W_{\text{ПКД}}$ и $W_{\text{СПП}}$ для системы М/М/1 при $\lambda=0,9$ и $\mu=1,0$.

3.20. Рассмотрите систему М/Г/1 при дисциплине первоочередного обслуживания требований с кратчайшей длительностью дообслуживания (ПКД), в которой время обслуживания всех требований известно заранее. Новое требование прерывает обслуживание требования в приборе, если только его

время обслуживания меньше остающегося времени обслуживания требования в приборе. По окончании обслуживания следующим обслуживается кратчайшее требование.

Покажите, что среднее время пребывания в системе $T_{\text{ПКД}}$ равно

$$T_{\text{ПКД}} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 - \lambda f_1(x)} dB(y) + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{f_2(y) + y^2[1 - B(y)]}{[1 - \lambda f_1(y^-)][1 - \lambda f_1(y^+)]} dB(y),$$

где

$$f_i(y) = \int_0^y u^i dB(u).$$

- 3.21. Рассмотрите последовательность моментов поступления требований $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 13, 15, 17, 23, 27\}$ и соответствующую последовательность продолжительностей обслуживания $\{5, 6, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 1\}$. Предполагается, что система свободна до поступления требования в момент 1.
- а) Рассчитайте среднее время ожидания для этих одиннадцати требований при обслуживании в порядке поступления (ОПП).
 - б) Повторите расчет для обратного порядка обслуживания (ООП).
 - в) Повторите расчет для ПК.
 - г) Повторите расчет для ПД.
 - д) Повторите расчет для ПКД.
 - е) Повторите расчет для ПДД.
 - ж) Подтвердите соотношение $D_1 \rightarrow D_2$, приведенное в тексте, для указанных шести случаев.

Глава 4

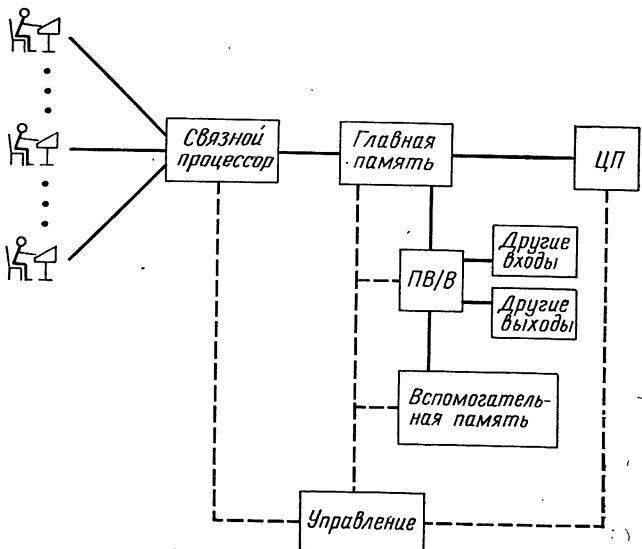
Вычислительные системы коллективного пользования с множественным доступом

Производство средств обработки информации является одной из самых быстрорастущих и наиболее динамичной научно-технической отраслью современности. В настоящее время можно недорого получить готовый доступ к вычислительным средствам. Возможно, в ближайшем будущем в распоряжении широкого круга пользователей окажутся коммунальные вычислительные машины. По мере роста мощности вычислительных средств, объема банков данных и числа пользователей, добивающихся доступа к этим средствам, должна также расти интенсивность конкуренции между пользователями за одновременный доступ к вычислительной системе. Их противоречивые требования, очевидно, приводят к очередям и задержкам, поэтому естественно включить в эту книгу настоящую главу, в которой даются примеры успешного применения теории массового обслуживания к анализу вычислительных систем с множественным доступом.

В начале 1950-х годов, когда впервые появились быстродействующие цифровые вычислительные машины, не казалось неестественным видеть программиста, сидящего за пультом ЭВМ и часами работающего с машиной один на один. Пользователь тратил определенное время на обдумывание и формулирование задачи для вычисления, затем ожидал, пока это вычисление будет выполнено машиной, после получения результата опять продолжал обдумывание и т. д. Такой способ работы был чрезвычайно эффективным, с точки зрения пользователя, но крайне расточительным в отношении возможностей машины. В конце 1950-х годов, когда на рынке появились более крупные, более быстродействующие и более дорогие машины, пользователь был удален из машинного зала и стал представлять свои задачи (обычно в виде перфокарт) оператору. Через несколько часов (а иногда дней) оператор возвращал стопки бумаги с результатами вычислений. Естественно, оператор накапливал несколько таких задач и пропускал их через машину «пачками». При этом способе входные (или выходные) данные обычно передавались на магнитную ленту (или с магнитной ленты), с которой (или на которую) данные могут быть переданы в основную систему значительно быстрее, чем с перфокарт (или на печатающее устройство). Метод работы с оператором:

обеспечивал большую загруженность машины и был, следовательно, эффективным с точки зрения использования машины, но совершенно неэффективным с точки зрения удовлетворения потока требований пользователей. Кроме того, избыточная емкость системы, доступная во время выполнения конкретного задания, не могла быть использована для какого-либо другого задания. Положение резко изменилось в начале 1960-х годов с предложением разделения времени, и пользователю опять был предоставлен прямой доступ к ЭВМ при помощи дистанционного пульта. При этом многочисленные пользователи за своими пультами получают доступ к ЭВМ одновременно, так как циклы размышлений и вычислений каждого пользователя не совпадают. Принцип, лежащий в основе разделения времени, состоит в том, что на фазе размышлений затрачивается значительно больше времени, чем на фазе вычислений (в большинстве случаев вычислений в диалоговом режиме), поэтому вычисление может производиться по запросам одного пользователя (или небольшого их числа), в то время как большинство других пользователей находятся в фазе размышлений. При надлежащем управлении вычислительная система коллективного пользования может обеспечить отличные характеристики обслуживания многим пользователям при сохранении высокого коэффициента использования технических средств благодаря одновременному применению приборов. Возможность одновременного обслуживания многих задач появилась при введении автономных каналов передачи данных, более крупных и дешевых оперативных запоминающих устройств, способных одновременно хранить несколько программ прерывания, защиты памяти и супервизорных системных программ, обеспечивающих упорядоченное и эффективное управление потоком путем применения сложных распределений ресурсов и их коллективного использования. Следующий естественный шаг в развитии вычислительных систем был сделан в конце 1960-х годов, когда было признано, что многие географически разнесенные вычислительные средства коллективного пользования могут быть объединены в сеть ЭВМ с тем, чтобы каждое средство могло поступить в коллективное пользование для всех клиентов. Обсуждение этих сетей отложим до следующей главы и рассмотрим здесь только модели массового обслуживания для отдельных вычислительных систем с множественным доступом.

Таким образом, в настоящей главе рассматривается совокупность удаленных терминалов, с которых пользователи получают одновременно доступ к совокупности средств конечной пропускной способности, обычно называемых вычислительной системой. Из фиг. 4.1 видно, что эти средства включают терминалы; линии связи, соединяющие терминалы с ЭВМ; связной процессор (СП), управляющий трафиком между пользователями и вычислительной системой; запоминающие устройства главной и вспомогательной памяти; вычислительные средства как центрального процессора



Фиг. 4.1. Структура вычислительной системы.

— поток данных, - - — управление.

(ЦП), так и процессора ввода/вывода (ПВ/В), который управляет потоком данных между главной памятью и вспомогательными устройствами; другие В/В устройства и все остальные каналы, соединяющие перечисленные средства. Кроме того, существуют функции управления (главным образом супервизорная программа), которые регулируют действие и назначение различных средств в системе. Очевидно, когда много программ пользователей поступают к этим разнообразным средствам, возникают многочисленные конфликтные ситуации; в настоящей главе представлены достижения, полученные к настоящему времени при моделировании и анализе таких структур.

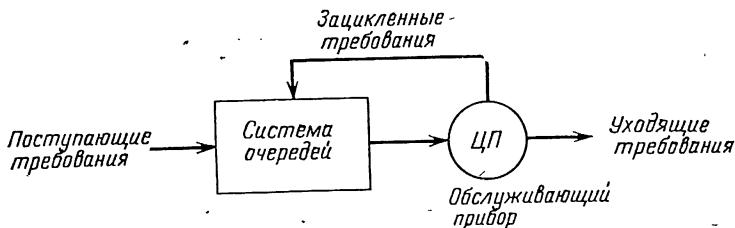
Определим три типа ресурсов: средства связи, вычислительные средства обработки, запоминающие средства. Таким образом, ясно, что речь идет о задаче использования многих средств (ресурсов), включающей рассмотрение последовательности требований на эти средства, создаваемой заданиями по мере их прохода через систему. Следовательно, возникает весьма сложная задача о сети массового обслуживания. Рассмотрение задачи использования многих средств откладывается на конец этой главы, где приводятся некоторые недавно полученные важные результаты. Начнем с простого случая состязания между многими клиентами за право использования одного средства. Фактически первая модель вычислительной системы коллективного пользования [39, 40] была описана именно в таком виде (как модель с одним средством), и ее

анализ относится, как мы теперь говорим, к области моделирования и анализа вычислительных систем. Различные результаты содержатся в ряде работ, включая [14, 22, 42, 44, 46, 48, 54, 55, 57, 66, 72, 75, 82].

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МОДЕЛИ

Вычислительная система коллективного пользования рассматривается здесь как совокупность средств (или ресурсов) и множества пользователей; пользователи конкурируют друг с другом в различные моменты времени за использование этих средств. Когда требования на средства поступают одновременно, возникают конфликты. Для разрешения таких конфликтов требуется алгоритм (или расписание), распределяющий средства среди пользователей; эта функция выполняется так называемым распределителем ресурсов. В первой рассматриваемой модели предполагается, что имеется только один ресурс (ЦП), на который поступают требования. Во второй модели, которой посвящены разд. 4.12 и 4.13, рассматривается более общая ситуация со многими ресурсами.

Весьма общая модель, описывающая способ, при помощи которого вычислительная система разрешает конфликтные требования к ЦП посредством разделения времени, показана на фиг. 4.2. Эта модель системы коллективного пользования состоит из *одного ресурса* (ЦП) и *системы очередей*, в которой требования ожидают обслуживания. Кроме того, существует *распределительный алгоритм* (расписание), который представляет собой набор решающих правил, определяющих, какое требование должно обслуживаться следующим и как долго. Таким образом, вновь поступающее требование помещается в систему очередей и, когда, наконец, распределительный алгоритм даст разрешение, поступает в обрабатывающее устройство. Интервал времени, в течение которого требованию разрешается оставаться в обслуживающем устройстве, называется его *квантом* (величина кванта может меняться). Предлагаемый квант может быть достаточным или недостаточным для удовлетворения требования. Если он достаточен, требование покидает систему, если же он недостаточен, требование вновь поступает в систему очередей как частично завершенная работа и



Фиг. 4.2. Модель СМО с обратной связью.

ожидает в этой системе до тех пор, пока распределительный алгоритм даст ему второй квант, и т. д. В конце концов после достаточного числа возвращений в обслуживающее устройство требование получит необходимое обслуживание и покинет систему. Это правило абсолютного приоритета с дообслуживанием. По очевидным причинам такая общая модель может быть названа СМО с обратной связью.

Общепризнано, что одним из главных преимуществ системы коллективного пользования является возможность использования ЭВМ одновременно многими пользователями в диалоговом режиме. Целью этой системы является предоставление каждому из пользователей всей ЭВМ (как им представляется), так как диалоговое взаимодействие требует быстрого ответа на частые требования — выполнить небольшие вычисления. В то же время задания, которые предъявляют большие требования к ЦП, не должны обслуживаться очень быстро, так как обычно такие задания не выполняются в диалоговом режиме. Таким образом, предпочтительная обработка предоставляется коротким заданиям (за счет более длинных!). Однако учитывается, что не известно, как долго каждое поступающее требование будет занимать ЦП. Следовательно, возникает вопрос: как можно обслуживать задания, предоставляя приоритет, зависящий от их длительности? Решение, очевидно, состоит в том, чтобы предоставить каждому заданию возможность продемонстрировать, что оно действительно является коротким! Описанная выше модель СМО с обратной связью показывает, что если задание длинное, оно потребует многократного обращения к ЦП. Таким образом, путем повторяющихся испытаний множества заданий, требующих обслуживания, можно последовательно обнаружить те, которые являются короткими. Изменяя распределительный алгоритм, можно влиять в различной степени на предпочтительную обработку коротких заданий. Как это сделать — обсуждается ниже.

Рассмотрим теперь способы описания требований, а также детали структуры модели, показанной на фиг. 4.2. Как обычно, определим функцию распределения промежутков времени между поступающими требованиями¹⁾ $A(t)$ и функцию распределения требуемого времени обслуживания $B(x)$. Квант времени, предоставляемый требованию, может зависеть от приоритета, устанавливающего извне, а также от числа посещений обслуживающего прибора, которое требование уже сделало. В соответствии с этим определим

$$q_{pn} \triangleq \text{Квант, предоставляемый требованию приоритетного класса } p \text{ при его } n\text{-м поступлении на обслуживание.} \quad (4.1)$$

¹⁾ Вплоть до разд. 4.11 будет предполагаться, что требования создаются бесконечным источником, так что $A(t)$ не зависит от состояния системы.

Когда квант для требования кончается, оно удаляется из обслуживающего прибора и туда поступает следующее требование. Дополнительное время, обычно необходимое для выполнения этой операции, называется *временем замены*. Следовательно, не весь отведенный квант используется для полезной обработки. При заданных $A(t)$, $B(x)$ и $q_{\text{рн}}$ требуется описать внутреннюю структуру системы очередей (что эквивалентно заданию распределительного алгоритма). Некоторые конкретные распределительные алгоритмы будут рассмотрены ниже.

Определив указанные величины, можно приступить к анализу СМО с обратной связью. Как правило, желательно найти распределение общего времени пребывания требования в системе (*время ответа*). Конечно, обычно рассматривается условное распределение при заданной величине обслуживания x , необходимого для данного требования, так как задача состоит в предпочтительной обработке коротких требований за счет длинных. Введем условное распределение

$$S(y | x) \triangleq P[\text{время ответа} \leq y | \tilde{x} = x]. \quad (4.2)$$

В некоторых случаях это распределение может быть получено, часто же пытаются найти только *среднее время ответа*, которое определяется как

$$T(x) \triangleq \text{среднее время ответа на требование, для обработки которого нужно } x \text{ секунд.} \quad (4.3)$$

Обычно $T(x)$ считается *единственной наиболее важной количественной характеристикой* таких систем. Как всегда, определим время ожидания как разность между временем ответа и временем обслуживания, так что среднее условное время ожидания (при условии, что требуемое время обслуживания равно x секунд) дается равенством

$$W(x) = T(x) - x. \quad ■ (4.4)$$

Функцию $W(x)$ называют также *растраченным временем* (каковым оно в действительности и является!). В рассматриваемых ниже системах коллективного использования процессора эта интерпретация является более подходящей.

В опубликованной литературе приведены разнообразные аналитические модели вычислительных систем коллективного пользования и полученные для них различные результаты. Для данной книги выбраны некоторые из этих моделей и результатов, которые, по-видимому, характеризуют работу многих систем коллективного пользования и в то же время демонстрируют основные применяемые здесь методы теории массового обслуживания.

В дальнейшем делаются следующие предположения. Во-первых, допускается, что заранее ничего не известно о точном време-

ний обслуживания требования, а известен лишь закон распределения времени обслуживания. Во-вторых, обычно предполагается, что время замены составляет некоторую фиксированную долю кванта. В дальнейшем время замены полагается равным нулю, а средняя скорость обслуживания уменьшается на соответствующий процент¹⁾ [50]. Вместе с тем если время замены при n -м посещении ЦП равно θ_{pn} , то его можно точно моделировать путем замены $B(x)$ на $B_\theta(x)$, где

$$B_\theta(x) = \begin{cases} B\left(\sum_{i=1}^{n-1}(q_{pi} - \theta_{pi})\right), & \sum_{i=1}^{n-1} q_{pi} \leq x \leq \theta_{pn} + \sum_{i=1}^{n-1} q_{pi}, \\ B\left(x - \sum_{i=1}^n \theta_{pi}\right), & \theta_{pn} + \sum_{i=1}^{n-1} q_{pi} \leq x \leq \sum_{i=1}^n q_{pi}. \end{cases}$$

Если в рассматриваемых ниже моделях вместо $B(x)$ использовать $B_\theta(x)$, время замены будет полностью учтено. Таким образом, для наших целей при дальнейшем исследовании временем замены можно пренебречь (более подробно время замены рассматривается в задачах). В-третьих, принимается точка зрения, согласно которой все кванты сокращаются до нуля, в результате чего получается хорошо известная модель *разделения процессора* для системы коллективного пользования. Это понятие впервые было введено в [43]. Введение этого нулевого предела для кванта очень удобно для анализа. При исследованиях в случае конечного значения кванта, описанных в литературе, сталкиваются с серьезными трудностями из-за того, что требование может покинуть систему до окончания текущего кванта. Это вызывает значительные математические затруднения при расчете неиспользованной части кванта. Когда же квант уменьшается до нуля, эти трудности исчезают, и получающаяся в результате количественная характеристика является очень хорошим приближением к результатам с конечным квантом. Ниже при исследовании системы с круговым опросом станет ясно, почему было принято название «разделение процессора». Эта глава включает главным образом результаты, относящиеся к разделению процессора²⁾.

¹⁾ Таким образом, если от каждого кванта в q секунд на замену отводится ϑ секунд, то доля времени $\varphi = \vartheta/q$ окажется потерянной. Это можно моделировать путем замены каждого требуемого времени обслуживания x секунд на время обслуживания $x/(1-\varphi)$ секунд.

²⁾ В этом случае не только упрощается анализ, но просто выражаются и сами результаты. Это очень важно, когда результаты предназначаются для использования проектировщиками систем. Нужно всегда остерегаться результатов, которые оказываются настолько сложными, что для их численного решения требуются большие вычислительные усилия, чем при проведении (более реалистично го) моделирования самой системы.

Если специально не оговаривается, рассматривающие ниже модели являются системами $M/G/1$, как обычно, с параметрами λ , x и $\rho = \lambda x < 1$.

4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОСТИГНУТОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ [45]

Во всех СМО с обратной связью, которые будут исследоваться ниже, очевидно, в любой момент времени существуют разбросанные по системе задания, получившие различное количество полезного (или достигнутого) обслуживания. Представляет интерес найти распределение этого достигнутого обслуживания для требований, которые еще находятся в системе, при различных распределительных алгоритмах, рассматриваемых ниже. К счастью, эти распределения можно найти для всех моделей СМО с обратной связью, которые будут описаны, и решение является очень простым; в самом деле, результаты этого раздела справедливы для системы $G/G/1$. Определим¹⁾

$$n(x) \triangleq \text{средняя плотность требований, еще находящихся в системе, которые до рассматриваемого момента времени получили } x \text{ секунд обслуживания.} \quad (4.5)$$

Эта плотность имеет размерность числа требований в секунду, и ее интерпретация имеет обычный смысл функции плотности, а именно

$$\int_{x_1}^{x_2} n(x) dx = \text{среднее число требований, еще находящихся в системе, которые до рассматриваемого момента времени получили обслуживание между } x_1 \text{ и } x_2 \text{ секундами.} \quad (4.6)$$

Такая плотность дает описание композиции различных очередей и меру относительного состояния частичного обслуживания, полученного требованиями, которые еще находятся в системе. Рассмотрим два случая: во-первых, случай конечных квантов, для которого определим

$$N(x) \triangleq \text{среднее число требований в системе очередей, достигнутое обслуживание которых в точности равно } x \text{ секунд,} \quad (4.7)$$

и, во-вторых, случай разделения процессора, когда все кванты стремятся к нулю и приобретает интерес плотность $n(x)$. Кроме того, для удобства отбросим внешние приоритеты, которые могут быть установлены в системе, и, следовательно, рассмотрим только случай $q_{pn} = q_n$, такой, что все требования при них n -м поступле-

¹⁾ Эта плотность вводится в предположении, что рассматриваются предельные результаты для задачи разделения процессора.

нии в ЦП получают один и тот же квант q_n (для случая приоритетов см. задачу 4.2). Найдем теперь $N(x)$ и $n(x)$.

В случае СМО с обратной связью, для которой $q_n > 0$, очевидно, что все требования, которые находились в обслуживающем приборе ровно n раз, должны до рассматриваемого момента получить обслуживание в размере

$$Q_n \triangleq \sum_{i=1}^n q_i. \quad (4.8)$$

В результате видим, что для любого требования на обслуживание, лежащее в интервале $Q_{n-1} < x < Q_n$, должно удовлетворяться равенство $W(x) = W(Q_n)$, так как требование, которому необходимо обслуживание в течение x секунд из этого интервала, должно поступать в систему очередей точно n раз. Единственное различие между требованиями с таким временем обслуживания состоит в том, что они проводят разное количество времени в ЦП в течение последнего цикла. Кроме того, $W(Q_n)$ — это среднее время, проведенное *любым* требованием, время обслуживания которого превышает Q_{n-1} секунд, в системе очередей до его n -го поступления в ЦП. Поэтому очевидно, что среднее время, проведенное этим требованием в системе очередей после его $(n-1)$ -го, но до n -го поступления в ЦП, будет в среднем равно $W(Q_n) - W(Q_{n-1})$. Так как интенсивность поступления требований равна λ , очевидно, что $\lambda[1 - B(Q_n)]$ — средняя интенсивность работы, возвращающейся в систему очередей после n -кратного обслуживания в ЦП, и, следовательно, каждое из этих возвращающихся требований получает к рассматриваемому моменту времени точно Q_n секунд обслуживания. Следовательно, формула Литтла позволяет непосредственно написать

$$N(Q_n) = \lambda[1 - B(Q_n)][W(Q_{n+1}) - W(Q_n)]. \quad (4.9)$$

Это является главным результатом для конечных квантов, дающим среднее число требований с достигнутым обслуживанием Q_n секунд в системе очередей.

Во втором случае рассмотрим естественный предел, когда все кванты стремятся к нулю; получается следующий аналогичный результат, выраженный через среднюю плотность требований:

$$n_q(x) = \lambda[1 - B(x)] \frac{dW(x)}{dx}, \quad ■ (4.10)$$

где $n_q(x)$ относится только к системе очередей. Отметим, что $n(x)$ относится ко всей системе (включая очереди и ЦП) и, таким образом, можно связать $n(x)$ с временем пребывания в системе, а не с временем ожидания в очереди, что непосредственно дает

$$n(x) = \lambda[1 - B(x)] \frac{dT(x)}{dx}. \quad ■ (4.11)$$

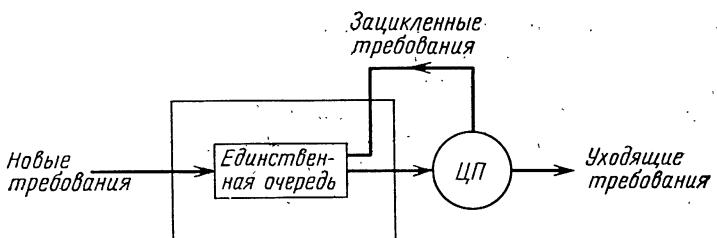
Этот основной результат выражает распределение достигнутого обслуживания через известные величины λ и $B(x)$ и главную количественную характеристику таких систем, а именно условное среднее время ответа $T(x)$. Удивительно, что в полученное решение входит производная этой характеристики. Этот результат нам потребуется скоро. Сейчас же заметим, что $dT(x)/dx$ является обратной величиной интенсивности обслуживания, предоставленного заданию с достигнутым обслуживанием x секунд.

4.3. АЛГОРИТМ ПАКЕТНОЙ ОБРАБОТКИ

Простейшим распределительным алгоритмом, который будет рассмотрен, является алгоритм пакетной обработки. Предположим, что обслуживание происходит в порядке поступления и вновь поступающее требование становится в хвост единственной очереди. ЦП всегда выбирает для обслуживания требование, стоящее в голове очереди, и предоставляет ему один квант времени обслуживания. Простейший способ свести этот случай к классической системе с обслуживанием в порядке поступления — это предположить, что все кванты имеют бесконечную продолжительность. В результате придет к системе $M/G/1$ с обслуживанием в порядке поступления. Другой путь — предположить, что квант бесконечно малый (случай разделения процессора), но с дополнительным ограничением, что требования удаляются из обслуживающего прибора вследствие окончания их квантов и поступают обратно прямо в голову единственной очереди, в результате чего сразу же вновь поступают на обслуживание (фиг. 4.3). В любом случае имеет место система, для которой решение дано в разд. 1.7. Кроме того, в разд. 3.4 отмечается, что все дисциплины обслуживания, которые не учитывают времени обслуживания при определении порядка обслуживания, приводят к такому же распределению числа требований в системе. Производящая функция этого распределения, конечно, дается равенством (3.15). Для обслуживания в порядке поступления преобразование плотности распределения времени ожидания определяется равенством (1.85) (преобразованное равенство Поллячека—Хинчина). Заметим, что это выражение не зависит от времени обслуживания требования в ЦП. Определяя теперь преобразование Лапласа условной плотности распределения времени ответа как

$$S^*(s | x) \triangleq \int_0^\infty e^{-sy} dS(y | x)$$

и учитывая, что время ответа является суммой времени ожидания и времени обслуживания (где преобразование плотности этого за-



Фиг. 4.3. СМО с обслуживанием в порядке поступления с бесконечно малым квантом.

данного времени обслуживания x равно e^{-sx}), непосредственно находим

$$S^*(s|x) = \frac{s(1-\rho)e^{-sx}}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}. \quad ■ (4.12)$$

Таким образом, можно видеть, что условное среднее время ответа должно быть суммой заданного времени обслуживания x и среднего времени ожидания в системе $M/G/1$, т. е.

$$T(x) = \frac{W_0}{1 - \rho} + x, \quad ■ (4.13)$$

где $W_0 = \lambda \bar{x}^2 / 2$.

Важное замечание, на которое необходимо обратить внимание в этом случае, состоит в том, что пакетная обработка не делает никакой дискриминации заданий на основе требуемого ими времени обслуживания x . В самом деле, среднее время ожидания не зависит от времени обслуживания, и, таким образом, эта система осуществляет *наименьшую возможную дискриминацию* требований. Очевидно, это плохой кандидат для системы коллективного пользования, когда требуется найти способ сокращения времени ответа для коротких заданий.

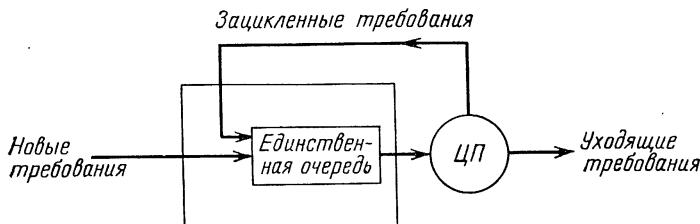
4.4. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ КРУГОВОГО ОПРОСА

По-видимому, наиболее известным и широко применяемым распределительным алгоритмом в вычислительных системах коллективного пользования является алгоритм кругового опроса (КО). Структура соответствующей чрезвычайно интересной системы показана на фиг. 4.4. Рассмотрим случай $q_{pn} = q \rightarrow 0$, когда все кванты имеют один и тот же размер, стремящийся к нулю. Вновь поступающие требования становятся в единственную очередь, продвигаются к ее голове в порядке поступления и, наконец, получают квант обслуживания. Когда этот квант истекает и необходимо дальнейшее обслуживание, требование возвращается в хвост *той*

же очереди и повторяет цикл. Очевидно, в такой системе разделения процессора требование совершают бесконечное число циклов, каждый из которых является бесконечно коротким и во время которого требование получает бесконечно малое обслуживание, пока наконец достигнутое обслуживание станет равным необходимому, и в этот момент требование покинет систему.

Представим себе случай, когда требование поступает в пустую систему. В этом случае оно получает обслуживание с интенсивностью 1 с/с. Когда поступит второе требование, которое также начнет циклическое движение, каждое требование будет получать обслуживание с интенсивностью $1/2$ с/с, так как эти два требования будут сменять друг друга в обслуживающем приборе. При наличии k требований в системе каждое получает обслуживание с интенсивностью $1/k$ с/с, откуда и происходит название *разделение процессора*, так как действительно все требования делят между собой поровну пропускную способность процессора. Можно принять одну из двух точек зрения: согласно одной из них требованию предоставляется *полная пропускная способность* процессора на некоторую часть времени, согласно же другой требованию предоставляется *часть пропускной способности* процессора на *полное время*. В первом случае говорят о разделении времени, во втором — о разделении процессора.

Рассматриваемая система была впервые исследована автором в 1964 г. [39] как марковская модель с дискретным временем¹⁾, а позже — как случай разделения процессора [43]. Эта модель использовалась также Чаном [14] и Шемером [83] и в других работах, причем во всех случаях рассматривалась система $M/M/1$. По-видимому, впервые система $M/G/1$ была исследована в работах [78, 79], где было найдено, что в этом случае решение для среднего времени ответа не зависит от вида распределения времени обслуживания (а зависит только от среднего времени обслуживания \bar{x}). Кроме того, в работе [21] найдено распределение времени ожидания для системы $M/M/1$. Некоторые из этих резуль-



Фиг. 4.4. Система с круговым опросом.

¹⁾ Подход, используемый в работе [39], где рассчитывается задержка на каждом цикле, был затем развит многими авторами при исследовании более сложных моделей.

татов приводятся ниже. Начнем с отыскания условного времени ответа $T(x)$ для случая M/G/1, причем будем использовать более простой способ, чем в работе [78].

Напомним из разд. 1.7, что (мгновенная) интенсивность отказов компоненты при заданном ее достигнутом возрасте связана с плотностью распределения ее времени жизни $f(x)$ довольно простым образом. Здесь представляет интерес интенсивность завершения обслуживания при условии, что задано достигнутое обслуживание (возраст) x секунд. Эту интенсивность обозначим через $\mu(x)$; имеем

$$\mu(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим теперь $n(x)$, среднюю плотность требований в системе с достигнутым обслуживанием x секунд. Вернемся на некоторое время к конечному (но очень маленькому) кванту Δx . Заметим, что требования, которые имеют достигнутое обслуживание x секунд, после того как они пройдут очередь, будут иметь достигнутое обслуживание $x + \Delta x$ секунд. Те из этих требований, которые остаются в системе (т. е. требуют большего обслуживания, чем $x + \Delta x$), составят полное множество требований, достигших обслуживания $x + \Delta x$. Таким образом, плотность $n(x + \Delta x)$ равна [с точностью до $o(\Delta x)$] значению плотности в точке x , умноженному на условную вероятность $[1 - \mu(x)\Delta x]$ того, что требование нуждается в большем обслуживании, чем $x + \Delta x$, при условии, что оно уже получило обслуживание x . Следовательно, имеем

$$n(x + \Delta x) = n(x) [1 - \mu(x)\Delta x] + o(\Delta x).$$

Если теперь опять положить $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\frac{dn(x)}{dx} = -\mu(x)n(x).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет решение

$$n(x) = n(0) \exp \left[- \int_0^x \mu(y) dy \right].$$

Интеграл в показателе экспоненты легко вычисляется при помощи равенства (4.14) и простой подстановки $v(x) = 1 - B(x)$, что дает

$$-\int_0^x \mu(y) dy = \ln [1 - B(x)].$$

Окончательно получаем

$$n(x) = n(0) [1 - B(x)]. \quad (4.15)$$

Это общая зависимость для распределения достигнутого обслуживания в системе с круговым опросом и разделением процессора.

Выражение для $n(x)$ в равенстве (4.15) можно приравнять к выражению в равенстве (4.11). В результате получается

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{n(0)}{\lambda}.$$

Заметив, что в системе с круговым опросом $T(0) = 0$, найдем решение последнего уравнения в виде

$$T(x) = \frac{n(0)}{\lambda}x, \quad x \geq 0. \quad (4.16)$$

Для вычисления неизвестной постоянной $n(0)$ рассмотрим время ответа в случае очень большого времени обслуживания. При этом, как известно, все требования, поступающие в течение времени, пока длинное контрольное требование находится в системе, должны быть полностью обслужены до ухода этого требования. Таким образом, контрольное требование можно рассматривать как требование низшего приоритета в системе с абсолютным приоритетом и обслуживанием в порядке приоритета (при $x_1 = x \rightarrow \infty$). Таким образом, из равенства (3.39) имеем

$$T(x) = \frac{x(1 - \rho) + W_0}{(1 - \rho)^2}$$

и в пределе

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = \frac{x}{1 - \rho}.$$

Это позволяет вычислить постоянную $n(0)$ из равенства (4.16), которая равна $\lambda/(1-\rho)$, что окончательно приводит к точному решению для системы с разделением процессора и круговым опросом

$$T(x) = \frac{x}{1 - \rho}. \quad ■ (4.17)$$

Это условное время ответа, которое требовалось найти. Нужно отметить, что оно имеет чрезвычайно простой вид. Очевидно, также имеет место равенство

$$W(x) = \frac{\rho x}{1 - \rho}. \quad (4.18)$$

Перечислим теперь свойства этого решения.

1. Дискриминация требований является *линейной*. Иначе говоря, время ответа зависит от времени обслуживания в соответствии со строго линейным законом, из которого следует, что в два

раза большее задание в среднем пребывает в системе вдвое дольше. Видимо, это самая простая дискриминация, которую только можно предположить.

2. Среднее время ответа не зависит от вида распределения времени обслуживания $B(x)$, а зависит только от среднего значения времени обслуживания через $\rho = \bar{\lambda}x$. Таким образом, в системе разделения процессора с круговым опросом не существует зависимости среднего времени ответа от дисперсии (или высших моментов) времени обслуживания. Это показывает, что среднее время ожидания $W = \int_0^\infty W(x)b(x)dx = \rho\bar{x}/(1-\rho)$ конечно, если $\rho < 1$ и

$\bar{x} < \infty$. Заметим, что при этих условиях система с обслуживанием в порядке поступления может иметь неограниченное среднее время ожидания, если $x^2 \rightarrow \infty$.

3. Если взять отношение растроченного времени к времени обслуживания, то получим

$$\frac{W(x)}{x} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Поскольку это отношение определяет, какое количество времени должно быть пожертвовано на ожидание каждой единицы времени обслуживания, его можно рассматривать в общем случае как некоторую разновидность функции штрафа, налагаемого на клиента (требование) за предоставление ему x секунд обслуживания. В случае кругового опроса функция штрафа не зависит от времени обслуживания требования. Вместе с тем представим себе функцию штрафа, которая растет с увеличением времени обслуживания. В этом случае требования с большим временем обслуживания облагаются большим штрафом на единицу времени обслуживания. В подобном случае очевидной контрмерой [19] по отношению к распределительному алгоритму, производящему такую функцию, со стороны пользователя было бы разделение задания на несколько более мелких заданий и тем самым получение предпочтительной обработки (на единицу требуемого обслуживания), предоставляемой коротким заданиям. Наоборот, рассмотрим случай некоторого распределительного алгоритма, который производит функцию штрафа, уменьшающуюся с увеличением времени обслуживания (например, при обслуживании в порядке поступления). Можно видеть, что более длинные задания получают предпочтительную обработку на единицу времени обслуживания и очевидной контрмерой пользователей явилось бы объединение программ нескольких заданий и представление в вычислительную систему

чрезвычайно длинного задания. Такая тактика пользователей¹⁾ обычно приводит к увеличению избыточности системы и в общем случае нежелательна, поэтому система с круговым опросом, по-видимому, устраниет причины любых таких необычных действий со стороны пользователей.

4. Другое очень хорошее свойство алгоритма кругового опроса для случая показательного распределения времени обслуживания состоит в том, что задание средней продолжительности обслуживания требует в среднем такого же времени пребывания в системе с круговым опросом, как и в системе с пакетной обработкой. Таким образом, при показательном распределении времени обслуживания задания короче средних по продолжительности обслуживания в системе с круговым опросом будут в лучших условиях, чем в системе с пакетной обработкой. Соответственно задания длиннее средних будут в худших условиях. Эта точка раздела между круговым опросом и пакетной обработкой в случае систем $M/G/1$ появляется, как легко видеть, при $x = \bar{x}^2/2\bar{x}$ (среднее остаточное время обслуживания!).

Для случая показательного времени обслуживания с помощью модели разделения процессора с круговым опросом можно найти распределение времени ответа [21]. Решение имеет вид

$$S^*(s|x) = \frac{(1-\rho)(1-\rho r^2) \exp\{-[\lambda(1-r)-s]x\}}{(1-\rho r)^2 - \rho(1-r)^2 \exp[-\mu x(1-\rho r^2)/r]}, \quad (4.19)$$

где r принимает значение наименьшего корня уравнения

$$\lambda r^2 - r(\lambda + \mu + s) + \mu = 0. \quad (4.20)$$

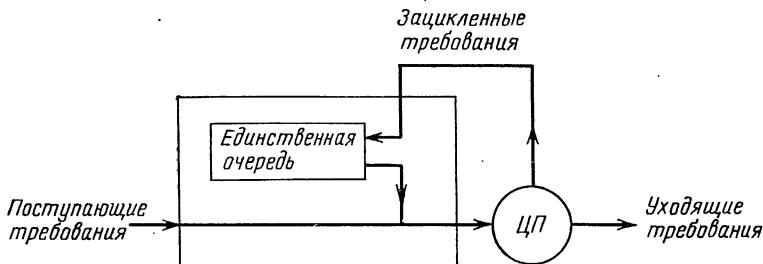
Отсюда находим, что условное среднее время ответа определяется с помощью соотношения (4.17), а также что условная дисперсия времени ответа дается равенством

$$D(\text{время ответа} | \tilde{x}=x) = \frac{2\rho x}{\mu(1-\rho)^3} - \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^4} [1 - e^{-\mu(1-\rho)x}]. \quad (4.21)$$

Отметим, что эта дисперсия является линейной функцией времени обслуживания при больших его значениях. Кроме того, дисперсия времени ответа в системе с круговым опросом потенциально гораздо больше, чем в системе пакетной обработки.

Таким образом, круговой опрос дает возможность построить очень естественную, достаточно общую и аналитически простую схему осуществления распределительных алгоритмов в вычислительных системах коллективного пользования. Рассмотрим теперь,

¹⁾ Конечно, такая тактика также резко видоизменяет предположения, лежащие в основе системы $M/G/1$, и в таком случае приведенный анализ уже не будет пригодным.



Фиг. 4.5. Система обслуживания в обратном порядке с абсолютными приоритетами.

казалось бы, несвязанную с ним дисциплину распределения, а именно дисциплину обслуживания в обратном порядке.

4.5. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБСЛУЖИВАНИЯ В ОБРАТНОМ ПОРЯДКЕ

Интересным распределительным алгоритмом является обслуживание в обратном порядке (последний поступивший обслуживается первым), при котором самое последнее из поступивших требований имеет *преимущество* полного занятия процессора до тех пор, пока либо это требование будет вытеснено вновь поступившим, либо полностью получит необходимое обслуживание. Выше (в разд. 3.5) была рассмотрена система обслуживания в обратном порядке с относительным приоритетом; система с абсолютным приоритетом и дообслуживанием обладает интересными свойствами, которые будут рассмотрены ниже. Внутренняя структура СМО для этого случая показана на фиг. 4.5. Эта система также может функционировать как система с разделением процессора, в которой кванты сокращаются до нуля. Всякий раз, когда ЦП освобождается, требование, стоящее в голове единственной очереди, поступает на обслуживание и тем самым реализуется обратный порядок обслуживания.

Найдем сначала для этого случая условное среднее время ответа. Для требования, которому необходимы x секунд обслуживания, время ответа будет равно его времени обслуживания x плюс время ожидания. В среднем время ожидания равно среднему числу (λx) требований, которые имеют преимущество перед рассматриваемым, умноженному на среднее время обслуживания этих требований. Длина каждого периода занятости в среднем равна $x/(1-\rho)$, как известно из равенства (1.90). Следовательно, условное среднее время ответа имеет вид

$$T(x) = x + \frac{\lambda x \bar{x}}{1 - \rho},$$

или

$$T(x) = \frac{x}{1 - p}. \quad \blacksquare \quad (4.22)$$

Удивительно, что это среднее время ответа является таким же, как и в системе с круговым опросом! (Оба результата установлены для системы $M/G/1$.) Таким образом, все свойства среднего времени ответа, характерные для системы с круговым опросом, справедливы для системы с обслуживанием в обратном порядке. Поэтому можно заключить, что среднее время ответа само по себе является не очень хорошим показателем работы системы.

Распределение времени ответа в данном случае находится легко. Во-первых, напомним из разд. 3.3, что каждое новое поступающее требование порождает свой собственный период субзанятости. Для обслуживания в обратном порядке с абсолютным приоритетом длина этого периода субзанятости равна времени ответа для поступающего требования. Для задания, требующего обслуживания в течение x секунд, можно воспользоваться анализом цикла задержки, приведенным в разд. 3.3, где $Y_0 = x$, а Y_c — только что упомянутый период субзанятости (время ответа). Таким образом, $S^*(s|x) = G_c^*(s)$, причем $G_o^*(s) = e^{-sx}$, что на основании равенства (3.13) дает

$$S^*(s|x) = e^{-[s + \lambda - \lambda G^*(s)]x}, \quad (4.23)$$

где $G^*(s)$ определяется равенством (3.14).

Таким образом, еще раз демонстрируется метод преимущественной обработки коротких требований за счет более длинных.

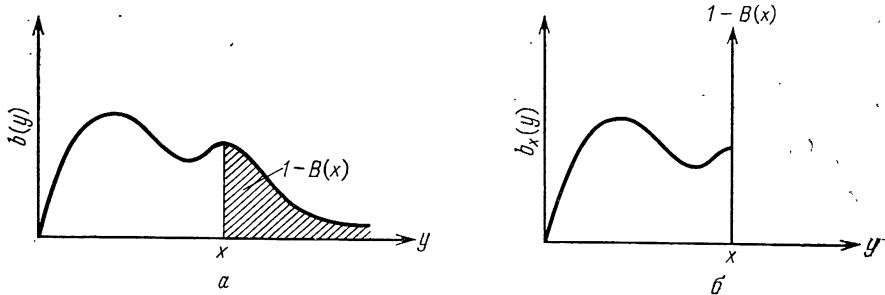
4.6. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ С ПЕРЕДНИМ И ЗАДНИМ ПЛАНАМИ

Обсуждавшиеся до сих пор системы дают различные степени преимущества коротким заданиям. Как уже говорилось, эти преимущества могут быть приданы потому, что можно обнаружить, какие именно задания являются короткими. Можно поставить вопрос о том, какой распределительный алгоритм дает *наибольшую* дискриминацию в пользу очень коротких заданий. Ответ очевиден: это такой распределительный алгоритм, который предоставляет *очередное обслуживание такому заданию (или заданиям), которое до сих пор обслуживалось меньше всех других*. Такой алгоритм обычно называется обобщенным распределительным алгоритмом.

с передним и задним планами (ПЗП)¹⁾. Обобщенный случай, который здесь рассматривается, является моделью разделения процессора, так как размер кванта фактически равен нулю. Несколько задач могут разделить процессор следующим образом. Рассмотрим опять поступившее требование, которое застает систему свободной. Процессор дает ему обслуживание с интенсивностью 1 с/с. Через некоторое время, например в момент t_1 , поступает новое требование; тогда обслуживающий прибор прекращает обслуживание первого требования и переходит к обслуживанию второго требования, обеспечивая теперь обслуживание с интенсивностью 1 с/с для второго требования. Если в течение следующих t_1 секунд требований не поступает, второе и первое требования получат в точности одно и то же количество обслуживания. После этого они разделят процессор и будут получать обслуживание с интенсивностью $1/2$ с/с каждое. Так будет продолжаться до тех пор, пока поступит новое требование или пока обслуживание одного из двух требований будет закончено и оно покинет систему. Обслуживание выполняется таким образом, что процессор всегда обращается ко всем тем требованиям, которые получили наименьшее обслуживание.

Найдем условное среднее время ответа для такой системы. Сделаем сначала следующее замечание. Когда в систему поступает меченое требование с временем обслуживания x секунд, оно застает там другие требования, некоторые из которых уже получили обслуживание меньшее, а некоторые большее чем x секунд. Очевидно, что все требования, которые имеют достигнутое обслуживание, большее или равное x секунд, никак не мешают меченому требованию. Аналогичным образом любое требование с достигнутым обслуживанием, меньшим x секунд, будет принято на обслуживание, не превышающее x секунд до того, как рассматриваемое меченое требование получит x секунд обслуживания. Таким образом, с точки зрения рассматриваемого меченого требования любое

¹⁾ Это название (*foreground-background*) происходит от алгоритма с конечным квантом, при котором существуют две очереди. Вновь поступающее требование становится в первую очередь и ждет обслуживания в порядке поступления, чтобы получить первый квант. Когда этот (конечный) квант кончается, требование переходит в хвост второй очереди, и затем в каждый момент времени, когда это требование пройдет обслуживание, оно становится в хвост той же второй очереди. Обслуживающий прибор всегда обращается к первой очереди, пока в ней есть требования, и только когда эта очередь исчезает, прибор обращается ко второй очереди. Таким образом, первая очередь может рассматриваться как очередь переднего плана (которая обслуживается в надежде на то, что потребуется не больше одного кванта), а вторая очередь — как очередь заднего плана (содержащая требования, которые нуждаются в более длительном обслуживании и, следовательно, могут рассматриваться как требования заднего плана). Если предположить наличие N очередей (а не двух) и считать, что $N \rightarrow \infty$, а квант $q \rightarrow 0$, то придем к обобщенному алгоритму с передним и задним планами, исследуемому в настоящем разделе.



Фиг. 4.6. Усеченная ПРВ времени обслуживания.

задание, требующее свыше x секунд обслуживания, может также покинуть систему, когда оно получит это обслуживание. Поэтому рассмотрим следующую усеченную функцию распределения обслуживания:

$$B_x(y) \triangleq \begin{cases} B(y), & y < x, \\ 1, & y \geq x. \end{cases}$$

Соответствующая ПРВ $b_x(y)$ показана на фиг. 4.6, б, где, как видно, плотность времени обслуживания, меньшего x , является такой же, как плотность $b(y)$ первоначальной системы M/G/1. Вероятностная мера всех продолжительностей обслуживания, равных или превосходящих x , собирается в импульс площадью $1 - B(x)$ в точке $y = x$. Представляют интерес моменты этого усеченного распределения, определяемые в виде

$$\bar{x}_x^n \triangleq \int_0^x y^n dB(y) + x^n [1 - B(x)]. \quad (4.24)$$

Можно, следовательно, определить коэффициент использования, связанный с этой усеченной ПРВ, как

$$\rho_x \triangleq \lambda \bar{x}_x. \quad (4.25)$$

Заметим, что $\bar{x}_{\infty}^n = \bar{x}^n$ и $\rho_{\infty} = \rho$. Если рассмотреть систему M/G/1, обслуживающую требования в порядке их поступления, но с временем обслуживания, усеченным, как показано выше, то можно найти, что среднее время ожидания (или задолженность) W_x в этой системе просто определяется формулой Поллячека—Хинчина для среднего времени ожидания (1.82) и может быть в рассматриваемом (усеченном) случае выражено в виде

$$W_x = -\frac{\lambda \bar{x}_x^2}{2(1 - \rho_x)}. \quad (4.26)$$

Легко заметить, что это является средним количеством «работы», которую застает новое требование, поступающее в модифицированную систему (незаконченная работа является марковским процессом для системы $M/G/1$). Для первоначальной системы с передним и задним планами известно, что новое требование при поступлении застает в системе среднее количество работы, равное $W = -\lambda \bar{x}^2 / 2(1 - \rho)$. Это справедливо на основании закона сохранения из гл. 3. До момента ухода из системы нового требования (к которому необходимо обслуживание в течение x секунд) должна быть завершена только часть W_x этой работы.

Теперь можно перейти к вычислению $T(x)$. Рассматриваемое меченое требование задерживается в среднем на W_x секунд вследствие задолженности системы, которую оно застает, и затем на x секунд из-за собственного обслуживания. Кроме того, во время его пребывания в системе в среднем поступает $\lambda T(x)$ новых требований, каждое из которых задержит его в среднем на \bar{x}_x секунд, как указывалось выше. Таким образом, имеем

$$T(x) = W_x + x + \lambda T(x) \bar{x}_x,$$

откуда непосредственно следует

$$T(x) = \frac{W_x + x}{1 - \rho_x}, \quad ■ (4.27)$$

что дает окончательное решение для среднего условного времени ответа в системе ПЗП. Таким образом, можно видеть, как просто анализировать такие системы разделения процессора.

В работах [18, 20, 81] исследуется система ПЗП с конечным квантом. Преобразование Лапласа для распределения времени ответа выводится в работах [81, 2, 3]. Этот вывод основывается главным образом на тех же соображениях, которые использовались при получении среднего времени ответа, когда рассматривалась система с обслуживанием в порядке приоритета, с абсолютным приоритетом и тремя приоритетными классами. Высший приоритетный класс соответствует требованиям с распределением времени обслуживания $B_x(y)$, а второй класс соответствует меченою требованию, которому необходимо обслуживание в течение x секунд (нижшим приоритетным классом пренебрегаем). Решение, полученное в работе [81], сводится в основном к следующему. Определим $B_x^*(s)$ как преобразование Лапласа усеченной плотности распределения, показанной на фиг. 4.6. Затем рекуррентно, как (1.89), найдем преобразование для периода занятости в виде

$$G_x^*(s) = B_x^*(s + \lambda - \lambda G_x^*(s)).$$

Наконец, определим преобразование ПРВ работы, которую застает в системе поступающее требование (с временем обслужива-

ния x секунд) и которая должна быть совершена до его ухода, как

$$W_x^*(s) = \frac{s(1 - \rho_x)}{s - \lambda + \lambda B_x^*(s)}.$$

Это обычное преобразование для времени ожидания в системе M/G/1 с усеченной ПРВ времени обслуживания, показанной на фиг. 4.6. Наконец, получим преобразование для условного (при заданном времени x) времени ответа в системе ПЗП:

$$S^*(s|x) = W_x^*(s + \lambda - \lambda G_x^*(s)) \exp[-x(s + \lambda - \lambda G_x^*(s))]. \quad \blacksquare \quad (4.28)$$

Вернемся теперь к рассмотрению условного среднего времени ответа. Заметим, что наклон этой функции легко находится в виде

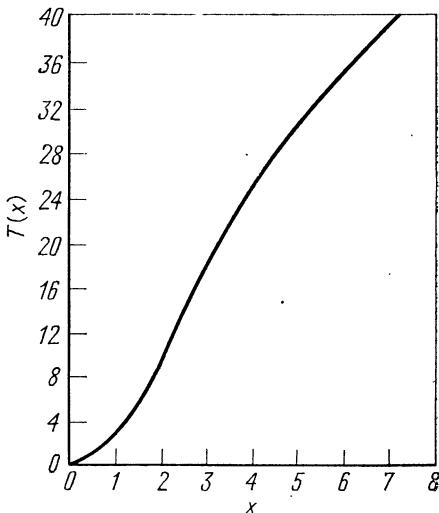
$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{1}{1 - \rho_x} + 2 \frac{\lambda x [1 - B(x)]}{(1 - \rho_x)^2} + \lambda^2 x_x^2 \frac{1 - B(x)}{(1 - \rho_x)^3}.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dT(x)}{dx} = 1, \quad (4.29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dT(x)}{dx} = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (4.30)$$

Два последних равенства интерпретируются следующим образом. Напомним, что $dT(x)/dx$ — обратная величина средней интенсивности обслуживания, предоставляемого требованию с достигнутым обслуживанием x секунд. Так как в рассматриваемой системе обслуживание всегда предоставляется требованию с наименьшим достигнутым обслуживанием, очевидно, что вновь поступающее требование не ждет совсем и очень короткое требование обслуживается с наибольшей интенсивностью, равной единице [см. (4.29)]. Аналогично очень длинное требование ожидает в системе до тех пор, пока будут полностью обслужены все присутствующие требования и все новые требования, которые поступят во время его пребывания в системе. Поэтому очевидно, что характеристика обслуживания длинных требований имеет такой же вид, как и характеристика системы обслуживания в обратном порядке с абсолютным приоритетом (в этом случае требование должно ждать до тех пор, пока все новые требования и его собственное большое задание будут обработаны) или системы с круговым опросом (так как в этом случае требование также будет ждать до тех пор, пока все другие требования пройдут свои полные циклы обслуживания). Как можно видеть из равенства (4.17), во всех случаях обратное значение интенсивности, с которой требование получает обслуживание, дается равенством (4.30), которое имеет тот же вид, что и для системы с круговым опросом или системы



Фиг. 4.7. Время ответа при алгоритме ПЗП ($\lambda=0,75$; $\bar{x}=1$).

обслуживания в обратном порядке. Другой взгляд на этот результат состоит в признании того, что очень длинное требование получает обслуживание только в течение свободного времени системы, которое образовалось бы, если бы это требование не присутствовало (т.е. в течение времени $1-\rho$).

На фиг. 4.7 показан пример среднего времени ответа для случая показательных продолжительностей обслуживания. Заметим, что система ПЗП проводит наибольшую дискриминацию в пользу коротких требований и поэтому можно ожидать, что она проводит наибольшую дискриминацию против длинных требований. Как будет показано в разд. 4.9, это действительно имеет место.

Характеристики алгоритма ПЗП недавно были исследованы [5] путем моделирования на IBM APL/360 (это специализированная система для обслуживания группы опытных пользователей в диалоговом режиме). Было показано, что алгоритм ПЗП с конечным квантом ($q=0,1$ с) и бесконечным числом очередей ($N=\infty$, см. сноску на стр. 203) дает по сравнению с другими алгоритмами наименьшее время ответа, усредненное по всем требованиям, которым необходимо для обслуживания меньше 2 с (среднее время ответа было 0,75 с при обслуживании группы из 35 пользователей); он дает также наибольшую производительность. Продолжительности обслуживания выбирались в соответствии с распределением, которое было получено при измерениях в реальной системе. Интересно отметить, что распределение времени обслуживания имело среднее значение 2,064 с и дисперсию 387,8 с², что дает ко-

эффективент изменчивости, равный 9,54. Фактически только 6 % продолжительностей обслуживания превышало 2 с (в действительности верхние 4 % продолжительностей обслуживания внесли 90 % в оценку среднего). Таким образом, среднее время обслуживания для типичного требования было значительно переоценено. Затем было найдено, что измеренная функция $b(x)$ имеет возрастающее среднее остаточное время и поэтому не удивительно, что алгоритм ПЗП работает так хорошо (т. е. наилуче вероятно, что требование с наименьшим достигнутым обслуживанием в среднем нуждается в наименьшем дополнительном обслуживании). Было показано [85], что, когда $b(x)$ имеет возрастающее среднее остаточное время, алгоритм ПЗП разделения процессора дает минимальное среднее время ответа по сравнению со всеми алгоритмами ПЗП с конечным квантом. Однако при убывающем среднем остаточном времени алгоритм ПЗП может быть очень плохим в отношении среднего времени обслуживания; например, читатель мог бы рассмотреть, как ведут себя требования при алгоритме ПЗП, когда все продолжительности обслуживания равны одной и той же постоянной.

4.7. МНОГОУРОВНЕВЫЙ АЛГОРИТМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОРА [51, 53, 56]

Опишем теперь смешанный распределительный алгоритм, который позволяет определить очень широкий класс алгоритмов. Опять предполагается, что входящий поток требований — пуассоновский, распределение времени обслуживания произвольное, квант равен нулю, а система очередей такая, как описано ниже.

Определим множество продолжительностей достигнутого обслуживания $\{a_i\}$ следующим образом:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N < a_{N+1} = \infty. \quad (4.31)$$

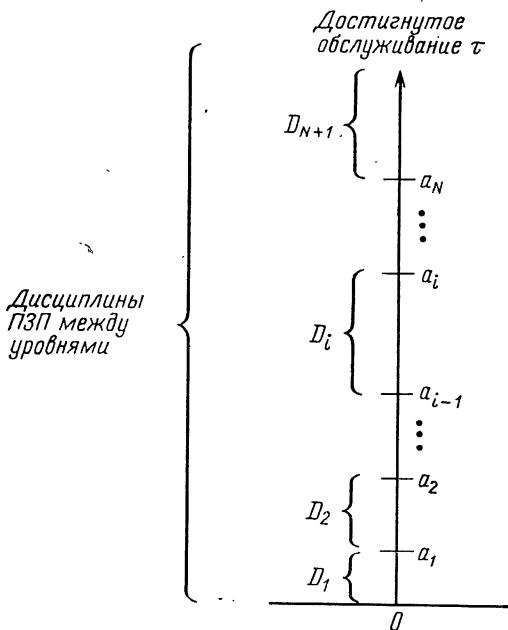
Определим также $N+1$ дисциплину обслуживания так, что D_i — дисциплина, следующая за требованием, которое имело достигнутое обслуживание τ из интервала (уровня)

$$a_{i-1} \leq \tau \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (4.32)$$

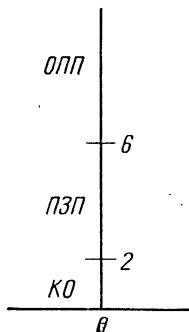
Допускается, что D_i является либо дисциплиной обслуживания в порядке поступления (пакетная обработка), либо дисциплиной ПЗП, либо круговым опросом (КО). Кроме того, правило ПЗП применяется для выбора следующего интервала обслуживания, т.е. говоря, процессор уделяет полное внимание требованиям самого низшего непустого уровня и обрабатывает их в соответствии с дисциплиной данного интервала (фиг. 4.8). Например, если $N = 0$, имеет место обычный одноуровневый случай дисциплины обслуживания в порядке поступления, кругового опроса или ПЗП. При $N = 1$ можно получить любую из девяти комбинаций двух дис-

циплин (обслуживание в порядке поступления за обслуживанием в порядке поступления, ..., круговой опрос за круговым опросом). Заметим, что дисциплина ПЗП, следующая за дисциплиной ПЗП, просто является одной дисциплиной ПЗП (вследствие общего правила ПЗП между уровнями).

В качестве иллюстративного примера рассмотрим случай $N=2$, показанный на фиг. 4.9. Любые новые требования начинают использовать процессор путем кругового опроса совместно со всеми другими требованиями, которые имели менее 2 с достигнутого обслуживания. Требования в диапазоне $2 \leq \tau < 6$ обслуживаются только в случае, если ни одно из присутствующих требований не имеет менее 2 с достигнутого обслуживания. В таком случае требование (или требования) с наименьшим достигнутым обслуживанием последует в прибор обслуживания по правилу ПЗП и будет там находиться до тех пор, пока оно либо покинет систему, либо достигнет времени обслуживания $\tau=6$, либо поступит новое требование (в последнем случае общее правило ПЗП предусматривает преимущество кругового опроса на уровне 1). Когда все требования имеют $\tau \geq 6$, то будет обслуживаться «самое старшее» из них до конца, если это обслуживание не будет прервано новым требованием. Прохождение некоторых требований в рассматриваемой системе показано на фиг. 4.10. Как обычно, обозначим n -е требо-



Фиг. 4.8. Интервалы достигнутого обслуживания с дисциплинами D_i .

Фиг. 4.9. Пример $N=2$.

вание через C_n . Заметим, что скорость изменения достигнутого обслуживания изменяется обратно пропорционально числу одновременно обслуживаемых требований. Например, можно заметить, что C_2 требует обслуживания 5 с и находится в системе 14 с (т. е. время ответа составляет 14 с).

Это все, что касается описания системы. Подводя итог, можно сказать, что имеется модель системы M/G/1 с разделением процессора и обобщенной многоуровневой структурой расписания (распределительного алгоритма).

Требуется определить $T(x)$. Дадим следующее определение:

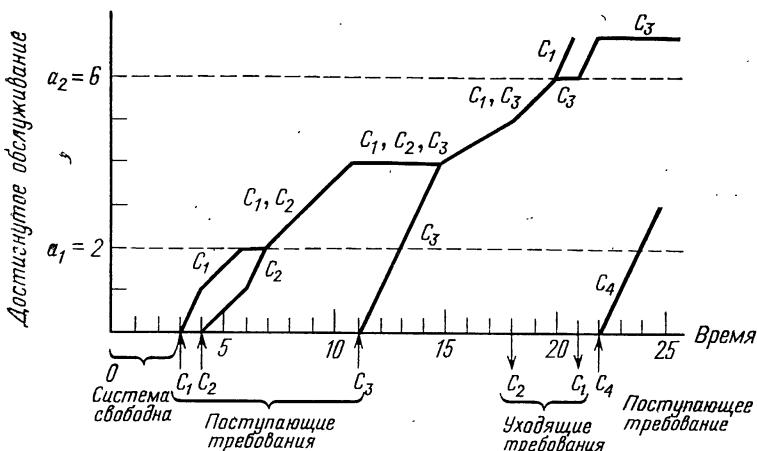
$$T_i(x) = E[\text{время, проведенное в интервале } i[a_{i-1}, a_i] \text{ требованиями, которым необходимо время обслуживания } x \text{ секунд}]. \quad (4.33)$$

Заметим, что $T_i(x) = T_i(x')$ при $x, x' \geq a_i$. Кроме того, для $a_{k-1} \leq x < a_k$ имеем

$$T(x) = \sum_{i=1}^k T_i(x). \quad (4.34)$$

Требуется найти выражение для среднего времени ответа $T(x)$ для требований с временем обслуживания x , таким, что $a_{i-1} \leq x < a_i$, т. е. для требований, которые ожидают систему на i -м уровне. Для решения такой задачи удобно в некотором смысле изолировать i -й уровень. Используем следующие два факта.

1. На основании предположения об абсолютном приоритете очередей низшего уровня (т. е. дисциплины ПЗП между уровнями) очевидно, что требования выше i -го уровня можно не рассматривать. Это вытекает из того, что такие требования не могут помешать обслуживанию требований низших уровней.



Фиг. 4.10. Пример прохождения требований.

2. Представляют интерес требования, которые достигают очереди i -го уровня и затем покидают систему до перехода на $(i+1)$ -й уровень. Время пребывания таких требований в системе может рассматриваться как состоящее из двух частей. Первая часть представляет собой время от момента поступления требования в систему до момента, когда будет обслужена группа i -го уровня в первый раз после того, как это требование поступило на i -й уровень. Вторая часть начинается с конца первой части и заканчивается, когда требование покидает систему. Легко видеть, что обе эти части времени пребывания требования в системе не подвержены влиянию дисциплин обслуживания, применявшимся на уровнях от 1-го до $(i-1)$ -го. Следовательно, можно принять любую удобную дисциплину. Фактически все эти уровни могут быть объединены в один эквивалентный уровень, на котором обслуживаются требования с достигнутым обслуживанием между 0 и a_{i-1} секунд при любой дисциплине обслуживания.

Из указанных фактов следует, что можно определить $T(x)$ для требований, которые покидают систему с i -го уровня, путем рассмотрения трехуровневой системы. На низшем уровне обслуживаются требования с достигнутым обслуживанием между 0 и a_{i-1} , а на среднем уровне — требования с достигнутым обслуживанием между a_{i-1} и a_i . Предполагается, что требования, которые перешли бы на $(i+1)$ -й уровень после получения a_i секунд обслуживания в первоначальной системе, покидают систему (т. е. третьим уровнем пренебрегаем). Другими словами, распределение времени обслуживания является усеченным в точке a_i .

Рассмотрим три случая в зависимости от того, какая дисциплина действует на требование на i -м уровне (уровень его ухода). Начнем со случая, когда на i -м уровне применяется дисциплина ПЗП. Рассмотрим трехуровневую систему со средним уровнем, соответствующим i -му уровню первоначальной системы. Поскольку дисциплину обслуживания на низшем уровне можно выбрать произвольно, предположим, что и на этом уровне применяется дисциплина ПЗП. Очевидно, что теперь система ведет себя как одноуровневая система ПЗП с распределением времени обслуживания, усиленным в x . Таким образом, решение для такой системы в точности дается равенством (4.27).

Исследуем теперь случай, когда на i -м уровне используется дисциплина обслуживания в порядке поступления. Рассмотрим трехуровневую систему с граничными точками a_{i-1} и a_i . Независимо от дисциплины на первом (низшем) уровне меченое требование, поступающее в систему, будет задержано на сумму работ, выполняемых в этот момент на двух первых уровнях, с задержкой из-за поступления любых новых требований в очередь первого уровня во время пребывания меченого требования в системе. Известно, что вследствие обслуживания на среднем уровне в порядке поступления вся текущая работа (среднее значение которой равно W_a), которую застает поступающее требование на первых двух уровнях, должна быть выполнена до того, как рассматриваемое требование покинет систему, и, конечно, поступающее требование должно быть задержано на его собственное время обслуживания x . В среднем во время пребывания требования в системе поступает $\lambda T(x)$ новых требований, и каждое из них задерживает его в среднем на $x_{a_{i-1}}$ секунд (так как ни одно из этих поступивших позже требований не получит больше чем a_{i-1} секунд обслуживания вследствие действия на i -м уровне дисциплины обслуживания в порядке поступления)¹⁾. Следовательно, можно записать, как обычно,

$$T(x) = W_{a_i} + x + \lambda T(x) \bar{x}_{a_{i-1}},$$

что приводит к равенству

$$T(x) = \frac{W_{a_i} + x}{1 - \rho_{a_{i-1}}}, \quad ■ (4.35)$$

определенному среднее время ответа при обслуживании i -го уровня в порядке поступления. Аналогичные методы могут быть использованы для решения задач обслуживания данного требования на последнем уровне в обратном и случайном порядке.

¹⁾ Эти вновь поступающие требования образуют пуссоновский процесс с параметром λ , а вклад каждого из них во время задержки является случайной величиной, первый и второй моменты которой соответственно равны $x_{a_{i-1}}$ и $x_{a_{i-1}}^2$.

Если требования i -го уровня обрабатываются по дисциплине кругового опроса, положение становится более сложным. Если требование покидает систему на первом уровне, т. е. $0 \leq x < a_1$, то результат простой, а именно

$$T(x) = \frac{x}{1 - \rho_{a_1}}, \quad (4.36)$$

что в точности совпадает с результатом для дисциплины кругового опроса, когда распределение времени обслуживания усечено в точке $x = a_1$.

Трудность анализа возрастает, когда обслуживание на i -м уровне выполняется по дисциплине кругового опроса и $i \geq 2$. Опять проводится анализ обслуживания в порядке приоритета, при котором рассматривается система с $N=2$ и граничными точками a_{i-1} и a_i . Рассмотрим периоды занятости для низшего уровня. Во время каждого такого периода ряд требований может достичь среднего уровня. Будем считать, что переход этих требований на средний уровень происходит в конце периода занятости низшего уровня (ПЗНУ), так что в этот момент происходит *групповое* поступление требований на средний уровень. Введем в рассмотрение ось виртуального времени, которая сжимается таким образом, чтобы были исключены ПЗНУ. Так как время от конца одного ПЗНУ до начала следующего распределено по показательному закону (пуассоновский поток), то поступления на средний уровень в виртуальном времени являются групповыми поступлениями в моменты времени, генерируемые пуассоновским процессом с параметром λ . Рассмотрим теперь требование, которому необходимо обслуживание в течение $x = a_{i-1} + \tau$ секунд ($0 \leq \tau < a_i - a_{i-1}$). Пусть a_1 — среднее *действительное* время пребывания требования в системе до его перехода (в конце ПЗНУ) в очередь среднего уровня. Пусть $a_2(\tau)$ — среднее *виртуальное* время пребывания требования в очереди среднего уровня. Значение a_1 вычисляется с помощью анализа цикла задержки (см. разд. 3.3). Начальная задержка равна сумме средней работы, которую застает требование в момент поступления на низший уровень с a_{i-1} секунд работы, которая совершается на низшем уровне. Начальная задержка «расширяется» на коэффициент $1/(1 - \rho_{a_{i-1}})$ вследствие того, что на низший уровень поступают новые требования¹⁾, следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \rho_{a_{i-1}}} (W_{a_{i-1}} + a_{i-1}). \quad (4.37)$$

¹⁾ Иначе говоря, при обычном рассмотрении a_1 включается задержка $\lambda a_1 x_{a_{i-1}}$, которая является средним числом требований (λa_1), умноженным на их среднее время обслуживания ($x_{a_{i-1}}$) при усеченном распределении. Это дает $a_1 = W_{a_{i-1}} + a_{i-1} + \lambda a_1 x_{a_{i-1}}$ и приводит к равенству (4.37).

Если $\alpha_2(\tau)$ является средним виртуальным временем пребывания требования на среднем уровне, можно легко превратить его в среднее действительное время пребывания на этом уровне следующим образом. На интервале виртуального времени длины $\alpha_2(\tau)$ в среднем имеется $\lambda\alpha_2(\tau)$ ПЗНУ, которые были отброшены. На основании соотношения (1.90) каждый из них имеет среднюю длину $\bar{x}_{a_{i-1}}/(1-\rho_{a_{i-1}})$. Следовательно, среднее действительное время пребывания требования на среднем уровне определяется равенством

$$\alpha_2(\tau) = \lambda\alpha_2(\tau) \frac{\bar{x}_{a_{i-1}}}{1 - \rho_{a_{i-1}}} = \frac{\alpha_2(\tau)}{1 - \rho_{a_{i-1}}}. \quad (4.38)$$

Используя эти результаты, можно видеть, что работа, требующая $x = a_{i-1} + \tau$ секунд обслуживания, характеризуется средним временем ответа

$$T(a_{i-1} + \tau) = \frac{1}{1 - \rho_{a_{i-1}}} [W_{a_{i-1}} + a_{i-1} + \alpha_2(\tau)]. \quad (4.39)$$

В этом уравнении единственной неизвестной величиной является $\alpha_2(\tau)$. Чтобы ее найти в общем случае, необходимо рассмотреть систему M/G/1 с групповыми поступлениями и разделением процессора при дисциплине кругового опроса. Единственным исключением является случай кругового опроса на первом уровне, который характеризуется негрупповыми поступлениями и для которого решение получается в виде (4.36).

Рассмотрим теперь изолированную систему с круговым опросом и групповыми поступлениями для того, чтобы определить виртуальное время $\alpha_2(\tau)$ пребывания требования в очереди среднего уровня, которое обозначим через $\alpha(\tau)$. Это условное среднее виртуальное время ответа затем должно быть подставлено в равенство (4.39), чтобы получить окончательное решение для условного среднего действительного времени ответа в рассматриваемой многоуровневой системе на i -м уровне, на котором действует дисциплина кругового опроса. Вместе с тем искомая величина $\alpha(\tau)$ будет соответствовать решению для условного среднего действительного времени ответа, если система разделения процессора с круговым опросом и групповыми поступлениями работает изолированно. Таким образом, читатель должен рассматривать эту величину точно так же, как величину $T(x)$. Перейдем к описанию входа; пусть \tilde{a} — размер группы требований, среднее значение которой обозначим через a . Кроме того, пусть b — среднее число требований, поступающих вместе с рассматриваемым меченым требованием, для обслуживания которого необходимо τ секунд. В за-

даче 4.14 требуется вывести интегральное уравнение для $\alpha(\tau)$ на основе предположения конечного кванта, а затем предельным переходом перейти к разделению процессора. Здесь приводится интуитивный, но прямой вывод этого интегрального уравнения для случая разделения процессора. Разность $\alpha(\tau + \Delta\tau) - \alpha(\tau)$ является точным значением среднего времени, которое занимает у рассматриваемого меченого требования получения дополнительного обслуживания в течение $\Delta\tau$ секунд после того, как оно получило первые τ секунд обслуживания. Эта разность состоит из четырех членов, соответствующих различным задержкам: во-первых, времени, необходимого для тех требований, которые застало рассматриваемое меченое требование при его поступлении и которые после получения меченым требованием τ секунд обслуживания все еще находятся в системе, во-вторых, времени, необходимого тем требованиям, которые поступили в систему позже рассматриваемого требования и все еще находятся в ней, в-третьих, собственной задержки меченого требования и, наконец, задержки, вызванной теми требованиями, которые поступили вместе с рассматриваемым меченым требованием в одной группе и которым необходимо обслуживание в течение более τ секунд. Первый из этих членов может быть вычислен следующим образом. Согласно равенству (4.5), среднее число требований, которое застает рассматриваемое поступающее требование с достигнутым обслуживанием, лежащим в промежутке $(x, x+dx)$, в точности равно $n(x)dx$. Вероятность того, что любое из этих требований все еще находится в системе после того, как меченое требование получило τ секунд обслуживания при условии, что обслуживание требования достигло x секунд в момент поступления меченого требования, просто равна $[1 - B(x+\tau)]/[1 - B(x)]$. (Вспомним, что в системе разделения процессора с круговым опросом все требования обслуживаются с одинаковой интенсивностью.) Следовательно, общее число этих «старых» требований, которые мешают после получения меченым требованием τ секунд обслуживания, равно

$$\int_0^\infty n(x) \frac{1 - B(x + \tau)}{1 - B(x)} dx.$$

Перейдем ко второму члену. Среднее время, которое нужно рассматриваемому требованию для получения очередной порции Δx секунд обслуживания при условии, что уже было получено x секунд ($0 \leq x < \tau$), равно $\alpha(x + \Delta x) - \alpha(x)$. За это время в среднем поступает $\lambda \alpha[\alpha(x + \Delta x) - \alpha(x)]$ новых требований, любое из которых будет помехой рассматриваемому требованию после того, как оно получит x секунд обслуживания, с вероятностью $1 - B(\tau - x)$.

Если теперь произвести умножение и деление на Δx и затем устремить Δx к нулю, то можно путем интегрирования по всем возможным значениям x получить среднее число новых требований, которые являются помехой рассматриваемому меченному требованию после того, как оно получило τ секунд обслуживания, а именно

$$\lambda \bar{a} \int_0^\tau \alpha^{(1)}(x) [1 - B(\tau - x)] dx,$$

где

$$\alpha^{(1)}(x) \triangleq \frac{d\alpha(x)}{dx}.$$

Третий член соответствует рассматриваемому требованию, а среднее число требований, которые участвуют в формировании четвертого члена, равно $b[1 - B(\tau)]$. Так как каждое из мешающих требований получает Δt секунд обслуживания за время, пока такое же обслуживание получает рассматриваемое меченое требование, необходимо умножить каждую из описанных четырех величин на Δt . Разделив затем на эту же величину, получим выражение для $[\alpha(\tau + \Delta t) - \alpha(\tau)]/\Delta t$, а устремив его к пределу, непосредственно найдем следующее интегральное уравнение, которое описывает искомое среднее время ответа:

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(\tau) = & \int_0^\infty n(x) \frac{1 - B(\tau + x)}{1 - B(x)} dx + \\ & + \lambda \bar{a} \int_0^\tau \alpha^{(1)}(x) [1 - B(\tau - x)] dx + 1 + b[1 - B(\tau)]. \end{aligned}$$

Наконец, воспользуемся уравнением (4.11) для замены $n(x)$ и получения интегрального уравнения, включающего только производную искомой функции:

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(\tau) = & \lambda \bar{a} \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x) [1 - B(\tau + x)] dx + \\ & + \lambda \bar{a} \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x) [1 - B(\tau - x)] dx + \\ & + 1 + b[1 - B(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Определив производящую функцию¹⁾ $G(z)$ для размера группы требований \tilde{a}

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[\tilde{a}=n] z^n,$$

непосредственно находим, что $\bar{a} = G^{(1)}(1)$. Значение b также может быть выражено через $G(z)$, как показано ниже. Предположим, что меченое требование выбирается случайным образом из требований, поступающих в СМО. Тогда вероятность того, что требование выбирается из группы размера n , может быть получена в виде $nP[\tilde{a}=n]/\bar{a}$, что является дискретным аналогом ПРВ для времени жизни отобранного интервала времени (см. сноска на стр. 32). Далее, учитывая, что $1-b$ является средним размером группы, из которой выбирается меченое требование, и используя приведенное выше распределение вероятности этого «отобранного» размера группы, находим

$$1+b = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{n P[\tilde{a}=n]}{\bar{a}} = \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}} = \frac{G^{(2)}(1) + G^{(1)}(1)}{G^{(1)}(1)}$$

и, таким образом, окончательно для b получаем

$$b = \frac{G^{(2)}(1)}{G^{(1)}(1)}. \quad (4.41)$$

Остается решить интегральное уравнение (4.40). До настоящего времени это уравнение было решено только при следующем ограничении на распределение времени обслуживания $B(\tau)$ для i -го уровня:

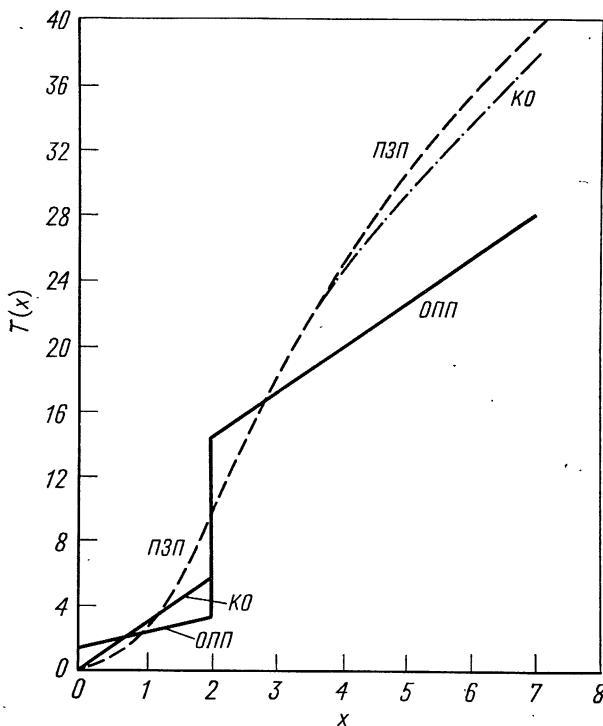
$$1 - B(\tau) = \begin{cases} q(\tau) e^{-\mu \tau}, & 0 \leq \tau < a_i - a_{i-1} \triangleq t_1, \\ 0, & t_1 \leq \tau, \end{cases} \quad (4.42)$$

где $q(\tau)$ — многочлен степени d (ограниченный только тем, что $B(\tau)$ должна быть функцией распределения). В первоначальной многоуровневой системе это распределение преобразуется в ана-

¹⁾ Метод отыскания $G(z)$ обсуждается в задаче 7.1 книги [59]. Он приводит к следующему уравнению для $G(z)$:

$$\begin{aligned} G(z) = & [1 - B(a_{i-1})] z \exp \{-\lambda a_{i-1} [1 - G(z)]\} + \\ & + \int_0^{a_{i-1}} \exp \{-\lambda [1 - G(z)]\} dB(t), \end{aligned}$$

которое дает $G^{(1)}(1)$ и $G^{(2)}(1)$.



Фиг. 4.11. Возможные кривые времени ответа при $N=1$ в системе $M/M/1$ ($\bar{x}=1$, $\lambda=0,75$ и $a_1=2$).

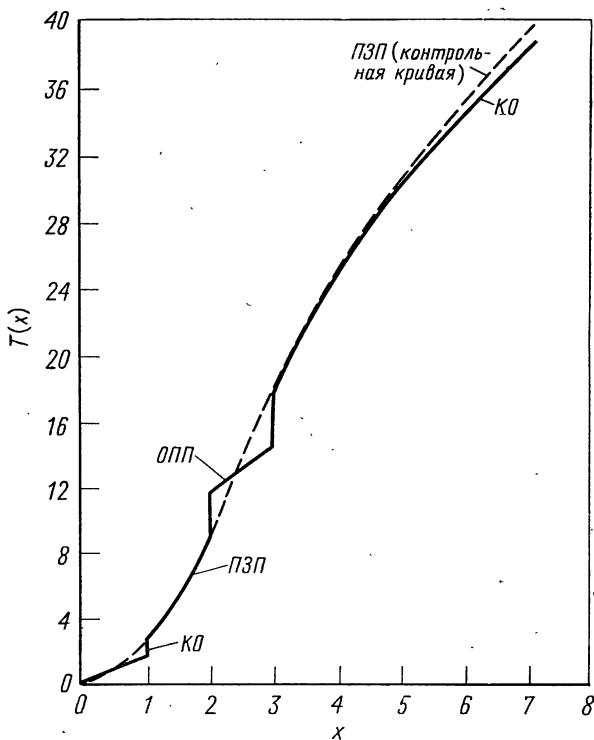
логичную форму на интервале $a_{i-1} \leq x < a_i$. Решение интегрального уравнения в этом случае предлагается в задаче 4.15, оно дается в работе [53]. Это решение может быть записано в виде

$$\alpha^{(1)}(\tau) = \frac{1}{1 - \lambda a \tau} - \frac{b}{\lambda a} \sum_{i=1}^{d+1} \frac{(\mu^2 - \beta_i^2)^{d+1}}{Q_2^{(1)}(\beta_i)} \left[\frac{Q_0(\beta_i) e^{\beta_i \tau} - Q_1(\beta_i) e^{\beta_i(t_1-\tau)}}{Q_0(\beta_i) + Q_1(\beta_i) e^{-\beta_i t_1}} \right], \quad (4.43)$$

где

$$Q_0(y) = (y + \mu)^{d+1} - \lambda \bar{a} \sum_{i=0}^d q^{(i)}(0) (y + \mu)^{d-i}, \quad (4.44)$$

$$Q_1(y) = \lambda \bar{a} \sum_{i=0}^d e^{-\mu t_1} q^{(i)}(t_1) (y + \lambda)^{d-i}, \quad (4.45)$$



Фиг. 4.12. Время ответа для примера $N=3$, $\bar{x}=1$, $\lambda=0,75$, $a_1=i$ (D_1 — КО, D_2 — ПЗП, D_3 — ОПП, D_4 — КО).

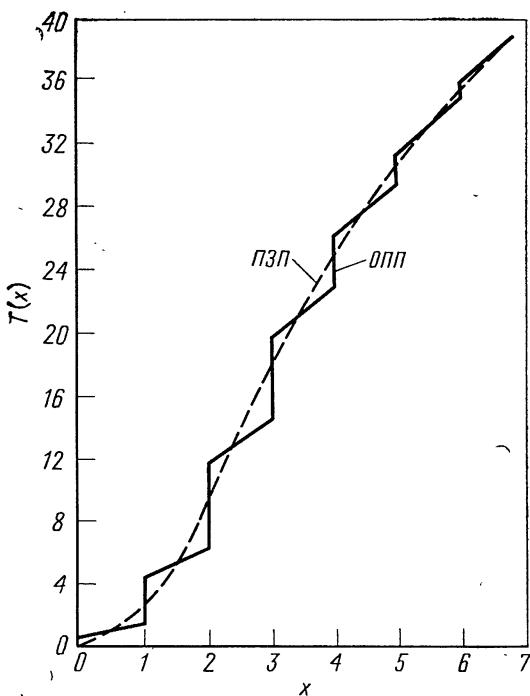
$$Q_2(y) = Q_0(y)Q_0(-y) - Q_1(y)Q_1(-y) \quad (4.46)$$

и корни уравнения

$$Q_2(y) = 0$$

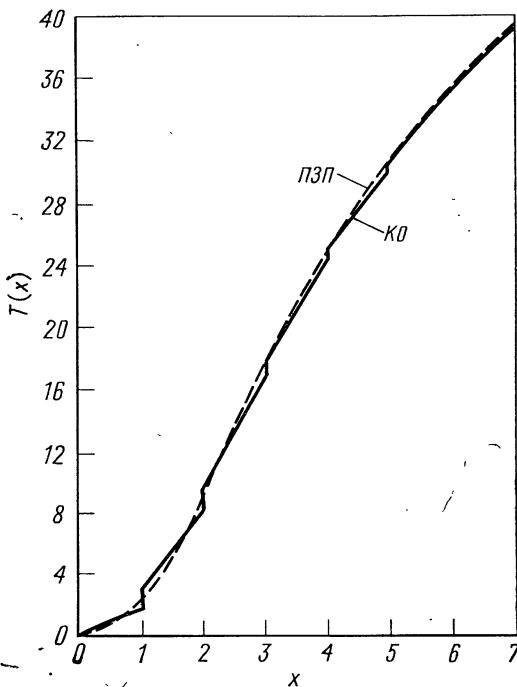
появляются парами, которые обозначаются через $(\beta_i, -\beta_i)$, где $i=1, 2, \dots, d+1$. В равенстве (4.43) $\bar{\tau}$ — математическое ожидание распределения $B(\tau)$ вида (4.42). Подстановкой этого решения в равенство (4.39), где $\alpha_2(\tau) = \alpha(\tau)$, заканчивается решение задачи для многоуровневой системы при дисциплине кругового опроса на i -м уровне.

Поскольку решение при дисциплине кругового опроса оказывается таким сложным, проведем некоторые рассмотрения на примерах. Начнем с четырех примеров с показательным временем обслуживания. В случае $N=1$ имеется девять возможных дисциплин, о которых уже говорилось. Учитывая, что условное среднее время



Фиг. 4.13. Время ответа для примера $N = \infty$, D_i — ОПП, система $M/M/1$, $\bar{x} = 1$, $\lambda = 0,75$, $a_i = i$.

ответа на любом конкретном уровне не зависит от дисциплины обслуживания на всех других уровнях, покажем, как ведет себя двухуровневая ($N=1$) система при трех возможных дисциплинах обслуживания на каждом уровне (фиг. 4.11). Дисциплины обслуживания могут быть скомбинированы любым образом, при этом получается девять вариантов. На фиг. 4.12 показан случай $N=3$, когда D_1 — круговой опрос (КО), D_2 — ПЗП, D_3 — обслуживание в порядке поступления (пакетная обработка), а D_4 — круговой опрос Штриховой кривой представлен пример дисциплины ПЗП на всем диапазоне, который может служить для сравнения с рассматриваемой более сложной дисциплиной. На фиг. 4.13 показан пример итеративной структуры, когда D_i — обслуживание в порядке поступления (ОПП). Здесь также для сравнения приведен пример дисциплины ПЗП. Четвертый пример дан на фиг. 4.14 для итеративной структуры, когда D_i — круговой опрос. Приведена также кривая для дисциплины ПЗП. Заметим, что во всех этих примерах контрольная кривая для случая дисциплины ПЗП никогда не проходит выше кривой ответа в начале интервала (т. е. сразу после a_i) и



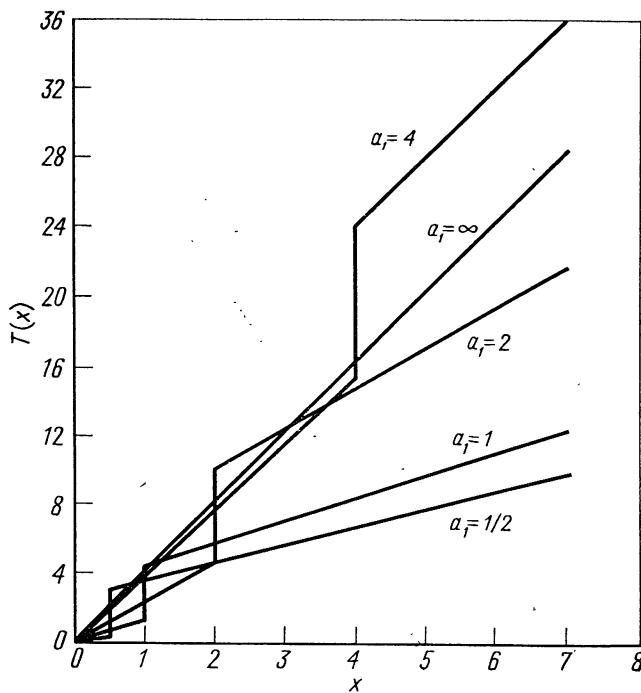
Фиг. 4.14. Время ответа для примера $N = \infty$, D_i — КО, система $M/M/1$, $\bar{x} = 1.0$, $\lambda = 0.75$, $a_i = i$.

ниже кривой ответа непосредственно перед концом интервала (перед a_i)¹⁾.

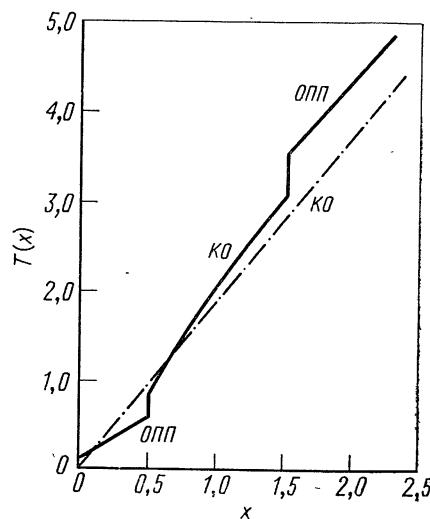
Для случая распределения времени обслуживания, отличающегося от показательного, рассмотрим два примера. В первом из них возьмем распределение Эрланга второго порядка и рассмотрим дисциплины D_1 — КО и D_2 — ОПП. На фиг. 4.15 показано время ответа при пяти различных значениях граничной точки a_1 . Во втором примере пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ e^{-2(x-1/2)}, & \frac{1}{2} \leq x. \end{cases}$$

¹⁾ То, что это всегда должно быть справедливо, может быть показано при помощи закона сохранения, который дается ниже [см. (4.57)].



Фиг. 4.15. Время ответа при дисциплинах ОПП и КО в системе $M/E_2/1$ для $\bar{x}=1$, $\lambda=0,75$ и $\alpha_1=1/2, 1, 2, 4, \infty$ (D_1 — КО, D_2 — ОПП).



Фиг. 4.16. Время ответа для примера $N=2$; $\lambda=0,75$.

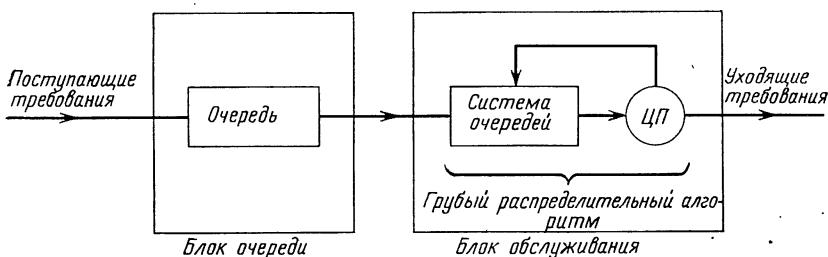
Рассмотрим дисциплины D_1 — ОПП, D_2 — КО и D_3 — ОПП. Характеристика этой системы показана на фиг. 4.16, где теперь в качестве контрольной кривой приведена кривая при дисциплине КО.

При использовании рассматриваемой многоуровневой дисциплины достигается значительная гибкость. Отметим, однако, тенденцию кривых среднего времени ответа проходить вблизи характеристики ПЗП (что является следствием общего правила ПЗП между уровнями).

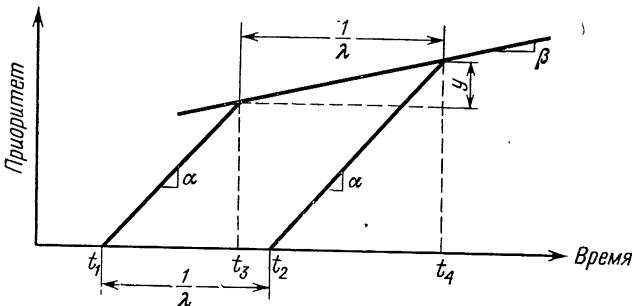
4.8. ЭГОИСТИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

[49, 35, 58]

До сих пор рассматривались распределительные алгоритмы, которые обеспечивали следующее: отсутствие дискриминации по времени обслуживания (пакетная обработка), линейную дискриминацию (КО и ОПП), абсолютную дискриминацию в пользу коротких требований (ПЗП) и многоуровневую дискриминацию различного вида (см. последний раздел). В настоящем разделе дается обобщение всех этих (и всех других известных или еще неизвестных) алгоритмов путем построения континуума «эгоистичных» распределительных алгоритмов (расписаний). Такие системы впервые были исследованы в работе [49]. Принцип, лежащий в основе рассматриваемой модели, состоит в том, что все требования, имеющиеся в вычислительной системе, делятся на две группы: требования, находящиеся в блоке очереди и ожидающие обслуживания, и требования, находящиеся в блоке обслуживания и коллективно использующие обслуживающий прибор способом, который будем называть грубым распределительным алгоритмом (фиг. 4.17). Этот грубый распределительный алгоритм может быть любого типа, например любой из уже обсуждавшихся. Входящие требования всегда поступают в блок очереди, где их приоритет (в числовом выражении) растет от нуля с положительной скоростью a . Аналогично, как только требование поступает в блок



Фиг. 4.17. Система с эгоистичным распределительным алгоритмом.



Фиг. 4.18. Вычисление условной интенсивности поступления требований в блок обслуживания.

обслуживания, его приоритет возрастает с положительной скоростью β (независимо от того, использует ли оно ЦП или просто ожидает в блоке обслуживания доступа к ЦП). Все требования обладают одними и теми же параметрами α и β , причем ограничимся рассмотрением случая $0 \leq \beta \leq \alpha$. Кроме того, предположим, что рассматриваемые СМО относятся к типу M/G/1.

Требование переходит из блока очереди в блок обслуживания, когда его приоритет поднимается до величины, равной приоритету требований, находящихся в блоке обслуживания. (Заметим, что все требования в блоке обслуживания имеют одинаковый приоритет, который растет со скоростью β .) Так как $0 \leq \beta \leq \alpha$, требование, которое сначала поступило в блок очереди, должно рано или поздно догнать требования, находящиеся в блоке обслуживания, и принять участие в их коллективном использовании обслуживающего прибора — способом, какой предписывается грубым распределительным алгоритмом¹⁾. Отметим, что обратной связи от блока обслуживания к блоку очереди нет. Так как требования в блоке обслуживания стремятся захватить обслуживающий прибор, рассматриваемые алгоритмы названы эгоистичными распределительными алгоритмами. Параметры α и β появляются в рассматриваемых результатах в виде отношения β/α , величина которого может принимать любые непрерывные значения и тем самым давать, как будет показано ниже, различные характеристики системы.

Проследим за прохождением через систему меченого требования, которому необходимо x секунд обслуживания. На фиг. 4.18 показан случай, когда рассматриваемое меченое требование посту-

¹⁾ В любом случае, когда блок обслуживания полностью освобождается, требование (если оно есть) с наибольшей величиной приоритета из блока очереди сразу переходит в блок обслуживания; в этот момент скорость роста его приоритета падает с α до β . Требование, входящее в свободную систему, прямо поступает в блок обслуживания (и его приоритет начинает расти со скоростью β).

пает в систему в момент t_1 . В момент t_3 приоритет этого требования достигает значения приоритета требований в блоке обслуживания и оно переходит в блок обслуживания. Интенсивность поступления требований в блок обслуживания при условии наличия рассматриваемого меченого требования в этом блоке обозначим через λ' (обычно она отличается от λ , которая является интенсивностью поступления требований в полную систему), причем входящий поток все еще будет пуссоновский. Таким образом, видно, что блок обслуживания (при условии, что в нем находится меченое требование) также является системой $M/G/1$ с интенсивностью поступления требований λ' и распределением времени обслуживания $B(x)$, которое является таким же, как и для полной системы. Это оказывается ключевым моментом при анализе систем с эгоистичными распределительными алгоритмами.

Вычислим теперь λ' . Обращаясь опять к фиг. 4.18, отметим поступление в систему второго требования в момент t_2 , причем среднее время между поступлениями, конечно, равно $1/\lambda$. Эти два соседних требования поступают в блок обслуживания с несколько меньшей интенсивностью, а именно λ' , интервал времени между моментами их поступления также показан на фигуре. Обслуживающий блок в течение этого интервала наверняка не свободен, так как интенсивность поступления в блок обслуживания рассчитывается при условии, что меченое требование находится в этом блоке. Как видно из графиков, вертикальное смещение y можно рассчитывать двумя различными способами:

$$y = \frac{\beta}{\lambda'},$$

$$y = \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) \alpha,$$

что, таким образом, дает

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right). \quad (4.47)$$

Опишем теперь поведение системы.

Уже было определено преобразование Лапласа $S^*(s|x)$ условной ПРВ времени ответа при условии, что время обслуживания равно x секунд со средним значением $T(x)$. Определим также преобразование $W^*(s|x)$ условной плотности распределения растроченного времени [среднее значение которого равно $W(x)$], преобразование $Q^*(s|x)$ условной плотности распределения полного времени пребывания рассматриваемого меченого требования в блоке очереди [среднее значение которого обозначим через $W_q(x)$], преобразование $V^*(s|x)$ условной плотности распределения времени, растроченного в блоке обслуживания при среднем значении $V(x)$ и

преобразование $Y^*(s|x)$ условной плотности времени пребывания рассматриваемого меченого требования в блоке обслуживания при среднем значении $Y(x) = V(x) + x$. Интуитивно очевидно (и может быть строго показано [35]), что время пребывания рассматриваемого меченого требования в блоке очереди не зависит от времени, растряченного им в блоке обслуживания. В результате этого $Q^*(s|x)$ не зависит от x и, следовательно, можно записать $Q^*(s|x) = Q^*(s)$. Кроме того, общее растряченное в системе время для рассматриваемого меченого требования будет равно сумме времени, растряченного в блоке очереди, и времени, растряченного в блоке обслуживания. Так как эти две величины независимы, сразу получаем:

$$W^*(s|x) = Q^*(s)V^*(s|x). \quad (4.48)$$

Кроме того, время, проведенное в блоке очереди, не зависит от грубого распределительного алгоритма (поскольку это консервативный алгоритм, именно такой случай представляет здесь интерес), а зависит только от α и β . Следовательно, независимо от грубого распределительного алгоритма поток требований из блока очереди в блок обслуживания будет иметь интенсивность λ' , если блок обслуживания не свободен (и бесконечную интенсивность, если блок обслуживания свободен, а блок очереди при этом не пустой). Функции $W^*(s|x)$ и $V^*(s|x)$ зависят от распределительного алгоритма, но их отношение $Q^*(s)$ не зависит от этого алгоритма.

Предположим, что определена характеристика грубого распределительного алгоритма для изолированной системы M/G/1 кол-лективного пользования. В частности, предположим, что вычислило преобразование условной плотности растряченного времени, которое обозначим через $\hat{W}_{\lambda}^*(s|x)$, где в явном виде отмечена зависимость этого результата от параметра пуассоновского потока λ . Таким образом, в этом случае очевидно, что для блока обслуживания системы с эгоистичным распределительным алгоритмом при использовании грубого распределительного алгоритма в этом блоке мы должны получить

$$V^*(s|x) = \hat{W}_{\lambda'}^*(s|x). \quad (4.49)$$

Теперь для завершения рассматриваемого вывода необходимо найти $Q^*(s)$. Эта задача проста, так как время, проведенное в блоке очереди, не зависит от грубого распределительного алгоритма, а также от времени обслуживания меченого требования. Следовательно, чтобы найти $Q^*(s)$, выберем определенный грубый распределительный алгоритм, а именно ОПП. В этом случае полная система с эгоистичным распределительным алгоритмом фактически становится одной большой системой ОПП, так как старейшее требование в этой системе получает обслуживающий прибор полно-

стью в свое распоряжение. Кроме того, там блок обслуживания ведет себя как система $M/G/1$ с ОПП и интенсивностью потока требований λ' . На основании этих двух замечаний и равенства (1.85) получаем

$$W^*(s|x) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)},$$

$$V^*(s|x) = \frac{s(1-\rho')}{s - \lambda' + \lambda' B^*(s)},$$

где $\rho = \lambda \bar{x}$, $\rho' = \lambda' \bar{x}$. Последние два равенства справедливы лишь в случае, когда грубый распределительный алгоритм является алгоритмом ОПП, но уже было установлено, что отношение $Q^*(s)$ не зависит от этого алгоритма. Таким образом, непосредственно из равенства (4.48) находим

$$Q^*(s) = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho'} \right) \left(\frac{s - \lambda' + \lambda' B^*(s)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)} \right).$$

Подставив этот общий результат в выражение (4.49) в равенство (4.48), можно получить окончательное решение для преобразования условной плотности времени ожидания в произвольной системе с эгоистичным распределительным алгоритмом:

$$W^*(s|x) = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho'} \right) \left(\frac{s - \lambda' + \lambda' B^*(s)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)} \right) \hat{W}_{\lambda'}^*(s|x). \quad ■ (4.50)$$

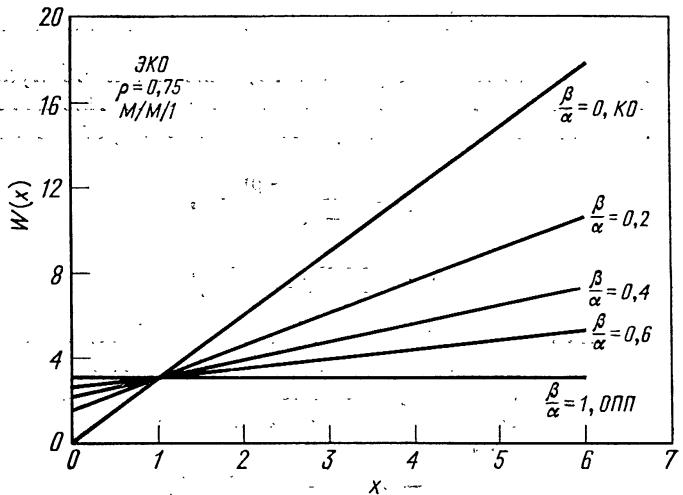
Напомним, что $\hat{W}_{\lambda'}^*(s|x)$ является решением для грубого распределительного алгоритма в системе $M/G/1$ коллективного пользования, у которой интенсивность пуассоновского потока требований равна λ' .

Можно воспользоваться результатом (4.50), для получения условного среднего времени ответа любой системы с эгоистичным распределительным алгоритмом в виде

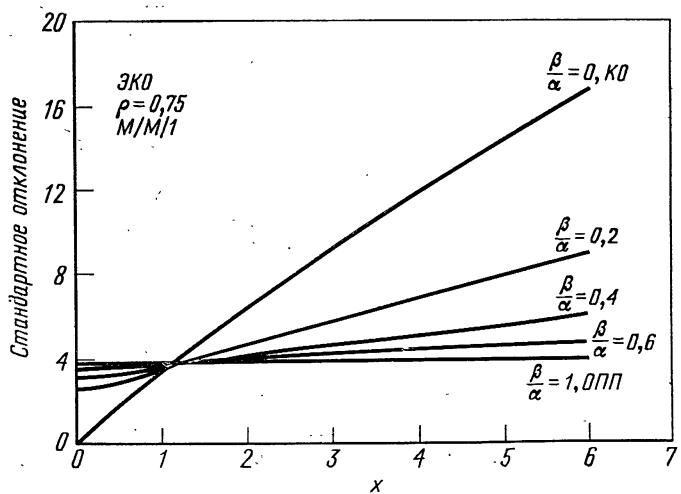
$$T(x) = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} - \frac{\lambda' \bar{x}^2}{2(1-\rho')} + \hat{T}_{\lambda'}(x), \quad ■ (4.51)$$

где $\hat{T}_{\lambda'}(x)$ — опять условное среднее время ответа при грубом распределительном алгоритме с интенсивностью входящего потока λ' . Аналогичное равенство очевидным образом справедливо для раstraченного времени.

Из основной структуры эгоистичных распределительных алгоритмов видно, что при $0 < \beta = \alpha$ система ведет себя как чистая система с ОПП, так как требования в блоке очереди никогда не могут догнать требования в блоке обслуживания и поэтому старейшее требование при его поступлении будет обслужено до конца. В другом крайнем случае, когда $0 = \alpha = \beta$, требования поступают в систему и всегда сохраняют нулевое значение приоритета. Следо-



Фиг. 4.19. Кривые среднего времени ожидания для эгоистичных алгоритмов кругового опроса при показательном распределении времени обслуживания ($\lambda=0,75$; $x=1,0$).



Фиг. 4.20. Стандартные отклонения времени ожидания для систем с эгоистичными алгоритмами кругового опроса при показательном времени обслуживания ($\lambda=0,75$; $x=1,0$).

вательно, все требования системы всегда будут в блоке обслуживания, и рассматриваемый эгоистичный распределительный алгоритм сводится к грубому равноделительному алгоритму. Эти предельные случаи легко увидеть в равенствах (4.50), (4.51).

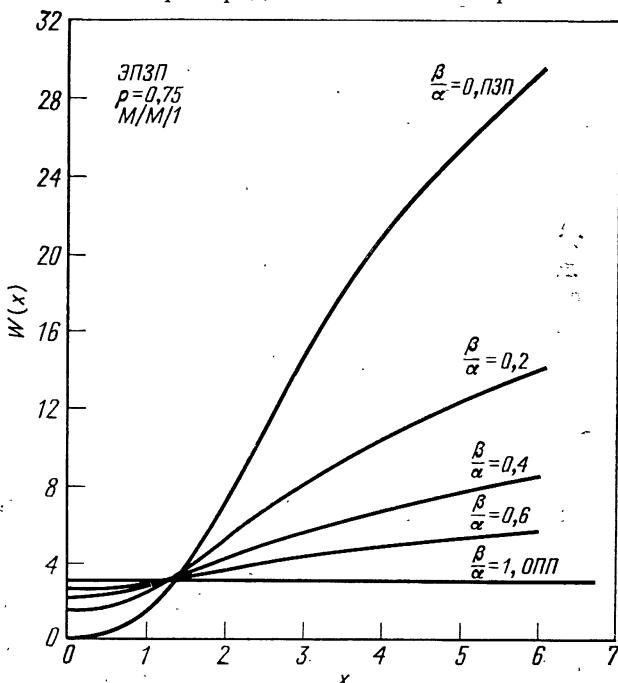
Продемонстрируем поведение рассмотренных систем с эгоистичными распределительными алгоритмами на примерах. Сначала рассмотрим систему с эгоистичным круговым опросом (ЭКО). Из равенства (4.51) непосредственно имеем

$$T(x) = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} - \frac{\lambda' \bar{x}^2}{2(1-\rho')} + \frac{x}{1-\rho},$$

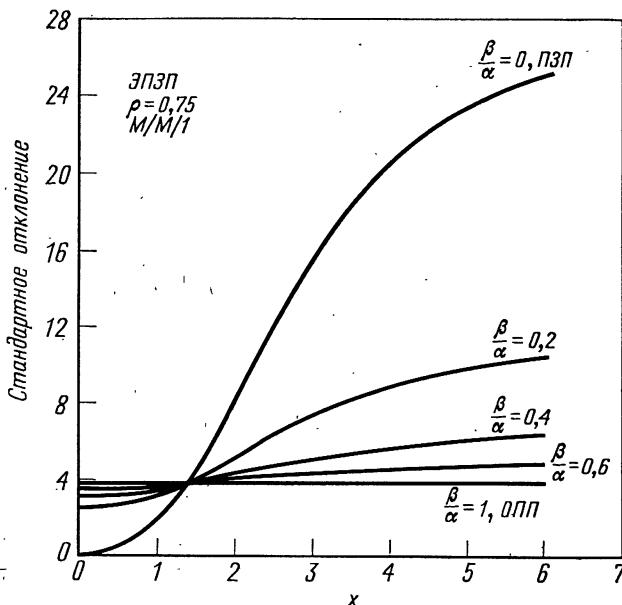
что легко представляется в виде

$$T(x) = \frac{\beta/\alpha}{1-\rho'} T_{\text{опп}}(x) + \left[1 - \frac{\beta/\alpha}{1-\rho'} \right] T_{\text{КО}}(x), \quad (4.52)$$

где $T_{\text{опп}}(x)$ дается равенством (4.13), а $T_{\text{КО}}(x)$ — равенством (4.17). Это показывает природу линейного перемешивания в системе с эгоистичным распределительным алгоритмом. Напомним,



Фиг. 4.21. Кривые среднего времени ожидания для систем ЭПЗП при показательном распределении времени обслуживания ($\lambda = 0,75; \bar{x} = 1,0$).



Фиг. 4.22. Стандартные отклонения времени ожидания для систем с ЭПЗП при показательном распределении времени обслуживания ($\lambda = 0,75$; $\bar{x} = 1,0$).

что $T_{\text{ко}}(x_0) = T_{\text{опп}}(x_0)$ при $x_0 = \bar{x}^2 / 2\bar{x}$. На фиг. 4.19 приведены кривые для условного среднего растраченного времени в системе с эгоистичным распределительным алгоритмом в случае показательного распределения времени обслуживания. На фиг. 4.20 представлены кривые стандартного отклонения растраченного времени для той же системы.

В качестве второго примера рассмотрим систему с эгоистичным распределительным алгоритмом и грубым распределительным алгоритмом типа ПЗП. Это алгоритм ЭПЗП, для которого решение получается в виде

$$T(x) = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} - \frac{\lambda' \bar{x}^2}{2(1-\rho')} + \frac{\lambda' x_x^2}{2(1-\rho'_x)^2} + \frac{x}{1-\rho'_x}, \quad (4.53)$$

где $\rho'_x = \rho_x(1 - \beta/\alpha)$. Для той же системы, что и на двух предыдущих фигурах, можно получить кривые в случае ЭПЗП (фиг. 4.21 и 4.22).

Таким образом, эгоистичный распределительный алгоритм позволяет взять любую систему, для которой известно решение (или любую систему, решение для которой может появиться в будущем), и непосредственно дать результаты для эгоистичной распредели-

тельной системы, в которой эта исходная система появляется как система с грубым распределительным алгоритмом. Это приводит к континууму систем, зависящих от параметра β/α , характеристики которых плавно меняются от системы с ОПП до системы с грубым распределительным алгоритмом. Такое обобщение может быть сделано почти без затрат на реализацию в вычислительной системе. При реализации просто нужно выполнить подсчет приоритета со скоростью α для требований в блоке очереди и со скоростью β для требований в блоке обслуживания.

4.9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ [52]

Так же как в СМО с приоритетами, если распределительный алгоритм улучшает время ответа для коротких требований, то, как подсказывает интуиция, должна существовать зависимость типа закона сохранения, которая определяет, насколько при этом ухудшается обработка длинных требований. Именно этот закон сохранения выводится ниже.

Можно быть уверенным в одном, а именно в том, что средняя незаконченная работа в системе будет инвариантна относительно распределительного алгоритма (если он является консервативным). Уже указывалось [см. (3.18)], что в случае системы M/G/1 средняя работа \bar{U} равна среднему времени ожидания в системе с ОПП и выражается в виде

$$\bar{U} = \frac{\lambda x^2}{2(1-\rho)} = W_{\text{опп.}} \quad (4.54)$$

С другой стороны, эту среднюю работу можно вычислить по формуле

$$\bar{U} = \int_{0^-}^{\infty} n(x) E \left[\begin{array}{c} \text{остающееся время обслуживания для} \\ \text{требования с достигнутым временем} \\ \text{обслуживания } x \end{array} \right] dx,$$

где $n(x)$ — плотность распределения достигнутого времени обслуживания. Таким образом,

$$\bar{U} = \int_{0^-}^{\infty} n(x) \int_x^{\infty} (\tau - x) \frac{dB(\tau)}{1 - B(x)} d\tau.$$

Подстановка выражения (4.11) дает

$$\bar{U} = \lambda \int_{0^-}^{\infty} [W^{(1)}(x) + 1] \int_x^{\infty} (\tau - x) dB(\tau) dx.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\bar{U} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\tau [W^{(1)}(x) + 1] (\tau - x) dx \right] dB(\tau). \quad (4.55)$$

Беря внутренний интеграл по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [W^{(1)}(x) + 1] (\tau - x) dx &= (\tau - x) [W(x) + x] \Big|_0^\tau + \int_0^\tau [W(x) + x] dx = \\ &= \int_0^\tau [W(x) + x] dx. \end{aligned}$$

Подстановка полученного результата в (4.55) дает

$$\bar{U} = \lambda \int_0^\infty \int_0^\tau [W(x) + x] dx dB(\tau).$$

Опять меняем порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \lambda \int_0^\infty [W(x) + x] \int_x^\infty dB(\tau) dx = \\ &= \lambda \int_0^\infty [W(x) + x] [1 - B(x)] dx. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Но в общем случае

$$\int_0^\infty x [1 - B(x)] dx = \frac{\bar{x^2}}{2},$$

что легко доказать интегрированием по частям. Таким образом, при помощи равенства (4.54) определяется \bar{U} , что приводит окончательно к следующим законам сохранения для $T(x)$ и $W(x)$:

$$\int_0^\infty T(x) [1 - B(x)] dx = \frac{\bar{x^2}}{2(1-\rho)}, \quad ■ (4.57)$$

$$\int_0^\infty W(x) [1 - B(x)] dx = \frac{\rho \bar{x^2}}{2(1-\rho)}. \quad ■ (4.58)$$

Обычно в качестве нижнего предела пишется просто 0.

Равенства (4.57) и (4.58) названы законами сохранения потока, что они основаны на сохранении средней незаконченной рабо-

ты в системе. Это накладывает интегральное ограничение на $W(x)$ [и $T(x)$] как необходимое условие независимо от распределительного алгоритма. Выводы из закона сохранения могут быть сделаны с учетом того, что $[1-B(x)]$ — невозрастающая функция x . Так, если в результате некоторого распределительного алгоритма получается $\tilde{W}(x)$, а затем алгоритм меняется таким образом, что $W(x)$ уменьшается на некотором интервале $(0, x_0)$, то закон сохранения требует, чтобы новая функция $\tilde{W}(x)$ была значительно больше старой в некоторой области выше x_0 . Это следует из того, что с увеличением x уменьшается весовой коэффициент $1-B(x)$.

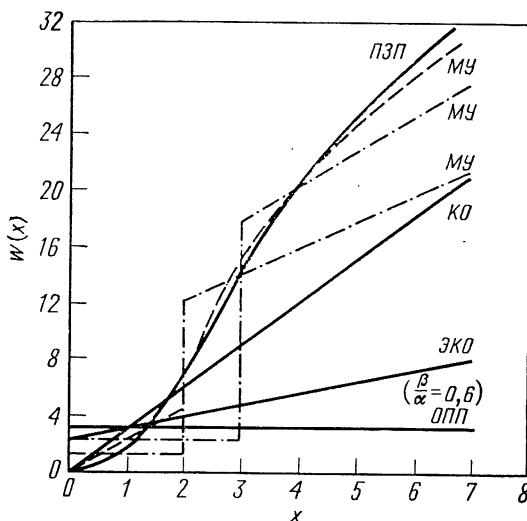
4.10. ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОТВЕТА [52]

В предыдущих разделах настоящей главы были приведены результаты исследования большого числа распределительных алгоритмов (расписаний) для вычислительных систем коллективного пользования. Фактически по любому заданному алгоритму можно определить континуум алгоритмов. Естественно попытаться найти некоторый порядок в этом запутанном многообразии. Например, в предыдущем разделе был установлен инвариант (законы сохранения) для всех консервативных алгоритмов. В настоящем разделе определяются точные границы для возможного диапазона характеристикик всех таких алгоритмов независимо от их структуры.

На фиг. 4.23 показаны кривые растряченного времени $\tilde{W}(x)$ для различных алгоритмов. Эти кривые соответствуют случаю показательного распределения времени обслуживания при $\lambda=0,75$; $x=1,0$ и, следовательно, $\rho=0,75$. Здесь приведены кривые для многочисленных дисциплин обслуживания, из которых видно, что существует большой выбор возможных функций. Отметим, например, линейную характеристику системы с КО в противоположность недискриминирующей характеристике пакетной обработки (ОПП) и характеристике максимальной дискриминации в пользу коротких требований в системе ПЗП. Заметим, что большинство рассматриваемых кривых имеет падающие участки в некоторой заданной части плоскости $(W(x), x)$. Если бы читатель рассмотрел гораздо больше таких кривых, он бы получил более полную картину и смог бы обозначить границы падающих участков кривых. Ниже устанавливается точная форма этих границ; в частности, будет показано, что при любом $\tilde{W}(x)$ должно удовлетворяться неравенство

$$W_L(x) \leq W(x) \leq W_U(x). \quad (4.59)$$

Установим сначала нижнюю границу. Можно утверждать, что для того, чтобы минимизировать $\tilde{W}(x)$, дисциплина обслуживания должна удовлетворять следующим требованиям:



Фиг. 4.23. Множество кривых времени ответа для системы $M/M/1$ при $\bar{x} = 1,0$, $\lambda = 0,75$ и $\rho = 0,75$.

1) никогда не обслуживать требования с достигнутым временем обслуживания, большим или равным x , когда в системе имеются требования с достигнутым временем обслуживания, меньшим x ;

2) никогда не прерывать обслуживание требования (если оно уже было выбрано для обслуживания) до того, как его время обслуживания не достигнет по меньшей мере x секунд.

При этих условиях функция (кривая) ответа в интервале $(0, x)$ является в точности функцией ответа для системы с относительным приоритетом и временем обслуживания, усеченным в точке x . Предположим для удобства, что используется дисциплина ОПП. Такую систему можно рассматривать как систему с двумя уровнями типа, описанного в разд. 4.7, и тогда, как известно, функция ответа [обозначаемая через $W_{\text{опп-}x}(\tau)$] должна принимать постоянное значение, как в равенстве (4.26), на интервале $(0, x)$. Обслуживание требований с достигнутым временем обслуживания, большим x , не представляет интереса при этом рассмотрении в силу первого условия.

Пусть \bar{U}_x — средняя работа в системе¹⁾, не включающая работу, которая должна быть выполнена над требованиями сверх x

¹⁾ Отметим, что вообще величина \bar{U}_x отличается от W_x , так как первая является работой (до x секунд) в системе с произвольным алгоритмом, тогда как вторая относится только к таким системам (например, с ОПП), у которых распределительный алгоритм не зависит от какой бы то ни было меры времени обслуживания.

секунд достигнутого времени обслуживания. Другими словами, если требованию необходимо $y > x$ секунд обслуживания, а оно получило $\tau < x$ секунд обслуживания, его доля, вносимая в величину \bar{U}_x , равна $x - \tau$. Тем же методом, который был использован для вывода равенства (4.57), можно показать, что

$$\bar{U}_x = \lambda \int_0^x [W(\tau) + \tau] [1 - B(\tau)] d\tau. \quad (4.60)$$

Заметим, что $\bar{U}_\infty = \bar{U} = W_0 / (1 - \rho)$.

Так как порядок обслуживания требования определяется только временем достигнутого обслуживания и прошедшего времени ожидания, история требования, которому необходимо $x_1 \geq x$ секунд обслуживания от времени его прихода в систему до получения x секунд обслуживания, не зависит от конкретного значения x_1 . Следовательно, получается результат, состоящий в том, что $W(x)$ должна быть неубывающей функцией, т. е.

$$\frac{dW(x)}{dx} \geq 0. \quad ■ (4.61)$$

Теперь, поскольку кривая $W_{\text{опп-}x}(\tau)$ имеет минимальный наклон (т. е. 0) в пределах интервала $(0, x)$, то, если любая другая кривая ответа $W(\tau)$ такова, что $W(x) < W_{\text{опп-}x}(x)$, для нее должно выполняться неравенство $W(\tau) < W_{\text{опп-}x}(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq x$. Но при первом из приведенных выше условий величина \bar{U}_x имеет минимальное значение в точке x , когда применяется дисциплина ОПП (с усеченым временем обслуживания), так как работа в этом классе непрерывно убывает с максимальной скоростью, если такая работа имеется в системе. Следовательно, для любого $W(\tau)$

$$\lambda \int_0^x [W(\tau) + \tau] [1 - B(\tau)] d\tau \geq \lambda \int_0^x [W_{\text{опп-}x}(\tau) + \tau] [1 - B(\tau)] d\tau.$$

Таким образом, приходим к заключению, что неравенство $W(\tau) < W_{\text{опп-}x}(\tau)$ в области $(0, x)$ невозможно и, следовательно, $W(x) \geq W_{\text{опп-}x}(x)$.

Таким образом, нижняя граница $W_L(x)$ определяется временем ожидания при дисциплине ОПП и временем обслуживания, усеченным в точке x , как в равенстве (4.26), а именно

$$W_L(x) = \frac{\lambda x_x^2}{2(1 - \rho_x)}. \quad (4.62)$$

Заметим, что $W_L(0) = 0$ и $W_L(\infty) = \bar{U}$. Кроме того, $W_L^{(1)}(0) = W_L^{(1)}(\infty) = 0$.

Выведем теперь верхнюю границу. Для этого начнем с системы с дискретным временем, а затем перейдем к пределу. Предположим, что распределение времени обслуживания имеет вид

$$P[\text{время обслуживания} = kq] = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где q — (бесконечно малый) квант, как обсуждалось выше. Следовательно, единственными возможными значениями времени обслуживания являются числа, кратные q . Будем также предполагать, что требования могут поступать только в моменты перед окончанием квантов и что процессор обрабатывает требование в течение кванта времени. Вероятность того, что в конце кванта поступает требование, равна λ_q , так что средняя интенсивность поступления требований равна λ . Очевидно, что любое непрерывное распределение времени обслуживания может быть сколь угодно точно аппроксимировано распределением с дискретным временем путем устремления q к нулю. Таким образом, указанные ограничения на дисциплину обслуживания и механизм поступления требований в действительности устраняются, когда $q \rightarrow 0$, что приводит к системе разделения процессора M/G/1. В этой модели с дискретным временем задача состоит в том, чтобы максимизировать $\bar{W}(kq)$.

Здесь устанавливается, что для максимизации $\bar{W}(kq)$ необходимо и достаточно следующее расписание: k -й квант не предоставляется никакому требованию, если в системе имеется другое требование, ожидающее своего j -го кванта, и $j \neq k$. Отметим, что многие дисциплины обслуживания удовлетворяют этому правилу.

Выберем ось времени таким образом, чтобы $t=0$ соответствовало произвольной точке некоторого свободного периода. Моменты времени, в которые некоторое требование получает k -й квант, назовем *критическими*. Пусть c_i — значение i -го критического момента времени. Необходимо максимизировать \bar{c}_l (среднее значение c_l) для некоторого фиксированного l . Будет показано, что для выполнения этого необходимо и достаточно удовлетворение условия, состоящего в том, что в l -й критический момент никакое требование не ждет j -го кванта, где $j \neq k$. Конечно, это условие необходимо, так как, если бы предполагаемая дисциплина обслуживания не обладала этим свойством, c_l легко могло быть увеличено путем использования предложенной дисциплины до l -го критического момента и предоставления затем кванта требованию, ожидающему своего j -го ($\neq k$) кванта.

Необходимость уже показана. Для доказательства достаточности условия максимизации \bar{c}_l нужно только показать, что любая дисциплина, удовлетворяющая этому условию, дает одну и ту же величину \bar{c}_l . Пусть A — дисциплина (распределительный алгоритм), удовлетворяющая условию, что в l -й критический момент никакое требование не ждет j -го кванта, где $j \neq k$. Пусть a_l — момент, в который поступает l -е требование, для обслуживания кото-

рого необходимо по крайней мере, kq секунд. Состояние системы в момент a_l в общем случае зависит от алгоритма A . В частности, число критических моментов до a_l (которое обозначим через s) является функцией A . Пусть $E_A[c_l - a_l]$ — состояние системы в момент a_l — условное среднее значение $c_l - a_l$ при заданном состоянии системы в момент a_l в случае использования алгоритма A . Состояние системы определяется числом требований и достигнутым временем обслуживания каждого требования в ней, а также числом s наступивших критических моментов. Таким образом, как обычно, имеем

$$\begin{aligned} E_A[c_l - a_l] & \text{состояние системы в момент } a_l = \\ & = E_A[\text{работа в системе в момент } a_l | \text{состояние в момент } a_l] + \\ & + (k-1)q + \lambda \bar{x}_{(k-1)q} E_A[c_l - a_l] \text{состояние системы в момент } a_l. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Если исключить условие, связанное с состоянием системы в момент a_l , то будем иметь $E_A[c_l - a_l] = E_A[\text{работа в системе в момент } a_l] + (k-1)q + \lambda \bar{x}_{(k-1)q} E_A[c_l - a_l]$, или

$$E_A[c_l - a_l] = \frac{E_A[\text{работа в системе в момент } a_l] + (k-1)q}{1 - \lambda \bar{x}_{(k-1)q}}.$$

Однако $E_A[\text{работа в системе в момент } a_l]$ не является функцией этого конкретного распределительного алгоритма, и, следовательно, $E_A[c_l - a_l]$ не зависит от A . Так как $E[c_l] = E[c_l - a_l] + E[a_l]$ и правая часть этого равенства не зависит от A , то $E[c_l]$ также не зависит от A , что и требовалось доказать. Заметим, что вид равенства (4.63) определяется алгоритмом A , обладающим тем свойством, что в момент c_l в системе нет требований, ожидающих j -го кванта, где $j \neq k$. Таким образом доказано, что это условие необходимо и достаточно для максимизации $E[c_l]$ ($\triangle c_l$). Покажем теперь, что общая дисциплина обслуживания, максимизирующая $W(kq)$, эквивалентна дисциплине, максимизирующей \bar{c}_l при всех l . Так как $E[c_l - a_l] = \bar{c}_l - \bar{a}_l$ является средним временем ожидания l -м критическим требованием своего k -го кванта, можно перейти к пределу

$$W(kq) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=1}^n \bar{c}_l - \sum_{l=1}^n \bar{a}_l}{n}.$$

Величина \bar{a}_l не зависит от дисциплины обслуживания, и предложенный распределительный алгоритм является необходимым и достаточным для индивидуальной максимизации \bar{c}_l . Следовательно,

этот же алгоритм, который устанавливает справедливость ранее сделанного утверждения для дискретного времени, необходим и достаточен для максимизации $W(kq)$. Однако мы не хотим ограничиваться только дискретными квантами. Очевидно, что в системе с непрерывным временем можно достигнуть максимума $W(x)$ при помощи следующего правила (непрерывный вариант указанного дискретного правила): не обслуживать требований с достигнутым временем обслуживания в интервале $(x-\varepsilon, x)$ (при $\varepsilon > 0$), когда имеются ожидающие обслуживания требования с достигнутым временем обслуживания, лежащим вне этого интервала. Устремляя ε к нулю, приближаемся к максимуму $W(x)$. Одной из дисциплин, которая максимизирует $W(x)$, является двухуровневая система многоуровневого типа (разд. 4.7) с $a_1 = x$ (т. е. первый уровень обеспечивает обслуживание вплоть до x секунд, но не включает x секунд), в которой $D_1 = D_2 = \text{ОПП}$. Тогда из равенства (4.35) непосредственно следует, что

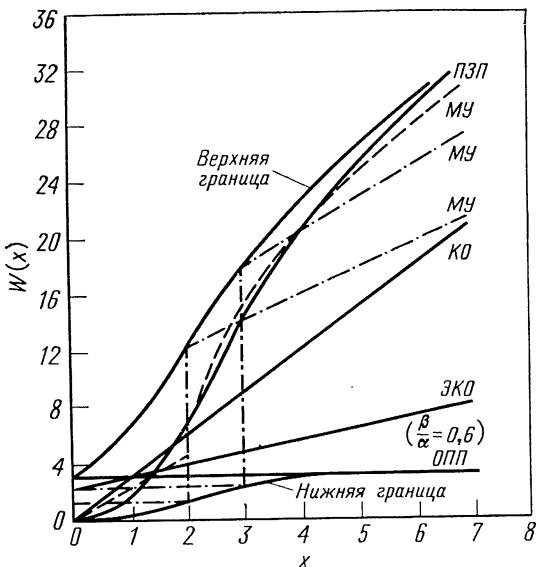
$$W_U(x) = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho_x)(1-\rho)} + \frac{x\rho_x}{1-\rho_x}.$$

Заметим, что $W_U(0) = W_L(\infty) = \bar{U}$, $W_U^{(1)}(0) = \lambda \bar{U}$ и $W_U^{(1)}(\infty) = \rho/(1-\rho)$. Таким образом, окончательно имеем точные¹⁾ границы для $W(x)$:

$$\frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho_x)} \leq W(x) \leq \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho_x)(1-\rho)} + \frac{x\rho_x}{1-\rho_x}. \quad \blacksquare \quad (4.64)$$

Фиг. 4.24 повторяет фиг. 4.23 с нанесенными точными верхней и нижней границами. При $x=0$ верхняя граница и кривая ОПП начинаются в одной и той же точке, так как при действии закона сохранения никакой другой распределительный алгоритм не может дать большего среднего времени ожидания при $x=0$, чем ОПП. Верхняя граница асимптотически приближается к кривой времени ответа ПЗП при стремлении x к бесконечности. Следовательно, требование с очень большим (по сравнению со средним) необходимым временем обслуживания не может быть задержано намного дольше, чем при алгоритме ПЗП. Нижняя граница начинается с нуля (как и кривая ПЗП) и увеличивается с ростом x не так быстро, как верхняя граница. Она приближается асимптотически к кривой ОПП при стремлении x к бесконечности. Можно видеть, что из возможных алгоритмов ОПП является наихудшим для очень коротких требований и наилучшим для очень длинных требований. Наоборот, ПЗП является наилучшим возможным алгоритмом для очень коротких требований и наихудшим для очень

¹⁾ Эти границы точные в том смысле, что каждая точка этих границ может быть действительно достигнута с помощью некоторого алгоритма и, следовательно, не может быть найдено никаких более узких общих границ.

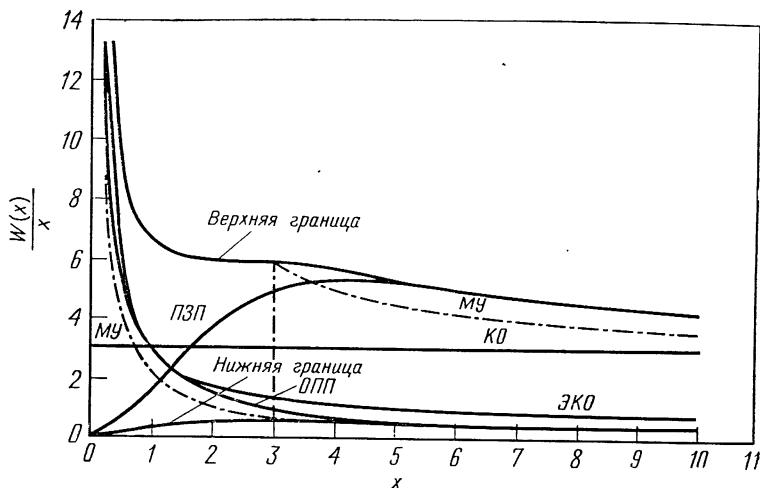


Фиг. 4.24. Границы времени ответа для случая системы $M/M/1$ при $\bar{x}=1,0$, $\lambda=0,75$, $\rho=0,75$.

длинных требований. Таким образом, кривая наименее дискриминирующего алгоритма (ОПП) достигает верхней границы при $x=0$ и выходит на асимптоту к нижней границе при $x \rightarrow \infty$; наоборот, кривая наиболее дискриминирующего алгоритма ПЗП достигает нижней границы при $x=0$, идет из начала координат по касательной к нижней границе (с нулевым наклоном) и выходит на асимптоту к верхней границе при $x \rightarrow \infty$. Верхняя и нижняя границы ведут себя так, как показано выше, не только для рассмотренной системы $M/M/1$, но в общем случае также для любой системы $M/G/1$, хотя скорость сходимости границ к соответствующим асимптотам при различных распределениях времени обслуживания не одинакова.

Верхняя и нижняя границы для $W(x)$ непосредственно дают верхнюю и нижнюю границы для интенсивности штрафа $W(x)/x$. Пример таких границ приведен на фиг. 4.25, где показаны те же случаи, что и на двух предыдущих фигурах. Отметим интересное изменение этой функции для некоторых алгоритмов; как обычно, система с КО проявляет свое замечательное свойство.

Очень простое применение некоторых из этих граничных результатов состоит в следующем. Представим себе, что разработчик системы должен предложить распределительный алгоритм, обеспечивающий среднее время ответа не больше 4 с для всех тре-



Фиг. 4.25. Границы интенсивности штрафа для системы $M/M/1$ при $\bar{x}=1,0$, $\lambda=0,75$, $\rho=0,75$.

бований с временем обслуживания 3 с или меньше, и предположим, что выполняются предположения, справедливые для рассмотренных выше графиков. Если непосредственно воспользоваться зависимостью $W(x)=T(x)-x$, то можно заметить, что требуется спроектировать систему, в которой среднее растроченное время должно быть не более 1 с для требований с необходимым временем обслуживания до 3 с. Легко увидеть, что эта точка оказывается ниже нижней границы на фиг. 4.24, и поэтому можно сразу ответить, что распределительного алгоритма, который мог бы обеспечить такую характеристику, *не существует*. С другой стороны, если бы требование к разработчику попало в осуществимую область, то не только можно было бы утверждать, что оно выполнимо, но и предложить двухуровневый алгоритм, который удовлетворил бы поставленному перед разработчиком требованию.

Отметим, что более общим (и не имеющим ответа к моменту написания книги) является вопрос: каковы необходимые и достаточные условия того, что заданная функция ответа осуществима? Здесь были приведены некоторые важные необходимые условия.

Выше в этой главе был дан набор распределительных алгоритмов (расписаний) вместе с их характеристиками. Естественным следующим шагом в этом направлении было бы нахождение оптимального алгоритма среди рассмотренных. К сожалению, пока по этому вопросу опубликовано чрезвычайно мало полезных работ главным образом потому, что еще не предложено приемлемого определения оптимума. Шаг в этом направлении сделан в

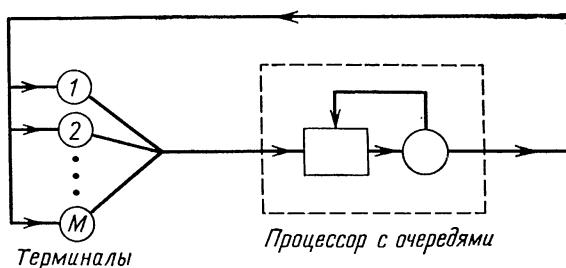
работе [60], и он составляет существо задачи 4.28. Перейдем теперь от модели с бесконечным числом источников нагрузки к более реалистическому случаю конечного числа источников.

4.11. МОДЕЛИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСТОЧНИКОВ НАГРУЗКИ

Все описанные до сих пор модели вычислительных систем основывались на предположении о бесконечном числе источников входящего потока, т. е. фактически процесс поступления требований предполагался пуссоновским. Конечно, в реальном мире нет бесконечных источников нагрузки, и поэтому, естественно, возникает вопрос, когда же можно рассматривать входящий поток как идущий от бесконечного числа источников нагрузки. Ответ состоит в том, что такое приближение хорошо, когда входящий процесс зависит лишь в незначительной мере от числа требований, уже находящихся в системе. Таковы случаи телефонной и телеграфной нагрузки и многие другие, представляющие интерес. Кроме того, когда вычислительная система коллективного пользования станет доступна широкому кругу пользователей, возможно, множество пользователей можно будет рассматривать как бесконечное. Таким образом, до сих пор в этой главе давалась характеристика систем будущего и, конечно, это способствует пониманию существа действующих и планируемых систем.

Теперь исследуем случай конечного числа источников нагрузки на входе. Рассмотрим фиг. 4.26. Здесь имеются M пользователей, или терминалов ЭВМ, которые создают поток требований в вычислительную систему коллективного пользования. Штриховой линией выделена СМО с обратной связью, подобная показанной на фиг. 4.2. Нужно описать окружение СМО с обратной связью, которое также содержит большую петлю обратной связи. Модель с конечным числом источников нагрузки работает следующим образом: требование, посланное пользователем терминала на обслуживание в вычислительную систему, поступает в блок, выделенный штриховой линией, и обслуживается в соответствии с распределительным алгоритмом обработки процессора коллективного пользования. В течение этого времени пользователь «спит», т. е. он не может посылать новые требования. Когда же обслуживание данного требования закончится, ответ поступит в терминал, и в этот момент пользователь терминала «просыпается» и начинает «создавать» новое требование для ЭВМ. Время, затраченное пользователем на создание этого нового требования, называется его временем размышления. Таким образом, как указывалось во введении к настоящей главе, имеют место чередующиеся периоды размышления и обработки.

Предположим, что время размышления распределено по показательному закону со средним значением $1/\lambda$ секунд. Если $M \rightarrow \infty$,



Фиг. 4.26. Конечное число источников нагрузки.

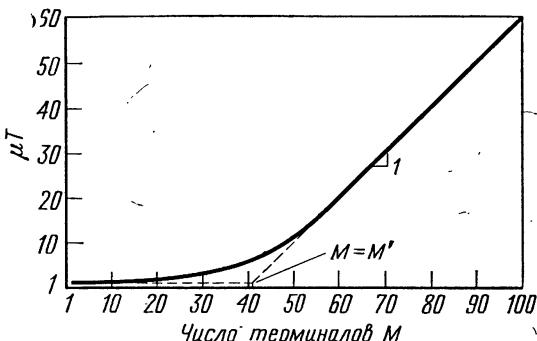
а $\lambda \rightarrow 0$ так, что $M\lambda = \lambda'$ (постоянно), создается пуссоновский процесс поступления требований со средней интенсивностью λ' от конечного числа источников нагрузки. Предполагается, что здесь используется алгоритм разделения процессора с КО.

Если время обслуживания распределено по показательному закону, а распределительный алгоритм предусматривает ОПП, то это в точности такая же система, как и система с конечным числом источников нагрузки, для которой решение имеет вид (1.71). Вследствие того что показательное распределение обладает свойством отсутствия памяти, распределение числа требований в системе должно не зависеть от распределительного алгоритма. Случай с показательным временем обслуживания рассматривается в работе [80], где найдено безусловное среднее время ответа в системе (определенное как время, проведенное в блоке, выделенном на фиг. 4.26 штриховой линией), на которое не наложено условие, задающее необходимое время обслуживания. Как обычно, эта величина обозначается через T . Этот результат (триivialное доказательство которого намечено в задаче 4.22) имеет вид

$$T = \frac{M/\mu}{1 - p_0} - \frac{1}{\lambda}, \quad \blacksquare \quad (4.65)$$

где $1/\mu$ — среднее время обработки одного требования, а p_0 (которая дается равенством (1.71) при $k=0$), как обычно, представляет собой вероятность того, что в блоке, выделенном штриховой линией, нет требований. Шерр в работе [80] нашел, что это очень хорошая модель для измеренного времени ответа в системе CTSS Массачусетского технологического института¹⁾. Заметим, что мини-

¹⁾ Для системы CTSS не применимо большинство предположений Шерра. В этой системе нет показательного распределения ни для времени размышлении, ни для времени обслуживания, не выполняются предположения о структуре, а сама она не является консервативной. Несмотря на это, модель хорошо предсказывает характеристики системы. Как будет показано далее, эта рабочесть не является простой случайностью.



Фиг. 4.27. Характеристика для конечного числа источников нагрузки и насыщение.

малыне возможное среднее время ответа имеет место при $M=1$ и, следовательно, $T=1/\mu$. Нормируем T относительно этого минимума (т. е. образуем μT). На фиг. 4.27 приведен график нормированного времени ответа как функции числа терминалов M . Здесь можно заметить очень медленный подъем времени ответа при росте числа терминалов от 1; однако после прохода через переходную область нормирования функция ответа становится фактически линейной с наклоном, равным единице. Это поведение легко понять. В области, где время ответа растет очень медленно, число пользователей настолько мало, что в периоды, когда пользователь требует обслуживания, обычно другие пользователи размышляют и поэто-му не мешают ему. Однако из равенства (4.65) видно, что, когда число требований возрастает, нормированное время ответа (μT) должно стать линейным (с наклоном, равным единице), так как ρ стремится к нулю (вероятность освобождения процессора стремится к нулю, когда число активных терминалов становится достаточно большим).

Вследствие конечного значения M возникает вопрос о том, возможно ли «насыщение» системы. Действительно, если определить насыщение как такую точку, в которой система становится в некотором смысле нестабильной, например где среднее время ответа возрастает до бесконечности, то можно увидеть, что рассматриваемая система никогда не насыщается (при $\lambda/\mu < \infty$). Тем не менее существует разумное определение насыщения, которое обозначим через M^* :

$$M^* \triangleq \frac{1/\mu + 1/\lambda}{1/\mu} = \frac{\mu + \lambda}{\lambda} = 1 + \frac{\mu}{\lambda}. \quad ■ (4.66)$$

Насыщение определяется здесь как время цикла (т. е. сумма среднего времени размышления и среднего необходимого времени

обслуживания), деленное на среднее время обслуживания. Действительно, если бы все требования обрабатывались точно $1/\mu$ секунд, а размышление продолжалось бы точно $1/\lambda$ секунд (детерминированная система), то M^* было бы точно равно максимальному числу требований, которые могли бы быть обработаны без взаимных помех. Каждый пользователь сверх M^* вызывал бы задержку для всех других пользователей на время, равное *полному* времени обработки его требования (1/ μ секунд). Такие пользователи не принимаются вежливо. На фиг. 4.27 можно экстраполировать нормированную линейную асимптоту для времени ответа ($\mu T = M - \mu/\lambda$) до точки, где нормированное время ответа равно единице (т. е. $M - \mu/\lambda = 1$). В этой точке число терминалов в точности равно насыщению $M^* = 1 + \mu/\lambda$. Таким образом, асимптотическое значение времени ответа может быть выражено в виде $\mu T = M - M^* + 1$. Эта асимптота показывает, что при $M \gg M^*$ (случай достаточно большого M) и M активных терминалах все пользователи ожидают ответа в течение нормированного времени, которое в $M - M^* + 1$ раз больше, чем в случае, если бы каждый пользователь получал в свое распоряжение весь процессор. Таким образом, M^* пользователей представляются как бы «поглощенными» и превращенными в одного пользователя (см. задачу 4.29). Кроме того, при $M \gg M^*$ каждый дополнительный пользователь вызывает задержку для всех других пользователей на его полное среднее время обслуживания. Таким образом, насыщенная система ведет себя как детерминированная система. Эти важные положения и ряд других приведены в работе [47].

Систему такого типа рассмотрел также Гринбергер [33], который допустил ненулевое время замены и конечные кванты. Он определил условное среднее время ответа при заданном времени обслуживания и нашел очень хорошее приближение для этой функции. В работе [1] тоже рассматривается такой случай и определяется (чрезвычайно сложное) точное значение условного среднего времени ответа. Если взять предельное значение результата Гринбергера при нулевом времени замены и устремить квант к нулю, то условное время ответа можно приблизенно получить в виде

$$T(x) \approx \mu T x, \quad \blacksquare \quad (4.67)$$

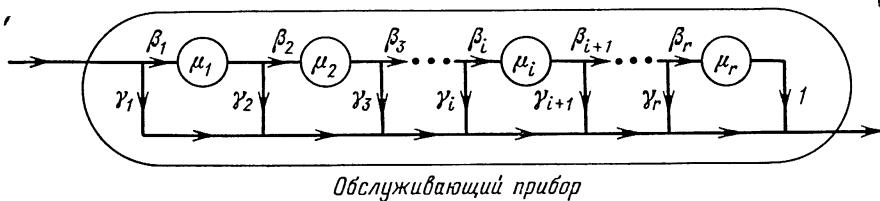
где T — безусловное среднее время ответа, определяемое равенством (4.65). Эту характеристику также можно найти из графиков, представленных в работе [1]. Опять можно видеть, что алгоритм КО дает по существу линейную зависимость от времени обслуживания.

Обобщим теперь некоторые из этих результатов для КО, как это сделано в работе [7]. Обобщение делается для показательных распределений времени размышлений и времени обслуживания в

рассматриваемой основной модели с конечным числом источников нагрузки. Как указывалось в разд. 4.7 первого тома [59], все рациональные функции распределения (распределения, которые имеют рациональные преобразования Лапласа) могут быть синтезированы при помощи каскада показанных приборов. Конкретная структура, которая нас интересует, показана на фиг. 4.28. Применение такой структуры для обслуживающего прибора приводит к следующему преобразованию ПРВ времени обслуживания с параметрами β_i , γ_i , μ_i и r (предполагается, что $\gamma_{r+1}=1$):

$$B^*(s) = \gamma_1 + \sum_{i=1}^r \beta_1 \beta_2 \dots \beta_i \gamma_{i+1} \prod_{j=1}^i \left(\frac{\mu_j}{s + \mu_j} \right). \quad (4.68)$$

Аналогично воспользуемся таким каскадным подходом для представления распределения времени размыщения, где соответствующие параметры обозначаются как b_i , g_i , λ_i , а общее число каскадов (размыщения) равно n . Предположим (как и выше), что $g_{n+1}=1$. Тогда, как в случае показательного распределения, соответствующее описание состояния заключалось в указании числа требований в блоке, выделенном штриховой линией на фиг. 4.26, теперь требуется более сложное описание состояния, которое обозначим как (k, u, v) . Здесь k — число требований, обслуживаемых в штриховом блоке (напомним, что в качестве алгоритма обработки используется КО); u — представляет собой n -мерный вектор, i -й элемент которого u_i обозначает число требований в i -м каскаде размыщения, а v есть r -мерный вектор, i -й элемент которого v_i обозначает число требований, обслуживаемых в данное время в каскаде i внутри обслуживающего прибора в штриховом блоке. Пусть $P(k, u, v)$ — стационарная вероятность того, что система находится в состоянии (k, u, v) . Для того чтобы написать уравнения равновесия, необходимо ввести обозначения, аналогичные использованным в разд. 4.8 первого тома [59] и в работе [38]. С этой целью положим $u(i^+) = u$ (кроме i -й компоненты, которая принимает значение u_i+1); $u(i^-) = u$ (кроме i -й компоненты, которая принимает значение u_i-1) и $u(i, j) = u$ (кроме i -й компоненты, которая равна u_i-1 , и j -й компоненты, которая равна u_j+1); пусть при этом $u(i, i) = u$. Аналогичные обозначения будут ис-



Фиг. 4.28. Обслуживающий прибор каскадного типа.

пользованы для вектора \mathbf{v} . Тогда, воспользовавшись обычными методами (см., например, [59]), можно записать следующие уравнения статистического равновесия:

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{i=1}^n u_i \lambda_i + \sum_{i=1}^r \frac{v_i \mu_i}{k} \right] P(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \\
 & = \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} (u_i + 1) \lambda_i P(k, \mathbf{u}(i+1, i), \mathbf{v}) + \\
 & + \sum_{i=1}^{r-1} \beta_{i+1} \frac{(v_i + 1)}{k} \mu_i P(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}(i+1, i)) + \\
 & + \sum_{i=1}^n g_{i+1} (u_i + 1) \lambda_i \left(\frac{\beta_1}{1 - g_1 \gamma_1} \right) P(k-1, \mathbf{u}(i^+), \mathbf{v}(i^-)) + \\
 & + \sum_{i=1}^n g_{i+1} (u_i + 1) \lambda_i \left(\frac{\gamma_1 \beta_1}{1 - g_1 \gamma_1} \right) P(k, \mathbf{u}(1, i), \mathbf{v}) + \\
 & + \sum_{i=1}^r \frac{\gamma_{i+1} (v_i + 1)}{k+1} \mu_i \left(\frac{\beta_1}{1 - g_1 \gamma_1} \right) P(k+1, \mathbf{u}(1^-), \mathbf{v}(i^+)) + \\
 & + \sum_{i=1}^r \frac{\gamma_{i+1} (v_i + 1)}{k} \mu_i \left(\frac{g_1 \beta_1}{1 - g_1 \gamma_1} \right) P(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}(1, i)), \quad 0 \leq k \leq M, \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

где вероятность $P(k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ считается равной нулю, когда k отрицательно или больше M либо когда отрицательны u_i или v_i . Заметим, что левая часть этого уравнения равна интенсивности потока из состояния $(k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, а правая часть соответствует потоку в это состояние. Появление k в качестве делителя является просто результатом разделения процессора по алгоритму КО, когда в обслуживающем устройстве находится k требований. Можно проверить, что решение этой системы уравнений имеет вид

$$P(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) P(k, \mathbf{v}),$$

где

$$f(\mathbf{u}) = (M-k)! \lambda^{M-k} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{u_i}}{u_i!}$$

и

$$P(k, \mathbf{v}) = \frac{\lambda^k M! k!}{(M-k)!} \prod_{i=1}^r \frac{y_i^{v_i}}{v_i!} P(0, 0),$$

$P(0, 0) = p_0$ — вероятность того, что в штриховом блоке нет ни одного требования.

$$y_i = \left(\prod_{j=1}^i \beta_j \right) \frac{1}{\mu_i},$$

$1/\mu = \sum_{i=1}^r y_i$ — среднее время обслуживания,

$$x_i = \left(\prod_{j=1}^i b_j \right) \frac{1}{\lambda_i},$$

$1/\lambda = \sum_{i=1}^n x_i$ — среднее время размышления.

Теперь можно определить p_k путем суммирования по \mathbf{u} и \mathbf{v} :

$$p_k = \sum_{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{v}} P(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

Удивительно, что этот расчет дает

$$p_k = \frac{M!}{(M-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_0, \quad 0 \leq k \leq M, \quad (4.70)$$

и

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^M \frac{M!}{(M-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right]^{-1}, \quad (4.71)$$

что в точности совпадает с решением, полученным для чисто марковского случая с конечным числом источников нагрузки [см. (1.71)]. Таким образом, стационарное распределение числа требований при КО в штриховом блоке в случае рациональных распределений времени размышления и обслуживания совпадает с распределением, полученным для случая строго показательных распределений с параметрами λ и μ соответственно. Этот результат зависит только от среднего времени размышления ($1/\lambda$) и среднего времени обслуживания ($1/\mu$). Аналогичная ситуация встречалась в разд. 4.4, где было найдено, что $T(x)$ не зависит от вида распределения времени обслуживания для случая разделения процессора с КО.

4.12. МОДЕЛИ С МНОГИМИ РЕСУРСАМИ

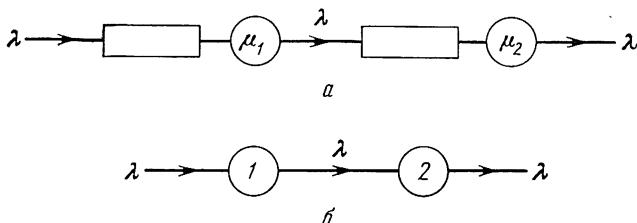
Во вступлении к настоящей главе было отмечено, что адекватной моделью вычислительной системы коллективного пользования является модель, учитывающая наличие *многих* ресурсов. До сих пор внимание было сосредоточено на модели с одним ресурсом, в

которой требования поступают только в центральный процессор. В настоящем разделе делается обобщение на случай многих ресурсов, который описывается при помощи *сети массового обслуживания*.

Начнем с обзора состояния теории сетей массового обслуживания. (Этот материал представлен в разд. 4.8 первого тома [59] и обобщен в разд. 1.6 настоящей книги.) Более 20 лет назад Джексон [36] исследовал двухузловую тандемную сеть (фиг. 4.29, *a*), в которой первый узел — система $M/M/1$ (с параметрами λ , μ_1 и $\rho_1 = \lambda/\mu_1 < 1$), выход которой поступает во вторую СМО (второй узел), имеющую один прибор с временем обслуживания, распределенным по показательному закону (с интенсивностью обслуживания μ_2 , причем $\rho_2 = \lambda/\mu_2 < 1$). На фиг. 4.29, *б* показано условное обозначение такой сети, содержащее два узла (здесь очереди и обслуживающие приборы не изображены). Джексон показал, что стационарная вероятность $p(k_1, k_2)$ наличия k_1 требований в первом узле и k_2 требований во втором узле равна

$$p(k_1, k_2) = (1 - \rho_1) \rho_1^{k_1} (1 - \rho_2) \rho_2^{k_2}.$$

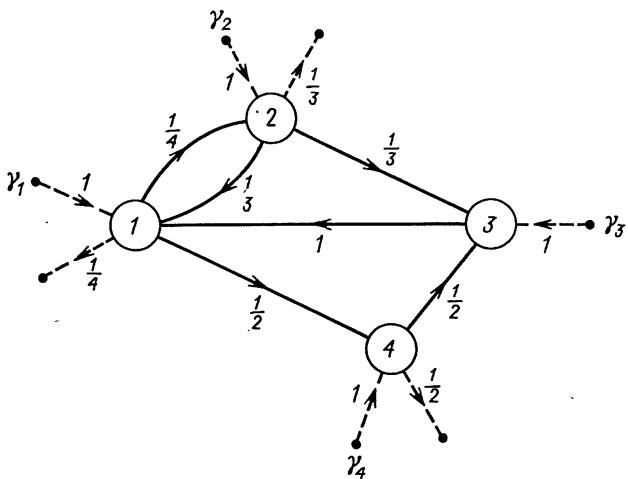
Это выражение представляет собой произведение вероятностей состояний двух независимых систем $M/M/1$. В 1956 г. Бёрке [10] установил, что выход системы $M/M/1$ является пуссоновским процессом (см. [59], разд. 4.8). Фактически он показал, что единственной СМО с обслуживанием требований в порядке их поступления, у которой интервалы между моментами выхода соседних требований образуют независимый¹⁾ пуссоновский процесс, является система $M/M/m$. Из этого следует, что любая сеть массового обслуживания без петель (т. е. когда исключается возможность возвращения требования в узел, который ранее уже посещался) и с показательными распределениями времени обслуживания, которая



Фиг. 4.29. Тандемная сеть с двумя узлами.

а — подробная структура двухузловой тандемной сети; *б* — принятое представление сети.

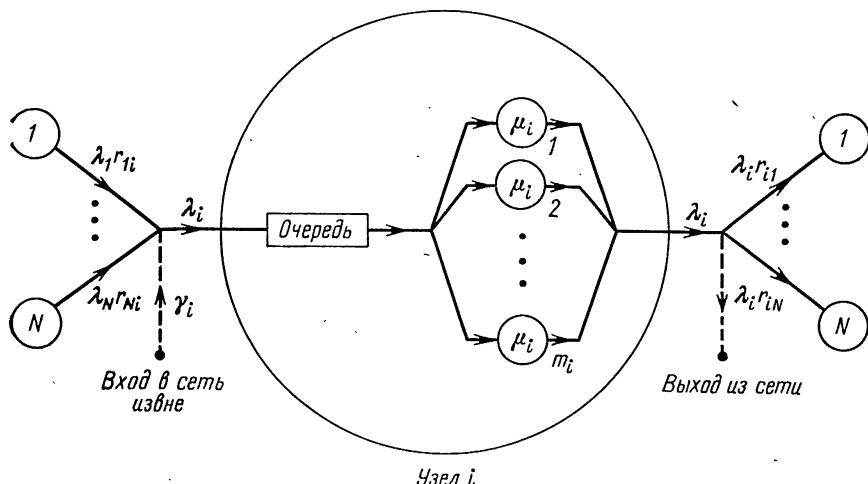
¹⁾ Здесь слово «независимый» означает независимость интервалов между точками, образующими пуссоновский процесс. Аналогичное непривычное использование слова «независимый» будет также встречаться далее. — Прим. ред.



Фиг. 4.30. Пример открытой сети (у ребер указаны значения r_{ij}).

обслуживает независимые пуассоновские источники, генерирует для каждого узла независимый пуассоновский входящий поток. Поэтому совместное распределение вероятностей для всех узлов представляет собой произведение отдельных распределений, каждое из которых является решением для системы М/М/м (см. разд. 1.5). Простым примером сети без петель служит рассмотренная выше сеть с двумя узлами. Такие сети без петель являются частными случаями сетей с петлями, которые впервые исследовались в работе [37]. В ней рассматриваются произвольные *открытые* марковские сети (открытые в смысле допустимости поступления требований извне и ухода требований из сети), пример которых показан на фиг. 4.30. Эта модель описана в разд. 1.6 и состоит из N узлов, причем в i -м узле находятся m_i показательных обслуживающих приборов, для каждого из которых среднее время обслуживания равняется $1/\mu_i$ секунд. Внешний пуассоновский источник генерирует поток требований, поступающих в i -й узел с интенсивностью γ_i требований в секунду (эти потоки показаны на фиг. 4.30 штриховыми входящими линиями). После обслуживания в i -м узле требование поступает в узел j с вероятностью r_{ij} или покидает сеть с вероятностью $1 - \sum_{j=1}^N r_{ij}$ (это показано на фиг. 4.30 штриховыми выходящими линиями). Заметим, что здесь допускаются возвращения в ранее посещенные узлы.

Обозначим через $R = [r_{ij}]$ матрицу $N \times N$, элементами которой



Фиг. 4.31. Полная структура узла i (у ребер указаны значения интенсивности трафика).

являются эти переходные вероятности. Для примера, показанного на фиг. 4.30, имеем

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}.$$

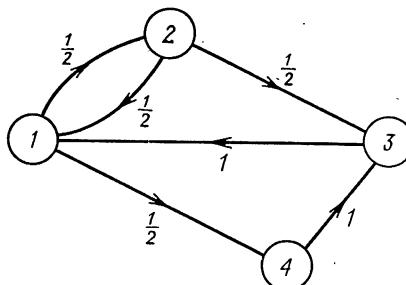
Общая (внутренняя плюс внешняя) интенсивность поступления требований в i -й узел обозначена через λ_i (число требований в 1 с). Для того чтобы найти λ_i , необходимо решить систему линейных уравнений (1.75), имеющую следующий вид:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j r_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad ■ (4.72)$$

Используя обозначения $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ и $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]$, уравнение (4.72) можно представить в виде

$$\lambda = \gamma + \lambda R.$$

Например, если для сети, изображенной на фиг. 4.30, $\gamma = [1, 0, 5, 2]$, то можно найти, что $\lambda = [12, 3, 10, 8]$. Заметим, что эти расчеты не зависят от предположения о показательных распределениях и параметров m_i и μ_i , т. е. вектор λ зависит только от γ и R . Более подробная структурная схема многолинейной СМО i -го узла представлена на фиг. 4.31.



Фиг. 4.32. Пример замкнутой сети.

Можно показать, что в сетях с петлями процессы поступления требований в разные узлы в общем случае не являются пуассоновскими. Однако удивительный результат [37], известный как теорема Джексона, утверждает, что каждый узел ведет себя так, как если бы его вход был пуассоновским! В частности, если обозначить через $p(k_1, k_2, \dots, k_N)$ стационарную вероятность того, что в i -м узле находятся k_i требований ($i=1, 2, \dots, N$), то при $\lambda_i/m_i\mu_i < 1$ для всех i , согласно этой теореме,

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_1(k_1)p_2(k_2) \cdots p_N(k_N), \quad \blacksquare \quad (4.74)$$

где $p_i(k_i)$ — стационарная вероятность того, что k_i требований находятся в системе $M/M/m_i$ при интенсивности входящего потока λ_i и среднем времени обслуживания $1/\mu_i$ для каждого из m_i обслуживающих приборов. Это равенство приводилось в разд. 1.5. Таким образом, опять получаем решение в виде произведения.

В 1967 г. Гордон и Ньюэлл [32] опубликовали описание модели произвольной замкнутой марковской сети. Фактически это было развитием частного случая, рассмотренного в 1963 г. Джексоном [38]. Эта сеть такая же, как и открытая марковская сеть, с той лишь разницей, что в ней содержатся K требований и не допускаются поступления извне и уходы; иначе говоря, $\sum_{j=1}^N r_{ij} = 1$ для всех i .

Например, перестроим открытую сеть, показанную на фиг. 4.30, удалив из нее все внешние пути поступления и ухода (т. е. все штриховые линии) и изменив вероятности перехода r_{ij} так, чтобы получилась замкнутая сеть, изображенная на фиг. 4.32. Так как $\gamma_i = 0$ (для всех i) в таких замкнутых сетях, уравнение (4.73) принимает вид

$$\lambda = \lambda R. \quad (4.75)$$

Это уравнение определяет λ не единственным образом, оно определяет только относительные значения компонент λ_i (т. е. позволяет найти λ_i с точностью до постоянного множителя). Для приме-

ра, показанного на фиг. 4.32, можно установить, что отношения $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ имеют вид $4:2:3:2$. Фактически λ_i дает относительное число поступлений в i -й узел в процессе циркуляции требований в сети. В работе [32] вводится x_i с помощью равенства

$$\lambda_i = \mu_i x_i. \quad (4.76)$$

Заметим далее, что $x_i/m_i = \lambda_i/m_i \mu_i$ представляет собой относительное использование i -го узла. Предположим, что $m_i = 1$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда стационарная вероятность p (k_1, k_2, \dots, k_N)дается выражением [32]

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N x_i^{k_i}, \quad ■ (4.77)$$

где $G(K)$ — постоянная, обеспечивающая равенство суммы вероятностей единице,

$$G(K) = \sum_{\mathbf{k} \in A} \prod_{i=1}^N x_i^{k_i}, \quad (4.78)$$

где $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_N]$ и A — множество векторов \mathbf{k} , для которых $k_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^N k_i = K. \quad (4.79)$$

Опять решение получается в виде произведения (4.77). (Решение в случае, когда $m_i \geq 1$, приведено в разд. 1.6.) Формулы (4.77) и (4.78) имеют важное значение при определении свойств замкнутой сети. Как показано в работе [12], если найти $G(1), G(2), \dots, G(K)$, то с их помощью можно затем рассчитать ряд полезных характеристик сети. В частности (см. задачу 4.35), если k_i — число требований в i -м узле, то

$$P[\tilde{k}_i = k_i] = \frac{x_i^{k_i}}{G(K)} [G(K - k_i) - x_i G(K - k_i - 1)], \quad ■ (4.80)$$

$$E[\tilde{k}_i] = \sum_{k_i=0}^K x_i^{k_i} \frac{G(K - k_i)}{G(K)}. \quad ■ (4.81)$$

В задаче 4.36 приведен предложенный Бузеном итеративный алгоритм, который позволяет вычислить $G(1), G(2), \dots, G(K)$, используя всего NK умножений и NK сложений. Бузен [12] разработал также более сложный алгоритм для случая, когда интенсивность обслуживания в узле зависит от числа требований, находящихся в этом узле; это, например, допускает $m_i \geq 1$. Другой

подход к определению $G(K)$ описан в работе [68], где используется комбинаторная лемма для получения явного выражения для $G(K)$ в случае, когда $m_i=1$ ($i=1, 2, \dots, N-1$), $m_N \geq 1$ и $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$).

Все эти результаты не использовались в литературе до тех пор, пока в 1971 г. Мур [67] не нашел, что замкнутые марковские сети пригодны для моделирования работы вычислительной системы с многими ресурсами, в которой каждый ресурс моделируется узлом сети¹⁾. (Фактически модель из разд. 4.11 работы [47] отчасти использует результат Мура.) Это применение довольно естественно, так как нетрудно представить себе задания, проходящие по вычислительной системе от одного ресурса к другому и последовательно запрашивающие обслуживания со стороны этих ресурсов. Если несколько требований одновременно требуют обслуживания от одного и того же ресурса, то конфликт, естественно, разрешается путем образования очереди перед этим ресурсом. Удивительный для того времени результат состоял в том, что модели марковских сетей, основанные на предположении о показательных продолжительностях обслуживания, позволяли предсказать поведение системы, причем эти предсказания подтвердились прямыми измерениями на Мичиганской терминальной системе, в которой распределения времени обслуживания заведомо не были показательными. Это двухпроцессорная система (с двумя ЦП IBM 360/67) с объемом оперативной памяти на 1,5 мегабайта, двумя допускающими попаренное обращение барабанами, тремя запоминающими устройствами IBM-2314 на дисках и другими вспомогательными устройствами памяти, коллективно обслуживающая свыше 100 терминалов. Система испытывалась в течение многих интервалов длиной 10—15 мин для того, чтобы получить значения μ_i и x_i . Мур нашел, что модель замкнутой сети предсказала среднее время ответа системы с точностью 10% по отношению к измеренному времени ответа в течение данного интервала на основании измеренных параметров для этого интервала в модели. Подобная ситуация была обнаружена также Шерром при использовании марковских моделей для системы коллективного пользования Массачусетского технологического института CTSS [80]. Это обсуждалось в предыдущем разделе, где рабочее поведение модели было рассмотрено с помощью удивительного результата (4.70).

Модель Гордона и Ньюэлла, использованная Муром, позволила даже предсказать появление «узкого места». Узкое место — это такой узел сети, в котором отношение x_i/m_i , называемое относительным использованием данного узла, имеет наибольшее значение.

¹⁾ В 1964 г. Уоллес [86] предложил использовать открытые сети Джексона для анализа очень больших вычислительных систем, однако этот анализ не применялся на практике.

ние. В пределе при $K \rightarrow \infty$ в узком месте образуется бесконечная очередь, тогда как в других узлах имеют место только конечные очереди. Кроме того, Мур показал, что балансировка системы (т. е. приведение всех отношений x_i/m_i приблизительно к одному и тому же значению) устраниет узкое место и приводит к тому, что все узлы начинают действовать как ресурсы, стремящиеся к бесконечности одновременно.

Вскоре после того, как была доказана применимость замкнутых марковских сетей для моделирования вычислительной системы, в литературе появилось большое число статей, посвященных использованию этих сетей. В настоящем разделе описываются некоторые полезные полученные результаты. Внимательный читатель заметит, что классическая модель с конечным числом источников нагрузки, которая обсуждалась в предыдущем разделе, уже является примером замкнутой марковской сети, если времена обслуживания и времена размышления распределены по показательному закону. Эта система содержит два узла (однолинейный узел с центральным процессором и терминальный узел с M обслуживающими приборами), причем $K=M$, $m_1=1$ и $m_2=M$.

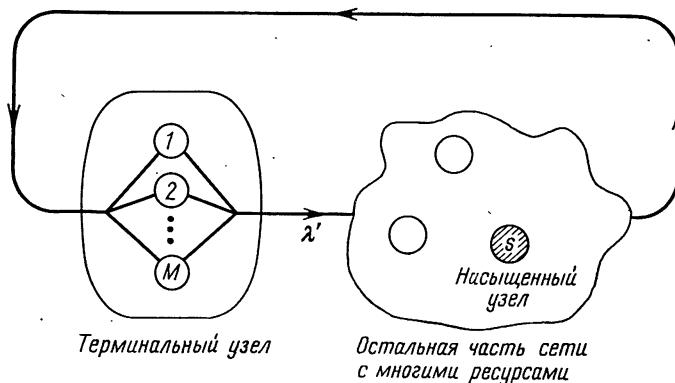
При использовании моделей открытых и замкнутых сетей для случая многих ресурсов можно заметить, что выполненные ранее исследования (Джексона, Гордона и Ньюэлла, Мура) ограничены по крайней мере в трёх отношениях: во-первых, все требования ведут себя одинаково (продолжительности обслуживания и переходные вероятности выбираются в соответствии с одним и тем же распределением¹⁾), во-вторых, все распределения продолжительностей обслуживания показательные (марковские сети массового обслуживания) и, в-третьих, распределительный алгоритм каждого узла по существу предусматривает обслуживание в порядке поступления (или в лучшем случае не учитывает достигнутого времени обслуживания для рассматриваемых требований). Предыдущие исследования этой главы, относящиеся к системе с разделением процессора с КО, наводят на мысль о возможности устранения этих ограничений. В частности, напомним два «аномальных» результата этих исследований, которые в дальнейшем появятся при обобщениях: во-первых, система разделения процессора с КО (а также система ООП с абсолютным приоритетом) характеризуется условным средним временем ответа, которое не зависит от распределения времени обслуживания в случае открытой системы ($M/G/1$), и, во-вторых, подобный же результат справедлив для модели с конечным числом источников (замкнутая сеть), в которой при использовании алгоритма разделения процессора путем круго-

¹⁾ Имеется в виду, во-первых, что распределение времени обслуживания в каждом узле зависит лишь от номера этого узла и не зависит от поступающего требования, и, во-вторых, что матрица переходных вероятностей R для всех требований одинакова. — Прим. ред.

вого опроса распределение числа заданий в системе не зависит от (рациональных) распределений времени размышления и времени обслуживания. В последнее время достигнут значительный прогресс в устранении некоторых из указанных ограничений. В работе [24] рассмотрен случай, когда допускаются различные классы требований в замкнутой системе с двумя узлами. Поснер и Бернхольдс [77] также исследовали замкнутую сеть, в которой различные требования могут иметь различные переходные вероятности r_{ij} , а также свои показательные распределения времени обслуживания¹⁾, кроме того, каждое требование может иметь произвольно распределенное время прохождения между узлами. В работе [13] к сетям применяются условия локального баланса (см. разд. 4.8 первого тома [59]). Некоторые полезные предельные теоремы для интенсивности, с которой различные узлы выполняют работу в замкнутых сетях, приводятся в [15]. Прежде чем описать результаты, в которых устраниены три указанных выше ограничения, рассмотрим некоторые асимптотические результаты, представляющие большой интерес.

Начнем с определения некоторых асимптотических свойств замкнутых сетей [73]. Воспользуемся моделью, аналогичной модели Гордона и Ньюэлла, но с тем важным отличием, что марковские предположения в ней *не принимаются*, иначе говоря, допускаются произвольные распределения времени обслуживания в узлах (со средним значением $1/\mu_i$ для каждого из t_i , обслуживающих приборов в узле i). Предположим, что все требования, как и прежде, ведут себя статистически одинаково. Допустим также, что имеется система коллективного пользования, обслуживающая M терминалов. Применимый подход состоит в исследовании системы с точки зрения терминала, как показано на фиг. 4.33. Эта система похожа на систему, показанную на фиг. 4.26. Воспользуемся здесь моделью замкнутой сети для системы коллективного пользования со многими ресурсами и получим результаты, подобные результатам предыдущего раздела. Пусть имеется замкнутая сеть с общим числом $K=M$ требований, каждое из которых генерирует выходящее из терминала требование с интенсивностью λ требований в 1 с всякий раз, когда требование находится в терминальном узле (т. е. все требования характеризуются средним временем размышления $1/\lambda$ секунд, которое получается из произвольного закона распределения). Каждое таким образом генерируемое требование поступает затем в «остальную часть сети с многими ресурсами» (терминалы также являются ресурсами) и перемещается по ней от ресурса к ресурсу в соответствии с переходными вероятностями r_{ij} , в конце

¹⁾ Они требуют разделения процессора путем кругового опроса в тех узлах, где допускаются различные показательные распределения времени обслуживания этих требований.



Фиг. 4.33. Декомпозиция модели с многими ресурсами

концов возвращаясь в терминал. В этот момент рассматриваемое требование (пользователь) переходит к генерированию (в результате размышления) нового требования, как в разд. 4.11. Заметим, что понятие «остальная часть сети» здесь соответствует ограниченному штриховой линией блоку на фиг. 4.26, где теперь допускается наличие многих ресурсов (не только центрального процессора) и каждый из обслуживающих приборов (ресурсов) имеет произвольное распределение времени обслуживания. Обозначим через T среднее время (ответа) прохождения через остальную часть сети и, как ранее, через $1/\lambda$ — среднее время пребывания в терминальном узле. Таким образом, среднее время цикла равно $T+1/\lambda$, а средняя пропускная способность системы составляет $\lambda'=M/(T+1/\lambda)$ требований в 1 с. Аналогично пусть $\bar{N}=E$ [число требований в остальной части сети] и $\bar{M}=E$ [число требований в терминальном узле]. На основании формулы Литтла имеем

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda'}.$$

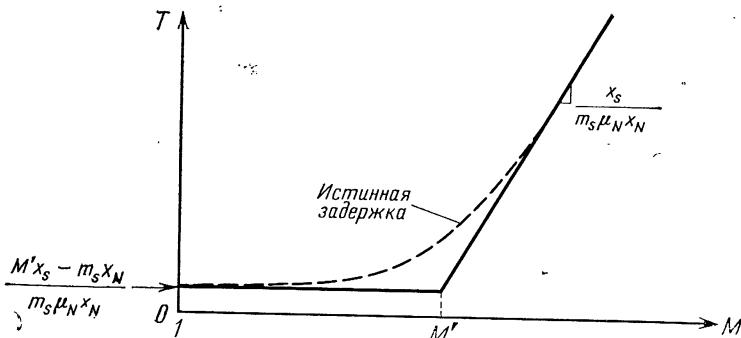
Однако, учитывая, что $M = \bar{N} + \bar{M}$, получаем

$$T = \frac{M}{\lambda'} - \frac{\bar{M}}{\lambda'}.$$

Кроме того, если применить формулу Литтла к терминальному узлу, будем иметь $1/\lambda = \bar{M}/\lambda'$, и, таким образом,

$$T = \frac{M}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}. \quad (4.82)$$

Рассмотрим теперь насыщенный узел, или узкое место (заштрихованный и обозначенный буквой s на фиг. 4.33), в остальной части



Фиг. 4.34. Асимптотическое поведение задержки в замкнутых сетях.

сети. Как указывалось выше, это такой узел, в котором отношение x_s/m_s принимает наибольшее значение (из всех x_i/m_i в системе). Чтобы найти x_i , необходимо решить уравнения (1.78), где $\mu_i x_i$ может быть интерпретировано как относительное число посещений i -го узла при циркуляции требований в сети. Для случая, показанного на фиг. 4.33, $\mu_s x_s / \mu_N x_N$ — среднее число посещений узкого места на каждое поступление требования в остальную часть сети (или на каждое поступление в терминальный узел). Положим, что подстрочный индекс N соответствует терминальному узлу, и, следовательно, будем иметь тождество $\lambda = \mu_N$. Затем заметим, что, если $M \gg M^*$ (глубокое насыщение), выходная интенсивность из насыщенного узла должна быть приближенно равна $\mu_s m_s$. Таким образом, выходная интенсивность требований из остальной части сети составляет $\mu_s m_s (\mu_s x_s / \mu_N x_N)$ и это равно λ' , т. е. $\lambda' = m_s \mu_N x_N / x_s$. Подставив последнее выражение в равенство (4.82), окончательно получим T_a , т. е. асимптотическое значение T :

$$T \approx T_a = \frac{M x_s}{m_s \mu_N x_N} - \frac{1}{\lambda}, \quad M \gg M^*. \quad ■ (4.83)$$

Асимптотическое значение T при $M \gg M^*$ имеет такой же вид, как в (4.65) (опять при $M \gg M^*$). На фиг. 4.34 показана эта асимптота (ср. с фиг. 4.27). Заметим, что она линейна относительно M с наклоном $x_s / (m_s \mu_N x_N)$ при $M \gg M^*$. Здесь изображена также горизонтальная асимптота и дан набросок истинной характеристики.

Для того чтобы найти число насыщающих требований M^* , применим такой же подход, какой использовался при получении равенства (4.66), и воспользуемся обычной аргументацией для детерминированной системы. Иначе говоря, предположим, что M^* должно быть равно максимальному числу идеально спланированных заданий, не дающих никаких взаимных помех. Для каждого из m_s обслуживающих приборов в насыщенном узле можно спланиро-

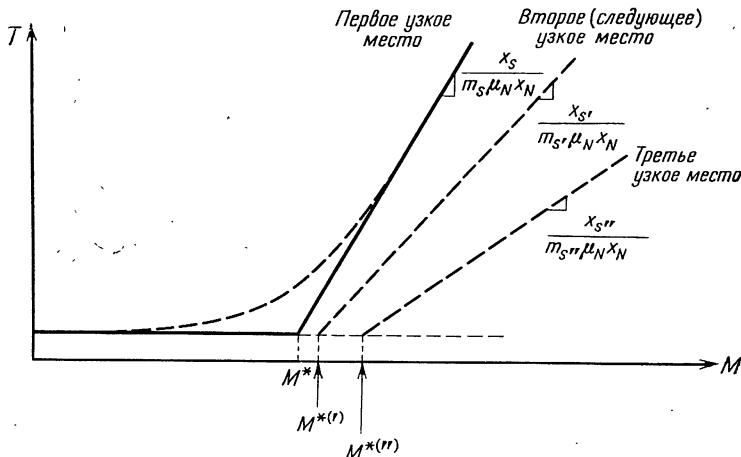
вать максимальное число заданий, равное необходимому времени обслуживания задания в одном цикле, деленному на время обслуживания задания в насыщенном узле за цикл (все времена обслуживания здесь предполагаются детерминированными). Общее время обслуживания за цикл равно $\sum_{i=1}^N (\mu_i x_i / \mu_N x_N) (1/\mu_i)$, т. е. сумме

(по всем узлам) произведений числа посещений узла за цикл, на среднее время обслуживания за посещение. По тем же соображениям времени пребывания в насыщенном узле за цикл равно $(\mu_s x_s / \mu_N x_N) (1/\mu_s)$. Так как рассматривается m_s таких обслуживающих приборов, отношение общего времени обслуживания за цикл ко времени пребывания в насыщенном узле за цикл может быть умножено на m_s , что дает

$$M^* = \frac{m_s}{x_s} \sum_{i=1}^N x_i. \quad ■ (4.84)$$

Пока определены только M^* и асимптотические свойства T . Теперь найдем зависимость между ними. Во-первых, заметим, что средняя длина цикла составляет $T + (1/\lambda)$. При $M=1$ длина цикла равна времени обслуживания в цикле (без ожидания), которое было определено выше. Отсюда, а также из равенства (4.84) следует, что при $M=1$ должно выполняться соотношение $T = (M^* x_s / m_s \mu_N x_N) - (1/\lambda)$. График этой функции — горизонтальная асимптота, показанная на фиг. 4.34 (опять было использовано равенство $\lambda = \mu_N$). Сравнивая приведенную функцию с асимптотой насыщения из равенства (4.83), можно заметить, что две асимптоты пересекаются при $M=M^*$, что показано на фиг. 4.27. Таким образом, M^* действительно опять является числом насыщающих требований и обладает всеми характерными для него свойствами!

Интересно выяснить, как улучшается характеристика, если устранить узкое место путем увеличения интенсивности обслуживания в насыщенном узле. В результате какой-нибудь другой узел, например s' , станет узким местом, и асимптотические свойства опять будут подобны описываемым формулой (4.83), но с другим наклоном $x_s' / m_s' \mu_N x_N$ и другой величиной насыщения $M^{*(*)}$. Продолжая эту процедуру устранения узких мест, всегда можно ожидать появления нового узкого места $x_i / m_i \mu_N x_N$, как показано на фиг. 4.35, где M^* должно быть приведено в соответствие с новыми интенсивностями обслуживания. Характеристика, показанная на этой фигуре, очень важна при расчете вычислительных систем, так как проектировщик всегда должен быть в состоянии предсказать улучшение характеристик системы при использовании более мощных ресурсов. Например, если асимптоты первого и второго узких мест расположены близко друг от друга, выигрыш от устранения только первого узкого места (а это может быть связано со значительны-



Фиг. 4.35. Последовательность асимптотических узких мест.

ми затратами, если, например, потребуется дополнительный процессор) может быть очень небольшим. Очевидно, что такой экономически невыгодной переделки можно избежать, если использовать приведенное рассмотрение.

Исследуем модель замкнутой сети (см. фиг. 4.33) несколько глубже, чтобы получить некоторые дополнительные асимптотические результаты [73]. Рассмотрим общий случай замкнутой сети с N узлами. В i -м узле находится m_i обслуживающих приборов (ресурсов), каждый из которых имеет произвольное время обслуживания и среднее значение $1/\mu_i$ секунд, не зависящее от состояния системы. M -й узел является терминальным узлом, причем $m_N = M$. Замкнутая система содержит K требований, $K = M$. Как известно, $\mu_i x_i$ — относительное число посещений требованием i -го узла при циркуляции в сети, и, таким образом, x_i/m_i характеризует относительный показатель использования каждого ресурса в узле i . Следовательно, x_i — это относительный показатель использования группы из m_i ресурсов в узле i . Напомним, что через s обозначен наиболее насыщенный узел в остальной части сети, т. е. $x_s/m_s \geq x_i/m_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$). Положим

$f_i(M)$ — доля времени, в течение которого все ресурсы (т. е. каждый обслуживающий прибор) в узле i заняты, если замкнутая сеть содержит M требований.

Заметим, что при $M=1$ ни к одному из ресурсов системы нет очереди (т. е. нет конфликтов) и поэтому

$$m_1 f_1(1) + m_2 f_2(1) + \cdots + m_N f_N(1) = 1,$$

так как в любой момент времени занят один ресурс (заметим, что $m_N=1$ при $M=1$). Из последнего равенства и приведенной интерпретации x_i следует, что

$$f_i(1) = \frac{x_i/m_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_N}. \quad \blacksquare \quad (4.85)$$

Покажем теперь, что $f_i(M) \leq M f_i(1)$. Отношение x_i/x_j не зависит от M , так как оно определяется только средними значениями продолжительностей обслуживания и картиной перемещения требований по сети в соответствии с переходными вероятностями $\{r_{ij}\}$. Это отношение относительных использований может быть выражено в виде

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{m_i f_i(M)}{m_j f_j(M)}.$$

Если теперь $f_i(M) > M f_i(1)$ для $i=1, 2, \dots, N$, то $m_i f_i(M) + \dots + m_N f_N(M) > M$. Однако это невозможно, так как математическое ожидание числа занятых ресурсов $[m_1 f_1(M) + \dots + m_N f_N(M)]$ не превышает число требований M . Следовательно, для всех i неравенство $f_i(M) > M f_i(1)$ не может быть верным. Далее, если имеется некоторое i , для которого

$$f_i(M) > M f_i(1),$$

то

$$\frac{m_i f_i(M)}{m_j f_j(M)} > M \frac{m_i f_i(1)}{m_j f_j(M)}.$$

Но так как $m_i f_i(M)/m_j f_j(M)$ — постоянная, не зависящая от M , то справедливо неравенство

$$\frac{m_i f_i(1)}{m_j f_j(1)} > M \frac{m_i f_i(1)}{m_j f_j(M)},$$

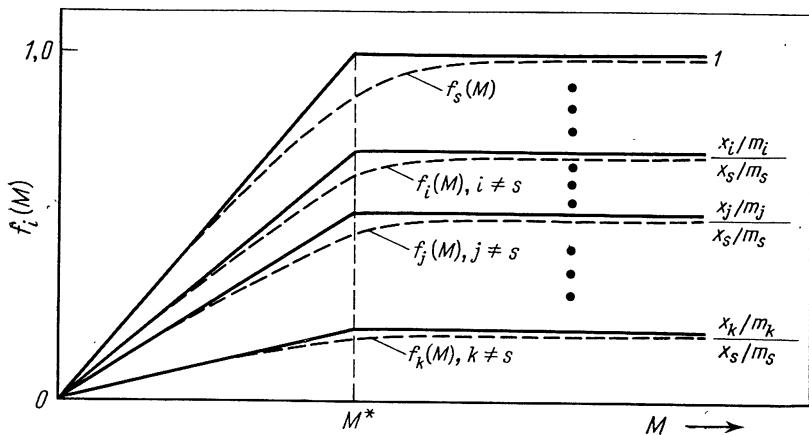
из которого следует

$$f_j(M) > M f_j(1).$$

Таким образом, если $f_i(M) > M f_i(1)$ для какого-либо i , то это неравенство верно для всех i . Однако, как было показано, это невозможно. Отсюда заключаем, что

$$f_i(M) \leq M f_i(1) \quad (4.86)$$

для всех i . (Известно также, что $f_i(M) \leq 1$.) Заметим, что поскольку $m_N=M$, то $f_N(M) \leq x_N/(x_1 + \dots + x_N)$. Так как это неравенство не зависит от M , то терминалный узел никогда не будет использоваться полностью. Если теперь увеличивать M , то можно достичь критического значения (минимального) $M=M_c$, такого, что $M_c f_s(1)=1$; иначе говоря, выбирается такое M , что верхняя грани-



Фиг. 4.36. Показатель использования и насыщение в замкнутой сети.

ца показателя использования $f_s(M)$ для насыщенного узла равна единице, а величина M , при которой это достигается,

$$M_c = \frac{1}{f_s(1)} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{x_s/m_s}.$$

Это выражение совпадает с правой частью (4.84); отсюда следует, что $M_c = M^*$, т. е. имеет место самый благоприятный случай! При $M \geq M^*$ верхняя граница для $f_s(M)$ должна оставаться равной единице, так как дальше она увеличиваться не может. Поскольку отношения $m_i f_i(M) / m_j f_j(M)$ постоянны при изменении M , верхняя граница для $f_i(M)$ при всех $M \geq M^*$ и всех i , для которых m_i постоянно (т. е. $i=1, 2, \dots, N-1$), не может возрастать далее величины, которую она принимает при M^* . В частности, при $i=1, 2, \dots, N-1$

$$f_i(M) \leq \begin{cases} M f_i(1), & M \leq M^*, \\ M^* f_i(1) = \frac{x_i/m_i}{x_s/m_s}, & M \geq M^*. \end{cases} \quad ■ (4.87)$$

Поведение этой верхней границы показано на фиг. 4.36; истинное типичное поведение показано штриховыми линиями. Кроме того, поскольку отношение x_N/x_i постоянно, постоянно также $M f_N(M)/m_i f_i(M)$. Однако, так как $\lim_{M \rightarrow \infty} f_i(M) = M^* f_i(1)$, очевидно, что $\lim_{M \rightarrow \infty} M f_N(M) = M^* f_N(1)$. Это дает асимптотическое поведение границы в случае $i=N$. Опять M^* может быть интерпретировано, как и ранее. Иначе говоря, если все продолжительности обслуживания равны их средним значениям ($1/\mu_i$ в узле i) и переходы между узлами идеально скоординированы таким образом, что га-

рантируется отсутствие взаимных помех между требованиями, то M^* будет максимальным числом требований, которые могли бы быть запланированы для обслуживания. Но на самом деле истинное значение показателя использования оказывается ниже этой асимптоты. Однако при $M \rightarrow \infty$ имеет место приближение к горизонтальной асимптоте для каждого ресурса остальной части сети и

$$Mf_N(M) \longrightarrow M^*f_N(1) = m_N M^* f_N(1)$$

(поскольку $m_N = 1$ при $M = 1$). Таким образом, суммируя показатели использования всех ресурсов, можно получить

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N m_i f_i(M) = \sum_{i=1}^N m_i M^* f_i(1) = M^*. \quad (4.88)$$

Итак, число M^* можно интерпретировать так же, как предельное (максимальное) использование, суммированное по всем ресурсам сети. Заметим, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Mf_N(M) = M^*f_N(1) = x_N/(x_s/m_s)$$

и, следовательно, из M^* активных ресурсов в пределе $x_N/(x_s/m_s)$ ресурсов являются активными терминалами, а остальные, например G^* , являются активными ресурсами остальной части сети. Очевидно, что $G^* = M^* - x_N/(x_s/m_s)$; эту величину иногда называют выигрышем мультипрограммирования. Часто степень мультипрограммирования ограничивается некоторым максимумом (например, D) из-за ограничений на объем оперативной памяти. Модель для этого можно построить, если ограничить число требований (активного множества) в остальной части сети величиной D (хорошее предположение при больших M) и заставить любые другие готовые требования ожидать в своих терминалах до тех пор, пока какое-нибудь требование не покинет активное множество. В этот момент одно из ожидающих готовых требований поступает в остальную часть сети и состязается за ресурсы системы. Асимптотический анализ такой модели с ограниченной памятью похож на приведенный выше; он дан в работе [73]. Эти и другие асимптотические результаты можно найти также в [87].

Другое применение замкнутых сетей массового обслуживания для моделирования вычислительной системы с мультипрограммированием будет рассмотрено в разд. 4.13. Теперь же вернемся к дальнейшим обобщениям сетей массового обслуживания для моделирования вычислительных систем и получим точные результаты, а не асимптотические.

Более общая модель сети массового обслуживания, которая позволяет избежать многих недостатков рассмотренных выше моделей, была сформулирована и исследована в работе [69] (этот материал приводится также в [8]). В модели имеется N узлов (на-

зываемых центрами обслуживания) и допускается конечное число L различных классов требований. Как обычно, требования перемещаются по сети в соответствии с переходными вероятностями

$$r_{ij}(l) = P[\text{следующий узел } j \mid \text{текущий узел } i, \\ \text{а класс требований } l], \quad l=1,2,\dots,L. \quad (4.89)$$

Поскольку имеются различные классы требований, то как открытая, так и замкнутая сети могут рассматриваться одновременно. В частности, если сеть замкнута для требований класса l , то число таких требований внутри сети фиксировано и равно постоянному числу $K(l)$. Требования тех классов, для которых сеть является открытой, поступают извне в i -й узел в виде пуассоновского потока с интенсивностью $\gamma_i(l)$. Таким образом, требования открытых классов покидают систему через узел i с вероятностью $1 - \sum_{j=1}^N r_{ij}(l)$, а для замкнутых классов эта вероятность равна нулю. До сих пор обобщение состояло в введении классов требований и позволяло рассматривать открытую и замкнутую сети одновременно. Теперь введем обобщения, касающиеся порядка обслуживания, числа обслуживающих приборов и распределения времени обслуживания в каком-либо данном узле. Если планируется использовать уравнения равновесия (как в гл. 4 первого тома [59]), необходимо сохранить марковскую природу рассматриваемой сети, несмотря на немарковские распределения времени обслуживания. Это достигается использованием каскадных обслуживающих приборов (показанных на фиг. 4.28). Наконец, рассматриваемая модель допускает центры обслуживания, некоторые из которых имеют произвольные (но рациональные) распределения времени обслуживания с любым из следующих четырех типов распределительных алгоритмов.

*Узел типа 1*¹⁾: ОПП·/М/1. Узлы этого типа содержат один прибор с дисциплиной ОПП; распределение времени обслуживания показательное с параметром μ_{ik} , который может быть функцией числа требований k в данном узле (например, узле i).

Узел типа 2: КО·/Г/1. Узлы этого типа содержат один обслуживающий прибор, использующий алгоритм разделения процессора с КО; распределение времени обслуживания произвольно, за исключением того, что оно должно иметь рациональное преобразование Лапласа и синтезироваться в соответствии с фиг. 4.28.

Узел типа 3: ./Г/∞. Узлы этого типа имеют бесконечное число обслуживающих приборов (или по крайней мере равное наибольшему числу требований), которые одновременно могут посту-

¹⁾ Узлы типов 2, 3, и 4 допускают зависимость распределения времени обслуживания от класса требования, но это не верно для узлов типа 1.

пать на обслуживание в данном узле); распределения времени обслуживания произвольны, но с рациональными преобразованиями Лапласа.

Узел типа 4: ООП·/G/1. Узлы этого типа имеют единственный обслуживающий прибор с абсолютным приоритетом и дообслуживанием и распределительным алгоритмом ООП; распределение времени обслуживания произвольно, но с рациональным преобразованием Лапласа.

Это законченная модель. Следует заметить, что узлы типа 1 соответствуют случаям, рассмотренным Джексоном, а также Гордоном и Ньюэллом (с одним обслуживающим прибором). Узлы типа 2 напоминают о том, что разделение процессора по дисциплине КО приводит к результатам, которые не зависят от распределения времени обслуживания [см. (4.17)]. В узлах типа 3 используется тот факт, что система M/G/∞ имеет решение, не зависящее от распределения времени обслуживания [см. (1.98)]. В узлах же типа 4 опять используется то, что обслуживание в обратном порядке с абсолютным приоритетом и дообслуживанием приводит к результатам, подобным тем, которые получаются с алгоритмом разделения процессора по дисциплине кругового опроса [см. (4.22)].

Для того чтобы исследовать эти сети массового обслуживания более общего типа, было найдено целесообразным ввести понятие локального равновесия (что обсуждалось в разд. 4.8 книги [59]). В работе [13] рассматриваются сети такого типа; сети наиболее общего типа на сегодняшний день описаны в [69]. Для класса требований l обозначим через $e_i(l)$ решение следующей системы уравнений:

$$e_i(l) = \gamma_i(l) + \sum_{j=1}^N e_j(l) r_{ji}(l). \quad ■ (4.90)$$

Для классов требований, соответствующих замкнутой системе, $\gamma_i(l) = 0$. В таком случае величина $e_i(l)$ равна относительной частоте посещений узла i требованиями класса l и удовлетворяет уравнению (4.75) [где $e_i(l)$ соответствует величине $\mu_i x_i$, разбитой на классы требований]. Величина $e_i(l)/e_j(l)$ представляет собой отношение числа посещений требованием из класса l узла i к числу его посещений узла j . Решение этой системы уравнений в случае замкнутой сети допускает выбор произвольного постоянного множителя. Для классов требований, относящихся к открытой системе, некоторые из величин $\gamma_i(l)$ будут ненулевыми, и это будет соответствовать системе уравнений (4.72) [опять $e_i(l)$ соответствует величине λ_i , разбитой на классы требований]. В этом случае $e_i(l)$ равно интенсивности поступления требований класса l в узел i (от внутренних и внешних источников).

Определение состояния системы включает достаточно полное и сложное описание, указывающее размещение требований, их класс и этап достигнутого обслуживания. При попытке записать уравнения глобального равновесия очень быстро приходят к необозримой системе, и поэтому здесь приходится использовать понятие локального равновесия. Фактически, даже если требуется угадать решение, уравнения локального равновесия позволяют гораздо проще проверить справедливость этого решения, чем уравнения глобального равновесия. Основная теорема, сформулированная в работе [69], устанавливает, что стационарные вероятности состояний системы могут быть записаны в виде

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = C g_1(\alpha_1) g_2(\alpha_2) \dots g_N(\alpha_N), \quad ■ (4.91)$$

где вектор состояний $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ содержит компоненты α_i , которые описывают условия, преобладающие в узле i ; это описание зависит от типа узла; C — нормирующая постоянная, сохраняющая вероятности, а g_i — функция, зависящая только от типа узла и состояния этого узла. Таким образом, этот главный результат опять показывает, что решение для таких очень сложных сетей имеет вид *произведения* функций, каждая из которых описывает один из узлов сети. Для упрощения результатов находят распределение числа требований класса l в узле i (без учета различия этапов обслуживания), причем оказывается, что оно также удовлетворяет уравнению вида (4.91). Распределение для общего числа требований k_i в i -м узле (без учета, наконец, различия классов требований) показывает, что рассматриваемая вероятность, как и ожидалось, представляется в виде произведения

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = C h_1(k_1) h_2(k_2) \dots h_N(k_N), \quad ■ (4.92)$$

где

$$h_i(k_i) = \left(\sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}} \right)^{k_i}, \quad ■ (4.93)$$

если узел типа 1,

$$h_i(k_i) = \left(\sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}} \right)^{k_i}, \quad ■ (4.94)$$

если узел типа 2 и 4,

$$h_i(k_i) = \frac{1}{k_i!} \left(\sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}} \right)^{k_i}, \quad ■ (4.95)$$

если узел типа 3.

Здесь суммирование проводится по всем классам требований, поступающих в узел i ; l/μ_{il} — среднее время обслуживания требований класса l в узле i , а $1/\mu_{ik_i}$ — среднее время обслуживания при

показательном распределении в узле i , когда там находится k_i требований. Постоянная C опять является нормирующей, и ее следует вычислять с учетом всех возможных состояний. Когда система открыта, эта постоянная может быть вычислена, как в работе [69]. Кроме того, если обозначить через $p_i(k_i)$ стационарную вероятность наличия k_i требований в узле i [как в (4.74)], то можно показать, что в случае открытой системы

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_1(k_1) p_2(k_2) \dots p_N(k_N), \quad ■ (4.96)$$

где

$$p_i(k_i) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{k_i} & \text{для узла типов 1, 2 или 4,} \\ \frac{\rho_i^{k_i}}{k_i!} e^{-\rho_i} & \text{для узла типа 3,} \end{cases} \quad ■ (4.97)$$

причем

$$\rho_i = \begin{cases} \sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_i} & \text{для узла типа 1 при } \mu_{ik_i} = \mu_i, \\ \sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}} & \text{для узла типов 2, 3 или 4.} \end{cases} \quad ■ (4.98)$$

Это замечательный результат! Таким образом, если узел типов 1, 2 или 4, то одномерное распределение имеет такой же вид, как и распределение числа требований в системе $M/M/1$ (при соответствующем определении ρ_i). Естественно, всегда требуется удовлетворение условия $\rho_i < 1$. Если узел относится к типу 3, то решение соответствует случаю системы $M/G/\infty$. Иначе говоря, решение (4.96) показывает, что вероятность $p(k_1, k_2, \dots, k_N)$ имеет вид произведения, содержащего по одному сомножителю для каждого узла; сомножитель $p_i(k_i)$ является решением для *изолированного* узла с пуассоновским потоком на входе и показательным распределением времени обслуживания, для которого ρ_i определяется из (4.98). Заметим, что имеет значение только ρ_i (а *не вид распределения времени обслуживания*). Исследования, проведенные с помощью моделирования [65], показали применимость этих решений. Эффективные алгоритмы вычислений для замкнутых сетей с различными классами обслуживания разработаны Мюнцем и Вонгом [71]; они являются обобщением результатов Бузена [12].

Описанное выше решение может быть также получено при исследовании условия, которое необходимо для того, чтобы выходной процесс из СМО был пуассоновским [70]. Достаточное условие справедливости этого довольно простое. Рассмотрим СМО со счетным множеством состояний, в которой состояние X задается числом требований в системе. Обозначим вероятность состояния через

$\pi_k = P[X=k] = P[E_k]$, а интенсивность ухода требований из E_j в E_k — через q_{jk} . Тогда достаточное условие того, что выходной процесс СМО является пуассоновским (с интенсивностью λ), состоит в том, что для всех состояний E_k

$$\sum_{j \in J} \frac{\pi_j q_{jk}}{\pi_k} = \lambda, \quad (4.99)$$

где J — множество всех состояний, в которых число требований в системе больше k . Это условие легко обобщается на случай многих классов требований путем рассмотрения векторов состояний и фиксации всех компонент, не соответствующих классу, представляющему интерес. Тогда интенсивность λ будет соответствовать интенсивности выходного потока для этого класса. Если входной процесс является пуассоновским и при этом выходной процесс также является пуассоновским, то говорят, что система обладает свойством $M \Rightarrow M$ (из марковского свойства следует марковское свойство). Используя такой подход, Мюнц показал, что узлы четырех типов, описанных выше, удовлетворяют условию пуассоновского выходного процесса. Более важно следующее: если каждый узел сети массового обслуживания обладает свойством $M \Rightarrow M$, то решение для сети получается в виде произведения типа (4.91), где $g_i(a_i)$ — стационарная вероятность состояния для изолированного i -го узла с пуассоновским входным потоком (имеющим ту же интенсивность, какая была при его работе в сети).

Напомним ссылку в гл. 2 на работу [61], содержащую приближения как для открытых, так и для замкнутых сетей, которые являются еще одним средством исследования этих сетей. (Там рассматриваются узлы с одним прибором, относительным приоритетом и одним классом требований.) Кроме того, совместное использование последовательности нескольких процессоров было исследовано с помощью простой модели циклической сети массового обслуживания в работе [41].

Таким образом, здесь получено решение для достаточно общей¹⁾ сети массового обслуживания, которая допускает различные классы требований, весьма интересные дисциплины обслуживания и довольно общие распределения времени обслуживания. Это дает довольно общую модель вычислительной системы с многими ресурсами, широко используемую в настоящее время применительно к вычислительной технике.

¹⁾ Основным недостатком такой модели является то, что одно задание (процесс), которое требует одновременно более одного ресурса (например, пространство оперативной памяти и время центрального процессора), не может быть описано с ее помощью, кроме как с использованием упомянутого ранее фиксированного числа D активных заданий в системе мультипрограммирования (D — уровень мультипрограммирования).

4.13. МОДЕЛИ МУЛЬТИПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящем разделе рассматриваются две различные модели мультипрограммных вычислительных систем. В первой используется исходная модель замкнутой сети массового обслуживания Гордона и Ньюэлла и, следовательно, для всех узлов требуется предположение о показательном времени обслуживания. Во второй модели применяется рассмотренное в гл. 2 диффузионное приближение, которое позволяет пользоваться произвольными распределениями, но дает только приближенные решения. Хороший обзор моделей СМО для мультипрограммирования дан в работе [4].

Так же как в системе с разделением времени, в многопрограммной вычислительной системе предпринимается попытка более эффективно использовать ее ресурсы, чем при обычной пакетной обработке. В частности, допускается одновременный доступ к ресурсам системы ряду заданий таким образом, что ЦП оказывается занятым выполнением одного задания, в то время как другие задания при этом обрабатываются различными вводно-выводными периферийными устройствами. Конечно, перед каждым из таких ресурсов образуется очередь, и представляет интерес исследовать использование и производительность такой системы. Первая из рассматриваемых ниже моделей называется *моделью с центральным обслуживающим прибором*. Она позволяет включить ряд периферийных устройств. Во второй модели допускается одно периферийное устройство (которое называется блоком передачи данных).

Интересная модель, исследованная Бузеном [11] и названная им моделью с центральным обслуживающим прибором, показана на фиг. 4.37. Она позволяет описать работу мультипрограммной

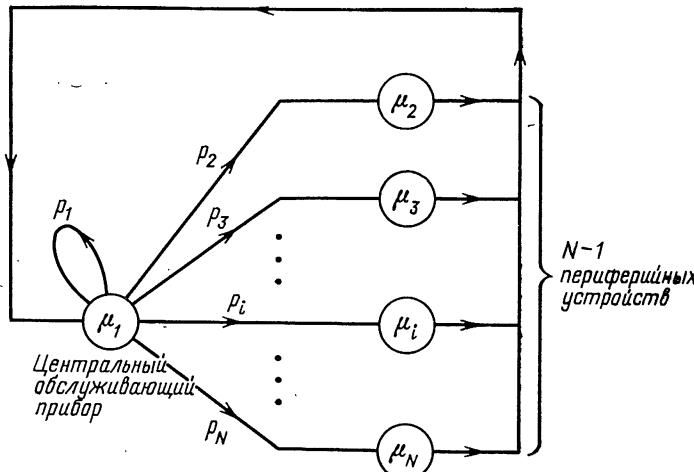


Рис. 4.37. Модель с центральным обслуживающим прибором.

вычислительной системы (с фиксированным числом частей), в которую допускается точно K заданий (программ). Эти задания циркулируют в системе бесконечно долго, коллективно используя N ее ресурсов. Центральный обслуживающий прибор (узел 1) представляет собой ЦП, а остальные $N-1$ узлов — периферийные устройства, например память на вращающихся дисках, барабан с переменным обращением, блок с магнитной лентой, блок данных, устройство считывания перфокарт и т. д. В такой мультипрограммной ситуации задания циркулируют между перечисленными устройствами, требуя обращения к ЦП, а затем к некоторому периферийному устройству, после этого опять требуя обслуживания ЦП, а затем вновь обращения к какому-нибудь периферийному устройству и т. д. Следовательно, все время задания возвращаются в ЦП. Переходные вероятности r_{ij} опять представляют собой вероятности перехода задания в узел j из узла i ; в рассматриваемой модели с центральным обслуживающим прибором имеем

$$r_{ij} = \begin{cases} p_j, & i=1, 1 \leq j \leq N, \\ 1, & 2 \leq i \leq N, j=1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где, конечно, $\sum_{j=1}^N p_j = 1$. В реальной мультипрограммной ситуации большинство заданий в конце концов покидают систему¹⁾, и в моменты их ухода в систему по одному входят новые задания. Это учтено в модели путем разрешения заданию прямого возвращения в ЦП (с вероятностью p_1), что означает уход старого задания и поступление вместо него нового задания, причем новое требование на обслуживание в ЦП является заявкой супервизорной системы на замену задания. Таким образом, число заданий в системе остается постоянным и равным K . В модели с центральным обслуживающим прибором в каждом узле находится один обслуживающий прибор ($m_i=1$), а время обслуживания в i -м узле распределено по показательному закону с параметром μ_i . Вспоминая, что R является матрицей переходных вероятностей (r_{ij}) между узлами сети, случай с центральным обслуживающим прибором можно описать следующей простой матрицей:

$$R = \left| \begin{array}{ccccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right|.$$

¹⁾ В качестве примера задания, которое никогда не покидает систему, может служить резидентная программа — супервизор.

Задача сводится к решению уравнения (4.75); для рассматриваемой матрицы решение имеет вид

$$\mu_i x_i = \begin{cases} \mu_1, & i=1, \\ \mu_1 p_i, & i=2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (4.100)$$

Общее решение для любой замкнутой марковской сети массового обслуживания с однолинейными СМО в узлах дается равенством (4.77), включающим x_i . В частном случае рассматриваемой модели с центральным обслуживающим прибором получаем

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=2}^N \left(\frac{\mu_1 p_i}{\mu_i} \right)^{k_i}, \quad ■ (4.101)$$

где, как обычно,

$$G(K) = \sum_{k \in A} \prod_{i=2}^N \left(\frac{\mu_1 p_i}{\mu_i} \right)^{k_i}. \quad (4.102)$$

Следовательно, имеем явное решение, выражаемое через параметры системы μ_i и p_i . Пусть теперь A_i — стационарная вероятность того, что i -й узел не пуст. Можно показать (см. задачу 4.35), что

$$A_i = \begin{cases} G(K-1)/G(K), & i=1, \\ \frac{\mu_1 p_i}{\mu_i} A_1, & i=2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (4.103)$$

Отсюда можно заметить, что $A_1 \mu_1 p_i = A_i \mu_i$ ($i \geq 2$), т. е. интенсивность, с которой задания поступают в i -й узел, равна интенсивности, с которой они покидают этот узел. Это равенство представляет собой уравнение баланса потоков. Бузен установил, что мера, определяющая, насколько узкое место создается в i -м узле¹⁾, пропорциональна скорости изменения производительности в зависимости от роста интенсивности обслуживания в этом узле. При этом производительность определяется как среднее число заданий, обслуживаемых за единицу времени. Как легко показать, она равна $A_1 \mu_1 p_1$. Следовательно, сбалансированная система (система без узких мест) — это такая система, для которой

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} A_1 \mu_1 p_1 = \frac{\partial}{\partial \mu_j} A_1 \mu_1 p_1, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (4.104)$$

Более подробно эта модель описана в работе [11].

¹⁾ Это определение отличается от обсуждавшегося ранее определения Гордона и Ньюэлла.

Вторая модель мультипрограммирования, которая здесь рассматривается, показана на фиг. 4.38. Она предложена Гейвером и Шедлером в работе [29]. Это циклическая СМО с двумя узлами, в которой ЦП представлен прибором с ОПП и показательным распределением времени обслуживания, а (единственное) периферийное устройство — блок передачи данных (БПД) — является моделью любого устройства, обеспечивающего хранение данных (например, барабана, диска, ленты), и характеризуется произвольным распределением времени обслуживания (опять с ОПП). Предположим, что в системе имеется K программ (заданий), каждая из которых проходит циклически через ЦП и БПД. Заметим, что ни модель Гордона и Ньюэлла, ни модель Мюнца и Баскетта здесь неприменимы вследствие произвольного распределения времени в БПД с ОПП. Эта задача была решена Льюисом и Шедлером при помощи довольно сложного подхода, основанного на модели полумарковского процесса [64]. Приводимое здесь описание основано на работе Гейвера и Шедлера [29], где для получения простого приближенного решения используется диффузионное приближение; при этом демонстрируется эффективность диффузионного метода.

Рассмотрим величину $N_c(t)$, которая определяется как число заданий, ожидающих обслуживания или обслуживаемых в ЦП в момент t . Согласно равенству (2.81), $N_c(t) = \alpha_c(t) - \delta_c(t)$, если $N_c(0) = 0$, где $\alpha_c(t)$ и $\delta_c(t)$ — соответственно число поступающих в ЦП и число ушедших из него заданий за время $(0, t)$. Если пре-небречь граничными явлениями при числе заданий 0 и K , то $\alpha_c(t)$ и $\delta_c(t)$ будут представлять собой независимые процессы восстановления. Следовательно, в соответствии с изложенным в разд. 2.8 [см. формулы (2.90) и (2.91)] эти процессы могут быть аппрокси-мированы непрерывными гауссовскими случайными процессами со средними значениями $t\bar{x}_D$ и $t\bar{x}_C$ и дисперсиями $t\sigma_{x_D}^2 / (\bar{x}_D)^3$ и $t\sigma_{x_C}^2 / (\bar{x}_C)^3$ соответственно. Здесь \bar{x}_D и \bar{x}_C относятся соответственно к времени обслуживания в БПД и ЦП. Напомним, что $N_c(t)$ при-ближенно распределено по нормальному закону с инфинитезималь-

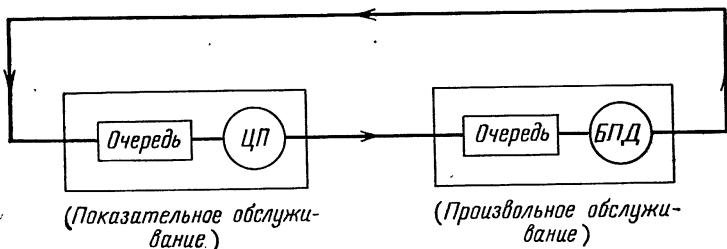


Рис. 4.38. Циклическая модель для мультипрограммирования.

ным средним значением m и инфинитезимальной дисперсией σ^2 , причем

$$m = \frac{1}{\bar{x}_D} - \frac{1}{\bar{x}_C},$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{\bar{x}_D}^2}{(\bar{x}_D)^3} + \frac{\sigma_{\bar{x}_C}^2}{(\bar{x}_C)^3}.$$

При использовании диффузионного приближения можно ожидать, что $N_C(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка (2.120), где $F(w, t) = P[N_C(t) \leq w]$. Это диффузионное уравнение, конечно, должно рассматриваться с граничными условиями $0 \leq N_C(t) \leq K$, которые требуют, чтобы $F(w, t) = 0$ при $w < 0$, а также $F(0^+, t) \geq 0$ и $F(K, t) = 1$. Известно, что при $K = \infty$ равенство (2.132) дает явное решение этой задачи.

Однако для рассматриваемых целей исследуем стационарное поведение системы и, следовательно, получим решение в виде (2.124). Но это решение не учитывает граничное условие $N_C(t) \leq K$. Если его учесть при решении получающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка, то будем иметь

$$F(w) = A [1 - Be^{2mw/\sigma^2}], \quad w \geq 0.$$

Применяя верхнее граничное условие, получим

$$F(K=1) = A [1 - Be^{2mK/\sigma^2}].$$

Это позволяет найти постоянную A , что дает

$$F(w) = \frac{1 - Be^{2mw/\sigma^2}}{1 - Be^{2mK/\sigma^2}}. \quad (4.105)$$

Теперь необходимо определить постоянную B ; в работе [29] сделан ряд предположений, из которых рассмотрим одно, а именно B вычисляется таким образом, чтобы решение точно соответствовало случаю $K \rightarrow \infty$. По-видимому, этот случай представляет наибольший практический интерес. Так как $m < 0$, для установившегося режима будем иметь

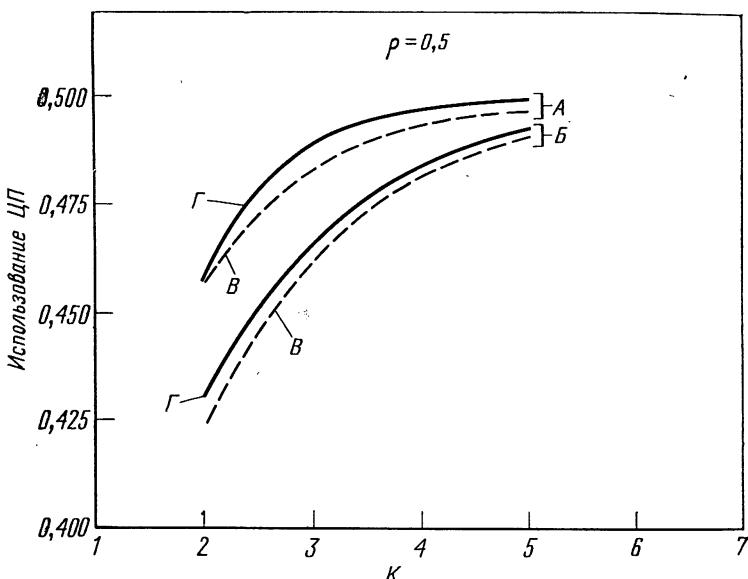
$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(w) = 1 - Be^{2mw/\sigma^2},$$

что дает

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(0^+) = 1 - B.$$

Однако из теории восстановления известно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[N_C(t) = 0] = 1 - \rho.$$



Фиг. 4.39. Сравнение диффузионного приближения и точных результатов.
A — распределение Эрланга пятого порядка; Б — показательное распределение; В — диффузионное приближение; Г — точное решение.

при $\rho < 1$, где $\rho = \bar{x}_c / \bar{x}_D$. Следовательно, можно положить $B = \rho$ и подставить это значение в равенство (4.105), что дает

$$F(w) = \frac{1 - \rho e^{2mw/\sigma^2}}{1 - \rho e^{2mK/\sigma^2}}. \quad (4.106)$$

Это простое равенство, полученное на основе диффузионного приближения. Оно представляет собой хорошее приближение, когда K велико и поддерживается режим большой нагрузки (m близко к 0, но меньше 0).

Чтобы оценить это приближение, сравним его с точными результатами, полученными в работе [64] для величины использования ЦП (доли времени, в течение которого ЦП занят). Очевидно, что использование ЦП, обозначаемое через u_c , равно $1 - F(0^+)$, и, таким образом, из формулы (4.106) получаем

$$u_c = \rho \left[\frac{1 - e^{2mK/\sigma^2}}{1 - \rho e^{2mK/\sigma^2}} \right], \quad (4.107)$$

что является приближением для u_c . На фиг. 4.39 проводится сравнение точных результатов с этим приближением для двух случаев: показательного распределения времени обслуживания в БПД и распределения Эрланга пятого порядка. Отметим хорошее согла-

сие между точными и приближенными результатами. Можно также представить себе, какое огромное упрощение дает такая аппроксимация. Гейвер и Шедлер в работе [31] обобщили приведенный анализ, допустив произвольное распределение времени обслуживания в ЦП. При этом получается приближение, которое приводит к лучшим результатам, особенно когда коэффициент изменчивости времени обслуживания ЦП превышает соответствующее значение для показательного распределения. Этот обобщенный подход требует, чтобы показатель степени $2m/\sigma^2$, используемый выше при диффузионном приближении, был заменен на $\ln B_D^*(s_0)$, где $B_D^*(s)$ — преобразование Лапласа ПРВ времени обслуживания в БПД, а s_0 — положительный корень характеристического уравнения $B_C^*(-s)B_D^*(s)-1=0$ при $m<0$. Здесь $B_C^*(s)$ является соответствующим преобразованием Лапласа для ЦП.

Множество других моделей мультипрограммирования описано в [6, 26, 28]. В работе [9] модель, представленная на фиг. 4.38, обобщается на систему с многими обслуживающими приборами и показывается, что диффузионное приближение очень хорошо совпадает с результатами моделирования или точных расчетов.

4.14. ДИСТАНЦИОННЫЙ ДОСТУП ТЕРМИНАЛОВ К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МАШИНАМ

В настоящем разделе рассматриваются задачи быстрой и эффективной передачи заданий и данных от удаленного терминала пользователя к вычислительной системе. Рассмотрим три модели. Первые две модели касаются исследования задержек и очередей, которые создаются на удаленных терминалах, когда эти терминалы циклически опрашиваются ЭВМ. Подход, принятый в первой модели, основан на использовании диффузионного приближения для исследования возникающей задолженности, тогда как вторая модель с дискретным временем основана на случайном блуждании. В третьей модели используются конечная буферная память и одна линия связи для передачи данных с множества удаленных терминалов; рассмотрение включает расчет задержек в очереди и вероятности переполнения буферной памяти. Основное внимание уделяется уплотнению как средству передачи сконцентрированных данных в ЭВМ. В работе [25] приводится серия измерений статистических характеристик трафика от терминала к ЭВМ и от ЭВМ к терминалу; большая часть этих статистических данных подтверждает целесообразность применения распределений без памяти во многих моделях, рассматриваемых в этой книге. Эти измерения также подтверждают тот факт, что диалоговый процесс передачи данных является *чрезвычайно неравномерным* с тенденцией к группированию нагрузки, т. е. он характеризуется большим отно-

щением пиковой нагрузки к ее среднему значению. В результате необходимо найти эффективные средства уплотнения многих потоков данных в общем канале; некоторые из них обсуждаются здесь. Исследование дистанционного доступа терминала к вычислительной системе представляет и более общий интерес; эти вопросы обсуждаются подробно в гл. 5 и 6, посвященных сетям ЭВМ.

В рассматриваемых моделях опроса имеется множество удаленных терминалов, производящих данные, которые предназначены для вычислительной системы и должны достичь этой системы по каналам связи с конечной пропускной способностью. Первая из этих моделей предложена в работе [27]. В ней допускается, что каждый удаленный терминал снабжен буферной памятью, которая заполняется данными, предназначенными для ЭВМ (ЦП). Эти терминалы соединяются с ЦП по одному коллективно используемому каналу связи, представляющему собой ограниченный ресурс системы.

Терминалы опрашиваются в заданном циклическом порядке таким образом, что если буферная память опрашиваемого терминала содержит информацию, она освобождается и информация передается в ЦП; если в ЦП имеются данные, ожидающие передачи в терминал в ответ на предыдущий запрос этого терминала, то эта передача осуществляется в следующую очередь. Описанные передачи моделируются как случайные величины вследствие возможного воздействия шума на передачу и необходимости повторной передачи. После того как данный терминал будет обслужен указанным образом, в циклическом порядке опрашивается следующий терминал, и т. д. Различают два типа терминалов: *входные* терминалы, из которых осуществляется только передача в ЦП (и не допускается никакого ответа ЦП, кроме ответа в некоторый заранее указанный далекий момент времени, которым здесь пренебрегаем), и *диалоговые* терминалы, из которых происходят передачи в ЦП и на которые через некоторое время принимается ответ от ЦП (в этом случае обслуживание начинается с требования терминала к ЦП и заканчивается, когда в терминал поступает ответ ЦП, возможно по истечении нескольких циклов опроса). Диалоговые терминалы одновременно обслуживаются только одно требование и, следовательно, оказываются запертными при ожидании ответа из ЦП (как в разд. 4.11).

Начнем с рассмотрения системы, имеющей один удаленный терминал. Как обычно, будем интересоваться $N(t)$, числом единиц данных (перфокарт, знаков, байтов и т. п.), ожидающих передачи на терминале. Воспользуемся диффузионным приближением и поэтому рассмотрим случай, когда $\bar{N}(t)$ достаточно велико. Число $N(t)$ можно связать с процессами поступлений и уходов для СМО. Введем обозначение $F(w, t) = P[N(t) \leq w]$; известно, что $F(w, t)$ должно удовлетворять уравнению (2.120) Фоккера — Планка при

обычном граничном условии в начале координат. Параметры в этом уравнении имеют следующий вид:

$$m = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\delta(\tau)}}{\tau}$$

и

$$\sigma^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\alpha}^2(\tau) + \sigma_{\delta}^2(\tau)}{\tau},$$

где $\alpha(\tau)$ и $\delta(\tau)$ — соответственно число поступающих и число уходящих требований в интервале длины τ после того, как система проработала достаточно долго. Как обычно, требуется, чтобы m было близко к нулю, но меньше нуля в предположении большой нагрузки. Наибольший интерес представляет стационарное решение, которое существует при $m < 0$ и имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(w, t) = 1 - e^{2mw/\sigma^2}. \quad (4.108)$$

Теперь следует продолжить обсуждение системы с одним терминалом и исследовать некоторые частные случаи, для которых можно легко определить параметры m и σ^2 .

Случай 1. Рассмотрим групповой процесс поступления, при котором моменты поступления группы описываются пуассоновским процессом с интенсивностью λ . Пусть G — случайный размер группы, а $g_k = P[G=k]$ — распределение этой случайной величины. Таким образом, общее количество поступающих единиц данных описывается составным пуассоновским процессом с инфинитезимальным средним значением $\lim_{\tau \rightarrow 0} \overline{\alpha(\tau)}/\tau = \lambda \bar{G}$ и инфинитезимальной дисперсией $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_{\alpha(\tau)}^2/\tau = \lambda \bar{G}^2$, причем эта дисперсия вычисляется методом, подобным используемому при получении равенства (2.121).

Подслучай а. Рассмотрим детерминированное время обслуживания (передачи), равное $1/\mu$ секунд на единицу данных. Тогда параметры рассматриваемого диффузационного процесса могут быть вычислены непосредственно:

$$m = \lambda \bar{G} - \mu,$$

$$\sigma^2 = \lambda \bar{G}^2.$$

Подслучай б. Предположим, что время обслуживания единицы данных распределено по показательному закону со средним значением $1/\mu$ секунд. Такое предположение учитывает необходимость повторной передачи из-за помех в линии. Применяя приближение большой нагрузки (и, следовательно, предполагая, что существует очередь), приходим к выводу, что процесс уходов из терминала яв-

ляется пуассоновским с параметром μ и, следовательно, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{\delta}(\tau)/\tau = \mu$ и $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_{\delta(\tau)}^2/\tau = \mu$. Таким образом, параметры рассматриваемого диффузионного процесса принимают вид

$$m = \lambda \bar{G} - \mu,$$

$$\sigma^2 = \lambda \bar{G}^2 + \mu.$$

Эти параметры теперь могут быть использованы в равенстве (4.108). В результате получаем, что стационарное распределение задолженности терминала приближенно является показательным со средним значением, определяемым следующими равенствами:

$$\text{подслучай } a: \quad \bar{N} = \frac{\lambda \bar{G}^2}{2(\mu - \lambda \bar{G})}, \quad (4.109)$$

$$\text{подслучай } b: \quad \bar{N} = \frac{\lambda \bar{G}^2 + \mu}{2(\mu - \lambda \bar{G})}. \quad (4.110)$$

Случай 2. Рассмотрим произвольный процесс восстановления для поступающих требований, при котором промежутки времени между моментами поступления t_1, t_2, \dots, t_n — независимые и одинаково распределенные величины (обозначаемые через \bar{t}). Аналогично уходы образуют процесс восстановления с промежутками времени между моментами ухода x_1, x_2, \dots, x_n , также представляющими собой независимые и одинаково распределенные величины (обозначаемые через \bar{x}). Это предположение о процессе уходов опять использует тот факт, что очередь не исчезает. Обычные положения теории восстановления показывают, что число поступлений и число уходов в промежутке времени длины τ приближенно распределены по нормальному закону, так что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\bar{t}}, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\delta(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\bar{x}},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\alpha}^2(\tau)}{\tau} = \frac{\sigma_{\bar{t}}^2}{(\bar{t})^3}, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\delta}^2(\tau)}{\tau} = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{(\bar{x})^3},$$

где приведенные инфинитезимальные дисперсии вычисляются таким же образом, как и в (2.91). Следовательно, диффузионные параметры принимают вид

$$m = \frac{1}{\bar{t}} - \frac{1}{\bar{x}},$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{\bar{t}}^2}{(\bar{t})^3} + \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{(\bar{x})^3}.$$

Теперь приближенная характеристика СМО получается подстановкой этих параметров в равенство (4.108).

Случай 3. Здесь моделируется стационарное время ожидания, а не длина очереди. Между моментами поступления двух соседних требований приращение времени ожидания распределено как случайная величина $\tilde{x} - \tilde{t}$, и, таким образом, непосредственно получается

$$m = \tilde{x} - \tilde{t}, \quad (4.111)$$

$$\sigma^2 = \sigma_{\tilde{x}}^2 + \sigma_{\tilde{t}}^2. \quad (4.112)$$

Эти параметры соответствуют распределению (4.108), которое относится теперь к времени ожидания.

Приведенные выше три случая описывают характеристики доступа удаленного терминала, когда в системе имеется только один терминал. Рассмотрим теперь случай нескольких терминалов. Гейвер исследовал три конфигурации системы, будем следовать здесь его изложению. Первая система состоит из M входных терминалов и не содержит диалоговых терминалов. Опять примем предположение большой нагрузки и допустим, что в каждом терминале имеется очередь (единиц данных, ожидающих передачи). Так как все терминалы статистически ведут себя одинаково, можно сосредоточить внимание на работе терминала 1. Предположим, что в нулевой момент времени закончилась передача от терминала 1 к ЦП. Обозначив через X_i время передачи всех данных одного задания терминала i , можно заметить, что следующая передача от терминала 1 будет закончена в конце цикла длины

$$C = X_2 + X_3 + \dots + X_M + X_1.$$

Таким образом, средняя длина цикла равна

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^M \bar{X}_i,$$

и, поскольку продолжительности обслуживания рассматриваемых требований предполагаются независимыми, имеет место также равенство

$$\sigma_C^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_{X_i}^2.$$

Здесь C — продолжительность произвольного цикла; пусть $C(j)$ — продолжительность j -го цикла. Можно заметить, что передача от терминала 1 (представляющего любой терминал) будет иметь место в моменты $C(1)$, $C(1)+C(2)$, $C(1)+C(2)+C(3)$, Предположение о независимости дает основание считать, что длины

циклов образуют последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Следовательно, процесс восстановления, определяемый приведенными частичными суммами, позволяет найти число передач. Таким образом, легко заметить, что это совпадает со случаем 2, где \bar{x} заменен на длину цикла $C(j)$. Применяя предыдущие результаты, получим, что задолженность приближенно распределена по показательному закону со средним значением

$$\bar{N} = \frac{\left[\sigma_t^2 / (\bar{t})^3 \right] + \left[\sigma_C^2 / (\bar{C})^3 \right]}{2 \left[(1/\bar{t}) - (1/\bar{C}) \right]}. \quad (4.113)$$

Недавно Гейвер [30] обобщил эту модель с M терминалами, допустив появление на терминалах требований, зависящих от времени. В частности, у него интенсивность поступления требований от каждого терминала равна $\lambda(t)$, а интенсивность обслуживания системы μ постоянна. Опять использовалось диффузионное приближение, с помощью которого для больших значений M было показано, что задолженность системы $N(t)$ может быть аппроксимирована суммой детерминированной части $Mn(t)$ и случайной части $\sqrt{M}r(t)$, т. е.

$$N(t) \approx Mn(t) + \sqrt{M}r(t),$$

где $n(t)$ определяется равенством

$$n(t) = n(0) \exp \left[- \int_0^t \lambda(u) du \right] + \int_0^t [\lambda(y) - \mu]^+ \exp \left[- \int_y^t \lambda(u) du \right] dy,$$

причем $[x]^+ = \max[0, x]$, а $r(t)$ оказывается нормальным (гауссовым) диффузионным процессом со средним значением

$$E[r(t)] = r(0) \exp \left[- \int_0^t \lambda(u) du \right]$$

и дисперсией

$$D[r(t)] = \int_0^t \exp \left[-2 \int_y^t \lambda(u) du \right] [(1 - n(y)) \lambda(y) + \mu] dy.$$

Более подробно эти вопросы изложены в работе [30].

Вторая система, рассмотренная Гейвером, также состоит из M входных терминалов и одного диалогового терминала. Представляет интерес время ответа для этого диалогового терминала, которое, как было сказано, является временем от момента, когда терминал начинает передачу своего требования в ЦП, до момента, когда получен ответ ЦП. Это время ответа состоит из времени

обслуживания X , т. е. времени передачи требования в ЦП, суммы длин циклов $C(1) + C(2) + \dots + C(K)$ для каких-то из M входных терминалов, в течение которых ЦП обрабатывает требование диалогового терминала (предполагается, что эта обработка завершается во время K -го такого цикла), X' — времени передачи ответа от ЦП в терминал и дополнительного времени θ (которое можно интерпретировать как время, необходимое для того, чтобы предыдущее обслуженное требование покинуло терминал, а новое требование заняло его место). Таким образом, время ответа R для диалогового терминала записывается в виде

$$R = X + C' + X' + \theta,$$

где C' — время, потраченное за K циклов на опрос входных терминалов. Теперь необходимо вычислить среднее значение и дисперсию R , чтобы можно было применить диффузионное приближение для предсказания размера очереди у диалогового терминала. Эта очередь будет состоять из дополнительных требований у диалогового терминала, ни одно из которых не может быть обслужено до удовлетворения предыдущего требования. Предположим теперь, что время, необходимое ЦП для обработки требования диалогового терминала, распределено по показательному закону с параметром β . Это время состоит из фактического времени обработки в ЦП и времени ожидания этой обработки в ЦП, поэтому, используя результаты гл. 2 для большой нагрузки, можно прийти к заключению, что предположение о показательном распределении не лишено основания. Пусть для каждого из M входных терминалов время передачи распределено по показательному закону с параметром γ . Кроме того, допустим, что X и X' распределены по одному и тому же закону (показательному с параметром γ). В задаче 4.42 нужно показать, что

$$\bar{C}' = \frac{M/\gamma}{1 - [\gamma/(\beta + \gamma)]^M}, \quad (4.114)$$

$$\sigma_{C'}^2 = \frac{(M/\gamma)^2}{1 - [\gamma/(\beta + \gamma)]^M} \left[\frac{M+1}{M} + \frac{2[\gamma/(\beta + \gamma)]^M - 1}{1 - [\gamma/(\beta + \gamma)]^M} \right]. \quad (4.115)$$

Естественно, что при этом первые два момента времени замены θ предполагаются известными. Этим завершается анализ одного диалогового терминала в сочетании с M входными терминалами в том смысле, что задача опять сводится к случаю 2, в котором время передачи x заменено временем ответа R . Среднее значение и дисперсия R соответственно равны $2\bar{X} + \bar{C}' + \bar{\theta}$ и $2\sigma_x^2 + \sigma_{C'}^2 + \sigma_{\theta}^2$ и могут быть подставлены в равенства (4.111) и (4.112) для определения диффузионных параметров, которые в свою очередь могут быть использованы для отыскания распределения длины очереди при помощи равенства (4.108).

Третья система, рассмотренная Гейвером, описывает M входных терминалов и m диалоговых терминалов. Отыскание времени ответа R для диалогового терминала может быть выполнено путем обобщения рассмотренной выше второй системы.

Три системы, рассмотренные Гейвером, дают приближенный метод анализа характеристик доступа удаленного терминала к вычислительным системам. Безусловно, они являются приближенными и основываются на ряде допущений, но нужно также признать, что они чрезвычайно просты в применении и могут использоватьсь для предварительного анализа задач связи ЭВМ.

Рассмотрим теперь *вторую* модель. Ряд систем доступа удаленных терминалов, подобных системам, изученным Гейвером, исследовали Конхейм и Мейстер. Они провели точный анализ; хотя теория является довольно изящной, она в то же время весьма громоздкая. Тем не менее указанные авторы исследовали ряд интересных систем, нашли преобразования Лапласа для соответствующих случайных величин и использовали эти преобразования для определения средних значений и дисперсий длины очереди и времени ожидания. Хороший обзор этих исследований дан в работе Чу и Конхейма [17]. Некоторые из полученных результатов будут изложены ниже. Указанные авторы сосредоточивают внимание на классе структур распределенных вычислительных систем, называемых петлевыми или кольцевыми. Возможно, первыми исследовали такие системы Фармер и Ньюхолл [23]. Они изучили петлевую систему для подключения к ЭВМ различных периферийных устройств (которые могут рассматриваться как обобщенные терминалы). Позднее Пирс [76] предложил иерархию петель, соединенных между собой так, что образовалась сеть передачи данных для ЭВМ в масштабе страны. Такие системы рассматриваются также, например, в работах [34, 84].

Результаты Конхейма и Мейстера (см., например, [62, 63]), возможно, лучше всего представить, рассмотрев сначала один входной терминал, соединенный с ЦП. Соединяющий канал может передавать одну единицу данных в единицу времени (называемую временным окном) и служить моделью для передачи либо знаков, либо байтов, либо блоков данных и т. д. Предположим, что терминал располагает буферной памятью бесконечной емкости, а поступление единиц данных в этот терминал является стационарным процессом восстановления, как во втором случае Гейвера. Допустим также, что число единиц данных, поступающих за временное окно, имеет среднее значение λ , дисперсию σ^2 и третий центральный момент $m^{(3)}$. До сих пор описывалась классическая модель системы G/D/1. Однако на системы, рассмотренные Конхеймом и Мейстером, налагается дополнительное ограничение, а именно что обслуживание может начинаться только в начале окна, на квантованной оси времени. Следовательно, единица данных, поступающая

в пустой терминал в середине временного окна, должна ждать до начала следующего окна, когда она будет передаваться. Как сказано выше, время передачи будет в точности равно длине одного временного окна. Эта задача рассматривается как задача разорения игрока (случайное блуждание, при котором величиной, представляющей интерес, является время до первого отклонения в область отрицательных значений). Указанные выше авторы установили, что среднее значение и дисперсия числа N единиц данных, накопленных в буфере до начала временного окна, имеют следующие стационарные значения (этот результат приводится также в работе [84]):

$$\bar{N} = \frac{\sigma^2}{2(1-\lambda)} + \frac{\lambda}{2}, \quad (4.116)$$

$$\sigma_N^2 = \frac{m^{(3)}}{3(1-\lambda)} + \left[\frac{\sigma^2}{2(1-\lambda)} + \frac{1-\lambda}{2} \right]^2 - \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3)}{12}. \quad (4.117)$$

Заметим, что в этом случае $\rho=\lambda$ и, таким образом, условие стабильности имеет вид $\lambda < 1$. В частном случае, когда входной процесс является пуассоновским, можно найти $\bar{N} = \lambda/[2(1-\lambda)] + \lambda/2$. Точно такой же результат получается в случае системы M/D/1, и он справедлив для всех моментов времени [см. равенство (1.83) при $\bar{x}^2=1$].

Рассмотрим теперь систему опроса, подобную исследованной Гейвером, где, кроме того, предполагается, что $r=1$ интервалов (окон) расходятся на переключение одного терминала к следующему. Предположим опять, что имеется M последовательно опрашиваемых терминалов и процессы поступлений в каждый из них статистически одинаковы. Первый стационарный результат дает среднее время цикла в виде

$$\bar{C} = \frac{Mr}{1-M\lambda}, \quad (4.118)$$

причем показатель использования системы ρ равняется $M\lambda < 1$. Средняя длина очереди у произвольного терминала в установившемся режиме

$$\bar{N} = \frac{\sigma^2}{2(1-M\lambda)} + \frac{Mr\lambda(1-\lambda)}{2(1-M\lambda)}. \quad (4.119)$$

Если теперь рассчитать среднее время, в течение которого единица данных ожидает у терминала, то получим

$$T = \frac{M[\sigma^2 + r(1-\lambda)]}{2(1-M\lambda)} + \frac{1-\lambda}{2}. \quad (4.120)$$

Такая система опроса, как и система, исследованная Гейвером, называется системой асинхронного временного уплотнения (АВУ), поскольку канал в такой системе уплотняется асинхронно (т. е. он

становится доступным терминалу на время, зависящее от требования, поступившего от терминала). Другой способ опроса, называемый синхронным временным уплотнением (СВУ), рассматривается ниже.

В системе СВУ каждому терминалу выделяется фиксированная доля временных окон, обычно M -е временное окно при общем числе терминалов M . Таким образом, обслуживание не зависит от трафика остальных терминалов, и анализ может быть проведен способом, подобным используемому для анализа модели с одним терминалом, при соответствующем подборе входящего процесса. В частности, определим среднее значение λ_M , дисперсию σ_M^2 и третий центральный момент t_M^3 процесса поступлений требований на M смежных временных окнах произвольного терминала (все терминалы характеризуются одинаковой статистикой потока поступлений). Определив эти параметры входящего процесса для M терминалов, можно записать среднее значение $\bar{N}(M)$ и дисперсию $\sigma_N^2(M)$ длины очереди при помощи равенств (4.116) и (4.117), где параметры одного терминала заменяются указанными параметрами входящего процесса. Можно также вычислить задержку в такой системе. В частности, представляет интерес случай групповых поступлений. Поэтому предположим, что в начале некоторого временного окна вводится k единиц данных. Средняя задержка этих данных (определенная как разность между средним временем, проведенным в системе, и средним временем обслуживания), которая обозначается через $W_k(M)$, дается равенством

$$W_k(M) = \frac{M+1}{2} + k(M-1) + M \left[\bar{N}(M) - \frac{(M+1)\lambda M}{2} \right]. \quad (4.121)$$

Другой системой, которая просто описывается при помощи методов, изложенных в работе [17], является система с общей буферной памятью, доступной всем терминалам. Можно опять легко рассчитать среднее значение и дисперсию стационарной длины очереди в буфере по формулам (4.116) и (4.117), если интерпретировать параметры входящего процесса так, чтобы можно было использовать $\sum_{i=1}^M \lambda^{(i)}$, $\sum_{i=1}^M \sigma_{\lambda^{(i)}}^2$ и $\sum_{i=1}^M t^{(i)}$, где индекс i обозначает параметры, связанные с i -м терминалом.

Таким образом, уплотнение (как АВУ, так и СВУ) вводится для того, чтобы эффективным образом коллективно использовать канал связи. Заметим, что система СВУ является крайне простой в реализации, но может оказаться невыгодной с точки зрения использования пропускной способности канала, если трафик терминалов небольшой и временные окна отдаются свободным терминалам. Система АВУ устраняет этот недостаток, предоставляя время только по требованию, но вносит «накладные расходы» на связь

и обработку, так как требуются адресация и хранение в буферах. В моделях АВУ предполагается наличие буферной памяти бесконечной емкости и одного канала на терминал.

В третьей модели, описанной в работе [16], рассматривается система АВУ типа G/D/m с дополнительным ограничением, состоящим в том, что постоянное время обслуживания может начинаться только в начале временного окна, а память системы имеет максимальную емкость K (где $K \geq m$). Пусть p_k — вероятность того, что в конце временного окна в системе находится k единиц данных (в очереди и на обслуживании), а a_m — стационарная вероятность того, что в системе в это время имеется не более m единиц данных (где m — число обслуживающих приборов). Тогда сразу получаем

$$a_m = \sum_{k=0}^m p_k.$$

Как обычно, предположим, что временное окно имеет единичную длину. Кроме того, пусть π_k — вероятность того, что в рассматриваемом входном процессе в течение временного окна производится k единиц данных (среднее значение этого распределения обозначалось через λ). Как и выше, имеем единственный входной терминал, но он может представлять собой совокупность M терминалов. Рассматривая вложенную цель Маркова в конце некоторого временного окна, можно следующим образом записать очевидные уравнения равновесия для этих стационарных вероятностей в конце смежных временных окон. Во-первых, имеем

$$p_0 = a_m \pi_0. \quad (4.122)$$

Это уравнение выражает тот факт, что в конце рассматриваемого окна вероятность отсутствия единиц данных в системе равна произведению вероятности того, что в конце последнего окна в системе было не более m единиц данных (следовательно, каждая такая единица была направлена в один из передающих каналов и, разумеется, покинула систему), и вероятности того, что в течение рассматриваемого временного окна никаких новых единиц данных в систему не поступило. Подобным методом можно вычислить вероятности аналогичных событий в системе и найти следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} p_k = & a_m \pi_k + p_{m+1} \pi_{k-1} + p_{m+2} \pi_{k-2} + \cdots + \\ & + p_{m+k-1} \pi_1 + p_{m+k} \pi_0, \quad 0 \leq k \leq K-m; \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} p_k = & a_m \pi_k + p_{m+1} \pi_{k-1} + p_{m+2} \pi_{k-2} + \cdots + \\ & + p_{K-1} \pi_{k+m+1-K} + p_K \pi_{k+m-K}, \quad K-m < k \leq K-1. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Для того чтобы система была полной, необходимо добавить условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^K p_k = 1.$$

Заметим, что когда процесс поступлений пуассоновский, имеем

$$\pi_k = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$$

При рассмотрении системы с m обслуживающими приборами представляется интерес вероятность переполнения P_{of} , которая соответствует вероятности того, что поступающая единица данных отвергается буферной памятью. Заметим, что $P_{of} \approx P_K$. Система уравнений, приведенная выше, не имеет простого решения. Однако в работе [16] эти уравнения решены численно для случая пуассоновского входящего потока и P_{of} представлена графически как функция емкости буферной памяти K и коэффициента использования (λ/m) как параметра. Из этих кривых видно, что вероятность переполнения убывает приближенно по показательному закону в зависимости от K . Например, при $\lambda/m = 0,8$ и $K = 28$ единиц данных $P_{of} \approx 10^{-6}$. Кроме того, если подсчитать среднюю задержку в очереди как функцию емкости буферной памяти для различного числа каналов, то можно найти, что, когда K превышает некоторое значение, средняя задержка остается в основном постоянной независимо от возрастающей емкости буфера. Например, при $\lambda/m = 0,8$ критическая емкость буфера приближенно составляет 18 единиц данных, $P_{of} \approx 10^{-4}$, а задержка в очереди (при $m=3$) приближенно равна продолжительности одного окна. Эти задержки могут быть значительными по сравнению с задержкой на участке терминал — концентратор. В работе [16] рассматривается также трафик на участке от ЭВМ к терминалу; соответствующие уравнения равновесия такие же, как и приведенные выше, в предположении $m = 1$, что соответствует одному каналу ЭВМ — терминал.

В этой главе была описана одна из новейших и наиболее успешно развивающихся областей применения теории массового обслуживания. Результаты, относящиеся к модели с одним ресурсом, легко получаются и просто интерпретируются. Модели с многими ресурсами все еще находятся в стадии разработки, и здесь были приведены некоторые из самых новых результатов. Модели мультипрограммирования и доступа удаленных терминалов менее разработаны и требуется их дальнейшее усовершенствование для получения возможности расширения применений. Эти исследования, естественно, приводят к задачам связи ЭВМ, и в двух следующих главах проводится их обобщение на сети ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adiri I., Avi-Itzhak B., A Time-Sharing Queue with a Finite Number of Customers, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 16, 315—323 (1969).
2. Adiri I., Computer Time Sharing Queues with Priorities, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 16, 631—645 (1969).
3. Adiri I., A Time Sharing Queue, *Management Science*, 15, 639—657 (1969).
4. Adiri I., Queueing Models for Multiprogrammed Computers, Proceedings of the International Symposium on Computer-Communication Networks and Teletraffic, Polytech Press, Brooklyn, N. Y., 1972, p. 441—448.
5. Anderson H. A., Jr., Sargent R. G., Investigation into Scheduling for an Interactive Computing System, *I. B. M. Journal of Research and Development*, 125—137 (March 1974).
6. Avi-Itzhak B., Heyman D. P., Approximate Queueing Models for Multiprogramming Computer Systems, *Operations Research*, 21, No. 6, 1212—1230 (1973).
7. Baskett F., The Dependence of Computer System Queues upon Processing Time Distribution and Central Processor Scheduling, Proceedings of the ACM SIGOPS, Third Symposium on Operating System Principles, Stanford University, October 1971, p. 109—113.
8. Baskett F., Chandy K. M., Muntz R. R., Palacios-Gomez F., Open, Closed, Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 22, 248—260 (1975).
9. Halachmi B., Franta W. R., A Closed Cyclic, Two-Stage Multiprogrammed System Model and its Diffusion Approximation Solution, Proceedings of the Second Annual ACM Sigmetrics Symposium on Measurement and Evaluation, Montreal, Canada, Sept. 30—Oct. 2, 1974, p. 54—64.
10. Burke P. J., The Output of a Queueing System, *Operations Research*, 4, 699—704 (1956).
11. Buzen J., Queueing Network Models of Multiprogramming, Ph. D. Thesis, Division of Engineering and Applied Science, Harvard University, Cambridge, Mass., 1971.
12. Buzen J. P., Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers, *Communications of the Association for Computing Machinery*, 16, 527—531 (1973).
13. Chandy K. M., The Analysis and Solutions for General Queueing Networks, Proceedings of the Sixth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, Princeton University, March 1972, p. 224—228.
14. Chang W., Single-Server Queueing Processes in Computing Systems, *IBM Systems Journal*, 36—71 (1970).
15. Chang A., Lavenberg S. S., Work-Rates in Closed Queueing Networks with General Independent Servers, IBM Research Report RJ 989, March 1972.
16. Chu W. W., A Study of Asynchronous Time Division Multiplexing for Time-Sharing Computers, AFIPS Conference Proceedings, 1969 Fall Joint Computer Conference, Vol. 35, 1969, p. 669—678.
17. Chu W. W., Konheim A. G., On the Analysis and Modeling of a Class of Computer Communication Systems, *IEEE Transactions on Communications*, COM-20, Part II, 645—660 (1972).
18. Coffman E. G., Jr., Stochastic Models of Multiple and Time-Shared Computer Operation, Report No. 66—38, Department of Engineering, University of California at Los Angeles, June 1966.
19. Coffman E. G., Jr., Kleinrock L., Computer Scheduling Methods and Their Countermeasures, AFIPS Conference Proceedings, 1968 Spring Joint Computer Conference, 1968, p. 11—21.
20. Coffman E. G., Jr., Kleinrock L., Feedback Queueing Models for Time-Shared Systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15, 549—576 (1968).

21. Coffman E. G., Jr., Muntz R. R., Trotter H., Waiting Time Distribution for Processor-Sharing Systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 17, 123—130 (1970).
22. Estrin G., Kleinrock L., Measures, Models and Measurements for Time-Shared Computer Utilities, Proceedings of the 22nd National Conference of the Association for Computing Machinery, Washington, D. C., 1967, p. 85—96.
23. Farmer W. D., Newhall E. E., An Experimental Distributed Switching System to Handle Bursty Computer Traffic, Proceedings of the ACM Symposium on Problems in the Optimization of Data Communications Systems, Pine Mountain, Ga., October 1969, p. 1—34.
24. Ferdinand A. E., An Analysis of the Machine Interference Model, *IBM Systems Journal*, 10, No. 2, 129—142 (1971).
25. Fuchs E., Jackson P. E., Estimates of Distributions of Random Variables for Certain Computer Communications Traffic Models, *Communications of the ACM*, 13, 752—757 (1970).
26. Gaver D. P., Probability Models for Multiprogramming Computer System, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 14, 423—438 (1967).
27. Gaver D. P., Analysis of Remote Terminal Backlogs under Heavy Demand Conditions, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 18, 405—415 (1971).
28. Gaver D. P., System Service Output, with Application to Multiprogramming, Naval Postgraduate School, Report NPS55GV71091A, September 1971.
29. Gaver D. P., Shedler G. S., Processor Utilization in Multiprogramming Systems via Diffusion Approximations, *Operations Research*, 21, 569—576 (1973).
30. Gaver D. P., Delays at a Facility with Demand from Many Distinct Sources, Naval Postgraduate School Report NPS 55GV73081A, August 1973.
31. Gaver D. P., Shedler G. S., Approximate Models for Processor Utilization in Multiprogrammed Computer Systems, *SIAM Journal on Computing*, 2, 183—192 (1973).
32. Gordon W. J., Newell G. F., Closed Queueing Systems with Exponential Servers, *Operations Research*, 15, 254—265 (1967).
33. Greenberger M., The Priority Problem and Computer Time-Sharing, *Management Science*, 12, 888—906 (1966).
34. Hayes F. J., Sherman D. N., Traffic Analysis of a Ring Switched Data Transmission System, *Bell System Technical Journal*, 50, 2947—2978 (1971).
35. Hsu J., Analysis of a Continuum of Processor-Sharing Models for Time-Shared Computer Systems, UCLA-ENG-7166, School of Engineering and Applied Science, University of California at Los Angeles, October 1971.
36. Jackson R. R. P., Queueing Systems with Phase Type Service, *Operations Research*, 2, 109—120 (1954).
37. Jackson J. R., Networks of Waiting Lines, *Operations Research*, 5, 518—521 (1957).
38. Jackson J. R., Jobshop-Like Queueing Systems, *Management Science*, 10, No. 1, 131—142 (1963).
39. Kleinrock L., Analysis of a Time-Shared Processor, *Naval Research Logistics Quarterly*, 11, 59—73 (1964).
40. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. Стохастические потоки и задержки сообщений. Пер. с англ./Под ред. А. А. Первозванского.—М.: Наука, 1970.
41. Kleinrock L., Sequential Processing Machines (S.P.M.) Analyzed with a Queueing Theory Model, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 13, 179—193 (1966).
42. Kleinrock L., Theory of Queues Applied to Time-Shared Computer Systems, 1966 IEEE Region Six Conference Record, Tucson, Arizona, April 26—28, 1966, p. 491—500.
43. Kleinrock L., Time-Shared Systems: A Theoretical Treatment, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 14, 242—261 (1967).

44. Kleinrock L., Coffman E. G., Jr., Some Feedback Queueing Models for Time-Shared Systems, Proceedings of the Fifth International Teletraffic Congress, June 1967, p. 91—92.
45. Kleinrock L., Coffman E. G., Jr., Distribution of Attained Service in Time-Shared Systems, *Journal of Computer System Science*, 1, 287—298 (1967).
46. Kleinrock L., Some Recent Results for Time-Shared Processors, Proceedings of the First Hawaii International Conference on System Sciences, University of Hawaii, Honolulu, January 29—31, 1968, p. 746—759.
47. Kleinrock L., Certain Analytic Results for Time-Shared Processors, Proceedings of the International Federation for Information Processing Congress, August 1968, p. 838—845.
48. Kleinrock L., Time-Sharing Systems: Analytical Methods, in Critical Factors in Data Management, F. Gruenberger, ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969, p. 30—32.
49. Kleinrock L., A Continuum of Time-Sharing Scheduling Algorithms, AFIPS Conference Proceedings, 1970 Spring Joint Computer Conference, 1970, p. 453—458.
50. Kleinrock L., Swap Time Considerations in Time-Shared Systems, *IEEE Transactions on Computers*, C-19, 534—540 (1970).
51. Kleinrock L., Muntz R. R., Multilevel Processor-Sharing Queueing Models for Time-Shared Models, Proceedings of the Sixth International Teletraffic Congress, August 1970, 341/1—341/8.
52. Kleinrock L., Muntz R. R., Hsu J., Tight Bounds on Average Response Time for Processor-Sharing Models of Time-Shared Computer Systems, *Information Processing 71*, TA-2, 50—58 (August 1971).
53. Kleinrock L., Muntz R. R., Rodemich E., The Processor-Sharing Queueing Model for Time-Shared Systems with Bulk Arrivals, *Networks Journal*, 1, 1—13 (1971).
54. Kleinrock L., A Selected Menu of Analytical Results for Time-Shared Computer Systems, in Systemprogrammierung, R. Oldenburg Verlag, Munich, Germany, 1972, p. 45—73.
55. Kleinrock L., Computer Networks, in Computer Science, A. F. Cárdenas, L. Presser, M. A. Marin (eds.), Wiley, New York, 1972, p. 241—284.
56. Kleinrock L., Muntz R. R., Processor-Sharing Queueing Models of Mixed Scheduling Disciplines for Time-Shared Systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 19, 464—482 (1972).
57. Kleinrock L., Scheduling, Queueing and Delays in Time-Shared Systems and Computer Networks, in Computer-Communication Networks, N. Abramson, F. Kue, eds., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973, p. 95—141.
58. Kleinrock L., Hsu J., A Continuum of Computer Processor-Sharing Queueing Models, Proceedings of the Seventh International Teletraffic Congress, Stockholm, Sweden, June 1973, p. 431/1—431/6.
59. Kleinrock L., Queueing Systems, Volume I: Theory, Wiley New York, 1975.
60. Kleinrock L., Nilsson A., On Optimal Scheduling Algorithms for Time-Shared Systems (в печати).
61. Kobayashi H., Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks, I — Equilibrium Queue Distributions, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21, 316—328 (1974).
62. Konheim A. G., Meister B., Service in a Loop System, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 19, 92—108 (1972).
63. Konheim A. G., Service Epochs in a Loop System, Proceedings of the International Symposium on Computer-Communication Networks and Teletraffic, Polytech Press, Brooklyn, N. Y., April 1972, p. 125—143.
64. Lewis P. A. W., Shedler G. S., A Cyclic-Queue Model of System Overhead in Multiprogrammed Computer Systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 18, 199—220 (1971).
65. Lee R. P., A Comparison of Implicit and Explicit Priorities Scheduling in a Computer System. M. S. thesis, Computer Science Department, School of En-

- gineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, June 1973.
66. McKinney J. M., A Survey of Analytical Time-Sharing Models, *Computing Surveys*, 1, 105—116 (1969).
 67. Moore C. G., III, Network Models for Large-Scale Time-Sharing Systems, Technical Report No. 71-1, Department of Industrial Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, April 1971.
 68. Moore F. R., Computational Model of a Closed Queueing Networks with Exponential Servers, *IBM Journal of Research and Development*, 1972, p. 567—572.
 69. Muntz R. R., Baskett F., Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers, Technical Report No. 33, Stanford Electronics Laboratories, Stanford University, August 1972.
 70. Muntz R. R., Poisson Departure Processes and Queueing Networks, IBM Research Report RC 4145, December 1972.
 71. Muntz R. R., Wong J., Efficient Computational Procedures for Closed Queueing Network Models, Proceedings of the Seventh Hawaii International Conference on System Sciences, Honolulu, Hawaii, January 8—10, 1974, p. 33—36.
 72. Muntz R. R., Analytic Models for Computer System Performance Analysis, Proceedings of the NTG/GI Conference on Computer Architecture and Operating Systems, Braunschweig, Germany, March 1974.
 73. Muntz R. R., Wong J., Asymptotic Properties of Closed Queueing Network Models, Proceedings of the Eighth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, Princeton University, March 1974.
 74. O'Donovan T. M., Direct Solutions of M/G/1 Processor-Sharing Models, *Operations Research*, 22, 1232—1235 (1974).
 75. Omahen K., Analytic Models of Multiple Resource Systems, Ph. D. Dissertation, Division of Physical Sciences, The University of Chicago, June 1973.
 76. Pierce J. R., Cohen C. H., Kropfl W. J., Network for Block Switching of Data, IEEE Conference Record, New York, March 1971, p. 222—223.
 77. Posner M., Bernholtz B., Closed Finite Queueing Networks with Time Lags and with Several Classes of Units, *Operations Research*, 16, 977—985 (1968).
 78. Sakata M., Noguchi S., Oizumi J., Analysis of a Processor-Sharing Queueing Model for Time-Sharing Systems, Proceedings of the Second Hawaii International Conference on System Sciences, January 1969, p. 625—628.
 79. Sakata M., Noguchi S., Oizumi J., An Analysis of the M/G/1 Queue Under Round-Robin Scheduling, *Operations Research*, 19, 371—385 (1971).
 80. Scherr A. A., An Analysis of Time-Shared Computer Systems, MIT Press, Cambridge, Mass., 1967.
 81. Schrage L. E., The Queue M/G/1 with Feedback to Lower Priority Queues, *Management Science*, 13, 466—471 (1967).
 82. Schrage L. E., The Modelling of Man-Machine Interactive Systems, Report 6942, Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago, September 1969.
 83. Shemer J. E., Some Mathematical Considerations of Time-Sharing Scheduling Algorithms, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 14, 262—272 (1967).
 84. Spragins J. D., Loops Used for Data Collection, Proceedings of the International Symposium on Computer-Communication Networks and Teletraffic, Polytech. Press, Brooklyn, N. Y., April 1972, p. 59—76.
 85. Van den Heever R., Computer Time-Sharing Priority Systems, Ph. D. Dissertation, University of California at Berkeley, September 1969.
 86. Wallace V. L., Queueing Theory in the Analysis of Computer Systems, classnotes for a Michigan Engineering Summer Conference entitled, Digital Computers in Real Time, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1964.
 87. Wong, J. W.-N., Queueing Network Models for Computer Systems, UCLA-ENG-7579, School of Engineering and Applied Science, University of California at Los Angeles.

Задачи

- 4.1. Покажите, что равенство (4.10) является предельным случаем равенства (4.9) при нулевом кванте.
- 4.2. Покажите, что равенства (4.9) и (4.11) справедливы для любого приоритетного класса в системе коллективного пользования, которая дискриминирует на основе приоритета и достигнутого времени обслуживания.
- 4.3. Рассмотрите систему кругового опроса с дискретным временем и конечным квантом $q > 0$. Поступление требований происходит с интенсивностью λ требований в 1 с и вероятностями P [1 требование за q секунд] = λq и P [0 требований за q секунд] = $1 - \lambda q$; геометрическое распределение времени обслуживания: P [время обслуживания равно nq секунд] = $(1 - \sigma)^n$, где $0 \leq \lambda q \leq 1$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Предполагается, что требования поступают непосредственно после начала кванта [и, следовательно, становятся в очередь непосредственно за требованием (если такое имеется), которое было снято с обслуживания, хотя оно еще нуждается в нем]. Рассмотрите моменты перед любым возможным моментом поступления требования в систему, но после завершения кванта q . Число требований в системе в эти моменты образует цепь Маркова. Пусть $p_k = P$ [k требований в системе во вложенные моменты].
- а) Запишите уравнения равновесия для p_k .
- б) Найдите решение уравнений а).
- в) Найдите среднее число \bar{N} требований в системе.
- г) Пусть $T(nq) = E$ [время ответа для требования, которому необходимо обслуживание в течение nq секунд]. Пусть $\bar{N}_i = E$ [число требований, обслуженных между $(i-1)$ -м и i -м уходами меченого требования из обслуживающего прибора]. Покажите, что

$$\bar{N}_i = \begin{cases} \bar{N} + 1, & i=1, \\ \frac{1}{1-\rho} - \frac{\rho(1-\sigma\alpha)}{1-\rho} \alpha^{i-2}, & i=2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

где $\rho = \lambda q / (1 - \sigma)$ и $\alpha = \sigma + \lambda q$.

д) Используя результат г, докажите равенство

$$T(nq) = \frac{nq}{1-\rho} - \frac{\lambda q^2}{1-\rho} \left[1 + \frac{(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\sigma)^2(1-\rho)} \right].$$

- 4.4. Пусть для системы с дискретным временем из задачи 4.3

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow 1}} \frac{q}{1-\sigma} = \frac{1}{\mu}.$$

- a) Покажите, что предельный процесс поступлений является пуассоновским со средним значением λ .
- б) Покажите, что предельное время обслуживания распределено по показательному закону со средним значением $1/\mu$ секунд.
- в) Пусть n возрастает так, что $\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} nq = x$. Покажите, что $\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} T(nq) = T(x) = x/1 - \rho$, как должно быть для системы разделения процессора с круговым опросом.

4.5. Для системы $M/G/1$ с круговым опросом может быть показано, что величина $P_k(x)dx = P$ [в системе находится k требований с достигнутым временем обслуживания, лежащим в интервале $(x, x+dx)$] удовлетворяет следующей системе дифференциально-разностных уравнений при $x > 0$:

$$\frac{d}{dx} P_k(x) = -k\mu(x)P_k(x) + (k+1)\mu(x)P_{k+1}(x), \quad k=0,1,2,\dots,$$

где $\mu(x)dx = P$ [требованию с достигнутым обслуживанием x секунд необходимо еще только dx секунд].

- а) Выразите $\mu(x)$ через $B(x)$.
- б) Предположив, что $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$, найдите $\mu(x)$.
- в) Выведите дифференциальное уравнение для плотности распределения достигнутого обслуживания $n(x)$ при $B(x)$ и $\mu(x)$, определяемых в п. б.
- г) Решите дифференциальное уравнение для $n(x)$ из п. в и выразите полученное решение через $n(0)$.

4.6. Рассмотрите такую же систему, как в задаче 4.5, за исключением того, что теперь допускается произвольное распределение $B(x)$.

- а) Повторите п. в задачи 4.5 для произвольного $B(x)$.
- б) Повторите п. г задачи 4.5 для произвольного $B(x)$.
- в) Пусть

$$P(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k.$$

Выведите дифференциальное уравнение в частных производных для $P(z, x)$.

- г) Покажите, что дифференциальному уравнению в частных производных п. в удовлетворяет

$$P(z, x) = 1 - (1-z)n(0)[1 - B(x)].$$

- д) Из результата п. г найдите $P_1(x)$.

4.7. Рассмотрите систему разделения процессора типа $M/M/1$ с круговым опросом. Пусть $w_k(x)$ — время ожидания для требования, которому необходимо x секунд обслуживания, при-

чем в момент поступления оно застает k других требований в системе [т. е. время ответа для него равно $w_k(x) + x$]. Пусть $W_k^*(s, x)$ — преобразование Лапласа ПРВ для $w_k(x)$.

Обозначьте $W_k^*(s, x)$ в целях упрощения через W_k .

a) Покажите, что

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} = \lambda(k+1)W_{k+1} - [\lambda(k+1) + (s+\mu)k]W_k + \mu k W_{k-1},$$

где $W_k^*(s, 0) = 1$ при $s \geq 0$ и $k=0, 1, \dots$, а $W_{-1} \Delta 0$.

б) Пусть $W^*(s, x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k^*(s, x) z^k$ и $W^*(s, x, z) = W$. Покажите, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} - [\mu z^2 + (s + \mu + \lambda)z + \lambda] \frac{\partial W}{\partial z} = (\mu z - \lambda)W,$$

где $W^*(s, 0, z) = 1/(1-z)$.

в) Решение для W из п. б имеет вид [21]

$$W = \frac{(1 - \rho r^2) e^{-\lambda x(1-r)}}{(1 - \rho r)(1 - rz) - (1 - r)(z - \rho r) e^{-\mu x(1-\rho r^2)/r}},$$

где r определяется из уравнения (4.20). Покажите, что равенство (4.19) следует из этого выражения для W .

4.8. Рассмотрите систему коллективного пользования с круговым опросом и конечным квантом $q > 0$, в которой на замену требования тратится время θ . Предполагается, что $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$. Последний квант для требования будет меньше q секунд, если ему необходимо обслуживание, меньшее $(q - \theta)$ секунд, в течение последнего кванта.

а) Найдите ПРВ длины кванта \bar{q} .

б) Получите \bar{q} и \bar{q}^2 .

в) Найдите распределение числа квантов N_q , необходимых требованию.

г) Найдите $E[N_q]$.

д) Получите преобразование Лапласа ПРВ полного времени X , отводимого требованию, включая время его замены.

е) Найдите $E[X]$ и $E[X^2]$ в зависимости только от μ , θ и q .

ж) Предполагая, что входящий процесс пуассоновский с интенсивностью λ , получите среднее число требований в системе при $\rho = \lambda E[X] < 1$.

4.9. В разд. 4.4 было показано, что $dn(x)/dx = -\mu(x)n(x)$. Применив непосредственно к этому дифференциальному уравнению равенства (4.11) и (4.14), получите выражение (4.16) для $T(x)$.

4.10. Рассмотрите систему разделения процессора типа $M/G/1$ с произвольной структурой очередей, интенсивностью входящего потока λ и распределением времени обслуживания $B(x)$.

- Выразите среднее число требований \bar{N} в системе через $n(x)$.
- Рассмотрите теперь ту же систему, но с потерями времени на замену требований. Иначе говоря, на каждые x секунд обработки теряется доля времени φ (т. е. φx секунд) на замену требования.

Можно построить модель для этого, предположив, что требование, которое обслуживается x секунд в системе, рассмотренной выше, потребует $x/(1-\varphi)$ секунд; в результате получается новый закон распределения времени обслуживания $\hat{B}(x)$.

Пусть $S=E$ [полное время, потерянное на замену всех требований, еще находящихся в системе].

- Используя результат п. а, получите выражение для S через φ , λ , $\hat{B}(x)$ и $T(x)$.
- При $B(x)=1-e^{-\mu x}$ найдите S в явном виде для системы с круговым опросом.

4.11. Для системы обслуживания в обратном порядке с абсолютным приоритетом из равенства (4.23) найдите

- среднее время ответа $T(x)$;
- дисперсию времени ответа;
- сравните дисперсию п. б с дисперсией времени ответа в случае пакетной обработки.

4.12. a) Докажите равенство (4.27), используя свойство функции $S^*(s|x)$ из равенства (4.28) производить моменты.
б) Аналогично найдите дисперсию времени ответа для алгоритма ПЗП.

4.13. Рассмотрите двухуровневую систему $M/G/1$ с алгоритмом обслуживания ПЗП, которая описана в примечании на стр. 203, с параметрами λ , \bar{x} , $B^*(s)$. Пусть квант для требований переднего плана равен q , а заднего — бесконечности. Требования переднего плана имеют абсолютный приоритет перед требованиями заднего плана (без потерь), которые дообслуживаются после исчерпания очереди требований переднего плана.

- Найдите $W(x)$.
- Пусть поток требований в очередь заднего плана также является пуассоновским (с интенсивностью λ_0). Эти требования характеризуются ПРВ времени обслуживания, преобразование которого обозначается через $B_0^*(s)$. Найдите $W(x)$ для требований заднего плана.

- 4.14. Пусть в систему M/G/1 поступает поток групповых требований. Иначе говоря, в моменты времени, выбираемые в соответствии с пуассоновским процессом (интенсивность которого λ точек в 1 с), в систему поступают *группы* требований. Предполагается, что требования обрабатываются по принципу кругового опроса с квантом продолжительностью q секунд. Кроме того, предполагается, что все продолжительности обслуживания кратны q , а также $\sigma_i = P$ [требованию, получившему iq секунд обслуживания, еще необходимо больше чем $(i+1)q$ секунд].

$n(iq)$ — среднее число требований в системе с *достигнутым* обслуживанием iq секунд,

- \bar{a} — средний размер группы поступающих требований,
- b — среднее число требований, поступающих с меченым требованием (см. ниже).

Сосредоточьте внимание на меченом требовании, которому необходимо $x = iq$ секунд обслуживания. Предполагается, что в среднем с меченым требованием поступают b требований, причем меченое требование идет последним в своей группе. Пусть $T(i)$ — среднее время между $(i-1)$ -м и i -м квантами обслуживания, предоставляемыми меченному требованию.

- a) Найдите выражение для среднего времени T_1 до получения меченым требованием первого кванта обслуживания.

- б) Покажите, что при $i > 1$

$$T_i = \sum_{j=0}^{\infty} n(jq) q \sigma_j \sigma_{j+1} \dots \sigma_{j+i-2} + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda \bar{a} T_j q \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{i-j-1} + q + b q \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{i-2}.$$

- в) Объясните смысл каждого из четырех членов равенства п. б.
- г) Рассмотрите предел при $q \rightarrow 0$. Пусть в этом предельном случае $iq \rightarrow \tau$ и $jq \rightarrow x$. Отметим также, что $T_i q \rightarrow \rightarrow (d/d\tau) \alpha(\tau)$, где $\alpha(\tau)$ — среднее время пребывания в системе требований, которым необходимо τ секунд обслуживания. Рассмотрев предел при $q \rightarrow 0$ для каждого из приведенных членов, покажите, что при этом получается равенство (4.40).

- 4.15. Требуется доказать справедливость равенства (4.43).
- а) Используйте распределение (4.42) для замещения $B(t)$ в основном интегральном уравнении (4.40).
 - б) Пусть D — дифференциальный оператор d/dt . Продифференцировав $d+1$ раз результат п. а, покажите, что

$$Q_0(D)[\alpha^{(1)}(\tau)] + Q_1(D)[\alpha^1(t_1 - \tau)] = \mu^{d+1},$$

где Q_0 и Q_1 даются равенствами (4.44) и (4.45).

в) Докажите, что

$$[Q_0(D)Q_0(-D) - Q_1(D)Q_1(-D)]\alpha^{(1)}(\tau) = [Q_0(0) - Q_1(0)] \mu^{d+1}.$$

г) Покажите, что общее решение для $\alpha^{(1)}(t)$ имеет вид

$$\alpha^{(1)}(\tau) = \frac{1}{1 - \lambda a \tau} + \sum_{m=1}^{d+1} (A_m e^{-\beta_m \tau} + B_m e^{\beta_m \tau}),$$

где корни $Q_2(y)$ [см. (4.46)] появляются парами и обозначаются как $(\beta_i, -\beta_i)$, $i = 1, 2, \dots, d+1$.

д) Используя результат для $\alpha^{(1)}(\tau)$ в выражении п. б и составляя коэффициенты, покажите, что

$$A_m = C_m Q_0(\beta_m),$$

$$B_m = -C_m e^{-\beta_m t_1} Q_1(\beta_m), \quad m = 1, 2, \dots, d+1.$$

е) Как определить коэффициенты C_m , чтобы доказать равенство (4.43)?

4.16. Проведите полное решение уравнения (4.43) в случае $q(r) = 1$ (т. е. при показательном обслуживании).

4.17. Из выражения для $G(z)$ в примечании на стр. 217 найдите $G^{(1)}(1)$ и $G^{(2)}(1)$, а также a и b для системы разделения процессора типа M/G/1 с групповыми поступлениями и круговым опросом.

4.18. Определите предельные формы для $W^*(s|x)$ в равенстве (4.50) и $T(x)$ в равенстве (4.51) при

а) $\beta/a = 1$;

б) $\beta/a = 0$.

4.19. С помощью равенства (4.50) докажите, что соотношение (4.51) действительно дает $T(x)$.

4.20. Имеется каскад систем с эгоистичным алгоритмом и пуассонским входящим потоком интенсивностью λ , и в частности система с эгоистичным алгоритмом, параметры которого α_1 и β_1 соответствуют первоначальным параметрам a и β , описанным в тексте. Предполагается, что сам блок обслуживания является системой с эгоистичным алгоритмом и собственными блоками ожидания и обслуживания с параметрами α_2 и β_2 . Продолжим такую итеративную структуру, в которой каждый блок обслуживания содержит в свою очередь собственный блок ожидания и блок обслуживания и т. д. до N -го уровня.

а) Найдите $W^*(s|x)$ для этой системы в явном виде как функцию от α_i и β_i ($i = 1, \dots, N$), $B^*(s)$, а также $\hat{W}_\lambda^*(s|x, N)$, которая является известной характеристической функцией самого внутреннего грубого распределительного алгоритма.

- б) Обсудите любое обобщение, которое может дать этот каскад по сравнению с простой однокаскадной системой с эгоистичным алгоритмом.
- 4.21. Воспользуйтесь методом вывода равенства (4.57) для доказательства соотношения (4.60).
- 4.22. Выполните равенство (4.65), путем простого приравнивания интенсивности, с которой требования поступают в штриховой блок на фиг. 4.26, и интенсивности, с которой они покидают его.
- 4.23. Рассмотрите систему разделения процессора типа M/M/1. Меченое требование поступает в случайный момент времени. Пусть $m(t)$ — условное среднее число требований в системе при условии, что меченое требование получило t секунд обслуживания.
- Выразите $m(t)$ через λ , μ , t и $T(t)$.
 - Определите точные верхнюю и нижнюю границы $m(t)$ для любого консервативного алгоритма.
- 4.24. Имеется система разделения времени типа M/G/1 с ПЗП. Получите среднее время ответа, следя за работе [74]. Рассмотрите меченое требование, которому необходимо обслуживание более x секунд.
- Найдите $N_1(x)=E$ [число требований в системе, когда на обслуживание поступает меченое требование с достигнутым временем обслуживания $\leq x$, но с необходимым временем обслуживания $>x$].
 - Найдите $N_2(x)=E$ [число требований, которые поступают после меченого требования, но перед тем, как меченое требование получит x секунд обслуживания, и сами требуют более x секунд обслуживания].
 - Очевидно, $N_1(x)+N_2(x)$ — среднее число требований с достигнутым временем обслуживания x секунд, когда рассматриваемое меченое требование достигло обслуживания x секунд. Путем рассмотрения событий, которые возникают в течение промежутка времени, необходимого для того, чтобы дать меченоему требованию дополнительные Δx секунд обслуживания, получите соотношение, связывающее $dT(x)/dx$ с $N_1(x)$ и $N_2(x)$ и другими параметрами системы.
 - Докажите, что известное выражение для $T(x)$ при алгоритме ПЗП удовлетворяет равенству п. в.
- 4.25. Рассмотрите систему коллективного пользования M/G/1 с интенсивностью входящего потока $\lambda=1$ и следующей плотностью распределения времени обслуживания:

$$b(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

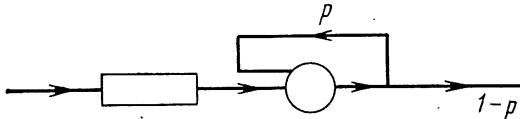
- a) Рассмотрите многоуровневый распределительный алгоритм с двумя уровнями: $a_1 = 1/2$, D_1 —КО, D_2 —ОПП. Найдите $T(x)$.
- б) Рассмотрите эгоистичный алгоритм с грубым распределительным алгоритмом п. а и параметрами α и β , такими, что $\beta/\alpha = 1/2$. Найдите $T(x)$ для эгоистичного алгоритма.
- в) Получите верхнюю и нижнюю границы для любой функции $W(x)$ при вышеуказанной плотности распределения времени обслуживания $b(x)$.
- г) Укажите, какие случаи из перечисленных ниже осуществляются.
- 1) $W(0) = 1/6$.
 - 2) $W(0) = 1/2$.
 - 3) $W(1/2) = 1/10$.
 - 4) $W(1/2) = 1$.
 - 5) $W(1) = 1$.
 - 6) $W(1) = 3/2$.
- д) Рассмотрите $W(x) = 3/2x^2$ ($0 \leq x \leq 1$). Установите, возможно ли такое $W(x)$.

- 4.26. С помощью равенства (4.28) покажите для системы ПЗП, что дисперсия времени ответа (для требования, которому необходимо x секунд обслуживания), обозначаемая как $\sigma^2(x)$, имеет вид

$$\sigma^2(x) = \frac{2W_x}{1 - \rho_x} + \frac{\sigma_x^2}{(1 - \rho_x)^2},$$

где σ_x^2 — дисперсия времени ответа в системе ОПП с усеченной ПРВ времени обслуживания $b_x(y)$, показанной на фиг. 4.6.

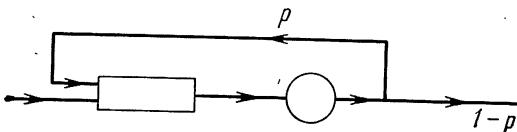
- 4.27. Рассмотрите систему M/G/1 с ОПП, интенсивностью входящего потока λ и обратной связью, показанную ниже:



Каждый раз, когда заканчивается обслуживание [распределение времени которого $B(x)$], требование вновь возвращается на обслуживание с вероятностью p или покидает систему с вероятностью $1-p$.

- а) Найдите преобразование Лапласа $H_1^*(s)$ плотности распределения полного времени обслуживания (с учетом обратной связи) в виде явной функции p и $B^*(s)$.
- б) Получите z -преобразование $Q_1(z)$ распределения числа требований в системе.

- в) Найдите преобразование Лапласа $W_1^*(s)$ ПРВ времени ожидания в очереди.
- г) Получите среднее время ожидания W_1 . Рассмотрите систему M/G/1 с ОПП и обратной связью, показанную ниже:



Теперь обратная связь направлена не к обслуживающему прибору, а к хвосту очереди. Функции H , Q и W здесь имеют тот же смысл, что и выше, но отмечаются индексом 2.

- д) Найдите $H_2^*(s)$.
- е) Установите связь между $Q_2(z)$ и $Q_1(z)$, если она вообще существует.
- ж) Найдите зависимость между $W_2^*(s)$ и $W_1^*(s)$, если она вообще существует.
- з) Получите среднее время ожидания W_2 .
- и) Найдите полную интенсивность поступления требований в очередь.
- 4.28. Определите линейную стоимостную функцию $C(W, x)$, являющуюся произведением удельной стоимости (на секунду среднего времени ожидания) задержки требования, которому необходимо полное обслуживание в x секунд, на величину W секунд в системе разделения времени типа M/G/1; запишем здесь $W=W(x)$. Таким образом, полная средняя стоимость по отношению к одному требованию равна

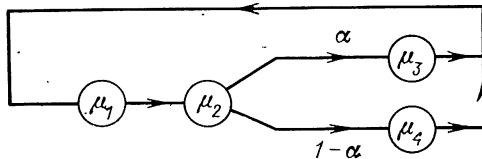
$$C = \int_0^\infty C(W, x) W(x) b(x) dx.$$

Ставится задача минимизировать C по всем возможным распределительным алгоритмам при ограничении, налагаемом законом сохранения (4.58). Можно показать [60], что $W(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial W} [C(W, x) W(x) b(x)] = \frac{k[1 - B(x)]}{b(x)},$$

- где k — множитель Лагранжа, т. е. некоторая постоянная.
- а) Для каждого из следующих вариантов $C(W, x)$ и $b(x)$ дайте значение W , минимизирующее C , и опишите распределительный алгоритм, который дает такое значение W .

- 1) $C(W, x) = W$ и $M/M/1$.
 2) $C(W, x) = W/(x+a)$ и $M/M/1$.
 3) $C(W, x) = W/x$ и $M/E_2/1$.
- б) Найдите W , которое минимизирует C в указанных ниже случаях, и объясните, почему эти решения неосуществимы.
- 1) $C(W, x) = W$ и $M/E_2/1$.
 - 2) $C(W, x) = W/(x^2+a)$ и $M/M/1$.
- 4.29.** Рассмотрите систему на фиг. 4.26. Пусть $x=\lambda/\mu$.
- a)* Покажите, что $\mu T \approx 1/[1-(M-1)x]$ при $M \ll M^*$.
 - б)* Покажите, что $\mu T \approx M - M^* + 1$ при $M \gg M^*$.
- 4.30.** Рассмотрите замкнутую марковскую сеть массового обслуживания с обычными параметрами: N , m_i , μ_i , r_{ij} и K . Пусть теперь $m_i=1$ при $i=1, 2, \dots, N-1$ и $m_N=M$. Можно произвольно в равенстве (4.77) положить $x_N=1$. Кроме того, пусть $k=K-k_N$. Дайте по возможности самое простое выражение для $G(K)$ (см. [68]).
- 4.31.** Рассмотрите вычислительную систему с двумя однолинейными ресурсами, предоставляемыми по требованию. Предполагается, что луассоновский входящий процесс (с интенсивностью λ_i) требует от ресурса i ($i=1, 2$) показательного времени обслуживания (с интенсивностью μ_i).
- a)* Пусть оба потока требований коллективно используют одно запоминающее устройство (емкостью K), и любое требование, застающее в системе K требований, теряется. Найдите среднее число уходов в секунду из каждого ресурса.
 - б)* Предполагается, что запоминающее устройство разбивается таким образом, что для потока i отводится K_i мест ($K_1+K_2=K$). Найдите величину K_1 , которая максимизирует суммарную производительность.
- 4.32.** Выведите равенство (4.103).
- 4.33.** Рассмотрите следующую марковскую замкнутую сеть с одним требованием ($K=1$):



- а)* Найдите в явном виде $p(k_1, k_2, k_3, k_4)$ как функцию μ_i ($i=1, 2, 3, 4$) и α .
- б)* Пусть $\mu_1=\mu_2=\mu_3=2$ и $\mu_4=1$. Найдите насыщенный узел (узлы) при изменении α в интервале $0 \leq \alpha \leq 1$.

- 4.34. Рассмотрите замкнутую сеть массового обслуживания с пятью узлами (системами массового обслуживания), где узел i имеет m_i обслуживающих приборов, каждый из которых требует $1/\mu_i$ секунд для выполнения обслуживания при произвольном распределении. Пусть $m_5=M$ и $m_1=m_2=m_3=m_4=1$ (считайте узел 5 терминальным). Замкнутая система содержит M циркулирующих требований. Пусть

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Предполагается также, что $\mu_1=3$, $\mu_2=2$, $\mu_3=3$, $\mu_4=3$, $\mu_5=2/17$.

- a) Изобразите полный граф сети с указанием циркуляции требований.
 - б) Определите λ_i/λ_5 для $i=1, 2, 3, 4$.
 - в) Какой узел является наиболее насыщенным?
 - г) Найдите число насыщающих требований M^* .
 - д) Определите время ответа T (среднее время пребывания требования в «остальной части сети», т. е. от его ухода до возвращения в терминальный узел) при $M \gg M^*$.
 - е) Сделайте то же, что в п. д, для $M \ll M^*$.
 - ж) Покажите, что две асимптотические кривые в пп. д и е пересекаются при $M=M^*$.
 - з) Изобразите асимптотические кривые пп. д и е на плоскости (T, M) .
 - и) Пусть $\mu_2=3$ и $\mu_4=2$. Проверьте по пп. а—е, какие ответы в связи с данным предположением меняются, а какие остаются в силе.
- 4.35. Рассмотрите замкнутые марковские сети, для которых $m_i=1$ при $i=1, 2, \dots, N$.
- а) Покажите, что $P[\tilde{k}_i \geq k_i] = x_{i,i}^{k_i} [G(K-k_i)/G(K)]$.
 - б) На основании результата п. а докажите равенства (4.80) и (4.81).
- 4.36. Пусть для той же системы, что и в задаче 4.35,

$$g(k, n) = \sum_{k \in B} \prod_{i=1}^n x_{i,i}^{k_i},$$

где B — множество таких векторов $k=(k_1, k_2, \dots, k_n)$, для которых $k_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n k_i = k$. Заметим, что $g(k, N) = G(k)$ при $k=0, 1, \dots, K$.

- а) Покажите, что $g(k, 1) = x_1^k$ при $k=0, 1, \dots, K$.
 б) Покажите, что $g(0, n) = 1$ при $n=0, 1, \dots, N$.
 в) Покажите, что $g(k, n) = g(k, n-1) + x_n g(k-1, n)$ при $n \geq 1$ и $k \geq 0$.
 г) Итеративный алгоритм, определенный в пп. а—в, производит последовательность $G(0), G(1), \dots, G(K)$. Покажите, что алгоритм требует NK умножений и NK сложений, если задано x_i ($i=1, 2, \dots, N$).

- 4.37. Рассмотрите модель с центральным обслуживающим прибором. Известно, что

$$A_1 \mu_1 p_1 = A_i \mu_i, \quad i \geq 2.$$

Пусть $A_i^{(j)}$ — стационарная вероятность того, что в i -м узле обслуживания имеются j или более требований. Тогда

$$A_i^{(0)} = 1, \quad A_i^{(1)} = A_i.$$

- а) Найдите $A_1^{(0)}$.
 б) Найдите $A_i^{(j)}$ ($i=2, 3, \dots, N$) в зависимости от $A_1^{(j)}$.
 Пусть Q_i — среднее число требований в i -м узле.
 в) Найдите Q_1 в зависимости от $A_1^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, K$).
 г) Найдите Q_1 в зависимости от $G(k)$ ($k=0, 1, \dots, K$).
 д) Найдите Q_i в зависимости от $A_i^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, K$) ($i \geq 2$).
 е) Найдите Q_i в зависимости от $G(k)$ ($k=0, 1, \dots, K$) ($i \geq 2$).

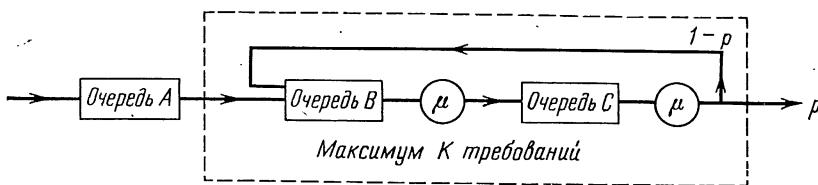
- 4.38. Рассмотрите обобщение модели мультипрограммирования, обсуждавшееся в конце разд. 4.13. Пусть как ЦП, так и БПД характеризуются показательным распределением времени обслуживания.

- а) Найдите s_0 .
 б) Определите $F(0)$ из равенства (4.105), используя это обобщение.
 в) Рассмотрите двухузловую замкнутую сеть при помощи модели сети массового обслуживания и сравните $F(0)$ с результатом п. б.

- 4.39. Рассмотрите систему M/M/1 с параметрами λ и μ . Уходящее требование в действительности покидает систему с вероятностью $(1-\alpha)$ и возвращается в хвост очереди с вероятностью $\alpha < 1$. Однако после возвращения оно магически превращается в N требований. Пусть $p_k = P$ [система содержит k требований].

- а) Пусть $N=1$. Найдите в явном виде p_k . Каково условие существования установившегося режима?
 б) Пусть $N=2$. Найдите в явном виде p_k . Каково условие существования установившегося режима?
 в) Пусть $N=3$. Найдите в явном виде p_k . Каково условие существования установившегося режима?

- 4.40. Рассмотрите сеть массового обслуживания, показанную ниже.



Поступление требований описывается пуассоновским потоком с интенсивностью λ . При поступлении требование проходит в блок, выделенный штриховой линией, если число требований в этом блоке меньше K ; в противном случае оно становится в очередь A типа ОПП, из головы которой требования поступают в штриховой блок, как только число требований в нем становится меньше K . Поступив в штриховой блок, требование становится в очередь B типа ОПП и со временем получает обслуживание в приборе с показательным распределением времени обслуживания и интенсивностью μ . Затем оно переходит в очередь C и обслуживается независимым прибором с показательным временем обслуживания такой же интенсивности μ . После этого требование покидает штриховой блок (и систему) с вероятностью p или возвращается в очередь B с вероятностью $1-p$ и т. д. Предполагается, что в системе существует статистическое равновесие.

- a) Пусть $K=1$. Это знакомый частный случай.
- 1) Найдите выражение для $\beta(x)$, которое определяется как ПРВ времени пребывания требования в блоке, выделенном штриховой линией.
 - 2) Используя функцию моментов $\beta(x)$, найдите среднее число \bar{N} требований во всей системе (очередь A плюс штриховой блок).
 - 3) Используя результат 2, найдите среднее время T_1 пребывания требования во всей системе.
- б) Пусть $K=\infty$. Это другой знакомый частный случай.
- 1) Найдите $P(k)=P[k \text{ требований во всей системе}]$.
 - 2) Найдите среднее время T_∞ пребывания требования во всей системе.
- в) Найдите условия стационарности в случаях а и б.
- г) Для общей области стационарности докажите, что $T_1 \geq T_\infty$.

- 4.41. Рассмотрите марковскую сеть массового обслуживания с N узлами и переходной матрицей ($i, j = 1, 2, \dots, N$)

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1-\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 1-\alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N-1} & 0 & 0 & 0 & & 1-\alpha_{N-1} \\ \alpha_N & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix},$$

где $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Пусть внешний входящий трафик равен $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, N$).

- Найдите трафик узла λ_i в явном виде для $i = 1, 2, \dots, N$.
- Какой должна быть λ_N при $\alpha_N = 0$ (по физическим соображениям)?
- Используя результат б, найдите простую зависимость между членами выражения для λ_N из п. а и с ее помощью упростите ответ для всех λ_i из п. а.
- Пусть μ_i — интенсивность обслуживания в каждом (однолинейном) узле. Какая зависимость должна существовать между $\{\mu_i\}$, чтобы все обслуживающие приборы имели один и тот же показатель использования?
- Предполагается, что сеть преобразована в замкнутую путем замены последней строки матрицы R на

$$[\alpha_N \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{N-1}].$$

- Найдите сумму членов первого столбца.
- Найдите единственное разумное значение γ .
- Установите зависимость между относительными числами посещений и требованиями каждого узла?

- 4.42. Рассмотрите модель Гейвера (описывающую доступ удаленного терминала) с M входными терминалами и одним диалоговым терминалом. Пусть $f(x)$ есть ПРВ [с преобразованием Лапласа $F^*(s)$], связанная с временем цикла $C(j)$.
- Покажите, что число циклов K , определенное в тексте, имеет геометрическое распределение

$$P[K=k] = (1-\sigma)\sigma^{k-1},$$

где

$$\sigma = \int_0^\infty e^{-\beta x} f(x) dx.$$

- Покажите, что

$$E[e^{-sC'}] = \frac{F^*(s) - F^*(s + \beta)}{1 - F^*(s + \beta)}.$$

- в) Используя результат б), найдите \bar{C}' и $\sigma_{C'}^2$.
- г) Используя предположение о показательном распределении времени передачи (среднее значение $1/\gamma$), получите $F^*(s)$ в явном виде, а затем найдите выражения для \bar{C}' и $\sigma_{C'}^2$, приведенные в тексте.
- 4.43.** Сравните средние задержки в равенствах (4.120) и (4.121) при $M=r=1$.
- 4.44.** Рассмотрите систему, для которой решение дается равенствами (4.116), (4.117). Пусть N_n — число единиц данных в очереди в момент перед началом n -го временного окна, а v_n — число единиц данных, поступающих в течение n -го временного окна.
- Запишите основное соотношение между N_{n+1} , N_n и v_n .
 - Пусть $N_n(z)=E[z^{N_n}]$ и $V_n(z)=E[z^{v_n}]$, а также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(z) = N(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(z) = V(z).$$

Докажите, что

$$N(z) = (1 - \lambda) \frac{(z - 1)V(z)}{z - V(z)}.$$

- в) Используя результат б), докажите справедливость (4.116).
- г) Используя результат б), докажите справедливость (4.117).
- 4.45.** Рассмотрите вероятности $\{p_k\}$, определенные равенствами (4.122) — (4.124).
- Найдите a — интенсивность ухода единиц данных из буферной памяти (не учитывая уходов за счет переполнения).
 - Определите P_{of} в зависимости от λ и a .
 - Рассмотрите новые единицы данных, поступающие от сложного пуассоновского источника, т. е. групповые поступления из пуассоновского источника (со средним значением λ групп на временноное окно), причем размеры групп описываются геометрическим распределением со средним значением $1/\beta$.
 - Найдите производящую функцию числа единиц данных, поступающих в течение временного окна.
 - Найдите π_k — функцию, обратную производящей функции п. 1.
- 4.46.** Рассмотрите множество блоков данных B_1, B_2, \dots, B_N , которые упорядочены в виде последовательности (списка) блоков в памяти ЭВМ. Иначе говоря, первый блок данных содержит указатель адреса второго блока, который в свою очередь содержит указатель третьего блока и т. д. Предпо-

лагается, что независимые обращения к памяти за блоками данных происходят так, что

$$p_i \Delta P \text{ [следующее обращение к } B_i] > 0.$$

При обращении за блоком B_i осуществляется последовательный поиск, пока этот блок не будет найден. Если положение блоков в начале поиска B_i имеет вид

$$[B_{a_1}, B_{a_2}, \dots, B_{a_{n-1}}, B_{a_n}, B_{a_{n+1}}, \dots, B_{a_N}],$$

где $a_n = i$, то после того, как этот блок будет найден, последовательность упорядочивается таким образом, что в голове списка оказывается B_i , т. е. $[B_i, B_{a_1}, B_{a_2}, \dots, B_{a_{n-1}}, B_{a_{n+1}}, \dots, B_{a_N}]$. Всего требуется найти n блоков.

а) При $j \neq i$ найдите

$$p_{ij}^{(N)} = P \text{ [обращение к } B_j \text{ требуется по крайней мере один раз между последовательными обращениями к } B_i].$$

б) Пусть $E_i^{(N)} = E$ [число различных блоков, к которым обращаются между последовательными обращениями (например, к B_i), если всего имеется N блоков].

- 1) Найдите $E_i^{(2)}$ в зависимости от $p_{ij}^{(2)}$ ($j \neq i$).
- 2) Получите $E_i^{(3)}$ в зависимости от $p_{ij}^{(3)}$ ($j \neq i$).
- 3) Выразите $E_i^{(N)}$ через $p_{ij}^{(N)}$ ($j \neq i$).

в) Используя результаты пп. *а* и *б*, найдите

$$\bar{P}_i = E \text{ [расстояние до } B_i \text{ в числе блоков]}$$

в стационарном состоянии в зависимости от p_1, p_2, \dots, p_N .

- г)* С помощью результата *б* найдите среднее расстояние \bar{P} при поиске.
- д)* Лучший способ организации этого списка мог бы состоять в сохранении его неизменным и упорядоченным по убыванию p_i . В этом случае среднее расстояние при поиске будет равно \bar{Q} . Покажите, что $\bar{Q} \leq \bar{P} \leq 2\bar{Q} - 1$.

- 4.47.** Исследуйте систему коллективного пользования со случаем временем замены $\tilde{\theta}$, которое не зависит от времени обслуживания \tilde{x} . Сначала предположите, что имеется система $M/M/1$ с ОПП, интенсивностью входящего потока λ и средним временем обслуживания \tilde{x} . Однако из-за времени замены полное время обслуживания \tilde{y} не является показательным и определяется равенством $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{\theta}$. Пусть $\tilde{\theta}$ равномерно распределена в промежутке $(0, a)$.
- а)* Найдите ПРВ для \tilde{y} .

- б) Найдите (условное) среднее время ответа $T(x)$ в явном виде.

Пусть теперь обслуживание происходит по алгоритму разделения процессора с круговым опросом. Кроме того, предполагается, что если требование подключено (к главной памяти), оно не отключается до окончания обслуживания (т. е. на требование отводится только стоимость времени одной замены и, следовательно, время обслуживания требования равно \bar{y}). Пусть теперь $B(x)$ произвольно.

- в) Найдите $T(x)$.
- г) Найдите параметры системы, которые гарантируют, что безусловное среднее время ответа \bar{T} в системе п. в с круговым опросом меньше, чем в системе п. б с ОПП. Пусть теперь в n -е посещение обслуживающего прибора время замены $\bar{\theta}_n$ равно $a^{(1/2)^n}$ с вероятностью единица. Кроме того, предполагается, что рассматривается система разделения процессора с круговым опросом, в которой не дается дополнительного времени замены (кроме первого, $\bar{\theta}_1$), если требование застает систему пустой и покидает ее до того, как поступит новое требование; распределение времени обслуживания $B(x)$ произвольное.
- д) Получите среднее время замены $\bar{\theta}$ в явном виде в зависимости от a , x , λ и $B^*(s)$.
- е) Найдите зависимость между λ , \bar{x} и a , дающую установившийся режим.
- Наконец, рассмотрите алгоритм ОП с абсолютным приоритетом и показательным временем обслуживания (система $M/M/1$) без учета времени замены. Система может содержать самое большое два требования (самое новое — в обслуживающем приборе, а недавно удаленное из обслуживающего прибора по приоритетным соображениям — в очереди), любые другие требования теряются.
- ж) Найдите вероятность P того, что требование не будет потеряно.
- з) Для тех требований, которые не будут потеряны, найдите среднее время T пребывания в системе.

Глава 5

Сети ЭВМ; анализ и проектирование

В 60-х годах значительное развитие получили вычислительные системы коллективного пользования. К концу этого десятилетия стало ясно, что частные ресурсы и средства, находящиеся во многих отдельных вычислительных центрах, могли бы принести большую пользу при их коллективном использовании и совместном распределении нагрузки. (Этими ресурсами могут быть специализированная аппаратура, программное обеспечение и массивы данных.) В результате связь между ЭВМ, естественно, была предложена в качестве следующей фазы в развитии систем обработки информации; таким образом, 70-е годы являются десятилетием сетей ЭВМ.¹⁾

Структура и сложность этих сетей меняются в широком диапазоне: от узконаправленных, предназначенных для выполнения специальных задач в условиях, поддающихся тщательному управлению, до более общих, которые выполняют разнообразные задачи в весьма нерегламентированных условиях. Успехи и неудачи этих сетей с точки зрения экономичности, обслуживания, времени ответа, пропускной способности, надежности, показателя использования и удобства различны для разных сетей. В этой главе рассматриваются некоторые общие принципы проектирования сетей передачи данных, обсуждается опыт работы с одной из общих сетей (сетью ARPANET — экспериментальной сетью ЭВМ), приводятся хорошо разработанные теоретические концепции и, наконец, обсуждаются некоторые нерешенные задачи и требования, которые все еще существуют при проектировании сетей передачи данных.

Интерес к сетям ЭВМ за последние несколько лет сильно возрос, и сложность вопросов, которые встречаются при построении сетей, головокружительна. Приходится рассматривать самые разнообразные вопросы — от весьма специальных технических, математических и конструктивных вопросов проектирования (многие из которых находятся в пределах наших знаний) до чрезвычайно

¹⁾ Как указал Робертс [97], появление сложных сетей ЭВМ совпало с точкой пересечения (в 1969 г.), в которой стоимость распределяющих (коммутирующих) ресурсов впервые стала меньше, чем стоимость распределемых ресурсов связи. Таким образом, впервые высокоскоростные сети стали экономичны (фиг. 5.56). Это изменение в основном обусловлено резким снижением стоимости вычислительной техники.

сложных политических, правовых, социальных, финансовых, трудовых и этических вопросов, пронизывающих сегодняшнюю жизнь (большинство из которых далеко от полного понимания). Рост потребности в передаче данных происходит вследствие многообразия различных областей применений. Например, растущие потребности в дистанционной обработке данных (автоматической передаче фондов и др.) имеются в финансовых учреждениях, включая банки и страховые компании. В области медицины и здравоохранения требуются большие банки информации с дистанционным доступом. В сфере образования в последнее время появилась потребность в диалоговом взаимодействии с ЭВМ в отличие от обычного ввода данных, поиска и вывода. Крупные правительственные агентства предъявляют очень большие требования к обмену данными. Военно-тактические потребности в связи между ЭВМ, возможно, являются самыми большими (глобальными) и самыми требовательными (к секретности, скорости, надежности). Пункты розничной продажи с терминалами, которые требуют автоматической немедленной передачи разрешения на кредит и др., образуют быстрорастущую сферу применений. Поиск информации имеет сейчас большое значение для транспорта; регулирование нагрузки на дорогах является областью, которая в настоящее время быстро развивается. Большие корпорации сейчас обмениваются данными, хранят и обновляют их во многих своих центральных и региональных отделениях с помощью интегрированных ведомственных сетей передачи данных. Кроме того, имеются другие отрасли, проявляющие естественные потребности в сетях ЭВМ (например, системы резервирования для авиакомпаний, обслуживание через бюро путешествий, биржевые системы котировок и т. п.). Предсказывается широкое распространение средств доступа к системам обработки информации прямо из домов потребителей (для покупок, голосования, использования электронных кабинетных хранилищ файлов, заочного обучения и т. п.). Эти, а также многие другие применения стимулируют приток людских ресурсов, времени и денег в быстрорастущую технику обработки информации. По оценкам, в конце 1971 г. использовалась почти четверть миллиона терминалов. Еще большее впечатление производит число терминалов, предсказываемое к 1980 г.; оно составит примерно четыре-пять миллионов [23]. Речевой ввод и вывод с ограниченным множеством команд имеется уже сейчас; когда будет возможен речевой ввод и вывод с большим множеством команд, все устройства передачи речи смогут стать терминалами ЭВМ, так что образуется еще один снежный ком потребностей в дистанционной обработке данных. Аналогичный рост потребностей в дистанционной обработке данных происходит во многих индустриальных районах мира. Например, по оценкам [28, 87], трафик данных в 17 западноевропейских странах возрастет в шесть раз за период с 1972 по 1980 г.; к этому времени потребности оцениваются в

10^{12} бит/день. В этих же странах число терминалов увеличится с 80 000 в 1972 г. до примерно полумиллиона в 1980 г. (и до 800 000 в 1985 г.). Одним из главных эффектов больших сетей ЭВМ может стать значительное уменьшение огромного количества бумаг, которые сегодня порождаются и пересылаются самыми разными организациями.

В этой главе преследуются две цели. Во-первых, мы хотим познакомить читателя с описанием и функционированием сетей ЭВМ. (Естественно, что при этом особое внимание обращается на сеть ARPANET). Другие описания сетей можно найти в работах [3, 26]. Во-вторых, мы хотим построить математическую модель для описания функционирования подсети связи и затем провести анализ и эвристическую оптимизацию (т. е. проектирование) такой подсети. Кроме того, будут проведены анализ и оптимизация некоторых современных типов систем с коммутацией пакетов, работающих в радиодиапазоне. В следующей главе мы вернемся к первой из этих целей, сравним аналитические предсказания этой главы с действительными измерениями, опишем процедуры управления потоками в сети ARPANET, укажем неудачные места в протоколах и представим измерения избыточности и пропускной способности этой сети.

Важно подчеркнуть, что в рассматриваемой области произошел подлинный взрыв активности. Экспоненциально растет число различных симпозиумов и конференций, посвященных связи вычислительных машин; на них представляются сотни (или, возможно, тысячи) работ, публикуемых затем в литературе по сетям ЭВМ. Проектирование структуры сетей, измерение различных свойств сетей, анализ сложных системных моделей и построение новых сетей складываются в растущее здание знаний в области, которая все еще требует значительно больших исследований, направленных на понимание ее общих принципов. Поэтому вследствие значительного невежества в этой области, сочетаемого с быстрым ростом и острыми требованиями, задача написания глав, подобных этим двум, в некотором смысле невозможна. Каждая неделя приносит новые результаты, которые вносят важные изменения в наши знания; мы находимся в постоянной осадке от массы описаний и проектов сетей. С этими извинениями предлагается представленный здесь материал. Хочется надеяться, что новые формулируемые здесь общие принципы будут долговременными; возможно, один из наиболее устойчивых состоит в коллективном использовании ресурсов; он рассматривается в следующем разделе.

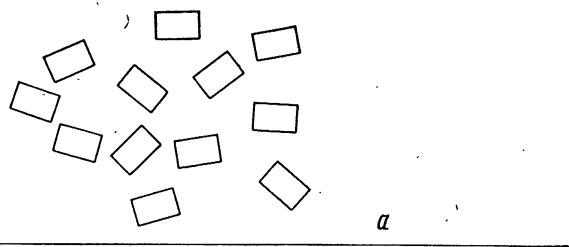
5.1. КОЛЛЕКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕСУРСОВ

Многие вопросы, возникающие при рассмотрении сетей ЭВМ, связаны с распределением ресурсов среди конкурирующих требований на эти ресурсы. Требования могут порождаться, например,

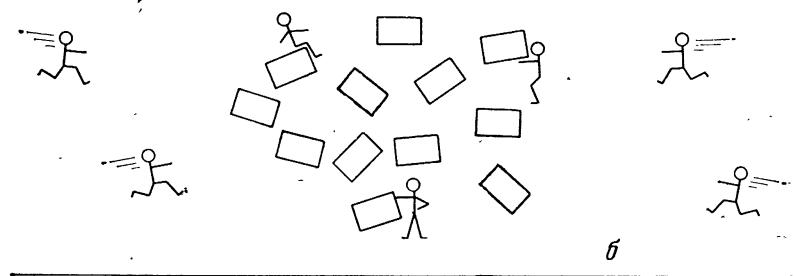
огромным числом терминалов, упомянутых во введении. Эти терминалы нуждаются в доступе к *ресурсам* разного рода, таким, как средства обработки, средства хранения и средства передачи. Методы распределения этих ресурсов, дающие возможность удовлетворить конкурирующие требования, являются одним из наиболее важных аспектов современного проектирования систем и их работы. Фактически распределение ресурсов составляет существо большинства технических (и нетехнических) задач, с которыми сталкиваются сегодня в индустрии обработки информации и вне ее. Эти задачи возникают в любых системах с *множественным доступом*, в которых непредсказуемыми являются как моменты поступления требований, так и размеры их заявок на ресурсы (как в гл. 4). Поэтому естественно начать рассмотрение сетей с общих принципов коллективного использования ресурсов.

Рассмотрим множество ресурсов, каждый из которых может выполнять работу с некоторой конечной скоростью (иными словами, ресурсы имеют конечную пропускную способность). Предположим, что имеется множество пользователей, которые некоторым случайным образом требуют от этих ресурсов выполнения определенной работы; другими словами, моменты появления этих требований и количество запрашиваемой каждым требованием работы (объем требования) являются величинами непредсказуемыми и, возможно, различными для разных пользователей. При этом сразу же возникает задача эффективного и продуктивного распределения ресурсов по требованиям, так как качество обслуживания пользователей является важным в силу того, что, кроме всего прочего, использование ресурсов связано с некоторыми затратами капитала. Можно представить себе целый ряд способов такого распределения ресурсов, некоторые из которых абсолютно неприемлемы. Например, если объединить ресурсы в один общий пул и разрешить пользователям брать их без всяких ограничений, то может произойти чрезвычайно несправедливое распределение и по существу не будет какого-либо коллективного использования ресурсов. Эта ситуация иллюстрируется на фиг. 5.1, где показаны набор ресурсов, изображенных в виде прямоугольников (a), нерегулируемый доступ к этим ресурсам со стороны множества пользователей (б) и неприятности, возникающие при такой процедуре (в).

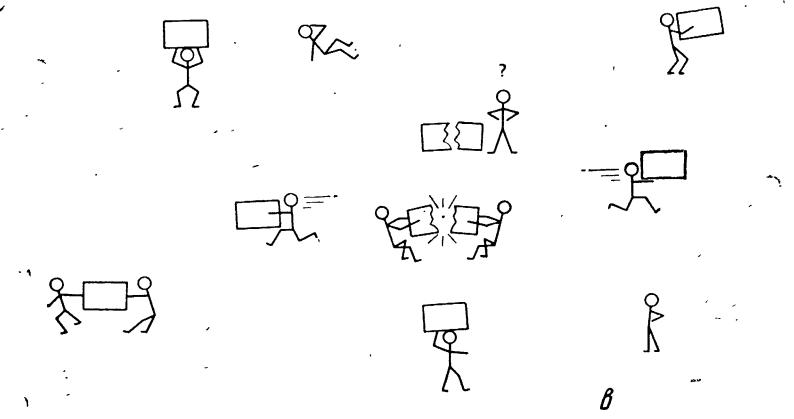
В противоположность такому нерегулируемому доступу можно рассмотреть доведенное до крайности регулируемое распределение ресурсов, которое показано на фиг. 5.2. Здесь за каждым возможным пользователем закрепляется отдельный ресурс и, таким образом, получается совокупность частных систем. При этом устраняется всякая конкуренция за ресурсы между пользователями и гарантируется наилучший уровень обслуживания для каждого из них. К сожалению, такой метод распределения является очень



а

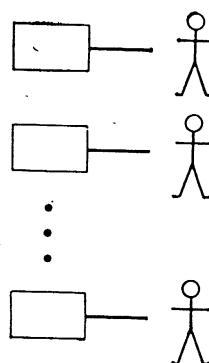


б



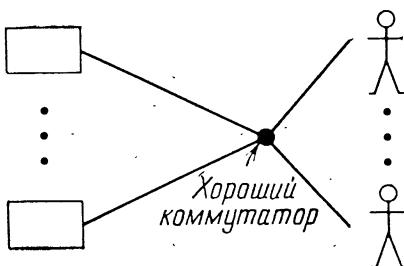
в

Фиг. 5.1. Коллективное ли это использование ресурсов?
а — ресурсы; б — распределение; в — возникающие неприятности.



Фиг. 5.2. Частные системы.

дорогим по двум причинам: во-первых, при этом ресурс остается закрепленным за пользователем даже в течение интервалов, когда он в нем не нуждается, и, во-вторых, не используется преимущество «ущенивания», возможное при покупке большого числа ресурсов. Рассмотрим более подробно первую из этих причин. Как показывают, в частности, измерения, проведенные Фучсом, Джексоном и Стаббсом [45, 59], для поведения пользователей, требующих доступа к вычислительной технике, характерно ярко выраженное группирование нагрузки; типичный пользователь редко выходит с требованием, но если уж он это делает, то требует «широкой полосы» как в смысле передачи, так и в смысле обработки. Например, их измерения показывают, что линия связи от одного терминала к вычислительной системе в среднем использовалась не более 5% всего времени. Ясно, что невыгодно закреплять высокоскоростной ресурс за одним таким пользователем на все время, но вместе с тем закрепление ресурса с меньшей пропускной способностью не соответствовало бы потребностям пользователя в те периоды, когда они возникают. Очевидное решение этой дилеммы состоит в организации *пула* ресурсов, коллективно используемого многими пользователями. При соответствующей организации пул даст эффективное средство, удовлетворяющее нуждам трафика с группирующейся нагрузкой. Одной из целей этой главы является демонстрация такого подхода и выявление выигрыша, который получается, когда пропускная способность ресурсов увеличивается для удовлетворения возрастающего числа пользователей. Природа этого выигрыша аналогична природе закона больших чисел [71, 74]. Согласно этому закону, совокупное требование большого числа случайных пользователей весьма точно аппроксимируется суммой *средних* требований, порождаемых этими пользователями. Иначе говоря, статистические флуктуации в каких-либо индиви-



Фиг. 5.3. Система коллективного пользования.

дуальных требованиях в случае большого числа пользователей сглаживаются, так что совокупный процесс требований становится более детерминированным (т. е. более предсказуемым). Конечно, это явление неоднократно и с пользой использовалось раньше. Понятно, наиболее существенное применение оно получило в деле страхования жизни, где очень точные оценки интенсивности смерти в большом обществе могут быть использованы для того, чтобы точно подсчитать стоимость страхования жизни отдельных личностей; риск, на который идут страховочные компании, фактически очень мал.

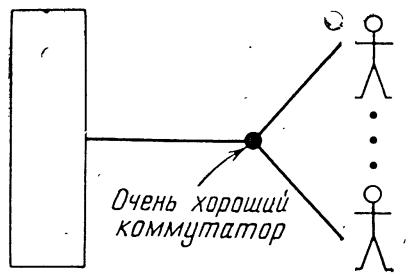
Рассмотрим теперь третий метод распределения, при котором имеется пул ресурсов и каждый ресурс закрепляется за пользователем *только на время, которое ему требуется для использования ресурса*; это показано на фиг. 5.3. Здесь изображен (хороший) коммутатор, который распределяет ресурсы по требованиям (подобно тому, как это делается в телефонной системе). Однако отметим, что в системе на фиг. 5.3 имеется еще недостаток, состоящий в том, что, когда требуют доступа лишь несколько пользователей, оставшиеся ресурсы не используются; хотелось бы, чтобы эти ресурсы были включены в работу. При этом образуется единая большая система коллективного пользования, показанная на фиг. 5.4. В этой системе *весь* ресурс целиком может быть использован тем множеством пользователей, которые их требуют в настоящий момент. Например, если один пользователь требует доступа, он может использовать всю пропускную способность, а если в доступе нуждается более чем один пользователь, то полная пропускная способность распределяется между ними согласно некоторому правилу (например, в соответствии с распределительными алгоритмами, рассмотренными в гл. 4). Такой подход устраняет бесполезную растрату ресурсов, из-за их простоя в тех случаях, когда для них имеется какая-то работа, и, кроме того, при этом появляется потенциальная возможность получения выигрыша вследствие уценивания при покупке одним пользователем

телем большой системы (имеется в виду общеизвестная оптовая скидка, вводимая при продаже оптом).

Во всех этих системах требуется, конечно, чтобы интенсивность, с которой пользователи направляют свои требования на работу ресурсов, в среднем была меньше, чем совокупная скорость выполнения работы системой. Указанные большие системы коллективного пользования выступают в различных формах и в сетях, использующих ЭВМ. К таким системам относятся система коммутации каналов, система уплотнения, система коммутации сообщений, система передачи с промежуточным хранением, система коммутации пакетов и др. Именно эти системы будут описаны в этой главе.

Рассмотрим теперь количественные меры выигрышей, которые получаются при коллективном использовании больших ресурсов большим числом пользователей. Выигрыши, которые здесь обсуждаются, образуются не за счет экономии или потерь, обусловленных скидкой при аренде и эксплуатации больших систем или уходе за ними, а за счет статистической природы требований. Мы сознательно опускаем детальное рассмотрение этих важных факторов, так как хотим исключить влияние скидки на характеристики системы.

Последующие результаты могут быть использованы при создании операционных систем ЭВМ, проектировании сетей с терминалами и сетей ЭВМ. В операционных системах стараются добиться хороших характеристик коллективного использования пользователями центрального процессора, оперативной памяти, дополнительных запоминающих устройств, печатающих устройств, графопостроителей, считывающих устройств, перфорирующих устройств, терминалов и других устройств, подобных рассмотренным в гл. 4. В сетях с терминалами стараются добиться эффективного коллективного использования средств передачи данных между терминалами и основными средствами обработки данных. При данном рассмотрении сетей ЭВМ интерес представляет как коллективное использование географически разнесенных средств обработки дан-



Фиг. 5.4. Большая система коллективного пользования.

ных, так и передача данных, которая требуется для связи между самими средствами обработки и между ними и терминалами.

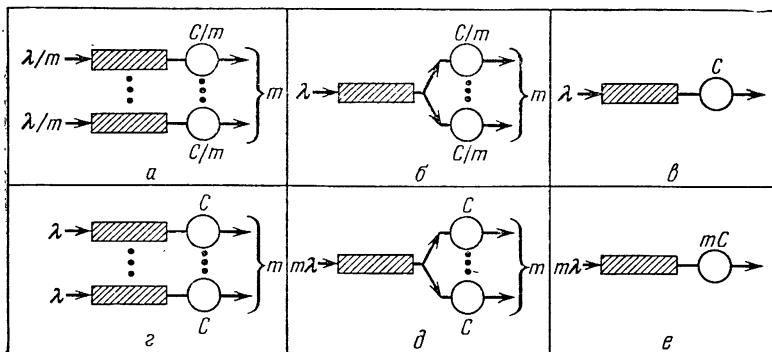
К основным параметрам любой системы коллективного использования ресурсов относятся следующие:

- 1) время ответа системы, или задержка;
- 2) производительность системы;
- 3) пропускная способность ресурса;
- 4) показатель использования ресурса.

Ниже предполагается, что имеется поток требований к ресурсу системы на выполнение работы, причем каждое из них требует некоторое число операций от ресурса. Обозначим через C пропускную способность ресурса в операциях на секунду. Рассмотрим обычную ситуацию, когда ожидающие задания на работу стоят в очереди. Далее, пусть $1/\mu$ обозначает среднее число операций, необходимых для выполнения задания¹⁾. Таким образом, среднее число секунд, требуемых заданием от ресурса, равно $1/\mu C$. Обозначим через λ среднее число заданий в секунду, поступающих к ресурсу. Как обычно, время ответа системы равно времени между моментом поступления задания и моментом полного выполнения этого задания; оно обозначается через T . Среднее время ожидания для задания [время ответа минус время обработки (выполнения) задания] обозначается через W ; как обычно, $T = W + 1/\mu C$. Предположим, что используется дисциплина обслуживания очереди в порядке поступления. Для ресурса с пропускной способностью C , на который поступают задания с (входной) интенсивностью λ заданий в секунду, требующие в среднем $1/\mu$ операций, показатель использования ресурса $\rho = \lambda/\mu C$.

Для нас представляют интерес обменные соотношения между временем ответа T , производительностью λ , показателем использования ресурса ρ и пропускной способностью системы C . На соотношение между этими параметрами существенно влияет структура системы; наша цель — продемонстрировать, что простейшая из всех структур часто оказывается наилучшей. Мы покажем также, что большие системы имеют характеристики, значительно лучшие по сравнению с малыми системами. Предположим, что рассматривается работа некоторой системы, причем среднее время ответа T для нее больше, чем требуется. Имеются некоторые возможности изменения параметров системы, приводящие к снижению T . Если, например, уменьшить показатель использования системы ρ либо путем увеличения пропускной способности системы C , либо путем снижения производительности системы λ , то при этом уменьшится T . Этот подход менее чем удовлетворительный, так как за уменьшение T приходится расплачиваться увеличением стоимости системы (которая растет вместе с C) или снижением

¹⁾ В этой главе используется определение $1/\mu$, отличное от применяемого ранее, для того чтобы ввести пропускную способность процессора (или канала) C .



Фиг. 5.5. Эволюция структур СМО.

производительности системы λ ; с уменьшением ρ снижается эффективность системы. Вместе с тем (что не очень широко известно) уменьшение T можно получить при *постоянном* ρ путем увеличения в одно и то же число раз как производительности λ , так и пропускной способности C . Получающийся при этом обмен будет таким же, как и при увеличении производительности системы. Если увеличить λ , то в результате T увеличится. Однако можно добиться постоянства T при увеличении как λ , так и ρ , если разрешить C возрастать медленнее, чем λ . Эти свойства, а также очевидные и, важные обменные соотношения между параметрами рассматриваются ниже.

Исследуем теперь некоторые возможные структуры распределения ресурса и его коллективного использования. Эти структуры отличаются от тех, которые показаны на фиг. 5.1—5.4, тем, что в них явно включены очереди. Рассмотрим сначала совокупность m ресурсов, каждый из которых имеет пропускную способность C/m . На каждый из этих ресурсов поступает поток заданий на выполнение работы с интенсивностью потока λ/m . Такая структура показана на фиг. 5.5, *a*; она представляет собой набор m систем массового обслуживания $G/G/1$ с суммарной пропускной способностью C . Интуиция подсказывает, что эта система не эффективна, так как задания могут выстраиваться в очередь перед одним из ресурсов, в то время как какой-то другой ресурс будет простаивать. В этой связи рассмотрим фиг. 5.5, *b*, где имеется одна очередь ко всему набору m ресурсов с суммарной интенсивностью λ . Это система $G/G/m$. В этом случае ожидается более эффективная работа, так как задание не будет находиться в состоянии ожидания, если свободен какой-либо ресурс. Заметим, что обе конфигурации обладают одним и тем же показателем использования $\rho = \lambda/mC$. Для фиг. 5.5, *b* величина ρ может быть интерпретирована как математическое ожидание доли занятых ресурсов [см. формулу (1.27)]. Эта структура с единой очередью обес-

печивает также то, что требования будут обслуживаться согласно дисциплине ОПП; на фиг. 5.5, а это не обязательно. Многие банки приняли эту процедуру, к всеобщему удовольствию клиентов. В то время как система с единой очередью более эффективна, чем система с m разделенными средствами, все же остается некоторая нерациональность, когда очередь отсутствует, но не все ресурсы заняты, как на фиг. 5.3. В этом случае некоторые ресурсы остаются свободными и их мощности не используются для ускорения работы остальных занятых ресурсов. Чтобы преодолеть эту нерациональность, рассмотрим фиг. 5.5, в, где объединен как поток заданий, так и ресурсы; это система G/G/1 с интенсивностью потока на входе λ и пропускной способностью ресурса C (как на фиг. 5.4). На фиг. 5.5, г показан набор m таких систем с единым ресурсом; эта структура подобна показанной на фиг. 5.5, а, но теперь каждый ресурс получает поток в m раз большей интенсивности и обладает в m раз большей пропускной способностью. Такая система может выполнять больше заданий в секунду. Мы совершили полный цикл и вновь пришли к неэффективной системе, изображенной на фиг. 5.5, а. Теперь естественно рассмотреть систему, показанную на фиг. 5.5, д, в которой имеется объединенный поток заданий с интенсивностью $m\lambda$. На фиг. 5.5, е представлена лучшая система с объединенной очередью и объединенными ресурсами. Отличие двух систем с одним ресурсом (системы на фиг. 5.5, в, и системы на фиг. 5.5, е) состоит в том, что в последней интенсивность на входе и пропускная способность умножены на m при неизменном показателе использования $\rho = \lambda/\mu C$. Все шесть показанных систем имеют одно и то же значение ρ , но последняя из них часто оказывается лучше, чем остальные (потому что она обладает меньшим временем ответа T). Если продолжить увеличение входной интенсивности и пропускной способности, то можно добиться еще большего улучшения. Оценим теперь численно эти улучшения. Начнем с рассмотрения систем M/M/m, а затем перейдем к системе G/G/m.

Для системы M/M/m, показанной на фиг. 5.5, б, результаты разд. 1.5 при $\rho = \lambda/\mu C$ дают вероятность p_k того, что система содержит k заданий (включая как задания, стоящие в очереди, так и задания, находящиеся в процессе выполнения) в виде

$$p_k = \begin{cases} \frac{p_0(m\rho)^k}{k!}, & k \leq m, \\ \frac{p_0\rho^k m^m}{m!}, & k \geq m, \end{cases}$$

где

$$p_0 = \left[\frac{(m\rho)^m}{(1-\rho)m!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} \right]^{-1}$$

Пользуясь этими основными стационарными вероятностями, можно легко найти среднее время ответа:

$$T = \frac{m}{\mu C} + \frac{P_m}{\mu C(1-\rho)}, \quad ■ (5.1)$$

где P_m — вероятность того, что система содержит m или более заданий; она выражается в виде

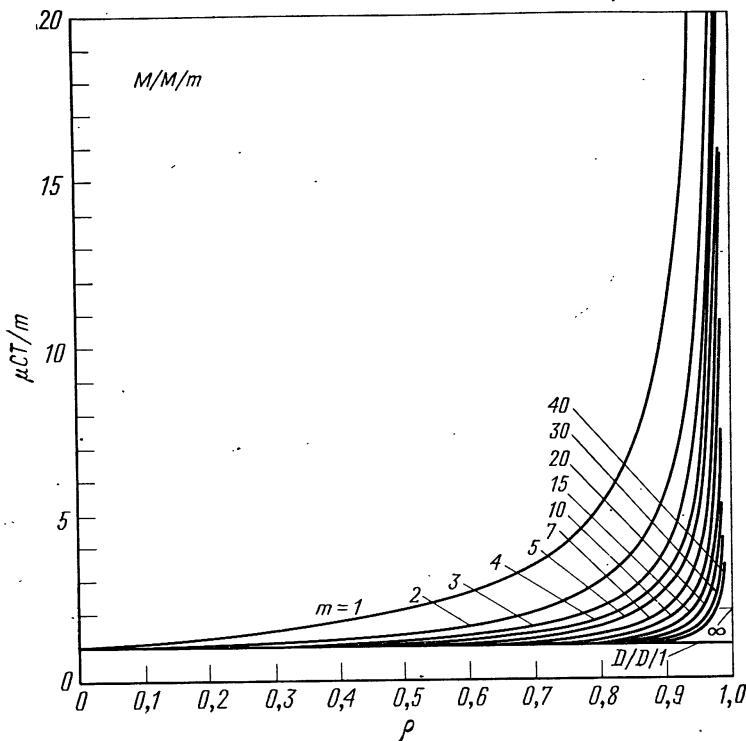
$$P_m = \frac{p_0(m\rho)^m}{(1-\rho)m!}.$$

С помощью этих равенств можно найти связь между T , λ , C , ρ и m . В частности, как было показано автором [63, теорема 4.2], значение m , которое минимизирует T при постоянном ρ , равно $m=1$ (см. задачу 5.9). Кроме того, было найдено, что T можно уменьшить при постоянном ρ , увеличивая λ и C . (Результаты, аналогичные этим, обсуждаются также в работах [32, 84].) Существует много способов демонстрации обменного соотношения, некоторые из которых будут представлены ниже.

По-видимому, наиболее убедительный эффект, связанный с большими системами, демонстрируется на фиг. 5.6, где показано нормированное среднее время ответа:

$$\frac{\mu CT}{m} = 1 + \frac{P_m}{m(1-\rho)}.$$

Нормировка дает среднее время обслуживания задания в одном из m приборов; она устраняет из выражения все параметры, оставляя лишь m и ρ ($\rho=\lambda/\mu C$). Из фиг. 5.6 видно, что все кривые проходят через точку 1 при $\rho=0$, так как в этой точке $P_m=0$ ($m=1, 2, \dots$). С ростом m при заданном значении ρ нормированная задержка очень быстро убывает и при $m \rightarrow \infty$ кривые стремятся к кривой, описывающей чисто детерминированную систему D/D/1, в которой очереди не образуются, если значение $\rho=1$ не превышается. Эти графики, однако, не позволяют достаточно объективно сравнивать различные структуры, представленные на фиг. 5.5, так как не удается увидеть поведение системы при изменениях λ и C . Последнее, очевидно, обусловлено тем, что была проведена нормировка времени ответа и поэтому произошла потеря существенного параметра характеристики системы. Если вернуться опять к равенству (5.1), то можно увидеть, каким образом время ответа зависит от среднего времени обслуживания $m/\mu C$. На фиг. 5.7 функция (5.1) показана при $\mu=\mu_0=1$ и $C=C_0=1$; таким образом, предполагается, что суммарная пропускная способность рассматриваемой системы $M/M/m$ удерживается постоянной $C_0=1$ и делится поровну между m ресурсами, как на фиг. 5.5, б. Из фиг. 5.7 видно, что система ведет себя диаметраль-

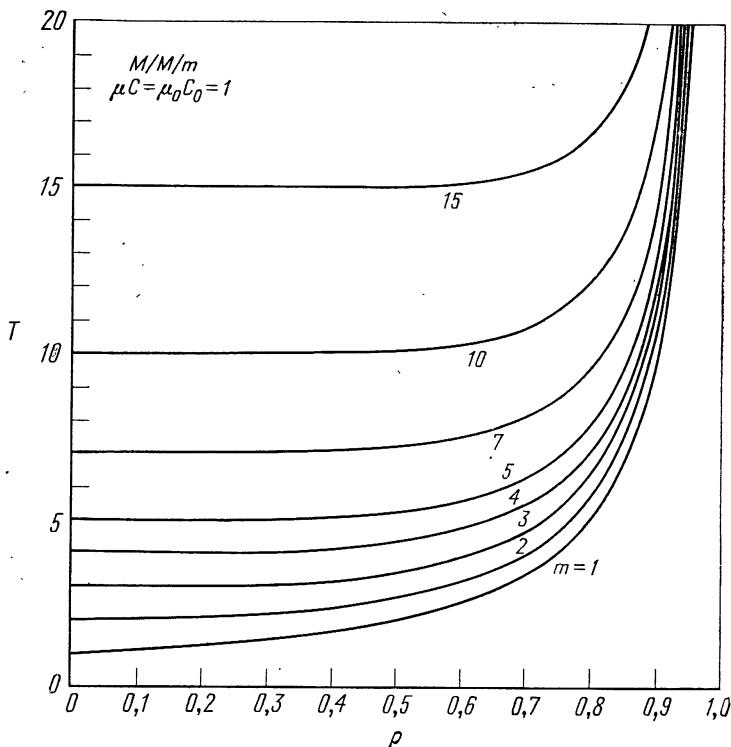


Фиг. 5.6. Нормированное среднее время ответа.

но противоположно по отношению к системе, представленной на фиг. 5.6, а именно время ответа возрастает с увеличением m при постоянном ρ . Это показывает, что система на фиг. 5.5, в лучше системы на фиг. 5.5, б. Так как μC на фиг. 5.7 постоянно, то, меняя λ , мы меняем ρ . Нужно поддерживать постоянным λ , а не μC . Имея это в виду, представим равенство (5.1) как

$$T = \frac{m\rho}{\lambda} + \frac{\rho P_m}{\lambda(1-\rho)}. \quad (5.2)$$

На фиг. 5.8 положено $\lambda = \lambda_0 = 0,8$ для того, чтобы допустить изменение ρ при изменении μC . Ясно, что кривая времени ответа теперь будет исходить из начала координат и опять имеет место увеличение времени ответа с ростом m при постоянном ρ . Это также показывает преимущество одного ресурса по сравнению с множеством отдельных ресурсов, обладающих заданной суммарной пропускной способностью.



Фиг. 5.7. Среднее время ответа при фиксированной пропускной способности.

Дадим теперь аналитическое описание результатов, представленных графически. Здесь удобно явно указать параметры, от которых зависит время ответа, и использовать запись $T = T(m, \lambda, C)$, где C опять обозначает полную пропускную способность системы с m ресурсами (ниже предполагается, что значение μ постоянно). Начнем опять с теоремы 4.2 из [63], которая дает следующий важный результат:

$$T(1, \lambda, C) \leq T(m, \lambda, C), \quad m=1, 2, 3, \dots \quad \blacksquare \quad (5.3)$$

Это соотношение показывает улучшение, которое достигается при использовании систем с объединенным ресурсом. Далее, так как P_m и ρ_0 зависят лишь от m и ρ (а не раздельно от λ и C), то из формул (5.1) и (5.2) видно, что умножение λ и C на одно и то же число (масштабное преобразование λ и C) приводит к уменьшению T , пропорциональному этому числу (масштабному коэффициенту), т. е. при $a > 0$

$$T(m, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} T(m, \lambda, C). \quad \blacksquare \quad (5.4)$$

Ясно, что аналогичное утверждение справедливо по отношению к среднему времени ожидания в очереди $W = W(m, \lambda, C)$, т. е.

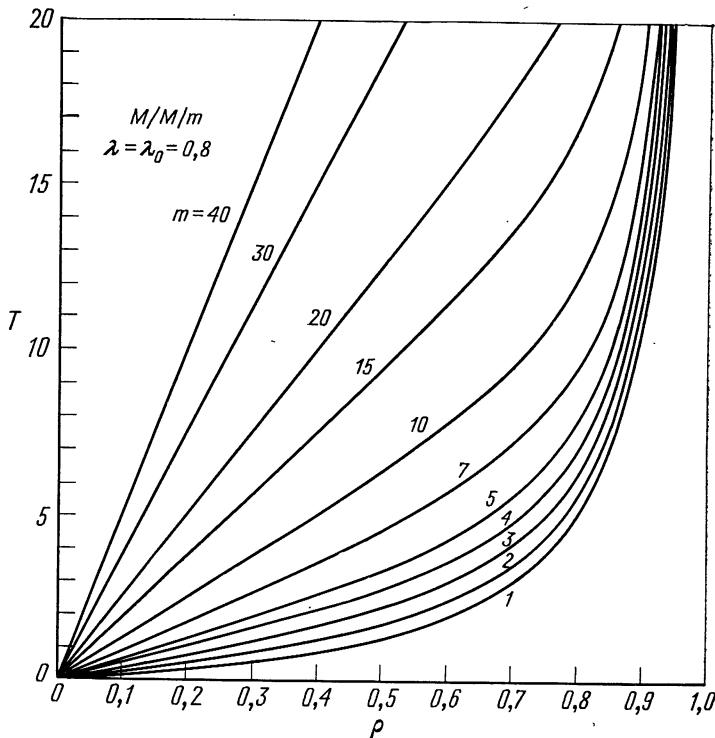
$$W(m, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} W(m, \lambda, C). \quad \blacksquare \quad (5.5)$$

Таким образом, еще раз показано, что при масштабном увеличении параметров системы получается значительный выигрыш. Этот вывод сделан автором в работе [63, разд. 4.3], в которой обобщен случай с одним обслуживающим прибором и получены следующие результаты:

$$T(1, a\lambda, bC) = \frac{1 - \rho}{b[1 - \rho(a/b)]} T(1, \lambda, C),$$

$$W(1, a\lambda, bC) = \frac{a(1 - \rho)}{b^2[1 - \rho(a/b)]} W(1, \lambda, C),$$

где $\rho = \lambda/\mu C$, а $a < \mu C b / \lambda$. Заметим, что при $a = b$ последние равенства сводятся к полученным ранее при $m = 1$. Хотя, как уже отмечалось, T и W меняются при умножении λ и C на масштаб-



Фиг. 5.8. Среднее время ответа при фиксированной интенсивности поступления требований.

ный коэффициент, с помощью результата Литтла и равенства (5.2) можно установить, что

$$\lambda T(m, \lambda, C) = \bar{N}(m, \lambda, C) = \bar{N}(m, a\lambda, aC) \quad \blacksquare \quad (5.6)$$

и

$$\lambda W(m, \lambda, C) = \bar{N}_q(m, \lambda, C) = \bar{N}_q(m, a\lambda, aC), \quad (5.7)$$

где \bar{N} и \bar{N}_q представляют собой среднее число заданий в системе и среднее число заданий в очереди соответственно. Равенства (5.6) и (5.7) показывают, что эти величины не зависят от масштабного коэффициента и остаются постоянными при любом заданном значении ρ .

Равенства (5.5) и (5.7) дают соответствующие результаты для W , подобно тому как равенства (5.4) и (5.6) дают результаты для T . Найдем теперь соотношение для W , аналогичное неравенству (5.3). Сначала заметим, что из (5.1) следует

$$W(m, \lambda, C) = \frac{P_m}{\mu C(1 - \rho)}.$$

Интересно выяснить, как ведет себя W при изменении m . Эта зависимость содержится в выражении для P_m , которое дает вероятность того, что система $M/M/m$ содержит m или более заданий, т. е.

$$P_m = \sum_{k=m}^{\infty} p_k.$$

Как известно, ρ представляет собой среднюю долю занятых ресурсов; это можно выразить в виде

$$\rho = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k}{m} p_k + \sum_{k=m}^{\infty} p_k.$$

В силу того что первая из этих двух сумм должна быть неотрицательной, получаем

$$\rho \geq P_m.$$

Кроме того, известно, что для системы $M/M/1$ с одним ресурсом

$$W(1, \lambda, C) = \frac{\rho}{\mu C(1 - \rho)}.$$

Из двух последних соотношений и выражения для $W(m, \lambda, C)$ получаем искомый результат:

$$W(1, \lambda, C) \geq W(m, \lambda, C), \quad m=1, 2, 3, \dots. \quad \blacksquare \quad (5.8)$$

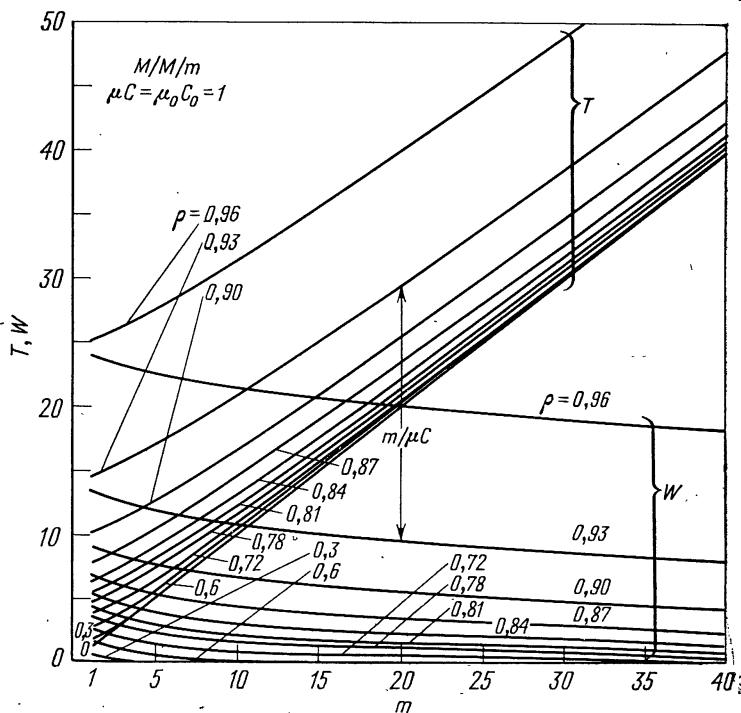
Отсюда следует, что среднее время ожидания в системе $M/M/m$ уменьшается с ростом m , тогда как среднее время ответа увеличивается.

чивается с ростом m . Это можно увидеть на фиг. 5.9, где величины T и W графически представлены как функции m при постоянных ρ и μ . Заметим, что $T(m, \lambda, C) - W(m, \lambda, C) = m/\mu C$, как указано на фигуре. Таким образом, если за основную характеристику системы взять среднее время ожидания в очереди, а не среднее время ответа, то системы с разделенным ресурсом будут лучше. В рассматриваемых системах телемеханики основной характеристикой будем считать полное время ответа, поэтому более предпочтительны системы с объединенным ресурсом.

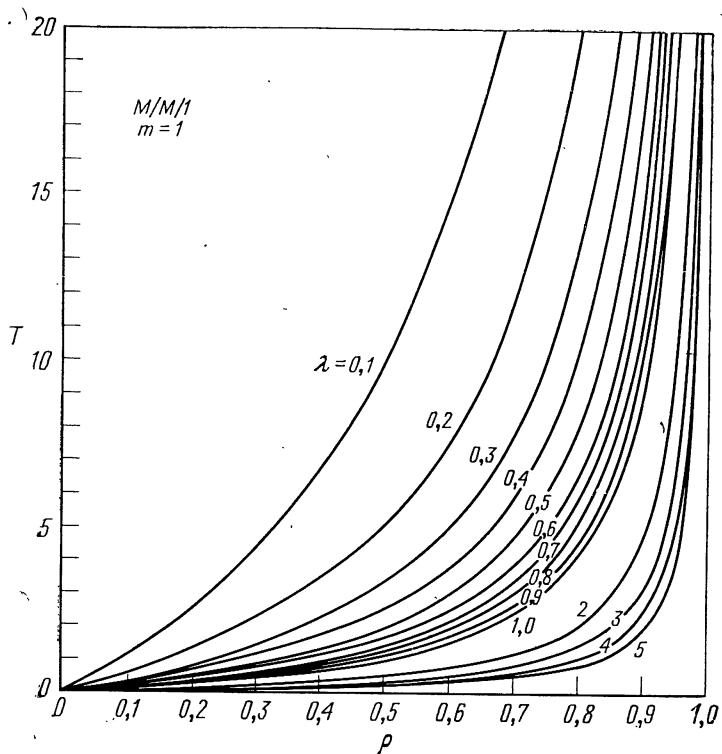
Улучшения системы можно продемонстрировать еще другим способом, если сосредоточить внимание на системе с одним ресурсом $M/M/1$. Например, на фиг. 5.10 показано влияние роста λ на среднее время ответа при $m=1$; соответствующее этому случаю выражение для T имеет вид

$$T = \frac{\rho/\lambda}{1-\rho}.$$

При постоянном ρ задержка уменьшается при увеличении λ (и, следовательно, C). Действительно, можно заметить, что среднее



Фиг. 5.9. Среднее время ответа и среднее время ожидания при постоянных нагрузках.



Фиг. 5.10. Среднее время ответа для различных входных интенсивностей при $m=1$.

время ответа уменьшается в 50 раз при переходе от $\lambda=0,1$ к $\lambda=5$ [это можно установить также с помощью формулы (5.4)]. На фиг. 5.11 показано улучшение эффективности системы (т. е. увеличение показателя использования) с ростом масштабного коэффициента при постоянном среднем времени ответа. Представленная здесь функция является решением последнего уравнения относительно ρ , т. е.

$$\rho = \frac{\lambda T}{1 + \lambda T}.$$

Таким образом, для системы $M/M/m$ показано, что большие системы (которые получаются при одновременном масштабном увеличении входной интенсивности и пропускной способности системы) дают выигрыш в среднем времени ответа, который пропорционален масштабному коэффициенту. При заданном масштабном коэффициенте система с единым ресурсом лучше, чем система с разделенным ресурсом.

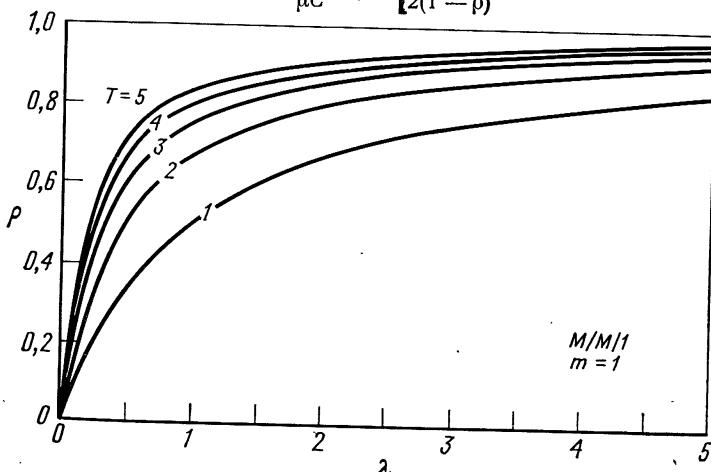
Вычислительные системы редко допускают такое простое статистическое описание, которое выше использовалось для системы M/M/m. Рассмотрим поэтому более общую систему G/G/m и получим обменные соотношения, подобные тем, которые найдены выше. Лучшее, что можно предложить в этом случае, — это использовать известные границы для характеристики системы, но даже с их помощью удастся установить, что поведение этой системы отлично от поведения системы, рассмотренной выше.

Начнем с системы G/G/1, имеющей один обслуживающий прибор. Опять будем считать, что средняя интенсивность поступления заданий равна λ , а дисперсия интервалов между моментами поступления заданий равна σ_a^2 . Обозначим, как и ранее, среднее число операций на одно задание через $1/\mu$, а дисперсию — через σ_p^2 . Предполагается, что имеющийся ресурс (процессор) имеет пропускную способность C , выраженную в числе операций за секунду. Таким образом, среднее время выполнения заданий опять дается равенством $\bar{x} = 1/\mu C$, а дисперсия равна σ_b^2 , где $\sigma_b^2 = \sigma_p^2/C^2$; также имеем $\bar{x}^2 = \sigma_b^2 + 1/\mu^2 C^2$. Для времени между моментами поступления заданий квадрат коэффициента изменчивости получается в виде $C_a^2 = \lambda^2 \sigma_a^2$. Для времени выполнения задания соответствующая величина равна

$$C_p^2 = \mu^2 C^2 \sigma_b^2 = \mu^2 \sigma_p^2 = C_p^2,$$

где C_p^2 — квадрат коэффициента изменчивости для числа операций, требуемых для выполнения задания. Равенство (2.22) дает следующую верхнюю границу:

$$T \leq \frac{1}{\mu C} + \frac{\lambda(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)}{12(1 - \rho)}.$$



Фиг. 5.11. Выигрыш как функция входной интенсивности для различных времен ответа при $m=1$.

Рассмотрим, как ведет себя это выражение при одновременном масштабном увеличении λ и C . В этом случае параметры интервалов между моментами поступления заданий меняются, а все коэффициенты изменчивости удерживаются постоянными. Для того чтобы показать влияние этого масштабного увеличения, выразим последнее неравенство через коэффициенты изменчивости:

$$T \leqslant \frac{\rho}{\lambda} + \frac{C_a^2 + \rho^2 C_p^2}{2\lambda(1-\rho)} \triangleq T_U = T_U(1, \lambda, C),$$

где опять $\rho = \lambda/\mu C$. Последнее выражение очень похоже на (5.2) при $m=1$; конечно, его также можно было бы записать через μC . Теперь влияние одновременного масштабного увеличения λ и C становится очевидным, а именно среднее время ответа (точнее граница для него) убывает обратно пропорционально масштабному коэффициенту. Используя ранее введенные обозначения, получаем

$$T_U(1, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} T_U(1, \lambda, C). \quad \blacksquare \quad (5.9)$$

Для того чтобы выяснить поведение системы с разделиенным ресурсом, обратимся к системе $G/G/m$. Воспользовавшись известной границей Кингмана и Брумилла (2.66), получим

$$T \leqslant \frac{m}{\mu C} + \frac{\lambda[\sigma_a^2 + (\sigma_b^2/m) + (m-1)/\mu^2 C^2]}{2(1-\rho)}.$$

Если выразить это неравенство через квадраты коэффициентов изменчивости, то будем иметь

$$T \leqslant \frac{m\rho}{\lambda} + \frac{C_a^2 + (\rho^2 C_p^2 m) + (m-1)\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = T_U(m, \lambda, C). \quad \blacksquare \quad (5.10)$$

Опять благодаря масштабному увеличению λ и C получается улучшение системы при постоянном ρ , т. е.

$$T_U(m, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} T_U(m, \lambda, C). \quad \blacksquare \quad (5.11)$$

К сожалению, граница (5.10) для $G/G/m$ не очень точная, поэтому с ее помощью трудно показать, что, так же как и в случае $M/M/m$, система с $m=1$ является оптимальной. Однако Брумилл [10] нашел, что в случае, когда $C_p^2 \leqslant 1$, $m=1$ соответствует оптимуму, т. е.

$$T(1, \lambda, C) \leqslant T(m, \lambda, C). \quad \blacksquare$$

(Этот результат обобщает результаты Стидхама [100] для систем $G/M/m$, $G/D/m$ и $G/E_k/m$.) Итак, система с неразделенным большим ресурсом в смысле времени ответа лучше, чем системы

из широкого класса $G/G/m$. Вместе с тем Брумилл привел пример, показывающий, что система $G/G/2$ может быть лучше $G/G/1$ при $C_p^2 > 1$.

Как известно, Кингман предположил [см. (2.64)], что граница (5.10) для $G/G/m$ может быть улучшена и представлена в виде приближенного равенства

$$T \approx \frac{m}{\mu C} + \frac{\lambda[\sigma_a^2 + \sigma_b^2/m^2]}{2(1-\rho)}.$$

Напомним также, что в соответствии с формулой (2.73) это приближение Кингмана — Кёллерстрёма дает верхнюю границу для системы $G/M/m$ и, кроме того, стремится к точному выражению при $\rho \rightarrow 1$. Если выразить опять эту новую верхнюю границу (или приближенное выражение) через коэффициенты изменчивости, то получим

$$T \approx \frac{m\rho}{\lambda} + \frac{C_a^2 + \rho^2 C_p^2}{2\lambda(1-\rho)} \triangleq T'_U,$$

а выражая ее через μC , будем иметь

$$T \approx \frac{m}{\mu C} + \frac{(C_a^2/\rho) + \rho C_p^2}{2\mu C(1-\rho)} = T'_U.$$

Опять при масштабном увеличении λ и C получается соотношение типа (5.11). Отметим также, что доля времени T'_U , которая относится к времени ожидания в очереди (второе слагаемое), не зависит от m . Величина T'_U намного отличается от границы (5.10) для системы $G/G/m$. Заметим, кроме того, что время ответа возрастает при увеличении m и постоянном ρ .

Таким образом, в этом разделе было показано, что улучшение среднего времени ответа системы можно получить при использовании большой системы коллективного пользования с единым ресурсом. Отметим еще раз, что такое улучшение достигается в основном благодаря закону больших чисел, согласно которому сглаживаются относительные статистические флуктуации в требованиях на ресурс.

5.2. НЕКОТОРЫЕ КОНТРАСТЫ И КОМПРОМИССЫ

Удобство в доступе и обработке информации в сети обусловлено «бракосочетанием» двух огромных, но непохожих отраслей техники — техники связи и вычислительной техники. (Возможно, их союз точнее следовало бы назвать «браком по принуждению», в котором по крайней мере один из партнеров действует под наложением.) Технику связи лучше всего охарактеризовать как отрасль довольно консервативную, развивающуюся с начала нашего

столетия. Она весьма распространена (затраты на средства связи оцениваются в 20 млрд. долл. в год и растут со скоростью около 12% в год), в высшей степени регламентирована, включает в себя большие материальные ресурсы, имеет хорошо поставленные проблемы, которые решаются высококвалифицированными специалистами и основаны на хорошо продуманной теории. Вместе с тем вычислительная техника быстро меняется, является очень новой, также довольно широко распространена (оценивается в 12 млрд. долл. в год, растущими со скоростью 20% в год), слабо регламентирована, страдает от чрезвычайно быстрого старения оборудования, ее фундаментальные проблемы плохо разработаны, она до сих пор не стала наукой, имеет плохо определенные цели и задачи и обслуживается, видимо, самыми плохими работниками (слабо подготовленными высокооплачиваемыми «специалистами» по программированию). Однако их союз является настоятельной необходимостью для задач обработки информации. При попытке «поженить» эти две системы возникают чрезвычайно сложные проблемы. Эти системы являются большими и дорогими, характеризуются наличием внешних пользователей, а также плохо понимаемыми критериями и параметрами, определяющими их работу, и, наконец, они оказывают значительное влияние на социальную, политическую и экономическую стороны нашего общества. Такова природа проблемы, с которой мы имеем дело.

При рассмотрении обоих концов системы дистанционной обработки данных, а именно удаленных терминалов и главного вычислительного комплекса, в котором происходит обработка информации, можно указать на еще одну причину «несовместимости». Удаленные терминалы бывают различных типов, от разнообразных низкоскоростных недорогих телетайпов до некоторых высокоскоростных «разумных» терминалов, включающих дисплеи и вычислительные средства. Обычно эти терминалы располагаются в некотором районе и часто имеют тенденцию к группированию. Они, как правило, работают асинхронно в том смысле, что генерируемые ими знаки располагаются по времени неравномерно. Обычно они имеют очень малый рабочий цикл и, кроме того, генерируют данные группами (очень неудачное сочетание!). У этого множества типов терминалов кодовые интерпретации одних и тех же буквенно-цифровых символов различны. Как правило, терминалы сравнительно простые и дешевые. Они работают относительно независимо друг от друга и не осведомлены о том, как ведут себя остальные терминалы. В то же время главный вычислительный комплекс обычно содержит один или в крайнем случае несколько больших центральных процессоров, которые представляют собой большие высокоскоростные вычислительные машины, работающие синхронно с большим рабочим циклом. Обычно эти машины используют единое стандартное представление буквенно-цифровых

символов. Они весьма дорогие и сложные, и, если данный комплекс содержит более чем одну машину, нужно затратить много усилий, чтобы добиться их согласованной работы как бы в симбиозном режиме.

Другая трудность связана с телефонной сетью, которая первоначально была построена для передачи речи, т. е. аналогового сигнала с большой избыточностью, позволяющей бороться с различными шумами в телефонной сети. Чтобы передавать данные по этой сети, цифровые сигналы, генерируемые вычислительными машинами и терминалами, нужно преобразовать в аналоговые сигналы, которые телефонная сеть¹⁾ может передавать по своим рассчитанным на речь линиям. Устройства, которые выполняют это преобразование, называются *модемами* (это слово составлено из слов «модулятор» и «демодулятор»). Так как телефонная сеть рассчитана на работу с речевыми сигналами, то можно ожидать, что ее приспособление к передаче данных (статистика которых значительно отличается от статистики речевых сигналов) является довольно трудной задачей. Различие между трафиками данных и речевых сигналов является источником многих трудностей, возникающих при построении сетей передачи данных. Важнейшей характеристикой данных является то, что они порождают непредсказуемые требования в непредсказуемые моменты времени. Это приводит к трафику с малым рабочим циклом и тенденцией к группированию и, следовательно, к необходимости использования буферов, сглаживания, уплотнения, концентрации и т. п.

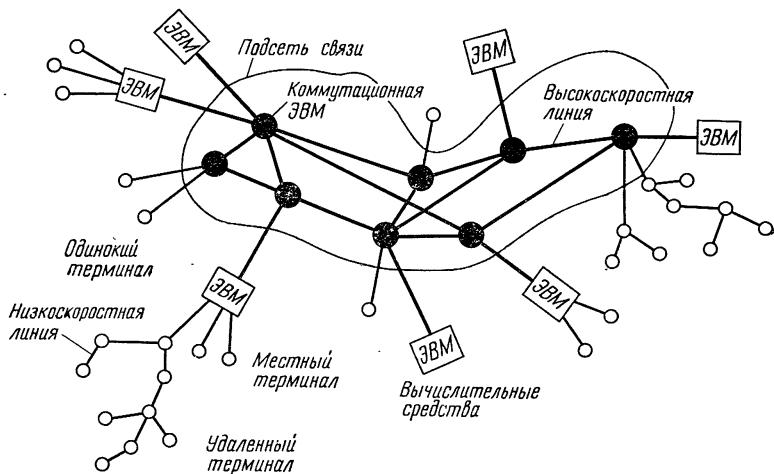
Таким образом, мы имеем дело со сложным взаимодействием частично несовместимых систем, и задача состоит в том, чтобы создать такую «неощутимую» службу передачи сообщений, при которой удаленные терминалы могли бы действовать так, как если бы они непосредственно были присоединены к центральному процессору. В системе необходимо обеспечить высокую производительность; доставка сообщений должна производиться быстро для того, чтобы требования терминалов получали приемлемые времена ответов. Эта служба передачи сообщений не должна накладывать чрезмерных ограничений ни на терминалы, ни на процессоры (такое условие также входит в понятие неощутимости этой службы). Важной является и возможность легкого расширения при перемещениях или росте множества терминалов, возникновении новых вычислительных комплексов или модернизации старых, а также при изменении потребностей. С учетом всех этих аспектов система должна быть надежной и относительно экономически эффективной. Итак, мы описали условия и задачи. Теперь рассмотрим более подробно компоненты и структуру сети.

¹⁾ В настоящее время появляются цифровые сети передачи данных [23, 48].

5.3. СТРУКТУРА СЕТИ И КОММУТАЦИЯ ПАКЕТОВ

Сеть ЭВМ представляет собой множество узлов, в которых располагаются вычислительные ресурсы [соединенные в свою очередь в сеть с помощью узловых коммутационных ЭВМ, т. е. очень хороших коммутаторов], связанные друг с другом множеством линий передачи (каналами передачи данных) [26, 63]. Через эту сеть по линиям передачи данных передаются сообщения в виде команд, запросов, файлов и т. п. В узловых коммутационных ЭВМ выполняются задачи, связанные с передачей сообщений (включаяющей соответствующий выбор маршрутов, передачу квитанций, контроль ошибок и управление потоками, формирование очередей и др.), вводом и выводом сообщений, которые возникают и адресуются терминалам и основным процессорам данного узла. Эти задачи отделены от основных вычислительных функций, требуемых от узлов, и переданы коммутационным ЭВМ, специально предназначенным для их решения (процессоры IMP в сети ARPANET, см. ниже).

Таким образом, сети ЭВМ удобно разбить на две следующие подсети: подсеть связи, осуществляющую передачу сообщений, и совокупность вычислительных и терминальных средств, которые составляют подсеть ресурсов и пользователей (фиг. 5.12). На фиг. 5.12 показана довольно общая структурная схема сети ЭВМ. Вычислительные средства, представленные квадратами, выполняют задачи обработки и хранения (необходимые пользователю). Они соединены друг с другом с помощью подсети связи (которая состоит из коммутационных ЭВМ и высокоскоростных каналов передачи данных). Все входы и выходы подсети связи проходят



Фиг. 5.12. Структура сети ЭВМ.

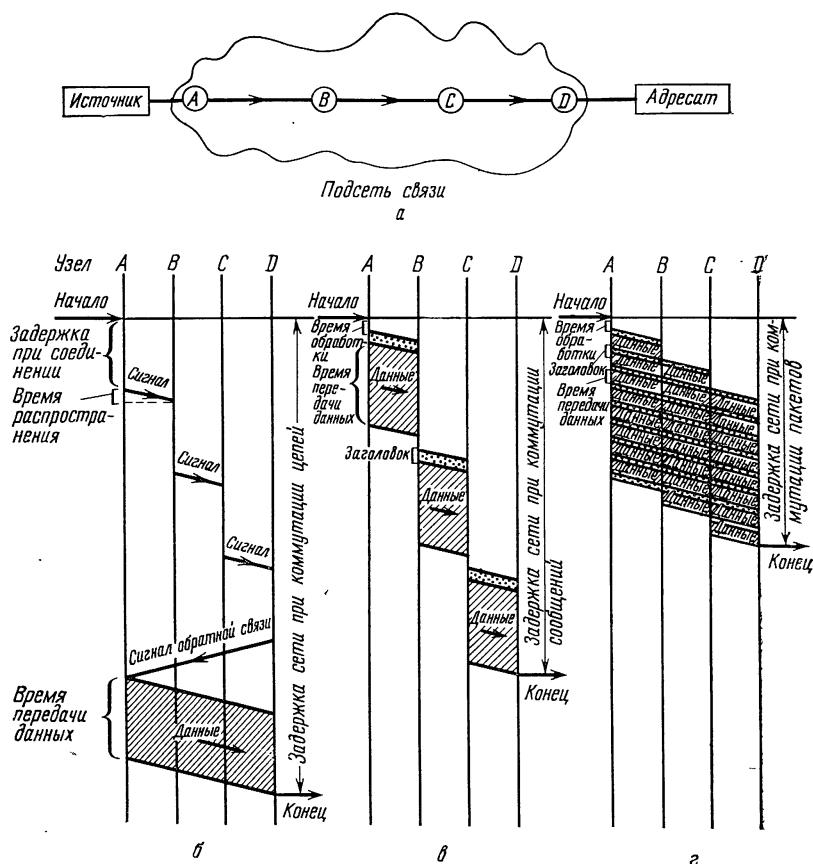
через коммутационные ЭВМ. Через данную коммутационную ЭВМ может подсоединяться более чем одно вычислительное устройство. Терминалы могут быть либо местными по отношению к некоторому вычислительному устройству (получают доступ к сети через это устройство), либо удаленными (соединяются с устройством через некоторую так называемую дистанционную терминальную сеть и затем выводятся в высокоскоростную сеть), либо они вообще могут быть не привязаны ни к какому вычислительному устройству (одинокие терминалы или даже сети одиноких терминалов). Одинокие терминалы имеют прямой доступ к коммутационной ЭВМ (например, к процессорам TIP в сети ARPANET). Основное внимание в этой главе будет уделено подсети связи, составляющей службу передачи сообщений. Функция этой службы передачи состоит в принятии сообщений от любого источника (например, от ЭВМ или терминала данных), выборе маршрута следования сообщений по сети связи и, наконец, быстрой и надежной доставке их в место назначения.

Сети связи условно могут быть разбиты на три типа: сети с коммутацией цепей (каналов), сообщений и пакетов¹⁾. Сеть с коммутацией цепей работает так, что она устанавливает весь путь из соединенных линий от посылающей стороны до места назначения вызова или требования; этот полный путь устанавливается с помощью специальных сообщений сигнализации, которые сами прокладывают себе путь по сети и занимают каналы на пути после их прохождения. После установления пути сигналы, посылаемые в обратном направлении, извещают источник, что можно начинать передачу данных, и все каналы этого пути затем используются одновременно. Весь путь остается связанным с этой передачей (независимо от того, используется он или нет), и только когда источник освободит цепь, все эти каналы возвращаются в пул каналов, доступных для использования в других путях. Коммутация цепей обычно используется в телефонных системах [101]. При коммутации сообщений в определенный момент времени используется только один канал для данной передачи. Сообщение сначала передается от узла источника к следующему узлу на его пути; после приема всего сообщения этим узлом выбирается следующий шаг в его следовании. Если выбранный канал занят, то сообщение ожидает в очереди, и, наконец, когда канал освобождается, передача возобновляется. Таким образом, при успешной передаче по сети с промежуточным хранением сообщение «прыгает» через участки сети от одного узла к другому, используя лишь один канал в любой данный момент времени и, возможно, ожидая в очереди освобождения занятых каналов [63]. Коммута-

¹⁾ При коммутации сообщений и коммутации пакетов используется так называемая техника передачи с промежуточным хранением.

ция пакетов в основном напоминает коммутацию сообщений, за исключением того, что сообщения разбиваются на меньшие части, называемые пакетами, каждая из которых имеет максимальную длину. Эти пакеты нумеруются и снабжаются адресом (как и при коммутации сообщений) и прокладывают себе путь по сети (методом передачи с промежуточным хранением), которая их коммутирует. Таким образом, множество пакетов одного и того же сообщения может передаваться одновременно, что является одним из главных преимуществ коммутации пакетов (передача данных напоминает течение в трубе). В результате заметно (по сравнению с коммутацией сообщений) снижается время передачи (снижение может быть пропорционально числу пакетов, на которые разбивается сообщение) [4, 24, 92]. На фиг. 5.13 иллюстрируются эти три способа коммутации¹⁾. На фиг. 5.13, а показан путь передачи по сети, состоящий из четырех узлов и трех линий передачи. Для простоты предположим, что никакой другой трафик на сети не мешает этой передаче. На фиг. 5.13, б представлена идеализированная последовательность событий для коммутации цепей. В нее включены процесс соединения в каждом узле (который вносит главный вклад в задержку) и следующая за ним передача устанавливающего сигнала (по предположению имеющего нулевую длину), который поступает в коммутатор В спустя время распространения (происходящее со скоростью света). Этот цикл повторяется на пути; в конце генерируется сигнал обратной связи, который запускает передачу данных. Отметим, что требуется лишь один временной интервал для передачи данных. Установленный путь фактически указывает адрес для данных. На фиг. 5.13, в показана последовательность событий при коммутации сообщений. После небольшой задержки для переключения коммутатора (чтобы выбрать маршрут и др.) происходит передача сообщения из А в В; кроме данных передается заголовок (для идентификации и выбора маршрута, так как путь здесь не устанавливается, как при коммутации цепей). После того как В закончит прием всего сообщения, последовательность событий повторяется при переходе от В к С и т. д. При коммутации пакетов (фиг. 5.13, г) сообщение разбивается на восемь пакетов, каждый со своим собственным заголовком. Как видно, последовательность пакетов течет, как по трубе. Из-за отсутствия заголовка число бит, передаваемых при коммутации цепей, является наименьшим; при коммутации сообщений число передаваемых бит возрастает, и, наконец, больше всего бит передается при коммутации пакетов. Однако, если длины сообщений не слишком велики, время передачи по сети

¹⁾ На таких фигурах, как эта, ось времени направлена вниз страницы, а узлы сети располагаются горизонтально так, что слева лежит узел источника, а справа — узел назначения.



Фиг. 5.13. Сравнение задержек сети при коммутации цепей, сообщений и пакетов.
а — путь передачи; б — коммутация цепей; в — коммутация сообщений; г — коммутация пакетов.

(задержка сети) будет наименьшим для этих трех способов при коммутации пакетов; это видно на фиг. 5.13. В самом деле, задержка при коммутации сообщений пропорциональна произведению длины *сообщения* на число участков сети; при коммутации пакетов она пропорциональна произведению длины *пакета* на число участков плюс слагаемое, пропорциональное длине *сообщения*. При этом мы пренебрегаем задержкой, вызванной управляющими сигналами при коммутации пакетов (этот вопрос подробно рассматривается в гл. 6). Для цифровой передачи данных (особенно в случае, когда данные группируются) более предпочтительно использова-

ние коммутации сообщений и пакетов; в этой главе рассматриваются лишь эти виды коммутации. Принять решение относительно того, какой вид коммутации следует использовать, довольно трудно. Были проведены сравнения этих видов коммутации [89, 18, 20, 56, 83, 98], но к настоящему времени нет удовлетворительного всестороннего исследования этого вопроса¹⁾. Ясно одно, если имеется необходимость в передаче длинного непрерывного потока данных, то подходящим решением может быть некоммутируемая (или коммутируемая) линия. Вместе с тем если поток данных имеет группирующуюся структуру (что типично для данных, выходящих из ЭВМ и терминала), то большое преимущество дает использование какого-либо метода коллективного использования ресурса; в этом случае разумным является выбор коммутации пакетов.

Имеется целый ряд вопросов, связанных с коммутацией пакетов, которые важно рассмотреть. Например, так как пакеты хранятся при прохождении через коммутационные узлы, то преобразования скорости, формата и кода можно проводить во время коммутации (что справедливо для любой системы передачи с промежуточным хранением, например для системы с коммутацией сообщений). Это нельзя выполнить при коммутации цепей, которая поэтому требует полной совместимости (в рассматриваемом смысле) всей линии от конца до конца. В сети со средней нагрузкой, для сигнала, выполняющего установление пути, может оказаться трудным найти весь путь из свободных каналов от источника до адресата; при этом он пошлет назад сигнал «занято», вызванный так называемой блокировкой сети. При коммутации пакетов нужно, чтобы свободным был лишь следующий канал на пути при условии, конечно, что сообщение может получить другие виды ресурсов сети, что обеспечивается процедурой управления потоками (см. гл. 6). Другим важным свойством коммутации пакетов является способность к адаптивному выбору хороших путей для передачи пакетов в зависимости от перегрузок в сети (см. ниже и гл. 6). Кроме небольшой задержки сети, хорошим свойством коммутации пакетов является быстрая обработка коротких сообщений, несмотря на наличие длинных, которые могут передаваться в то же самое время. Это обусловлено разбиением (длинных) сообщений на пакеты. Другим важным свойством разбиения на пакеты является снижение требований к памяти узла (представьте себе, что используется коммутация сообщений с сообщениями длиной 10^6 бит!).

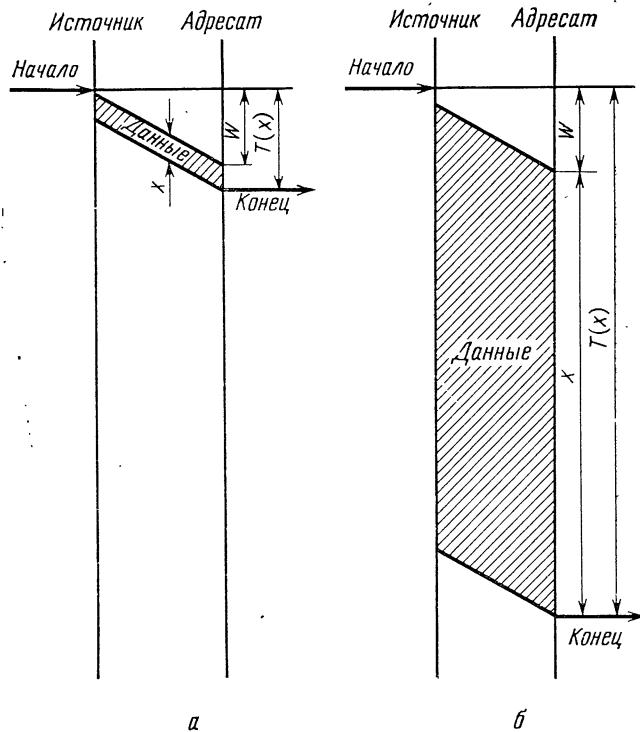
При оценке сетей с коммутацией пакетов будут рассматри-

¹⁾ В дальнейшем рассматриваются распределенные сети с коммутацией пакетов. Другие конфигурации сетей с коммутацией пакетов, известные как петлевые, были построены Фарбом [30] и предложены в работах [52, 88].

ваться следующие количественные характеристики сети:

- задержка,
- скорость передачи,
- стоимость,
- надежность.

Первые две характеристики тесно связаны друг с другом; они обычно применяются в качестве критериев к различным видам трафика. В частности, диалоговый трафик должен быстро доставляться и обычно он имеет малую протяженность (в этом случае скорость передачи не очень существенна). При передаче же длинных файлов не очень важна начальная задержка при приеме первых нескольких бит через сеть; в этом случае имеет значение, сколько бит в секунду можно передавать через сеть. На фиг. 5.14 показаны эти два случая. Здесь для простоты считается, что сеть представляется пользователю как система, которая (в среднем) заставляет его ждать W секунд с момента, когда он потребует передачи сообщения, до момента, когда это сообщение начнет при-



Фиг. 5.14. Задержка сети и скорость передачи.
а — короткое диалоговое сообщение; б — передача длинного файла.

ниматься на другом конце. Время от момента начала приема до момента его завершения называется временем обслуживания и обозначается через x . Следовательно, W есть среднее время с момента, когда первый бит входит в сеть, до момента, когда первый бит принимается; это время является мерой (начального) времени ответа сети. Пусть $T(x) = W + x$ представляет собой среднюю задержку сети, которая является важной характеристикой. На фиг. 5.14, а представлен случай короткого диалогового сообщения, в котором $x \ll W$ и поэтому главную роль играет начальное время ответа сети W , так как оно определяет задержку сети. На фиг. 5.14, б показана передача длинного файла, при которой $x \gg W$. В этом случае важна скорость передачи сети (которую обозначим через γ_{jk} сообщений в секунду при передаче между источником j и адресатом k), так как задержка сети определяется величиной $x = 1/\gamma_{jk}$. Таким образом, имеем

$$T(x) \approx \begin{cases} W & \text{при } x \ll W, \\ x = \frac{1}{\gamma_{jk}} & \text{при } x \gg W. \end{cases}$$

Важным свойством системы с коммутацией пакетов является то, что в одно и то же время по сети разрешается передача нескольких (например, m или менее) сообщений. (Это свойство дополняет уже указанное свойство течения пакетов одного сообщения, как по трубе [76].) Такое уплотнение сообщений возможно в силу двух причин — течения пакетов, как в трубе, по данному пути и альтернативного выбора маршрутов по многим путям. Если Z_{jk} обозначает задержку сети, усредненную по всем сообщениям, проходящим от j к k (см. разд. 5.5), то скорость передачи сети самое большое равна

$$\gamma_{jk} = \frac{m}{Z_{jk}}.$$

Если b — средняя длина сообщения (в битах), то средняя скорость передачи в битах за секунду равна $b\gamma_{jk}$ (самое большое). Кроме обработки диалогового трафика и передачи файлов сеть может также обрабатывать трафик, идущий в реальном масштабе времени (например, передавать речь), который одновременно требует малой задержки и высокой скорости передачи. Для эффективной передачи такого трафика необходимы процедуры управления другого типа (см. гл. 6).

Таким образом, мы нарисовали картину сети с коммутацией пакетов как такой системы, которая передает (как по трубе) адресованные сообщения не только по любому отдельно взятому

пути, но и по ряду альтернативных путей, разбивает сообщение на пакеты, снабжает пакеты и сообщения заголовками и переносит их по сети методом передачи с промежуточным хранением. При перемещении пакетов и сообщений по сети могут встретиться некоторые непредвиденные обстоятельства, и поэтому по многим причинам (ошибки, блокировка памяти, тайм-ауты и др.) пакеты и сообщения могут прибыть к месту назначения не в их естественном порядке, размноженными или даже потеряться. Сеть должна быть готова к появлению таких событий и отвечать на них соответствующим образом (в конце концов, какие пользователи будут платить за обслуживание сетью, которая может принять сообщение для передачи, потерять его и не сообщать пользователю об этой потере?). Итак, перечислим свойства сетей с коммутацией пакетов [22]:

- случайная задержка,
- случайная скорость передачи,
- поступление пакетов и сообщений не в их естественном порядке,
- потеря и размножение пакетов и сообщений,
- память в узлах,
- согласование скорости между сетью и присоединяемыми к ней системами.

Чтобы сеть отвечала этим свойствам, она должна выполнять многие из следующих функций:

- пакетирование,
- хранение в буферных запоминающих устройствах,
- передача, подобная течению жидкости по трубе,
- выбор маршрутов,
- упорядочение в последовательность и нумерация,
- контроль ошибок (связанных с шумом, размножением, потерей сообщений),
- размещение памяти (ресурса),
- управление потоками.

В таких условиях эффективное распределение ресурсов является очень важным.

Анализ стохастических потоков в сетях, использующих передачу с промежуточным хранением, находится под неблагоприятным влиянием комбинаторной теории потоков в сетях и вероятностной теории очередей. В результате эффективное *проектирование* сетей ЭВМ является задачей весьма сложной и число рабочих параметров и режимов довольно велико. В этой главе рассматриваются некоторые из наиболее важных задач, которые возникают в процессе проектирования.

В общем случае (подсеть) сеть связи составляют: 1) физическая сеть, состоящая из коммутационных ЭВМ и каналов связи; 2) поток сообщений (которые описываются местом их возникнове-

ния, местом назначения, временем возникновения, длиной и приоритетным классом), которые движутся по сети в соответствии с методом передачи с промежуточным хранением; 3) множество *операционных правил*, согласно которым обрабатывается поток этих сообщений.

При синтезе таких сетей приходится иметь дело с рядом конструктивных переменных и процедур, которые нужно выбирать. К последним относятся процедура выбора маршрутов сообщений, процедура управления потоками, выбор пропускных способностей каналов, дисциплина для очередей с приоритетами, выбор топологической конфигурации¹⁾. *Процедура выбора маршрутов сообщений* представляет собой правила выбора (согласно некоторому, возможно, рандомизированному алгоритму) следующего узла, в которое сообщение придет на своем пути по сети. Подробное описание алгоритма определяет процедуру выбора маршрута. В этот алгоритм входят такие параметры, как место возникновения и место назначения сообщения, приоритет сообщений, возможность использования определенных каналов, перегрузка или устранение определенных узлов и каналов. Определим *фиксированную процедуру выбора маршрутов* как такую, при которой путь сообщения по сети однозначно устанавливается лишь по его местам возникновения и назначения. Если в процедуре разрешается использование более чем одного пути, то она называется *процедурой выбора маршрутов, допускающей альтернативы*. На основе параметров, которые указаны выше, при допускающей альтернативы процедуре выбор альтернативных путей среди действующих линий может осуществляться либо детерминированно, либо случайно; первая процедура называется *детерминированной процедурой выбора маршрутов, допускающей альтернативы*, а вторая — случайной процедурой выбора маршрутов, допускающей альтернативы (или *случайной процедурой выбора маршрутов*) [63]. Если алгоритм выбора маршрутов основан на решениях относительно некоторых параметров текущего трафика и (или) выхода из строя узлов или каналов, то соответствующую процедуру называют *динамической*, или *адаптивной*, *процедурой выбора маршрутов*.

Процедура выбора маршрутов должна обрабатывать весь трафик в сети, но она не оказывает прямого влияния на управление тем, какой интенсивности трафик может поступать в сеть. Задача регулирования входного трафика возлагается на *процедуру управления потоками*, которая выполняет одну из наиболее важных функций в сетях. В основном процедура управления потоками предсказывает и предотвращает перегрузки путем регулирования

¹⁾ В целях упрощения при математическом анализе и проектировании мы опускаем некоторые вопросы выбора стратегии хранения в буферных запоминающих устройствах, вопросы нумерации и упорядочения, а также вопросы контроля ошибок. К этим важным вопросам мы вернемся в гл. 6.

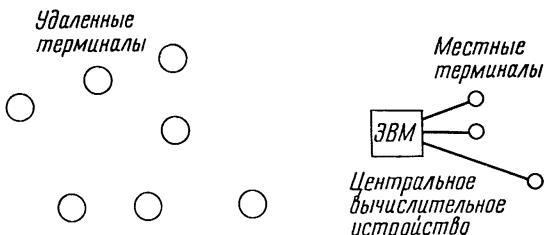
входного трафика, идущего от подсети ресурсов и пользователей в подсеть связи. Вопросы и возможные просчеты, связанные с процедурами управления потоками, рассматриваются в гл. 6.

Мы условились рассматривать лишь сети связи с коммутацией сообщений и пакетов, в которых сообщение (или его пакеты) после ввода в сеть, в конце концов, попадают в сферу «внимания» некоторого канала связи, по которому оно будет передано. Естественно, что, если канал занят в момент, когда сообщение потребует обслуживание, сообщение должно встать в очередь и ожидать. Отметим, что обслуживание, которое предлагается обслуживающим прибором, состоит в использовании канала для передачи. Время обслуживания (передачи) для данного сообщения равняется его длине (например, в битах), деленной на пропускную способность канала (в битах за секунду). После того как сообщение использует данный канал, оно будет принято следующим узлом (и канал освобождается для использования другими сообщениями). После приема сообщения в узле процедура выбора маршрутов приписывает его некоторому выходному каналу, идущему от этого узла по пути в место назначения. Опять, если этот новый канал занят, сообщение должно ждать в очереди получения обслуживания от канала и т. д. Наконец, сообщение будет принято местом назначения; общее время, проведенное сообщением в сети, называется *задержкой сообщения* (или задержкой сети).

На надежность сети, ее задержку, процедуру выбора маршрутов и т. п. существенное влияние оказывает *топологическая конфигурация сети связи* [38, 63]. Задача выбора топологии является очень трудной и еще больше усложняется, если на сеть налагаются топологические ограничения (такие, как заданные требования к надежности). Кроме того, при проектировании сети нужно учитывать *стоимостную функцию*; вид этой функции сильно влияет на структуру сети.

После определения топологии нужно выбрать пропускные способности каждого канала, а затем принять какую-то *дисциплину обслуживания очередей*, которая устанавливает порядок обслуживания в различных очередях на каналы (этот вопрос не будет рассматриваться в настоящей главе, так как он уже обсуждался в гл. 3 и 4).

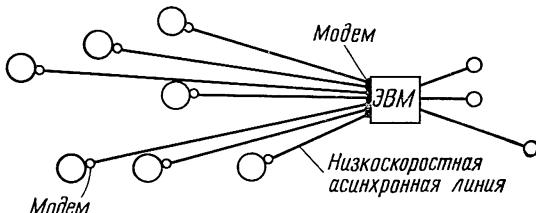
Прежде чем приступить к задаче проектирования сети в общем виде, рассмотрим более простую, но важную частную задачу. При проектировании сетей ЭВМ часто имеют дело с задачей организации доступа множества удаленных терминалов к некоторому одному центральному вычислительному устройству (фиг. 5.15). На фиг. 5.15 квадрат изображает центральное вычислительное устройство (обслуживающее также свои местные терминалы). Ресурсом, который требуется распределить в этой задаче, является множество линий связи, обеспечивающих доступ



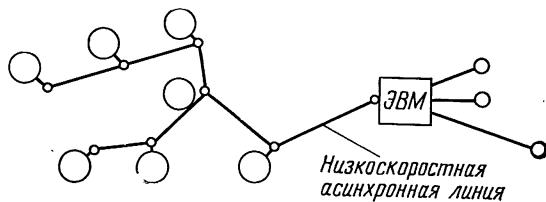
Фиг. 5.15. Задача соединения удаленных терминалов.

удаленным терминалам к ЭВМ. Решение, соответствующее частной системе, показанной на фиг. 5.2, дается на фиг. 5.16; оно представляет собой звездообразную сеть, в которой отдельная линия связывает удаленный терминал с центральным устройством. Это решение предотвращает конкуренцию за средства связи, однако является очень дорогим, и поэтому при необходимости снизить стоимость часто приходится уменьшать число низкоскоростных асинхронных линий связи. Кроме того, для сопряжения цифрового терминала с аналоговой линией связи необходимы специальные устройства (модемы), которые ставятся на оба конца каждой линии. В результате решение в виде звездообразной сети становится очень дорогим. В качестве другого экстремального решения можно предложить самое дешевое решение, которое заключается в соединении терминалов и ЭВМ так, чтобы общая длина линий была наименьшей. Это решение дается хорошо известным минимально покрывающим деревом [38], которое легко строится (фиг. 5.17). К сожалению, такое решение фактически приводит к одному средству связи, которое должно коллективно использоваться всеми терминалами. Поскольку это средство является низкоскоростным, возникает сильная интерференция терминалов. Таким образом, мы получили дешевое, но низкоскоростное решение (которое требует достаточно сложного управления при распределении ресурса среди терминалов), известное под названием многоточечной системы [75].

Выше были рассмотрены дорогая, но частная система и самое дешевое, но довольно низкоскоростное решение. Между этими

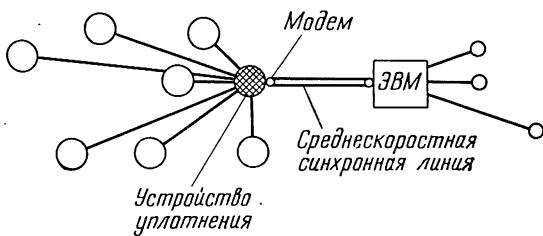


Фиг. 5.16. Решение в виде звездообразной сети.



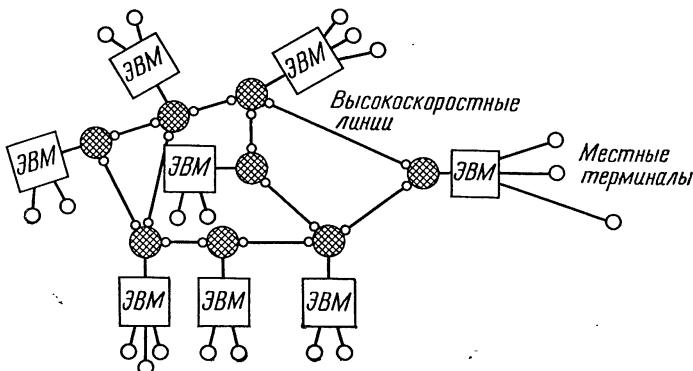
Фиг. 5.17. Минимальное покрывающее дерево-решение, имеющее наименьшую стоимость.

системами находится система, показанная на фиг. 5.18, в которой добавлена точка концентрации¹⁾ [называемая уплотняющим устройством, мультиплексором, концентратором или связным процессором трафика (СПТ)], соединенная с центральным вычислительным устройством среднескоростной (или даже высокоскоростной) линией. Эта линия является дорогой, но ее могут коллективно использовать все терминалы путем объединения своих потоков данных. Такая система соответствует большой системе коллективного пользования, показанной на фиг. 5.4; если ее правильно спроектировать, она будет обладать всеми преимуществами, свойственными большой системе. Уплотнение можно выполнить различными способами, но если оно проводится так, что каждому удаленному терминалу отводится заданная часть ресурса (т. е. среднескоростной линии связи), то не получится система намного лучше частной системы, так как фактически мы установили совокупность частных линий от каждого удаленного терминала к ЭВМ (хотя эта система имеет преимущество из-за оптовой скидки). Плохо, что здесь не использовано преимущество, связанное с эффектом усреднения; это можно сделать лишь путем распределения пропускной способности по требованию. Одним из видов распределения по требованию является асинхронное временное уплот-



Фиг. 5.18. Решение, использующее СПТ.

¹⁾ Такая система хорошо работает, когда терминалы сгруппированы вместе (например, в одном здании), хотя находятся в удалении от вычислительной машины (которая может быть в другом городе).



Фиг. 5.19. Сеть ЭВМ.

нение [17], рассмотренное в гл. 4 (разд. 4.14). В самом деле, принцип уплотнения ресурсов по требованию является ключевым моментом при проектировании эффективных сетей с коммутацией пакетов. (Общая задача организации эффективного доступа многих удаленных терминалов к централизованному вычислительному устройству рассматривается более подробно в работе [16].)

Заменим теперь каждый из удаленных терминалов, рассмотренных на фиг. 5.15, на вычислительное устройство. Пусть каждое такое устройство имеет свое собственное множество местных терминалов и подключено к сложному уплотняющему устройству (т. е. к коммутационной ЭВМ). Рассмотрим далее совокупность вычислительных ресурсов и будем интересоваться тем, как организовать коллективное использование всеми терминалами системы вычислительной мощности каждого из ресурсов. Для того чтобы выполнить это, организуем связь (связь — это второй тип ресурсов в рассматриваемой ситуации), позволяющую производить соединения вычислительных устройств. Таким образом, мы столкнулись с задачей распределения вычислительной и связной мощностей. Пример этой задачи дан на фиг. 5.19 (а также на фиг. 5.12). Здесь показана сеть ЭВМ, в которой любой местный терминал может использовать любую ЭВМ из сети. В этой главе будут описаны такие сети и рассмотрены их свойства. Подчеркнем еще раз, что уплотнение по требованию в сети дает значительную экономию.

В следующем разделе дается описание частного примера сети ЭВМ, а именно ARPANET (в гл. 6 будет значительно расширено это описание и проведено обсуждение измеренных характеристик сети). Этот пример послужит как руководством, так и основой для сравнения многих результатов этой и последующей глав. Далее будет указан класс задач, которые возникают при анализе и про-

ектировании сети. Наконец, оставшаяся часть главы посвящается рассмотрению этих различных задач и их решений, а также обсуждению некоторых далеко идущих концепций коммутации пакетов. Всюду будем указывать места, где возникают фундаментальные задачи теории СМО, какие достижения имеются в их решении и какие вопросы остаются открытыми. Подчеркнем, что вопросы технического проектирования сетей ЭВМ к настоящему времени хорошо разработаны и уже существуют весьма эффективные реализации сетей. Тем не менее имеются некоторые очень интересные проблемы теории СМО, которые наряду с многочисленными топологическими и оптимизационными задачами, а также задачами управления до сих пор остаются нерешенными.

5.4. СЕТЬ ARPANET; ОПИСАНИЕ СУЩЕСТВУЮЩЕЙ СЕТИ

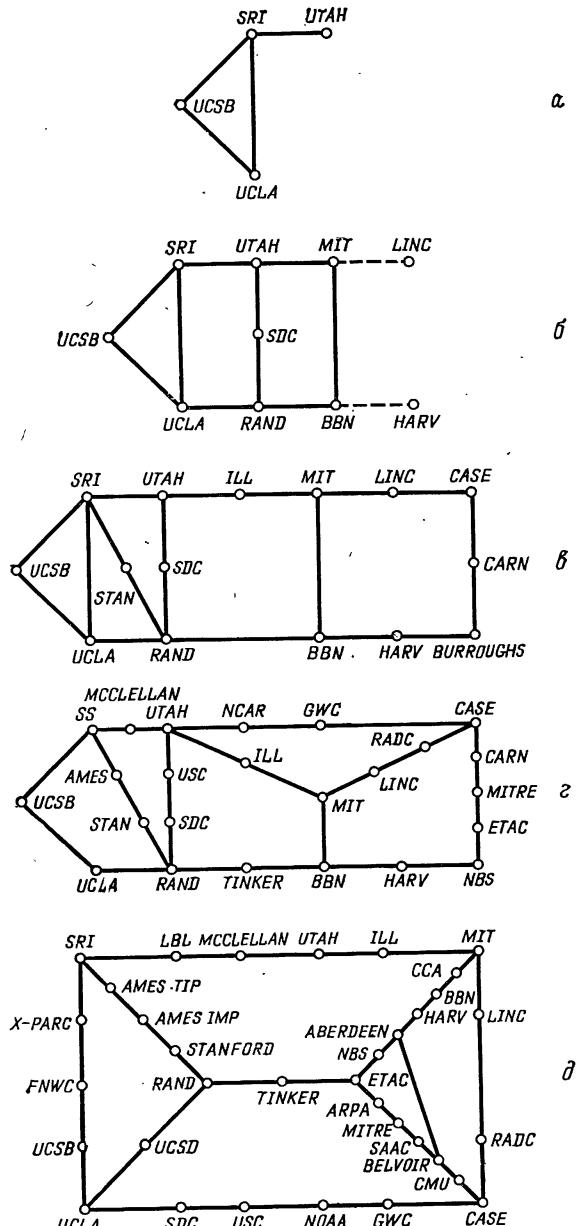
Несколько лет назад Робертс [92] предложил построить экспериментальную сеть ЭВМ, которая позже стала сетью Управления перспективных исследований (ARPA) министерства обороны США, сокращенно ARPANET. В течение ряда лет до 1967 г. ARPA финансировала усовершенствование и развитие многих вычислительных систем коллективного пользования и множественного доступа в ряде университетов и промышленных исследовательских центров в Соединенных Штатах. К 1967 г. многие из этих систем зарекомендовали себя в качестве ценных вычислительных ресурсов, и было понято, что министерство обороны и научная общественность достигнут большего, если окажется возможным использовать службу связи, дающую дистанционный доступ любому терминалу ко всем этим системам. Экономический анализ, выполненный в то время, показал, что использование коммутации пакетов в сети ARPANET приведет к более экономичной связи, более полному использованию ресурсов и более легкому доступу к ним по сравнению со многими другими методами. В связи с этим начали проводиться работы по определению более детальных свойств коммутации пакетов. Для сети с коммутацией пакетов была разработана подробная программа и технической общественности было разослано приглашение вносить свои предложения по участию в ней; в начале 1969 г. контракт на построение ARPANET был заключен с расположенной в шт. Массачусетс технической фирмой Bolt, Beranek and Newman (BBN).

В сентябре 1969 г. первая коммутирующая пакеты ЭВМ была соединена с ЭВМ Sigma 7, находящейся в Калифорнийском университете (Лос-Анджелес) (UCLA); в результате появилась эмбриональная сеть с одним узлом. Вскоре после этого начали соединять многие главные процессоры (названные HOST) различных университетов, промышленных и правительственные исследовательских центров.

тельских центров Соединенных Штатов. В 1970 г. цикл из пяти работ был представлен на Весенней объединенной конференции AFIPS по вычислительной технике в Атлантик-Сити, которые обобщили наши знания о сети, накопленные к тому времени [15, 37, 53, 65, 93]. Эволюция сети от небольшой сети с четырьмя узлами в конце 1969 г. до сети с 34 узлами в сентябре 1972 г. показана на фиг. 5.20; на фиг. 5.21 а показаны коммутационные узлы и машины HOST, присоединенные к сети с 39 узлами (август 1973 г.); на фиг. 5.21 б и 5.21 в представлены логическая и географическая карты соответственно для сети с 57 узлами (июнь 1975 г.). Еще пять работ подвели итог нашим экспериментам с сетью вплоть до 1972 г. [21, 40, 86, 94, 102]. Усовершенствования операционной процедуры описаны в работах [80, 82]. Итог пятилетних модификаций подведен в работе [95], а краткая история проекта приведена в [62].

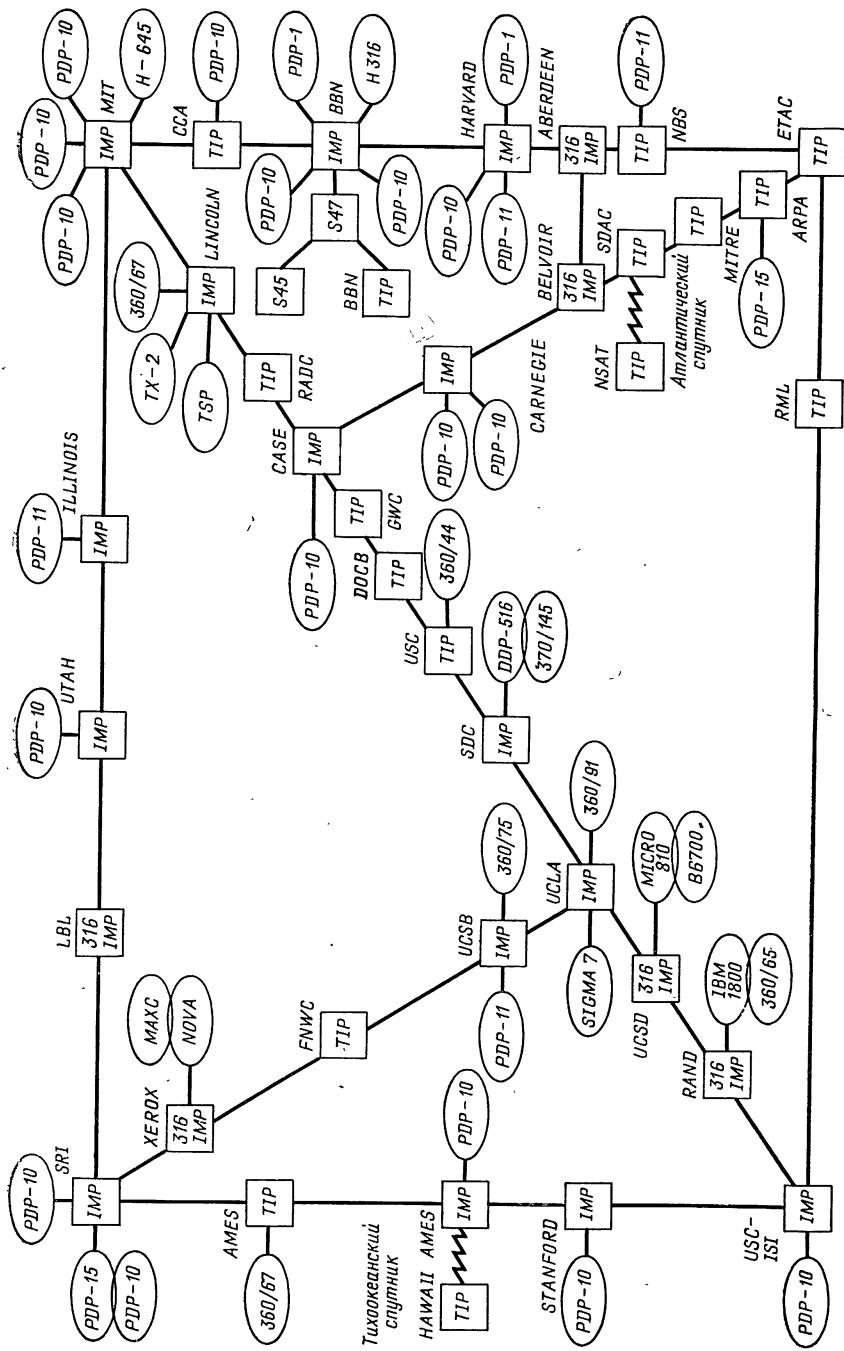
В настоящее время (1975 г.) сеть обеспечивает службу передачи сообщений почти 100 ЭВМ, географически разнесенным по континентальной части Соединенных Штатов и охваченным спутниковой связью на Гавайях и в нескольких местах Европы. Вычислительные машины (HOST) во многих отношениях несовместимы друг с другом, выпущены различными фирмами и пользуются специализированными математическим обеспечением, базами данных и т. п. Эти обстоятельства как раз и представляли основной интерес в первоначальном эксперименте с сетью; требовалось обеспечить эффективную связь и использование такого набора несовместимых машин. Так, SRI берет функции Информационного центра сети (NIC); UTAH создает алгоритмы использования рисунков и обработки изображений; ЭВМ ILLIAC IV в AMES со своей фантастической способностью к параллельной обработке становится доступной для всех пользователей; BBN действует как Центр управления сетью (NCC); UCLA выступает как Центр измерений на сети (NMC), а также разрабатывает математические модели и методы моделирования для исследований сети и систем коллективного пользования ЭВМ; UCLA также предоставляет доступ к IBM 360/91 для вычислений; через сеть можно войти в систему коллективного пользования Multics в MIT, и, наконец, многие пункты обеспечивают службу TENEX машин PDP-10 [8], работающую в режиме коллективного пользования.

Топологическое соединение выполнено так, что сеть имеет вид распределенной сети, которая обеспечивает защиту от полных обрывов линий благодаря тому, что в ней предусмотрены по крайней мере два физически различных пути между любой парой узлов. Каждая машина HOST подсоединенна (асинхронным каналом 100 кбит/с с последовательной передачей) к малой (местной) узловой коммутационной ЭВМ, называемой сопрягающим процессором сообщений (IMP); последние соединены между собой не-

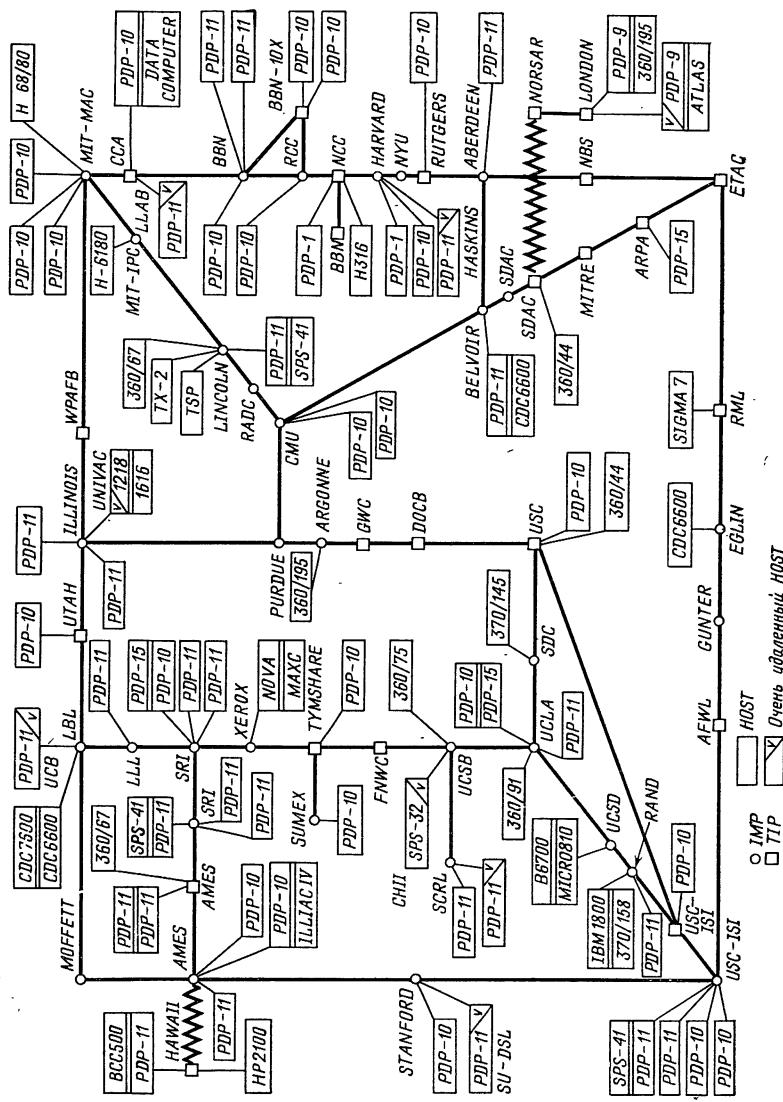


Фиг. 5.20. Эволюция топологии сети ARPANET.

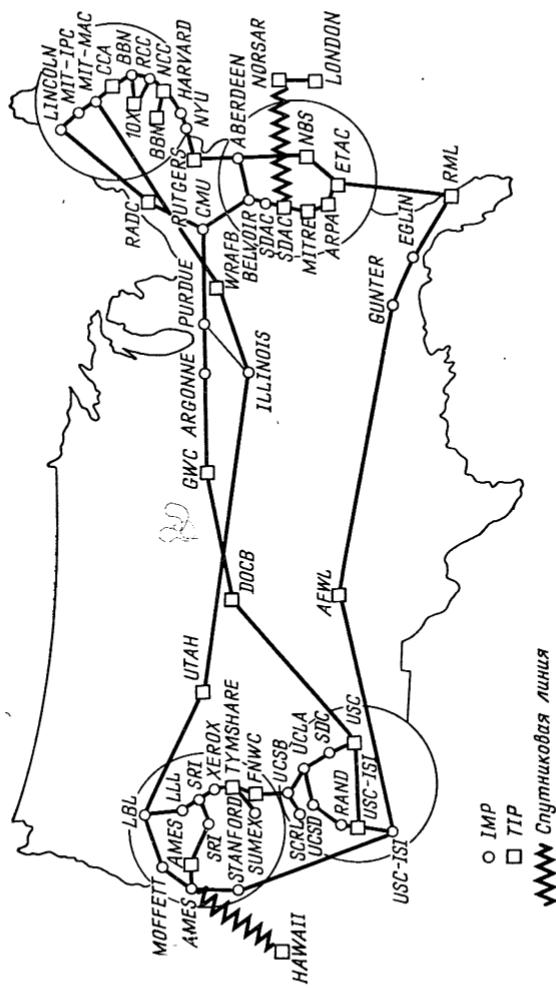
а — сеть с процессорами IMP на 1 декабря 1969 г.; б — сеть с 10 процессорами IMP на 1 июля 1970 г.; в — сеть с 15 процессорами IMP на 1 марта 1972 г.; г — сеть с 24 процессорами IMP на 1 апреля 1971 г.; д — сеть с 34 процессорами IMP на сентябрь 1972 г.



Фиг. 5.21а. Логическая карта сети ARPANET на август 1973 г.



Фиг. 5.216. Логическая карта сети ARPANET на июнь 1975 г.



Фиг. 5.21в. Географическая карта сети ARPANET на июнь 1975 г.

коммутируемыми полнодуплексными синхронными каналами 50 кбит/с¹⁾.

Процессоры IMP действуют как входы в сеть для машин HOST. Процессор IMP введен для того, чтобы освободить HOST от выполнения многих задач по обработке сообщений, необходимых для сети связи. В операционную систему каждой HOST вводится (это наиболее существенная «хирургическая» операция) специально составленная программа, которая называется программой управления сети (NCP); эта программа позволяет машинам HOST связываться друг с другом в соответствии с протоколом HOST—HOST, который стандартен для всей сети [15, 77]. Кроме того, программа TELNET действует как удобное сопряжение между пользователем и NCP, позволяя пользователю вести диалог с сетью более естественным способом.

Для того чтобы поток байтов, идущий, например, от терминала пользователя, был послан к удаленной вычислительной системе, машина HOST пользователя должна преобразовать его в поток сообщений. После этого указанная машина HOST (источниковая HOST) посыпает каждое сообщение вместе с адресом машины HOST места назначения в местный процессор IMP. Затем сеть процессоров IMP определяет маршрут, обеспечивает контроль ошибок, выполняет функции передачи сообщений и их хранения в буферных запоминающих устройствах и, наконец, уведомляет посылающую сторону об окончательном приеме сообщений машиной HOST места назначения. Совокупность машин HOST, процессоров IMP и каналов представляет собой сеть ЭВМ с коммутацией пакетов и коллективным использованием ресурсов. Процессоры IMP и каналы составляют службу передачи сообщений (т. е. подсеть связи) для машин HOST. Как было указано в предыдущем разделе, между находящимися в связи машинами HOST не устанавливается некоторый путь, а скорее передача между машинами HOST состоит из последовательности передач сообщений, которые коллективно используют линии связи вместе с другими передаваемыми сообщениями. Максимальный размер сообщения равен 8063 бит (плюс 32 бит, используемые в качестве заголовка HOST—HOST). Таким образом, две машины HOST в типичном случае связываются по сети путем передачи сообщений. По причинам, указанным в разд. 5.3, программа процессора IMP разбивает каждое сообщение на один или большее число пакетов по

¹⁾ Кроме того, с июня 1975 г. существуют две линии по 230,4 кбит/с в Калифорний, один спутниковый канал 50 кбит/с на Гавайи, один спутниковый канал 7,2 кбит/с на Норвегию и один канал 9,6 кбит/с из Норвегии в Англию (фиг. 5.21б и фиг. 5.21в).

1008 бит (самое большое) в каждом¹⁾. Каждый пакет сообщения независимо передается процессору IMP места назначения, который компонует сообщение до его передачи машине HOST места назначения. После этого назад к источниковой машине HOST посыпается квитанция о завершении передачи от конца до конца. При передвижении по сети пакеты «прыгают» через участки от процессора IMP к соседнему процессору IMP. Если сосед принимает пакет (т. е. если он считает, что передача была верной и имеется свободное место в памяти), то он направляет обратно квитанцию IMP—IMP на успешную передачу пакета. Если квитанция не будет принята в течение тайм-аута (125 мс), то передача пакета повторяется. Таким образом выполняет коммутацию пакетов сеть ARPANET.

Сеть была спроектирована как для быстрой доставки коротких диалоговых сообщений, так и для обеспечения высокой скорости передачи длинных файлов. Первая из этих целей была достигнута; время ответа для коротких сообщений лежит между 50 и 250 мс даже при передаче через многие участки (исключая спутниковые участки, которые вносят задержку, примерно равную 0,25 с, из-за большого времени распространения). Что касается второй цели, то сеть способна обеспечивать высокоскоростную (широкополосную) передачу длинных сообщений в условиях малой или средней нагрузки в сети, но уже при большой нагрузке и при передачах по многим участкам скорость передачи ощущимо снижается (см. гл. 6). С самого начала значительное внимание уделялось измерению и оценке характеристик сети. В результате несколько раз в программу IMP вносились изменения; главные изменения были внесены весной 1972 г. и в конце декабря 1974 г. Это было сделано, в частности, для смягчения некоторых существенных трудностей, связанных с блокировкой сети и условиями ухудшения ее работы [80, 85]. Обсуждение этих вопросов будет проведено в гл. 6.

Стратегии выбора маршрутов на этой разнесенной сети используют распределенное управление решениями о выборе маршрута, которые принимаются в каждом процессоре IMP [46]. Вычисления, выполняемые при выборе маршрута, основываются на информации, полученной от соседних процессоров IMP, и местной информации, включающей, например, сведения о состоянии каналов данного процессора IMP. На практике этот метод оказывается довольно эффективным при умеренных уровнях трафика, с которыми сеть до сих пор и имела дело; в этом как раз и заключалась одна из удач эксперимента ARPANET. Процедура управле-

¹⁾ Несущее данные сообщение максимальной длины состоит из восьми пакетов, из которых первые семь содержат по 1008 бит данных, а восьмой включает 1007 бит данных. Сообщение, которое требует более одного пакета, называется мультипакетным сообщением.

ния потоками все еще имеет некоторые недоверия, которые продолжают нас интересовать. Выбор маршрутов и управление потоками рассматриваются в гл. 6.

Ошибки в основном возникают из-за шума в линиях связи. Они контролируются в сети ARPANET путем их обнаружения и повторных передач между каждой парой процессоров IMP на пути передачи. Здесь успешно применяются стандартные циклические коды с обнаружением ошибок. Измерения показывают, что скорости ошибок в обычных телефонных линиях находятся в пределах от одного пакета с ошибками на 10^3 пакетов до одного на 10^5 . Эти ошибки (часто пачки) как будто не влияют на качество работы сети, и, по нашим данным, ни одна необнаруженная ошибка еще не прошла по сети. По проекту введение небольшой избыточности позволяет снизить число случаев необнаружения ошибки до одного в 1—100 лет (для обнаружения ошибок добавляются 24 проверочных бита на пакет в линиях 50 кбит/с). Главная трудность, связанная с этими линиями, состоит в том, что случайно возникают продолжительные периоды (часы и дни) выхода линий из строя. Центр управления сети постоянно следит за выходом из строя процессоров IMP и линий; опыт, накопленный Центром, суммируется в гл. 6 [78]. Таким образом, при указанной процедуре обнаружения ошибок телефонные каналы связи не создают проблем для качества работы подобных сетей и их расширения. Когда линия или процессор IMP выходят из строя, процедура выбора маршрутов автоматически приспосабливается к новым условиям, предотвращая тем самым возможные перегрузки.

Первоначальный процессор IMP был построен на основе мини-ЭВМ Honeywell 516 [53]; она представляет собой ЭВМ со словами 16 бит, имеющую цикл памяти 0,96 мкс. Эта машина, переделанная в процессор IMP, стоит около 100 000 долл. Мини-ЭВМ Honeywell 316 (с циклом 1,6 мкс) также была переделана в процессор IMP стоимостью около 50 000 долл.; новые процессоры IMP как раз такого типа. Процессор IMP снабжается памятью на сердечниках 16 К¹⁾. Процессор IMP отвечает за всю обработку пакетов, которая включает разбиение сообщений машины HOST на пакеты; выбор маршрутов; получение и передачу пакетов в режиме передачи с промежуточным хранением; уведомление о принятых пакетах и повторную передачу пакетов, не получивших квитанцию; компоновку пакетов в сообщения в месте расположения машины HOST адресата; генерирование управляющих сообщений и т. п. Кроме того, программа IMP ответственна за сбор статистики, проведение неавтономных испытаний и наблюдение за состоянием линий.

¹⁾ Первоначально он имел память на 12 К.

Память процессора IMP на магнитных сердечниках разделена на 32 сегмента, каждый из которых состоит из 512 слов (по 16 бит каждое слово). Большая часть этого пространства отведена для кодов и таблиц процессора IMP. Остальная часть может быть использована для хранения пакетов (буферное хранение) при их прохождении через IMP. В настоящее время один буфер составляют 74 слова (всего 1184 бита), и буфер может хранить один пакет (включая некоторые дополнительные связанные с ним биты). До конца 1973 г. в процессоре IMP было около 77 буферов, и их число снизилось примерно до 50 к декабрю 1974 г., когда были внесены некоторые изменения. Эти буфера размещены следующим образом. Каждая линия имеет два буфера; это позволяет просматривать весь входной трафик и гарантировать прием квитанции (которая очищает буфера процессора IMP). Остальные буфера делятся по (ограниченному) требованию между пакетами, которые передаются с промежуточным хранением, и пакетами, которые компонуются для доставки местной машине HOST. Каждая выходная линия может иметь не менее одного и не более восьми буферов, используемых для передачи с промежуточным хранением. Первоначально в пуле буферов, доступных для передачи с промежуточным хранением, находился максимум 20 буферов, которые линии могли запрашивать по требованиям (но к середине 1975 г. их число было снижено до 9). К концу 1973 г. доступными были максимум 66 буферов, которые можно было использовать для компоновки, а к декабрю 1974 г. их число снизилось до 34 (это число обычно выбирается среди чисел вида $8 k+2$, где k — некоторое целое число; 8 буферов отдается каждому из k мультипакетных сообщений, а дополнительные 2 буфера оставляются для двух однопакетных сообщений). Процессор IMP 516 может обрабатывать приблизительно 850 кбит/с, а IMP 316 — около 700 кбит/с (при самом благоприятном предположении, что передаются сообщения максимальной длины). Максимальная эффективная пропускная способность линии 50 кбит/с составляет примерно 40 сообщений из полных пакетов в секунду (см. разд. 6.7). В работе [80] рассчитана минимальная задержка при передаче туда и обратно для различных длин сообщений, скоростей и протяженностей линий; например, при использовании каналов 50 кбит/с и линий длиной 1000 миль восьмипакетное сообщение проходит от одного процессора IMP до соседнего примерно за 0,25 с в незагруженной другой передачей сети. В гл. 6 приведены некоторые данные, касающиеся реального трафика сообщений.

До сих пор говорилось, что доступ к сети осуществляется через терминал, присоединенный к машине HOST, которая в свою очередь подсоединенна к процессору IMP. Введение устройства, названного термиナルным IMP (TIP), обеспечило прямой доступ

терминалов к сети ARPANET [86, 79]. Процессор TIP выполняет двойную функцию, действуя как процессор IMP и как машина HOST. Он построен на основе мини-ЭВМ Honeywell 316, имеющей память на магнитных сердечниках на 28 К¹⁾. К данному процессору TIP можно подсоединить до 63 терминалов (удаленных или местных) различных типов, а сам процессор может иметь до трех сопряжений с модемами и (или) машинами HOST (это число можно увеличить). Процессор TIP отличается от IMP тем, что кроме дополнительной памяти на магнитных сердечниках на 12 К, он содержит устройство, названное многолинейным контроллером (MLC), которое разрешает прямое соединение терминалов с сетью. Процессор TIP обрабатывает данные только знак за знаком при передаче их с терминала в сопровождении стартового и стопового битов (даже при передаче по синхронным линиям). Скорости передачи данных (от 75 бит/с до 19,2 кбит/с) и длины знаков в битах могут быть выбраны для каждой терминальной линии самой программой процессора TIP. Для каждой входной и выходной терминальной линии в буфер засыпаются два полных знака: один в текущий момент компонуется или декомпонуется, а другой предназначен для счета времени доступа к памяти. Устройство MLC содержит 256 интегральных схем (со средним и высоким уровнями интеграции) и примерно такое же сложное, как и сама ЭВМ Honeywell 316. Каждое устройство сопряжения линий дополнительно содержит 31 интегральную схему. Процессор TIP стоит около 100 000 долл. Кроме того, требуется дополнительная память на 12 К для специальных кодов процессора TIP и таблиц, а также для использования в качестве буферной памяти для хранения терминальных сообщений и других целей. Время обработки одного знака равно ~75 мкс, и избыточность на сообщение может быть очень большой (10 или 20 раз по полосе) при передаче одиночных знаков. Около 5% ресурса процессора TIP теряется за счет того, что он работает как процессор IMP даже при отсутствии трафика, обслуживаемого процессором IMP. Быстродействие процессора TIP равно ~500 кбит/с при отсутствии терминального трафика (для сообщений полной длины)²⁾. Средняя на один процессор TIP вероятность выхода из строя приближенно равна $1/2$. В работе [9] введено более сложное понятие обслуживающей терминалы машины HOST, которая известна под названием терминальной системы сети ARPANET (ANTS). Эта машина HOST представляет собой мини-ЭВМ PDP-11 модели 20,

¹⁾ Первоначально 20 К. Процессоры TIP с памятью на магнитной ленте имеют 32 К.

²⁾ Сумма трафика машин HOST, терминалов и каналов (модемов) не может превысить 600 кбит/с в режиме полного дуплекса, а максимальный трафик терминалов приближенно равен 80 кбит/с (считается, что работает восемь приемно-передающих терминалов по 9,6 кбит/с) [12].

40 или 45. Она требует соединения с процессором IMP, позволяет выполнять некоторую местную обработку, редактирование и допускает присоединение периферийных устройств. Другой терминальной системой переднего края является система UNIX, построенная на PDP-11 в качестве машины HOST [91]. Процессоры ANTS, UNIX и другие процессоры переднего края дают большую ширину полосы при доступе к сети по сравнению с процессорами TIP.

В октябре 1972 г. в Вашингтоне (округ Колумбия) на Первой международной конференции по связи для вычислительных машин (ICCC) была организована широкая демонстрация сети ARPANET. Около 30 терминалов различных марок были присоединены к процессору TIP, расположенному в месте конференции. Участникам конференции были разданы брошюры с инструкциями, в которых содержались методы доступа к различным ресурсам сети ARPANET с помощью этих терминалов. Процедура (описанная в этих брошюрах и остающаяся в силе сейчас), с помощью которой пользователь достигает удаленного вычислительного ресурса, состоит в следующем. Сначала пользователь садится перед терминалом, включает его питание и начинает простой (вступительный) диалог с процессором TIP (или со своей собственной машиной HOST, если он соединен с сетью через процессор IMP). Затем он просит процессор TIP соединить его с удаленной машиной HOST и, когда это соединение выполнено, забыв про процессор TIP и сеть, приступает к вступительному диалогу с удаленной машиной HOST. После этого, как обычно, пользователь перестает думать об операционной системе этой машины HOST и непосредственно связывается с процессом пользователя, с которым он установил контакт к этому моменту. Во время этой демонстрации для конференции ICCC истинная сила сети ARPANET стала очевидной не только непосвященным, но и опытным пользователям сети после того, как они увидели, что пиковая скорость трафика достигла 60 000 пакетов в час, проходивших через процессор TIP в сеть и обратно. С 1971 г. трафик сети достиг феноменальной интенсивности, и в настоящее время сеть выдерживает довольно большую нагрузку (см. фиг. 6.37).

Вышеизложенного достаточно для представления здесь сети ARPANET; подробности будут приведены в гл. 6. Перейдем теперь к рассмотрению широкого круга вопросов анализа и синтеза, относящихся к подсетям связи.

5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, МОДЕЛЬ И ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ

Оставшаяся часть этой главы посвящена рассмотрению эффективного проектирования сетей ЭВМ. В этом разделе сначала вводятся соответствующие понятия и определения и далее делаются

некоторые предположения, которые определяют модель сети. Наконец, описывается класс задач анализа и синтеза, которые будут интересовать нас при изучении сетей.

Начнем с первоначальной описанной автором модели сети связи с коммутацией сообщений, имеющей M каналов и N узлов [63]. В этой модели предполагается, что M каналов являются бесшумными и абсолютно надежными, а пропускная способность i -го канала равна C_i (бит в секунду). Все N узлов, соответствующих центрам коммутации сообщений (пакетов), например процессорам IMP, предполагаются абсолютно надежными и выполняющими операции по коммутации сообщений, включая, например, декомпоновку сообщений, выбор маршрутов, хранение в буферах, уведомление и т. п. Считается, что времена обработки в узлах равны K и являются постоянными (обычно величина K предполагается пренебрежимо малой). Кроме того, в модели имеются очереди к каналам и задержки при передаче. Трафик, поступающий в сеть из внешних источников (например, из машин HOST) образует пуассоновский процесс¹⁾ со средним значением γ_{jk} (сообщений в секунду) для тех сообщений, которые возникают в узле j и предназначаются для узла k . Полный внешний график, поступающий в сеть (и следовательно, покидающий ее)²⁾, определим как

$$\gamma = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma_{ik}. \quad (5.12)$$

Заметим, что величина γ_i , рассмотренная в разд. 1.6, имеет вид $\gamma_i = \sum_k \gamma_{ik}$. Длины всех сообщений по предположению независимы и распределены по показательному закону со средним значением $1/\mu$ (бит). (Пока мы не учтем возможной пакетной структуры сообщений.) Для размещения этих сообщений в узлах сети имеется память неограниченной емкости. Во многих аналитических результатах, которые будут приведены, предполагается, что сообщения направляются по сети в соответствии с фиксированной процедурой выбора маршрутов. Это означает, что для данной пары источник — адресат на сети имеется только один путь³⁾.

Для высокоскоростных сетей, покрывающих большие географические районы, может оказаться важным включить в рассмотр-

¹⁾ См. задачу 5.2, в которой рассматриваются моменты поступления пакетов.

²⁾ Некоторый трафик, генерируемый внутри сети (например, генерируемый сетью трафик, относящийся к измерениям параметров сети и сообщениям о состоянии каналов), также может покидать сеть, но мы будем пренебрегать им.

³⁾ Здесь, как и в разд. 1.6, также можно было бы допустить случайные процедуры выбора маршрутов путем введения r_{ij} — вероятностей того, что сообщение, покидающее узел i , будет затем направлено в узел j . В некоторых практических ситуациях это может дать полезную свободу действий.

рение времени распространения P_i , которое представляет собой время, необходимое для энергии бита сигнала, чтобы пройти весь i -й канал. Эта энергия обычно распространяется со скоростью v (миль в секунду), составляющей значительную часть от скорости света и зависящей от типа используемого канала. Если i -й канал имеет длину l_i (миль), то, очевидно, $P_i = l_i/v$. Эта величина иногда пренебрежимо мала, но может составлять значительную долю задержки в сетях, таких, как ARPANET. Таким образом, если сообщение имеет длину b бит, то время, в течение которого оно занимает i -й канал, равно $P_i + (b/C_i)$ секунд¹⁾. Заметим, что случайность времени обслуживания появляется не из-за обслуживающего прибора (канала), а из-за требования (сообщения), и она проявляется в том, что длина сообщения b является случайной величиной. На первый взгляд кажется, что описанная выше сеть подобна открытым сетям Джексона, рассмотренным в разд. 1.6 [57, 58]. Однако внимательный читатель заметит важное различие между этими сетями; как указано выше, оно состоит в источнике случайности времени обслуживания. В сетях Джексона времена обслуживания обслуживающих приборов являются независимыми случайными величинами, а в рассматриваемых здесь моделях сетей ЭВМ время обслуживания для данного сообщения в различных каналах прямо связано с длиной сообщения b и фиксированными параметрами каналов; это нечто отличное от независимости. Кроме того, интервал времени между моментами поступления двух последовательных сообщений в данный канал не может быть меньше, чем время обслуживания первого из них в указанном канале. Так как время обслуживания для этого сообщения в его следующем канале непосредственно связано с его предыдущим временем обслуживания (и, следовательно, сильно коррелировано с временем между моментами поступления этих двух сообщений в первый канал), то из-за внутреннего трафика в сети процесс поступления сообщений в узел не является независимым от времени обслуживания, которое эти сообщения получают в данном узле [63]. Это наиболее неприятное обстоятельство, так как во всех наших предыдущих вычислениях здесь и в первом томе предполагалась независимость интервалов между моментами поступления требований и временами обслуживания. Если бы не эта трудность, результаты Джексона можно было бы сразу применить к таким сетям. (Обсуждение этого вопроса будет продолжено в разд. 5.6.)

Поскольку каждый канал в сети рассматривается как отдельный обслуживающий прибор, обозначим через λ_i среднее число

¹⁾ Заметим, однако, что первые биты следующего сообщения могут начать передачу, когда последние биты предыдущего сообщения все еще находятся в процессе распространения; это приводит к одновременному согласованному использованию канала различными сообщениями.

сообщений в секунду, проходящих по i -му каналу. Как и для внешнего трафика, определим полный трафик в сети следующим образом:

$$\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i. \quad (5.13)$$

Предположим, что стоимость (например, в долларах) построения i -го канала с пропускной способностью C_i задается некоторой произвольной функцией $d_i(C_i)$, зависящей от номера и пропускной способности канала. Обозначим через D стоимость всей сети, которая, по предположению, состоит лишь из стоимости построения каналов; тогда имеем¹⁾

$$D = \sum_{i=1}^M d_i(C_i). \quad (5.14)$$

Выше мы определили задержку сообщения как полное время, которое сообщение проводит в сети. Наибольший интерес представляет средняя задержка сообщения

$$T = E[\text{задержка сообщения}],$$

которая будет принята за главную характеристику сети. Определим среднюю величину Z_{jk} :

$$Z_{jk} = E[\text{задержка сообщения, которое возникло в } j \text{ и имеет место назначения } k].$$

Ясно, что эти две средние величины связаны равенством

$$T = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_{jk}}{\gamma} Z_{jk}, \quad (5.15)$$

так как доля γ_{jk}/γ полного входящего трафика сообщений имеет в среднем задержку, равную Z_{jk} . Отметим, что равенство (5.15) представляет *разложение* сети по парам источник — адресат. В разд. 5.6 приводится дальнейшее разложение, доведенное до уровня одиночного канала; оно во многом напоминает разложение Джексона.

Итак, за исключением природы случайности времени обслуживания, в основном получена открытая сеть массового обслуживания. Мы испортим эту модель сети связи так, чтобы получить точное соответствие с моделью Джексона, после чего анализ станет совсем тривиальным и сведется к вычислению величины T ; эта программа выполняется в разд. 5.6.

¹⁾ Стоимость узлов можно включить непосредственно в стоимость каналов.

Задачи, связанные с сетью связи, состоят не только в ее анализе, но и в эффективном проектировании, а возможно, и в оптимальном проектировании. При любом проектировании практической сети приходится решать большое число задач. К их числу относятся выбор пропускных способностей каналов, принятие процедуры выбора маршрутов, выбор процедуры управления потоками; топологическое проектирование сети, выбор емкости памяти в каждом узле, выбор аппаратуры и программного обеспечения коммутационной ЭВМ, назначение стандартов разбиения сообщений на пакеты различных размеров и т. п. Так как в этой книге мы интересуемся главным образом аспектами, связанными с массовым обслуживанием, то не будем далее обсуждать ни аппаратурные вопросы, ни вопросы проектирования программного обеспечения для коммутационных ЭВМ. Более того, поскольку анализ реальных процедур выбора маршрутов очень сложен (хотя довольно легко придумывать эффективные процедуры выбора маршрутов) [46] и очень трудно проводить анализ различных интересных для практики процедур управления потоками [25, 60, 85, 90] (изобретение эффективных процедур управления потоками — сложная задача), мы несколько ограничим рассмотрение этих вопросов. Наконец, важное топологическое проектирование сетей является обширной и трудной проблемой со своими собственными методами [37—39]; оно будет кратко рассмотрено в разд. 5.10. Сосредоточим внимание на трех основных задачах проектирования: 1) выборе пропускных способностей каналов $\{C_i\}$; 2) выборе потоков в каналах $\{\lambda_i\}$; 3) выборе топологии. Все входящие в них параметры можно варьировать с целью улучшения характеристики сети. Отметим, что в любой реальной сетевой задаче понятие оптимального построения сети является чрезвычайно трудным; однако мы позволим себе определить одномерный критерий качества системы (среднюю задержку сообщения T) и попытаемся минимизировать его (и тем самым минимизировать работу сети). Этот подход позволит сделать важные качественные утверждения относительно проектирования сети и ее характеристики. Естественно, что любая задача оптимизации должна включать некоторые стоимостные ограничения, поэтому считается, что на стоимость накладывается ограничение (5.14). Таким образом, имеются характеристики сети T , стоимостное ограничение D и три варьируемых при проектировании «параметра»: $\{C_i\}$, $\{\lambda_i\}$ и топология. Здесь следует более детально обсудить, в каком смысле множество $\{\lambda_i\}$ варьируется при проектировании. Мы установим, что процедура выбора маршрутов, действуя на трафик сообщений, определит это множество величин в любой реальной сети. Однако процедуру выбора маршрутов для рассматриваемой модели выберем так, как в разд. 1.6, где r_{ij} дает долю трафика, который выходит из узла i по каналу, соединяющему узлы i и j .

(При фиксированной процедуре выбора маршрутов эта доля равна либо 0, либо 1 в зависимости от места возникновения и места назначения этого трафика сообщений.) При этом подразумевается, что оптимальный выбор трафика в канале $\{λ_i\}$ включает отыскание для каждой линии таких теоретических средних интенсивностей потоков сообщений, которые дают минимальную среднюю задержку сообщения; процедура выбора маршрутов, которая фактически приводит к этим значениям трафика в каналах, не описывается (в общем случае аналитическое решение такой задачи очень трудно получить).

Определим теперь четыре задачи оптимизации, которые отличаются только множеством переменных, варьируемых при проектировании. В каждой из этих задач считается, что заданы положения узлов, требования к внешнему трафику $γ_{jk}$, стоимости каналов $d_i(C_i)$, постоянные D и $μ$, а также предполагается, что используемые потоки $\{λ_i\}$ являются реализуемыми (т. е. они согласуются с пропускными способностями и ограничениями на внешний трафик, а также удовлетворяют закону сохранения). Первая задача — это выбор пропускных способностей (ВПС).

Задача ВПС

Дано: потоки $\{λ_i\}$ и топология сети.
 Минимизировать: T .
 Варьируются: $\{C_i\}_M$.

Ограничение: $D = \sum_{i=1}^M d_i(C_i)$.

Вторая задача — задача распределения потоков (РП).

Задача РП

Дано: пропускные способности $\{C_i\}$ и топология сети.

Минимизировать: T .

Варьируются: $\{λ_i\}$.

Третья задача — задача выбора пропускных способностей и распределения потоков (ВПС и РП).

Задача ВПС и РП

Дано: топология сети.

Минимизировать: T .

Варьируются: $\{C_i\}_M$ и $\{λ_i\}$.

Ограничение: $D = \sum_{i=1}^M d_i(C_i)$.

Последняя четвертая задача — задача *выбора топологии, пропускных способностей и распределения потоков* (ВТПС и РП).

Задача ВТПС и РП

Минимизировать: T .

Варьируются: топологические варианты, $\{C_i\}$ и $\{\lambda_i\}$.

Ограничение: $D = \sum_{i=1}^M d_i(C_i)$.

Эти четыре задачи в настоящее время решены с различной степенью полноты, которая сильно зависит от вида стоимостных функций $d_i(C_i)$. Сначала рассмотрим простейший случай непрерывных линейных стоимостей, затем еще поддающийся анализу случай непрерывных вогнутых стоимостей и, наконец, трудный случай дискретных стоимостных функций, в которых допустимые пропускные способности каналов берутся из дискретного множества. Задача ВПС рассматривается в разд. 5.7¹⁾, задача РП — в разд. 5.8, задача ВПС и РП — в разд. 5.9¹⁾, а задача ВТПС и РП — в разд. 5.10¹⁾. Сначала, однако, рассмотрим задачу *анализа*, которую следует решить до задачи оптимизации.

5.6. АНАЛИЗ ЗАДЕРЖКИ

Этот раздел посвящен отысканию выражения для средней задержки сообщения T . Эта задержка ранее уже была выражена равенством (5.15) через пути источник — адресат по сети. По предположению, рассматривается фиксированная процедура выбора маршрутов. (Несмотря на то что используемые методы пригодны также для случайной и детерминированной, допускающей альтернативы процедур выбора маршрутов, проводимый ниже анализ *не* распространяется на случай адаптивных процедур выбора маршрутов.)

Обозначим через π_{jk} путь, по которому идут сообщения, возникающие в узле j и имеющие в качестве узла назначения узел k (трафик $j-k$). Говорят, что i -й канал (с пропускной способностью C_i) включен в путь π_{jk} , если сообщения, идущие по этому пути, проходят указанный канал; при этом используется обозначение $C_i \in \pi_{jk}$. Поэтому ясно, что средняя интенсивность потока сообщений λ_i в i -м канале должна равняться сумме средних интенсивно-

¹⁾ Отметим, что эти три задачи можно было бы выразить в двойственной форме, а именно минимизировать D при фиксированной (или максимально допустимой) задержке T . Эти двойственные задачи рассматриваются в разд. 5.9 и 5.10, где показано, что они имеют решения, соответствующие первоначальным задачам, сформулированным выше.

стей потоков сообщений по всем путям, которые проходят через этот канал, т. е.

$$\lambda_i = \sum_j \sum_k \gamma_{jk} \quad (5.16)$$

$j, k : C_i \in \pi_{jk}$

Кроме того, заметим, что Z_{jk} представляет собой сумму средних задержек, испытываемых сообщением при передаче по различным каналам пути π_{jk} . Эти слагаемые являются задержками отдельных каналов, и, таким образом, приходим к определению

$T_i = E$ [время, затраченное на ожидание и процесс передачи по i -му каналу].

Итак, T_i является так называемым средним временем, проведенным сообщением в системе, где под системой понимается i -й канал (обслуживающий прибор) и очередь сообщений, стоящая перед этим каналом. Это среднее время, проведенное сообщением в системе, соответствует времени T , используемому при рассмотрениях одноузловых ситуаций, однако здесь обозначение T принято для средней задержки в сети и поэтому средняя задержка для данного канала в сети имеет подстрочный индекс. Таким образом, можно записать

$$Z_{jk} = \sum_{i : C_i \in \pi_{jk}} T_i.$$

Следовательно, из формулы (5.15) получаем

$$T = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_{jk}}{\gamma} \sum_{i : C_i \in \pi_{jk}} T_i.$$

Изменим теперь порядок суммирования; тогда, как обычно бывает при изменении порядка суммирования, условие на i становится соответствующим условием на пару j, k ; в результате будем иметь

$$T = \sum_{i=1}^M \frac{T_i}{\gamma} \sum_j \sum_k \gamma_{jk} \quad (5.16)$$

$j, k : C_i \in \pi_{jk}$

Используя соотношение (5.16), окончательно получаем¹⁾

$$T = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} T_i. \quad ■ (5.17)$$

¹⁾ Заметим, что это выражение также можно получить, используя следующим образом результат Литтла. Среднее число сообщений, ожидающих или использующих i -й канал, равно $\lambda_i T_i$. Среднее число сообщений в сети равно γT , а также оно равно сумме $\lambda_i T_i$ по всем каналам. Это дает результат (5.17).

Теперь средняя задержка сообщения *разложена* на компоненты, относящиеся к отдельным каналам, т. е. разложена по T_i ; равенство (5.17) является совершенно общим. Таким образом, рассматриваемая задача анализа свелась просто к вычислению T_i и этот подход представляется наиболее полезным при исследовании сетей.

Теперь нужно выразить среднее время, проведенное сообщением в системе, которая представляет собой отдельный канал, «глубоко погруженный» в сеть связи. Как указано в предыдущем разделе, эту задачу решал Джексон в рассматриваемых им условиях; ему удалось установить замечательный результат, что погруженный канал можно рассматривать как такой же канал, действующий независимо от сети, но с пуассоновским потоком на входе, интенсивность которого равна интенсивности, задаваемой сетью. Рассматриваемые здесь условия не столь благоприятны в силу того, что (как было указано ранее) интервалы между моментами поступления сообщений зависят от времен обслуживания¹⁾. Автор рассматривал эту задачу во всех ее деталях [63] и пришел к выводу, что желательно не только устранить эту зависимость, но и получить приближенное решение. Напомним, что к указанной зависимости приводит поступление сообщений в данный узел в некоторой последовательности и уход к некоторому другому данному каналу в той же последовательности; вместе с тем, если сообщения, уходящие из узла по данному каналу, пришли к узлу из разных каналов или если сообщения, прошедшие по одному и тому же каналу, отправляются в разные каналы, то можно надеяться, что эта зависимость должна уменьшиться. В действительности так оно и есть; как было показано с помощью многочисленных моделей, можно быть уверенным, что для сетей со средней связанностью справедливо следующее предположение²⁾.

Предположение о независимости. Всякий раз, когда сообщение принимается в узле внутри сети, независимо с плотностью распределения

$$p(b) = \mu e^{-\mu b}, \quad b \geq 0,$$

выбирается его новая длина \tilde{b} .

Таким образом, утверждается, что всякий раз, когда сообщение принимается в узле, показательное распределение используется для порождения новой длины. Это утверждение, очевидно, не-

¹⁾ Случай M тандемных каналов рассматривался в работе [63]; некоторые результаты можно получить при $M \rightarrow \infty$ (см. задачу 5.3). Более того, в случае сообщений постоянной длины тандемные каналы допускают точное решение (см. [99] и задачу 5.4).

²⁾ В частности, имеется в виду, что большинство узлов должно иметь более чем один входной канал и более чем один выходной канал.

верно, так как сообщения сохраняют длину при их прохождении по сети, но, как показано, влияние этого предположения на характеристику T пренебрежимо мало в большинстве сетей, представляющих интерес, поэтому оно будет принято и использовано в дальнейшем анализе.

Пользуясь этим предположением о независимости, мы опять возвращаемся к сетям, рассмотренным Джексоном, и можем применить наши вычисления, относящиеся к одиночному каналу. В рассматриваемом случае i -й канал теперь можно представить в виде системы $M/M/1$ с пуссоновским потоком интенсивности λ_i на входе и показательным временем обслуживания со средним $1/\mu C_i$ секунд. Что же может быть проще! Решение для T_i сразу получается из равенства (1.60):

$$T_i = \frac{1}{\mu C_i - \lambda_i}, \quad (5.18)$$

и поэтому, согласно (5.17), имеем

$$T = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \left[\frac{1}{\mu C_i - \lambda_i} \right]. \quad ■ (5.19)$$

Таким образом, T_i ведет себя в основном так, как показано на фиг. 1.1. Последнее равенство и (или) равенство (5.17) завершают основную часть нашего анализа сетей связи. Эти равенства используются в следующих разделах при оптимизации.

Очевидно, что при получении основного результата мы пренебрегли рядом факторов; например, предполагалось, что $K=0$ и $P_i=0$ (напомним, что K — время обработки в узле, P_i — время распространения). При применениях этого анализа к какой-нибудь реальной сети эти переменные наряду с другими должны быть приняты во внимание. Рассмотрим применение этих результатов к сети ARPANET. В этом случае по сети движется не только трафик сообщений, но и некоторый трафик управления. Полученный результат для системы $M/M/1$ дает задержку сообщения истинного трафика сообщений в отдельном канале; естественно, эта задержка состоит из двух величин, а именно времени ожидания в очереди и времени обслуживания. Время обслуживания имеет среднее значение, связанное со средней длиной истинного трафика данных, а время ожидания обусловлено интерференцией со всем другим трафиком в сети и состоит частично из времени, зависящего от трафика данных, и частично из времени, зависящего от трафика управления. Поэтому разделим эти две составляющие задержки и используем для каждой из них соответствующие параметры. Обозначим через $1/\mu$ среднюю длину пакета данных, а через $1/\mu'$ — среднюю длину всех пакетов;

тогда более точное выражение для T_i в случае сети ARPANET имеет вид¹⁾

$$T_i = \frac{\lambda_i/\mu' C_i}{\mu' C_i - \lambda_i} + \frac{1}{\mu C_i}.$$

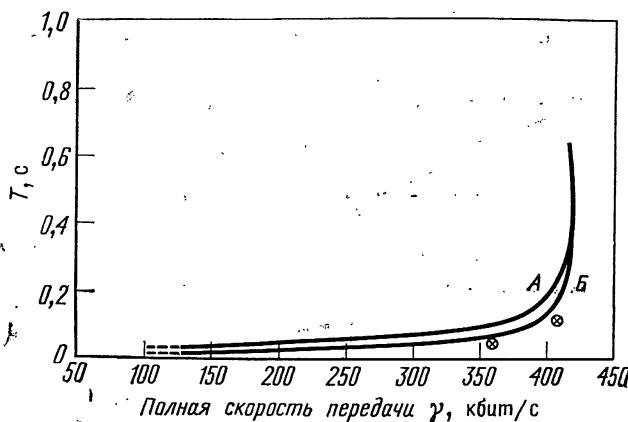
Очевидно, что при $\mu' = \mu$ выражение сводится к (5.18). Если учесть здесь время обработки в узле K и время распространения в канале P_i , то для сети ARPANET можно получить следующее выражение для средней задержки сообщения:

$$T = K + \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \left[\frac{\lambda_i/\mu' C_i}{\mu' C_i - \lambda_i} + \frac{1}{\mu C_i} + P_i + K \right]. \quad ■ (5.20)$$

Сумма в квадратных скобках представляет собой новое выражение для T_i , а дополнительное слагаемое K возникло из-за того, что сообщения при их движении по сети проходят число узлов на один больше, чем число каналов. Заметим, что в случае $K = P_i = 0$ и $\mu' = \mu$ это выражение сводится к основному результату (5.19). К рассмотрению модели для задержки мы вернемся в гл. 6.

Используя этот анализ задержки [(5.20) или (5.19)], можно сделать количественные предсказания и некоторые феноменологические выводы в отношении средней задержки сообщения в сетях. В частности, если предположить, что множество C_i и P_i относительно однородно, то при увеличении нагрузки на сеть никакое слагаемое в выражении для задержки не будет доминирующим до тех пор, пока поток в одном из каналов (например, i_0 -м) не достигнет пропускной способности этого канала, который соответствует узкому месту сети. В этой точке член T_{i_0} и, следовательно, T быстро растут. Выражение для задержки при этом определяется членом T_{i_0} , и величина T имеет порог; до этого порога величина T остается относительно постоянной, а при приближении к нему резко возрастает. Поэтому следует ожидать, что средняя задержка в сетях более резко меняется, чем средняя задержка системы М/М/1, показанная на фиг. 1.1. Рассмотрим точность этих предсказаний с помощью графика функции (5.20) для 10-узлового ($N=10$) варианта сети ARPANET, полученного с помощью фиг. 5.20, в удалением пяти правых процессоров IMP. В проводимых здесь вычислениях считается, что $K \approx 1$ мс, $v \approx 150\,000$ миля/с и трафик между парами узлов од-

¹⁾ Очевидно, что теперь интенсивность трафика в линиях λ_i нужно подстроить так, чтобы принять в расчет трафик управления. Более того, в данных ниже результатах моделирования наши предыдущие оценки приводят к использованию значений $1/\mu = 660$ бит и $1/\mu' = 350$ бит. Последние измерения показывают, что $1/\mu \approx 411$ бит (в которых 168 бит избыточные из-за заголовков, проверочных битов и пр.) и $1/\mu' = 268$ бит (опять включая 168 избыточных бит); см. гл. 6.

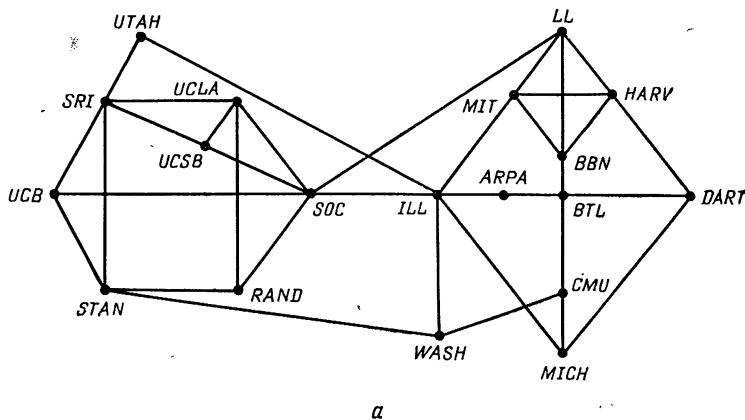


Фиг. 5.22. Зависимость задержки от скорости передачи.

A — пакеты длины 1000 бит без учета избыточности; *B* — пакеты длины 500 бит без учета избыточности.

нороден: $\gamma_{ki} = \gamma [N/(N-1)]$. Это приводит к кривым, показанным на фиг. 5.22 [40, 41]. Кривая *A* получена в предположении, что пакеты имеют постоянную длину 1000 бит¹⁾, а кривая *B* построена для пакетов с показательно распределенными длинами и средним значением 500 бит; в обоих случаях избыточность не учитывалась. Отметим, что средняя задержка остается относительно малой и постоянной, если общая скорость передачи чуть больше 400 кбит/с. После этого задержка быстро возрастает. На фигуре крестиками в кружках показаны результаты моделирования, выполненного с реальной процедурой выбора маршрутов. Моделирование не учитывало любые избыточности в сети и проводилось для пакетов фиксированной длины 1000 бит. Видно, что оценки задержки, полученные путем моделирования и из формул, довольно близки друг к другу. И те и другие точно определяют вертикальный участок кривой задержки в диапазоне 400 кбит/с; он получался из формулы, которая предсказывала бесконечную задержку, и из результатов моделирования, когда процедура управления решительно отвергала допуск дальнейшего входного трафика, если в сети возникала перегрузка.

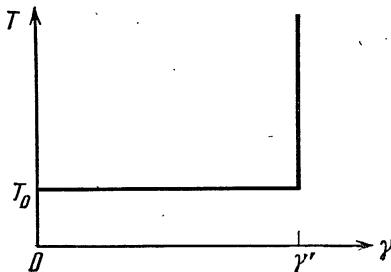
¹⁾ Легко можно провести расчет для случая непоказательных длин пакетов с помощью формулы Поллячека — Хинчина для среднего значения [т. е. с помощью уменьшенного в два раза первого слагаемого в квадратных скобках формулы (5.20), приведенного там для случая пакетов постоянной длины; ср. равенства (1.59) и (1.82)]. При этом здесь проявляется слишком большая смелость, так как мы превращаем систему $M/M/1$ в систему $M/G/1$, для которой результат Джексона [т. е. (1.76)] не применим; однако это приближение приводит к модели, которая очень хорошо согласуется с моделированием на ЭВМ.



Фиг. 5.23. Анализ задержки путем моделирования.

а — использованная при моделировании сеть с 19 узлами; *б* — задержка однопакетного сообщения в зависимости от нагрузки в сети.

Было проведено более тщательное моделирование, при котором не только предполагалось более реальное распределение длин сообщений (ведущее к модели на основе системы $M/G/1$), но и в процессорах IMP учитывалась внутренняя система приоритетов (в которой квитанции обладали приоритетом перед трафиком данных), использующая обслуживание в порядке приоритетов и равенства (3.31). Результаты моделирования приведены на фиг. 5.23, б; они относятся к показанной на фиг. 5.23, а сети типа ARPANET с 19 узлами [47]. На фиг. 5.23, б точки



Фиг. 5.24. Упрощенная пороговая модель.

соответствуют данным моделирования, а кривая построена с помощью равенства (5.20), модифицированного для модели на основе системы $M/G/1$ (имеющей распределение длин сообщений, которое было использовано при моделировании) с приоритетами; здесь совпадение результатов очень хорошее. Масштаб по горизонтальной оси γ выбран с точностью до произвольного множителя. Еще раз отметим наличие резкого порога.

Это пороговое поведение приводит к упрощенной детерминированной модели (с непрерывным потоком) для задержки в сетях ЭВМ. Существенным здесь является то, что задержка до некоторого порога относительно постоянна, а затем неограниченно возрастает. Упрощенное поведение задержки показано на фиг. 5.24. На этой фигуре задержка представлена в зависимости от двух основных параметров системы. Первый параметр — постоянная задержка T_0 , которую испытывают сообщения, если нагрузка сети γ находится в области устойчивости ($\gamma < \gamma^*$); второй параметр — нагрузка насыщения сети γ^* , при которой $T \rightarrow \infty$. Задержка T_0 подсчитывается как задержка в отсутствие нагрузки и соответствует задержке, которую испытывают сообщения, проходящие через незагруженную сеть. Например, если в качестве модели используется (5.19), то

$$T_0 = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \frac{1}{\mu C_i}. \quad (5.21)$$

Это равенство взято в предельной форме, когда λ_i и γ стремятся к 0; ясно (как будет показано), что при этом отношение λ_i/γ стремится к пределу, который легко определить. Подобный же результат применим к модели (5.20). Для определения указанного предела введем сначала понятие *длины пути*. Определим

$$n_{jk} = \text{длина пути } \pi_{jk},$$

где под длиной понимается число каналов в пути. Представляет интерес величина \bar{n} , которая определяется как средняя длина

пути и выражается равенством

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_{ik}}{\gamma} n_{jk}.$$

Ясно, что величина \bar{n} должна быть инвариантной по отношению к уровню трафика, если этот уровень меняется путем умножения всех γ_{ik} на один и тот же масштабный коэффициент; это умножение влияет на нагрузку сети γ . Рассмотрим теперь полный трафик в сети λ . Отметим, что вклад трафика $j-k$ в полный трафик равен $\gamma_{jk}n_{jk}$, так как γ_{jk} сообщений в секунду пройдут n_{jk} участков при движении по сети. Следовательно, имеем

$$\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma_{jk} n_{jk}.$$

Последние два равенства показывают, что средняя длина пути легко выражается в виде

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\gamma}. \quad ■ (5.22)$$

Этот общий для всех таких сетей результат установлен в 1964 г. [63]. Вернемся теперь к равенству (5.21) и выразим T_0 через среднюю длину пути:

$$T_0 = \bar{n} \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i / \lambda}{\mu C_i}.$$

Заметим, что отношение λ_i / λ остается постоянным (не зависит от нагрузки в сети γ) и является функцией лишь процедуры выбора маршрутов. Это дает метод вычисления задержки в отсутствие нагрузки T_0 для упрощенной пороговой модели.

Отыскание нагрузки насыщения сети γ^* выполняется непосредственно. Она соответствует наименьшему значению γ , при котором насыщается некоторый (критический) канал; в соответствии с введенными ранее понятиями это точка, в которой выполняется равенство $\lambda_{i_0} = \mu C_{i_0}$, где i_0 — номер критического канала (узкого места сети). Поэтому при заданной фиксированной процедуре выбора маршрутов можно просто найти множество $\{\lambda_i\}$ с помощью формулы (5.16) при любом значении γ ; после этого нужно просмотреть все отношения $\lambda_i / \mu C_i$ и определить i_0 по наибольшему из этих отношений. Напомним, что все γ_{ik} (и, следовательно, λ_i) имеют один и тот же масштабный коэффициент, такой же как у γ . Масштабный коэффициент выбирается теперь так, чтобы $\lambda_{i_0} = \mu C_{i_0}$. Значение пропускной способности γ , при котором это равенство будет иметь место, равно γ^* .

Эта двупараметрическая упрощенная пороговая модель описывает поведение сети в первом приближении. Однако в любой реальной сети ЭВМ процедура выбора маршрутов обычно зависит от текущего трафика (т. е. является адаптивной), в результате, если какой-либо отдельный канал достигает точки насыщения, трафик направляется к месту назначения по другим путям сети. Если трафик направляется по оптимально выбранному маршруту, то γ^* можно найти, так же как и выше, после отыскания трафика в каналах $\{\lambda_i\}$. Заметим, что этот метод вычисления γ не эквивалентен отысканию максимального потока, который сеть может переносить между данной парой узлов, так как при этих вычислениях изменяется матрица трафика. Вместе с тем отыскание максимального потока весьма важно, и его можно выполнить с помощью хорошо известной теоремы о максимальном потоке и минимальном сечении [38]. Согласно этой теореме, максимальный поток, который сеть может переносить между некоторым источником (узлом) s и адресатом (узлом) t , равен величине минимального сечения $s-t$ (определенного ниже). Рассмотрим более подробно эту процедуру. Любая совокупность ребер, при устраниении которой из сети прерывается весь трафик от источника s к адресату t , называется сечением $s-t$. Пропускная способность сечения представляет собой полный поток, который устранные ребра могут переносить в направлении от источника s к адресату t . Минимальным сечением $s-t$ называется сечение, которое имеет наименьшую пропускную способность. Теперь можно сформулировать хорошо известный алгоритм надписывания для нахождения максимального потока между данными источником и адресатом в сети. С этой целью примем следующие обозначения:

$c(x, y)$ — пропускная способность ребра (канала), соединяющего узлы x и y ;

$f(x, y)$ — поток, в настоящий момент приписанный этому ребру (выраженный в битах в секунду);

Γ — множество ребер сети;

(i, j) — ребро, направленное из узла i в узел j ;

s — узел источника (начальный узел);

t — узел адресата (конечный узел).

Пусть сначала $f(x, y) = 0$ для всех ребер. Алгоритм разбивается на две части.

ПРАВИЛО НАДПИСЫВАНИЯ

- Надписать узел s следующим образом: $[s, +, e(s) = \infty]$. Узел s теперь надписан и не просмотрен, а остальные узлы не надписаны и не просмотрены. Перейти к шагу 2.
- Выбрать любой надписанный и непросмотренный узел x .

- а) Какой-либо узел y , такой, что $(x, y) \in \Gamma$, y — ненадписанный узел и $c(x, y) > f(x, y)$, надписать $[x, +, e(y)]$, где $e(y) = \min[e(x), c(x, y) - f(x, y)]$. Теперь y — надписанный и не просмотренный узел.
- б) Какой-либо узел y , такой, что $(y, x) \in \Gamma$, y — ненадписанный узел и $f(y, x) > 0$, надписать $[x, -, e(y)]$, где $e(y) = \min[e(y), f(y, x)]$. Теперь y — надписанный и непросмотренный узел.

Повторять пп. «а» и «б» пока не будут исчерпаны все y , затем изменить надпись узла x путем инверсии второй (плюс, минус) позиции надписи. Перейти к шагу 3.

3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока узел t не будет надписан (в этом случае перейти к правилу приращения) или пока нельзя будет сделать ни одной надписи. В последнем случае алгоритм оканчивается и поток, указанный в сети, представляет собой максимальный поток из узла s в узел t .

ПРАВИЛО ПРИРАЩЕНИЯ

1. Положить $z=t$ и перейти к шагу 2.
2. Если надпись на узле z есть $[q, +, e(t)]$, то увеличить $f(q, z)$ на $e(t)$. Если надпись на узле z есть $[q, -, e(t)]$, то уменьшить $f(z, q)$ на $e(t)$. Перейти к шагу 3.
3. Если $q=s$, стереть все надписи на узлах [но сохранить все потоки $f(x, y)$] и вернуться к шагу 1 правила надписывания. В остальных случаях положить $z=q$ и вернуться к шагу 2 правила приращения.

Этот алгоритм дает максимальный поток между s и t (и следовательно, пропускную способность минимального сечения $s-t$).

Таким образом, на практике в соответствии с результатами аналитического анализа и моделирования сети ARPANET среднее время ожидания в очередях остается малым (почти таким же, как в ненагруженной сети), пока трафик в сети не достигнет пропускной способности некоторого сечения. После этого задержка быстро возрастает, демонстрируя наличие порога. Таким образом, можно сделать вывод, что до тех пор, пока трафик достаточно слабый, а процедура выбора маршрутов достаточно адаптивна, чтобы предотвратить преждевременное насыщение сечений путем направления трафика по путям с неиспользованной до конца пропускной способностью, времена ожидания в очередях в сетях небольшие; это верно при условии, что T_0 приемлемо.

На этом заканчивается рассмотрение задачи анализа¹⁾. Обра-

¹⁾ Следует указать, что многие интересные задачи, связанные с очередями, остаются нерешенными [63], но они не рассматриваются здесь, так как мы, используя приближенный инженерный подход, стараемся избегать трудностей.

тимся теперь к четырем задачам оптимизации, сформулированным в предыдущем разделе. Начнем с задачи выбора пропускных способностей.

5.7. ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ

Одной из наиболее трудных проблем проектирования является оптимальный выбор пропускных способностей из *конечного* набора их возможных значений. Как это ни трудно себе представить, на самом деле такая проблема всегда имеет место при проектировании сетей. Несмотря на то что существует много эвристических подходов к этой проблеме, ощущается недостаток в ее точных аналитических решениях (см. [14], где указан алгоритм отыскания оптимального набора). Можно предложить разумные (и даже оптимальный) наборы дискретных пропускных способностей, например, для сетей с 200 узлами, но так как эти данные получаются численными методами, то мало что прояснится в отношении связи между такими наборами пропускных способностей, задержкой сообщения и стоимостью. Для того чтобы изучить теоретические свойства оптимального набора пропускных способностей, прежде всего не будем учитывать ограничение, что пропускные способности могут принимать значения лишь из дискретного множества, и предположим, что они могут иметь любые неотрицательные значения.

С этим предположением ниже решается задача ВПС для сети с заданными и известными топологией и потоками $\{\lambda_i\}$. Заметим, что λ_i/μ — есть среднее число битов в секунду, которые проходят по i -му каналу, и, следовательно, любое реализуемое решение задачи ВПС должно быть таким, чтобы i -й канал имел пропускную способность, не меньшую указанной величины. Конечно, это очевидно из равенств (5.19) и (5.20). С точки зрения задержки не столь существенно, *каким образом* распределяется избыточная по отношению к потоку пропускная способность; важно, чтобы выполнялось основное условие $C_i > \lambda_i/\mu$.

Начиная с рассмотрения линейных стоимостных функций пропускных способностей, а именно

$$d_i(C_i) = d_i C_i, \quad (5.23)$$

где d_i — стоимость в расчете на единицу пропускной способности для i -го канала¹⁾. Отметим, что стоимостный коэффициент d_i

¹⁾ На самом деле столь же просто можно рассмотреть случай суммы линейной и постоянной стоимостей, т. е. $d_i C_i + d_0$, где d_0 — дополнительные постоянные затраты на построение канала с любой ненулевой ($C_i > 0$) пропускной способностью. Этот случай включается в наше рассмотрение, если, учитывая (5.14), заметить, что фактически действует ограничение $D' = D - M d_0 = \sum_{i=1}^M d_i C_i$, эквивалентное линейной стоимостной функции (5.23) при замене D на D' .

может произвольно меняться в зависимости от какого-либо параметра канала, но он должен линейно зависеть от пропускной способности; например, d_i часто берется пропорциональным физической длине канала (т. е. расстоянию между его концами).

Ниже при изучении теоретических свойств оптимального набора пропускных способностей используется величина T , представленная равенством (5.19). Для минимизации T составим функцию Лагранжа [54]:

$$G = T + \beta \left[\sum_{i=1}^M d_i C_i - D \right].$$

Очевидно, что если найти минимальное значение G при вариации пропускных способностей $\{C_i\}$, то тем самым будет получено решение задачи ВПС, так как выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю. (Множитель β будет определен ниже.) Как обычно, используя метод Лагранжа, получаем следующую систему M уравнений:

$$\frac{\partial G}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Она дает

$$\left(-\frac{\lambda_i}{\gamma} \right) \frac{\mu}{(\mu C_i - \lambda_i)^2} + \beta d_i = 0,$$

или

$$C_i = \frac{\lambda_i}{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\beta \gamma \mu}} \left(\frac{\lambda_i}{d_i} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (5.24)$$

Если найти постоянную β , то это выражение будет решением; найдем β , составив ограничение путем умножения последнего равенства на d_i и суммирования по i :

$$\sum_{i=1}^M d_i C_i = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i d_i}{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\beta \gamma \mu}} \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i d_i}.$$

Видно, что левая часть равенства равна D ; поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{\beta \gamma \mu}} = \frac{D - \sum_{i=1}^M (\lambda_i d_i / \mu)}{\sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i d_i}}.$$

Определяя добавочную стоимость в долларах D_e как

$$D_e \triangleq D - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i d_i}{\mu} \quad (5.25)$$

и используя последние два равенства вместе с (5.24), приходим к оптимальному решению (линейной) задачи ВПС:

$$C_i = \frac{\lambda_i}{\mu} + \left(\frac{D_e}{d_i} \right) \frac{\sqrt{\lambda_i d_i}}{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j}}, \quad i=1, 2, \dots, M. \quad ■ (5.26)$$

При таком наборе пропускных способностей каждый канал будет иметь по крайней мере пропускную способность λ_i/μ (т. е. минимальное требуемое значение) и, кроме того, некоторую дополнительную пропускную способность. Отметим, что стоимость минимальной пропускной способности i -го канала равна $\lambda_i d_i / \mu$ долларов; взяв сумму по всем каналам, можно заметить, что полная стоимость в долларах должна быть больше этой суммы, если нужно получить конечную среднюю задержку в проектируемой сети. Разность между полной стоимостью и минимальной допустимой величиной равна D_e и задается равенством (5.25), поэтому величина D_e названа добавочной стоимостью. Как следует из формулы (5.26), эта добавочная стоимость сначала нормируется с помощью стоимостного коэффициента d_i и затем распределяется по всем каналам пропорционально корню квадратному из взвешенной интенсивности трафика $\lambda_i d_i$. Такой оптимальный набор пропускных способностей называется набором пропускных способностей по закону квадратного корня [63].

Если подставить выражение для C_i в (5.19), то получим

$$T = \frac{\bar{n}}{\mu D_e} \left[\sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\lambda_i d_i}{\lambda}} \right]^2. \quad ■ (5.27)$$

Это равенство дает минимальную среднюю задержку сети, пропускные способности в которой выбраны оптимально. Отметим, что D_e играет здесь важную роль; при $D_e \rightarrow 0$ средняя задержка сообщения неограниченно возрастает. Если $D_e > 0$, задача ВПС имеет реализуемое (осуществимое) решение (т. е. $T < \infty$); это условие является условием устойчивости (стабильности) системы. Если $D_e \leq 0$, задача не имеет реализуемого решения. Два последних равенства дают полное решение задачи ВПС в случае линейных стоимостей.

В частном случае, имеющем большое значение, $d_i = d$ (одна и та же постоянная величина для каждого канала), при этом не теряя общности можно положить $d = 1$. Этот случай имеет место при рассмотрении спутниковых каналов связи¹⁾, в которых расстояние между любыми двумя точками на Земле в зоне спутника по существу является одинаковым независимо от расстояния меж-

¹⁾ Спутник считается геостационарным. — Прим. ред.

ду этими двумя точками на поверхности Земли. Заметим, что здесь $D = \Sigma C_i$; это сумма всех пропускных способностей сети, которую также можно обозначить через C и считать, что она выражена в битах за секунду. Теперь два основных результата — один для набора пропускных способностей и другой для задержки — имеют вид

$$C_t = \frac{\lambda_i}{\mu} + C(1 - \bar{n}_0) \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j}}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad \blacksquare \quad (5.28)$$

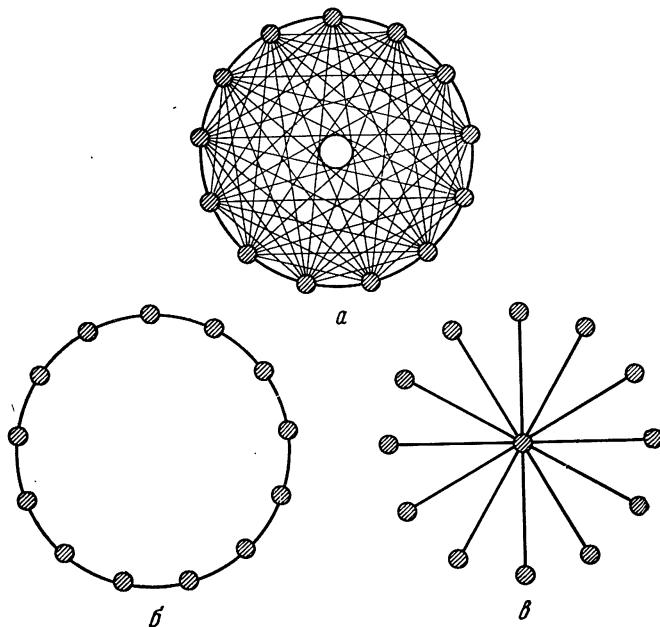
$$T = \frac{\bar{n} \left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i / \lambda} \right)^2}{\mu C (1 - \bar{n}_0)}, \quad \blacksquare \quad (5.29)$$

где по определению

$$\rho \triangleq \frac{\gamma/\mu}{C}$$

Величина ρ просто равна отношению γ/μ (средней скорости, с которой биты входят в сеть от внешних источников) к C (суммарной пропускной способности сети)¹⁾. Выражение для T в этом случае весьма наглядно. Сначала отметим, что T является строго возрастающей функцией \bar{n} (средней длины пути). Это замечание наводит на мысль, что топологическую структуру сети, видимо, следует выбрать так, чтобы получить минимальную среднюю длину. Последнее, естественно, достигается в *полносвязанной* сети (каждая пара узлов в ней соединена каналом связи). Пример такой сети показан на фиг. 5.25, а. Кроме того, если рассмотреть сумму в числителе T , то можно найти, что она минимизируется по множеству $\{\lambda_i/\lambda\}$, когда одна из этих величин равна единице, а все остальные — нули. Сумму в числителе нельзя минимизировать таким образом, так как при этом весь трафик будет идти по одному каналу, а остальные каналы будут простаивать (такая сеть очень невыгодна). Однако суммирование подсказывает, что нужно посыпать большую часть трафика по нескольким высокоскоростным каналам и лишь малую часть — по остальным каналам. Обычно для связи требуются по крайней мере один входя-

¹⁾ Использование символа ρ может навести на мысль, что это коэффициент использования, но это неверно. Правильно было бы рассмотреть произведение $\bar{n}_0 = \lambda/\mu C$, так как $D_e > 0$ (критерий устойчивости и реализуемости) соответствует $\bar{n}_0 < 1$. Величина ρ введена потому, что в общем она является заданной величиной, не варьируемой при проектировании, тогда как \bar{n} меняется в зависимости от топологии и процедуры выбора маршрутов и поэтому является параметром, выбираемым при проектировании.



Фиг. 5.25. Три интересные топологии.
а — полностью связанная сеть; б — петлевая сеть; в — звездообразная сеть.

ший и один выходящий каналы для каждого узла. Такая сеть представляет собой *петлевую сеть*, или кольцо (фиг. 5.25, б); к сожалению, в этой сети средняя длина пути пропорциональна M и зависит от распределения γ_{jk} . Другая сеть, в которой также имеются один входящий и один выходящий каналы на каждый узел, за исключением центрального узла, является *звездообразной* [фиг. 5.25, в]. В этом случае достигается относительно высокая концентрация трафика на каждой линии и средняя длина пути $n \approx 2$. Теперь следует сделать выбор между полной сетью, звездообразной сетью и всеми сетями, «промежуточными» между ними. Как указано в работе [63], выбор зависит от значения ρ . При $\rho \rightarrow 0$ наиболее подходящей является звездообразная сеть, а при $\rho \rightarrow 1$ — полная сеть. Можно ожидать, что между этими двумя экстремумами приемлемую топологию даст добавление некоторых прямых каналов к звездообразной сети.

Полученные выше выводы относились к фиксированным процедурам выбора маршрутов, поэтому можно задаться вопросом о том, даст ли улучшение использование процедуры выбора маршрутов, допускающей альтернативы. Такая процедура предлагает более чем один путь для трафика, направляемого к данному мес-

ту назначения, и, кроме того, она дает упорядочение по предпочтению этих путей — обычно более длинные пути менее предпочтительны, чем прямой путь. Поэтому допускающие альтернативы процедуры выбора маршрутов приводят к увеличению длины пути для сообщений и в то же самое время они стремятся распределить трафик по многим каналам, а не концентрировать его лишь на нескольких каналах. При допускающем альтернативы выборе маршрутов нарушаются оба интуитивных правила, выведенные при анализе равенства (5.29). Более подробно эти вопросы обсуждаются в работе [63]; там же приводятся результаты моделирования, которые показывают, что следует отдать предпочтение последовательности указанных выше топологий и что фиксированные процедуры выбора маршрутов оказываются лучше процедур, допускающих альтернативы. Эти результаты получены в предположении, что величины γ_{jk} известны и постоянны. Если они либо неизвестны, либо меняются во времени, либо имеет место и то и другое, то, как следует из формулы (5.16), нельзя найти параметры трафика в каналах λ_i и, следовательно, оптимально распределить трафик с помощью равенств типа (5.28). Таким образом, в некоторые периоды времени сеть не будет оптимальной для передачи трафика. Если рассогласование велико, то необходимо введение (адаптивной) допускающей альтернативы процедуры выбора маршрутов для поиска путей с недогруженной пропускной способностью во время этих интервалов. Таким образом, приходим к заключению, что если входные параметры (а именно γ_{jk}) известны и постоянны, то в предположении линейной стоимостной функции можно проектировать оптимальные сети в смысле выбора пропускных способностей, которые в точности соответствуют направляемому фиксированной процедурой выбора маршрутов трафику сети; вместе с тем если γ_{jk} либо неизвестны, либо меняются во времени, то можно использовать допускающую альтернативы процедуру выбора маршрутов, которая позволяет трафику приспособиться к неудачному набору пропускных способностей¹⁾.

Вернемся теперь к более общему случаю линейной стоимостной функции с произвольным множеством $\{d_i\}$. В 1971 г. было замечено [81], что при указанной выше минимизации T возможна широкая (и, может быть, нежелательная) вариация значений T_i . В результате была поставлена новая задача ВПС, в которой следует минимизировать функцию

$$T^{(k)} \triangleq \left[\sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\lambda} (T_i)^k \right]^{1/k}.$$

Выбор этой функции обусловлен тем, что большие значения T_i , возведенные в большие степени, увеличивают ее намного больше,

¹⁾ Вопрос адаптивного выбора маршрутов обсуждается в разд. 6.1.

чем ранее, так что любая процедура минимизации с $k > 1$ приведет к уменьшению разницы между T_i . Если решить теперь новую задачу оптимизации ВПС, используя $T^{(k)}$ вместо T , то получим новый оптимальный набор пропускных способностей (обозначаемых через $C_i^{(k)}$) в виде

$$C_i^{(k)} = \frac{\lambda_i}{\mu} + \frac{D_e}{d_i} \frac{(\lambda_i d_i^k)^{1/(1+k)}}{\sum_{j=1}^M (\lambda_j d_j^k)^{1/(1+k)}}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5.30)$$

и следующее выражение для характеристики $T^{(k)}$:

$$T^{(k)} = \frac{(\bar{n})^{1/k}}{\mu D_e} \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i d_i^k}{\lambda} \right)^{1/(1+k)} \right]^{(1+k)/k}. \quad (5.31)$$

Заметим, что при $k=1$ два последних результата сводятся к полученным ранее равенствам (5.26) и (5.27). Более интересно, конечно, проследить, как изменяется T в зависимости от k . Как показано в работе [81], величина T ухудшается (возрастает) лишь незначительно с увеличением k в широком диапазоне значений, а различия между T_i уменьшаются очень быстро с ростом k , приводя к требуемому результату при небольшом дополнительном увеличении задержки. Интересно рассмотреть поведение $C_i^{(k)}$ и $T^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$; имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_i^{(k)} = \frac{\lambda_i}{\mu} + \frac{D_e}{\sum_{j=1}^M d_j}, \quad (5.32)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} = \frac{\bar{n}}{\mu D_e} \sum_{j=1}^M d_j. \quad (5.33)$$

Как видно из этих равенств, в рассматриваемом пределе указанный набор пропускных способностей обеспечивает в каждом канале его минимально требуемую пропускную способность λ_i/μ плюс некоторую *постоянную* добавку. Отметим, что все T_i получаются равными и это соответствует минимаксному решению задачи, ожидаемому в пределе $k \rightarrow \infty$. При $0 \leq k < 1$ эта новая характеристика $T^{(k)}$ ведет себя диаметрально противоположно и стремится ухудшить (увеличить) различие между T_i . При рассмотрении предела $k \rightarrow 0$ получаем

$$\lim_{k \rightarrow 0} C_i^{(k)} = \frac{\lambda_i}{\mu} + \frac{\lambda_i D_e}{\bar{n} \gamma d_i}, \quad (5.34)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} T^{(k)} = \frac{\bar{n}}{\mu D_e} \sum_{j=1}^M d_j. \quad (5.35)$$

Отметим, что в этом случае пропускные способности прямо пропорциональны (при $d_i=1$) интенсивности трафиков λ_i в соответствующих каналах; такой набор пропускных способностей называется пропорциональным набором пропускных способностей и, по-видимому, очень естественно, что его следует рассматривать прежде всего¹⁾. Более интересно то, что величина T имеет одно и то же значение в этих двух экстремумах ($k=0, \infty$), хотя наборы пропускных способностей очень отличаются.

Проведем теперь обобщение, выходящее за рамки линейных стоимостных функций пропускных способностей. Мы опять хотим использовать непрерывную аппроксимацию для дискретного множества допустимых пропускных способностей каналов, но теперь найдем лучшую непрерывную аппроксимацию для истинного дискретного множества стоимостных функций. При изучении действующих тарифов, установленных службами связи на высокоскоростные телефонные каналы, было найдено, что на самом деле существует «оптовая скидка» на стоимость пропускной способности (на единицу пропускной способности канала) и эта стоимость убывает с ростом пропускной способности. В работе [65] исследовалась логарифмическая стоимостная функция

$$D = \sum_{i=1}^M d_i \log \alpha C_i \quad (5.36)$$

и было показано, что решение задачи ВПС дается пропорциональным набором пропускных способностей. Однако для сети ARPANET найдено [65], что для степенной стоимостной функции получается лучшее соответствие непрерывной аппроксимации истинному дискретному множеству²⁾, и, таким образом, приходим к рассмотрению

$$D = \sum_{i=1}^M d_i C_i^\alpha, \quad (5.37)$$

где $0 < \alpha < 1$. Если решить задачу ВПС для степенной стоимостной функции, то получим следующие уравнения для C_i (см. задачу 5.13):

$$C_i - \frac{\lambda_i}{\mu} - g_i C_i^{(1-\alpha)/2} = 0, \quad (5.38)$$

¹⁾ На самом деле пропорциональный набор пропускных способностей не далек от оптимального [63]; см. задачу 5.8.

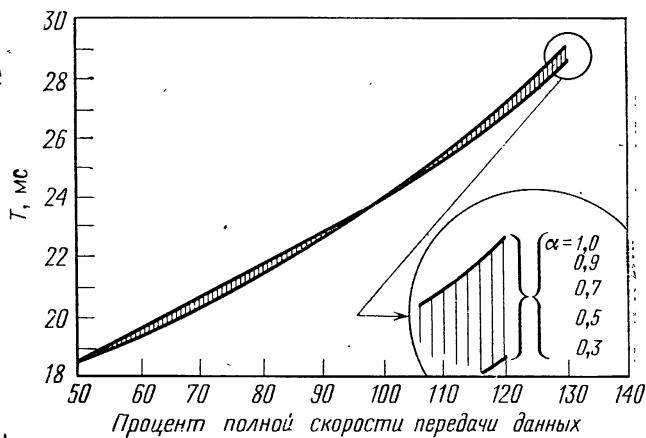
²⁾ Было замечено, что экономия, возникающая при масштабном преобразовании, видимо, имеет место для многих связных ресурсов; установлено, что среднее значение для наблюдаемых α составляет 0,44, а стандартное отклонение приближенно равно 0,10 [27].

где

$$g_i = \left(\frac{\lambda_i}{\mu \gamma \alpha \beta d_i} \right)^{1/2}, \quad (5.39)$$

а β — неопределенный множитель Лагранжа, который следует выбрать так, чтобы удовлетворялось ограничение (5.37). Уравнения для C_i можно решить с помощью любого обычного итерационного алгоритма; результаты этих вычислений для сети ARPANET приведены на фиг. 5.26 (здесь рассматривается та же сеть с 19 узлами, что и на фиг. 5.23). На фиг. 5.26 показана зависимость средней задержки сообщения T от нагрузки на сеть; кривые нормированы таким образом, чтобы они совпадали в точке полной скорости передачи данных¹⁾; заметим, что здесь приведены результаты для пяти значений α . Удивительно, что величина T слабо зависит от α (по крайней мере для рассматриваемого варианта сети ARPANET), поэтому следует проводить приближенное решение для сетей связи при $\alpha=1$ [для этого случая выше получены точные решения (5.26) и (5.27)] и не рассматривать более трудные нелинейные уравнения (5.38).

Однако, как отмечалось выше, на практике выбор пропускных способностей каналов производится из малого конечного множества. В этом случае, по-видимому, лучше всего воспользоваться методом, основанным на динамическом программировании; этот



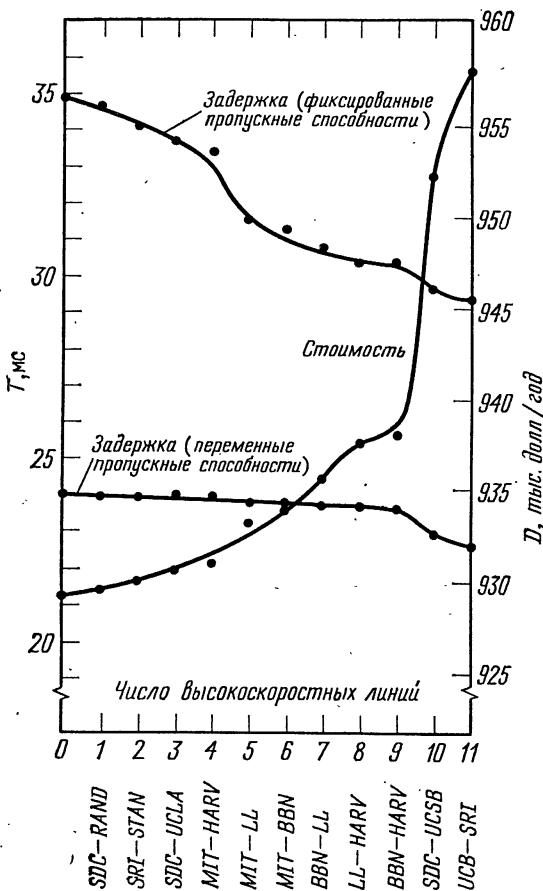
Фиг. 5.26. Средняя задержка сообщения при фиксированной стоимости как функция скорости передачи данных для степенной и линейной стоимостных функций.

¹⁾ «Полная» скорость передачи данных соответствует ранее выполненной приближенной оценке требований к истинному трафику между парами узлов; таким образом, она не является «критической» нагрузкой в каком-либо смысле.

метод подробно исследован в работе [14]. Тем не менее отметим, что рассмотренные выше процедуры непрерывной оптимизации дают средства для осуществления выбора пропускных способностей из дискретного множества. Например, в работе [64] исследована следующая процедура. В первоначальной сети ARPANET все каналы имели пропускную способность $C_i = 50$ кбит/с. Для конфигурации с 19 узлами, показанной на фиг. 5.23, можно найти среднюю задержку сообщения T (при таких фиксированных пропускных способностях) и истинную стоимость каналов в сети D . Если взять эту полную стоимость, провести оптимизацию ВПС с линейными стоимостями, используемыми как приближения к действительным дискретным стоимостям, то придем к оптимальному набору и, следовательно, к меньшей задержке, при переменных пропускных способностях. В результате оптимизации получается список «оптимальных» пропускных способностей каналов, одна из которых будет наибольшей. Предположим, что соответствующему «наибольшему» каналу в сети с каналами 50 кбит/с дается приоритет, так что его пропускная способность составит, например, 250 кбит/с; конечно, это увеличит стоимость, но в то же время снизит задержку. Затем можно продолжить эту процедуру, определяя следующий по необходимости канал, давая ему приоритет, увеличивая стоимость и т. д.; результат такого вычисления показан на фиг. 5.27, откуда видно, что линии с увеличенной пропускной способностью возникают всегда между географически близкими узлами; например, расстояние между SDC и RAND порядка одной мили. Если проследить за скорость, с которой кривая задержки при фиксированных пропускных способностях¹⁾ падает в зависимости от скорости, с которой возрастает стоимостная функция, то можно заметить, что введение десятой высокоскоростной линии (линии SDC—UCSB длиной ~ 125 миль) дает очень резкое увеличение стоимости (первый канал длиной свыше 20 миль) и незначительное уменьшение задержки; это, возможно, был неудачный выбор и не следовало в этом частном примере брать число высокоскоростных каналов, большим, чем девять. Подобный подход полезен при практическом проектировании сетей. Другие процедуры такого вида, в которых аналитические методы оптимизации подсказывают направления улучшения решения практических, но аналитически нерешаемых задач, также представляются чрезвычайно полезными.

В общем случае непосредственный выбор пропускных способностей из дискретного множества представляет собой трудную задачу динамического программирования [14]. Однако в случае,

¹⁾ Кривая задержки при переменных пропускных способностях соответствует случаю, когда полная стоимость данной конфигурации использована с оптимальным непрерывным набором в соответствии с равенствами (5.26) и 5.27).



Фиг. 5.27. Эффект добавления высокоскоростных линий 250 кбит/с.

когда топология сети имеет вид дерева, может быть использован простой и эффективный при вычислениях алгоритм, который производит оптимальный выбор пропускных способностей каналов для произвольного дискретного множества стоимостей [39].

Вспомним теперь рассмотренную в предыдущем разделе простую пороговую аппроксимацию поведения сетей. Сравним относящиеся к ней результаты с характеристикой сети со спутниковых каналами, данной формулой (5.29), где $d_i=1$ и $a=1$. Из этой формулы видно, что при увеличении ρ величина T возрастает в связи с тем, что при $\rho=1/n$ выражение для T имеет простой полюс. Таким образом, характеристика T во многом напоминает характеристику, показанную на фиг. 1.1, и совсем не

имеет порога, который наблюдался выше. Причина этого различия состоит в том, что мы оптимизировали пропускные способности и, как было указано ранее, эта оптимизация обеспечивает достаточно большую пропускную способность, равную по меньшей мере среднему потоку, который канал должен переносить; таким образом, *все каналы насыщаются при одной и той же нагрузке в сети*. Следовательно, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе, когда один из каналов преждевременно насыщается, здесь все каналы насыщаются одновременно и, следовательно, плавно. Однако из-за дискретности пропускных способностей и в связи с тем, что трафик сети неизвестен или меняется со временем, в общем случае невозможно согласовать пропускные способности каналов с предсказываемыми потоками в каналах. Вместо этого пропускные способности выбираются на основе разумных оценок среднего или пикового трафика, и на процедуру выбора маршрутов возлагается задача разрешить трафику использовать свободную пропускную способность. Очень часто, когда трафик между двумя машинами HOST весьма интенсивен, насыщается одно или более критических сечений сети. В таких случаях процедура выбора маршрутов не сможет послать дополнительный поток через эти сечения и поэтому будет иметь место преждевременное насыщение одного или небольшого множества каналов, что приведет к появлению порога; это наиболее часто встречающаяся ситуация.

Итак, задача оптимального ВПС решена лишь в некоторых частных случаях, зависящих от стоимостной функции пропускных способностей $d_i(C_i)$. Для линейных стоимостных функций получены точное решение [см. (5.26) и (5.27)], дающее набор пропускных способностей по закону квадратного корня, а также обобщенное решение для $C_i^{(k)}$ [см. (5.30) и (5.31)]. В случае логарифмических стоимостных функций обоснован пропорциональный набор пропускных способностей. Для степенных стоимостных функций найдено (численное) решение, задаваемое (5.38). В случае реальных дискретных стоимостных функций были использованы эвристические решения или (трудоемкие) численные процедуры.

5.8. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ

В задаче оптимизации ВПС требовалось оптимально выбрать пропускные способности каналов при заданной конфигурации потоков $\{\lambda_i\}$. В этом разделе рассматривается обратная задача — задача распределения потоков (РП), в которой считается, что пропускные способности заданы, а потоки нужно определить так, чтобы минимизировать среднюю задержку. Ранее было сделано замечание, что допускающие альтернативы процедуры выбора

маршрутов¹⁾, дающие более одного пути для трафика $j-k$, оказываются хуже фиксированных процедур выбора маршрутов, в которых предполагается только один путь для этого трафика. Это замечание было основано на предположении, что пропускные способности можно выбрать так, чтобы удовлетворить требованиям трафика. В этом разделе рассматривается ситуация, когда пропускные способности заданы, а потоки должны быть оптимально согласованы; поэтому, вероятно, может возникнуть необходимость обеспечить более одного пути для трафика $j-k$, так как, например, очевидно, что если $\gamma_{jk}/\mu > C_i$ (где C_i — пропускная способность прямого канала, соединяющего узлы j и k), то требуется более чем один путь для передачи потока $j-k$.

В качестве исходного выражения для характеристики T здесь используется (5.19), представляющее среднюю задержку сообщения, проходящего по сети. Все вопросы, связанные с массовым обслуживанием, учтены и отражены этим выражением; остается лишь задача оптимизации потоков, которая входит в теорию потоков в сетях [38] (класс таких задач обсуждался в первой главе первого тома, и они назывались задачами отыскания установленных потоков по сети из каналов). Приведенная ранее теорема о максимальном потоке и минимальном сечении является основой, на которой строится эта теория. Хотя этот материал не включается в теорию СМО, он важен для проектирования сетей ЭВМ и поэтому данный небольшой раздел (а также следующий раздел) посвящается некоторым эффективным методам, развитым для решения задач распределения потоков. В теории потоков в сетях рассматривается задача о потоках различных грузов с нелинейной целевой функцией. Для каждого j и k требуется перевезти по сети из узла-источника j в узел назначения k определенный груз γ_{jk} . Как указывалось в разд. 5.5, эта задача распределения потоков различных грузов требует минимизации нелинейной функции T по потокам $\{\lambda_i\}$, чтобы удовлетворялись внешние требования к потокам γ_{jk} . Минимизация, конечно, проводится в предположении, что пропускные способности заданы. Кроме того, нужно не нарушить обычный закон сохранения потоков в каждом узле применительно к различным грузам. Согласно этому закону, суммарный трафик $j-k$, поступающий в узел n , равен суммарному трафику $j-k$, выходящему из узла n , за исключением случая $n=j$ (узел n является узлом-источником) или случая $n=k$ (узел n является узлом назначения). Далее, имеется ограничение на пропускную способность каждого канала, состоящее в том, что поток λ_i/μ в канале i должен быть неот-

¹⁾ Иногда эта процедура называется бифуркационной процедурой выбора маршрутов.

рицательным и меньшим пропускной способности, т. е. $0 \leq \lambda_i/\mu < C$. Это ограничение показывает, что характеристика T обладает интересным и очевидным свойством безграничного возрастания при стремлении какого-либо потока к пропускной способности соответствующего канала (т. е. при стремлении множества потоков в сети к верхней границе для этих потоков, определенной ограничениями на пропускные способности). На языке математического программирования это означает, что характеристика T включает дополнительное ограничение на пропускную способность как функцию штрафа. Это важное свойство обеспечивает реализуемость решения (по отношению к ограничению на пропускную способность) при использовании любого метода минимизации, который представляется в виде последовательности «небольших шагов» и на начальном шаге оперирует с реализуемым решением. Таким образом, если начать с реализуемого решения, то можно пренебречь ограничением на пропускную способность, и вследствие этого задача, которая выглядит как задача оптимизации с ограничением, фактически будет представлять собой задачу без ограничений по оптимизации потоков различных грузов (эта задача проще).

Рассматриваемый ниже метод предложен в работе [44]; он дает точное решение задачи оптимального РП, которое удобно использовать при численном расчете (в действительности здесь применима любая разумная процедура поиска). Хотя этот метод описывается в терминах задачи, связанной с сетью связи, он, несомненно, применим к задачам такого же вида с более общими функциями, взятыми в качестве характеристики. Другой метод решения описан в работе [13]. Начнем с рассмотрения выражения (5.19) для T . Заметим, что эта характеристика является разделимой в том смысле, что она выражается просто как сумма слагаемых, каждое из которых зависит лишь от потока в одном канале¹⁾. Кроме того, из (5.19) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial (\lambda_i/\mu)} = \frac{C_i}{\gamma [C_i - (\lambda_i/\mu)]^2}, \quad i=1, 2, \dots, M.$$

Отсюда видно, что $\partial T / \partial (\lambda_i/\mu) > 0$ при всех i ; аналогичные рассмотрения показывают, что $\partial^2 T / \partial (\lambda_i/\mu)^2 > 0$ (оба эти неравенства справедливы при удовлетворении ограничений на пропускные способности). Таким образом, можно сделать вывод, что T — выпуклая функция потоков. Кроме того, множество реализуемых потоков само является выпуклым многогранником. Итак, если задача имеет реализуемое решение, то любой локальный минимум является глобальным минимумом для T . Следовательно, любой ме-

¹⁾ Свойство разделимости здесь является ключевым, и оно использовалось в работах [29, 106].

тод отыскания локального минимума может быть использован при решении задачи поиска глобального минимума.

Метод, который применяется здесь, называется методом отклонения потока (ОП) [49], он предназначен для поиска глобального минимума. Лучше всего можно понять метод ОП, если вначале уяснить важное понятие *потока по кратчайшим путям*. Предположим, что мы имеем сеть, каждый канал которой имеет надписанную на нем длину l_i . В такой сети, естественно, найти кратчайший путь между узлом-источником j и узлом назначения k и пытаться посыпать требуемый поток γ_{jk} по этому пути (предполагается, что вопросы, связанные с пропускной способностью и задержкой, не рассматриваются). Если поступить так для всех пар (j, k) , то в результате получится поток, который называется потоком по кратчайшим путям. Существует ряд хорошо известных и эффективных алгоритмов отыскания множества кратчайших путей $j-k$; опишем один такой алгоритм, опубликованный Флойдом [34]. Рассмотрим сеть с N узлами. Пусть $D_0 = (d_{jk})$ — матрица порядка $N \times N$, элемент которой d_{jk} дает длину канала (которая при этом вычислении считается заданной), *прямо* соединяющего узел j с узлом k ; если такого канала нет, то этот элемент равен бесконечности (кроме того, $d_{jj}=0$). Далее предполагается, что не существует циклов, полная длина которых отрицательна. (Отметим, что в этом алгоритме используется обозначение с двумя индексами для длины канала, тогда как ранее для обозначения длины i -го канала применялся символ с одним индексом l_i ; это делается лишь для удобства формулировки данного алгоритма). При рассмотрении любого пути π_{jk} , соединяющего узел j с узлом k , будем обозначать через $l(\pi_{jk})$ его длину (т. е. сумму длин каналов). Задача состоит в вычислении матрицы $H = (h_{jk})$ порядка $N \times N$, где h_{jk} — длина кратчайшего пути, соединяющего узел j и узел k ; итак, H — матрица кратчайших путей, представляющая для нас интерес. Алгоритм кратчайших путей Флойда начинает с матрицы расстояний D_0 и итеративно изменяет ее, проходя последовательность из N матриц (на n -м шаге матрица обозначается через D_n); в конце он приходит к матрице кратчайших путей $D_N = H$. Если начать с $n=0$ и $d_{jk}(0)=d_{jk}$, то матрица D_{n+1} получится из D_n с помощью итерации

$$d_{jk}(n+1) = \min [d_{jk}(n), d_{j,n+1}(n) + d_{n+1,k}(n)].$$

Найдя D_1 , мы замечаем, что $d_{jk}(1)$ (элемент j, k в матрице D_1) представляет собой длину кратчайшего пути из узла j в узел k при условии, что допускаются лишь пути с узлом 1 в качестве промежуточного. Аналогично после отыскания D_n на n -й итерации получим, что $d_{jk}(n)$ — кратчайшее расстояние от узла j к узлу k по путям, в которых промежуточные узлы принадлежат множеству $\{1, 2, \dots, n\}$.

Таким образом, дойдя до N -й итерации, получаем искомый результат $d_{jh}(N) = h_{jk}$. Весь алгоритм требует около N^3 сложений и вычитаний и N^3 сравнений. Существует много других алгоритмов кратчайших путей.

Возвращаясь теперь к исходной задаче, отметим, что существование метода ОП связано с сопоставлением «длины» с i -м ребром, величина которого дается равенством

$$l_i \triangleq \frac{\partial T}{\partial (\lambda_i/\mu)} = \frac{C_i}{\gamma [C_i - (\lambda_i/\mu)]^2}, \quad \blacksquare \quad (5.40)$$

когда поток в канале равен λ_i/μ . Ясно, что это линейная скорость возрастания T при бесконечно малом увеличении потока в i -м канале. Такие «длины», или «стоимостные коэффициенты», можно затем использовать для формулировки задачи отыскания потоков по кратчайшим маршрутам, а получающиеся пути представляют собой самые дешевые (т. е. самые лучшие для снижения T) пути, к которым может быть отклонена некоторая часть потока. Вопрос теперь в том, какая часть исходного потока должна быть отклонена к этим новым путям. После того как она будет определена, можно повторить процесс, опять находя новые длины на основе обновленных потоков, решая новую задачу отыскания потоков по кратчайшим маршрутам, определяя соответствующую отклоняемую часть потока и т. д. Эта итеративная процедура продолжается до тех пор, пока не будет получена приемлемая характеристика.

Приведем теперь конкретный алгоритм, который использует эти идеи. Для этого введем вектор потока на n -й итерации алгоритма:

$$\mathbf{f}^{(n)} = \left(\frac{\lambda_1^{(n)}}{\mu}, \frac{\lambda_2^{(n)}}{\mu}, \dots, \frac{\lambda_M^{(n)}}{\mu} \right), \quad (5.41)$$

i -я компонента $\lambda_i^{(n)}/\mu$, которой представляет собой полный поток по i -му каналу на n -й итерации. Будем считать, что начальный поток $\mathbf{f}^{(0)}$ является реализуемым. Теперь можно представить следующий алгоритм.

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОП ДЛЯ ВЫБОРА МАРШРУТОВ

Шаг 1. Положить $n=0$.

Шаг 2. Для каждого $i=1, 2, \dots, M$ найти

$$l_i = \frac{C_i}{\gamma [C_i - (\lambda_i^{(n)}/\mu)]^2}.$$

Шаг 3. Найти β_n — добавочный стоимостный коэффициент для этого потока,

$$\beta_n = \sum_{i=1}^M l_i \frac{\lambda_i^{(n)}}{\mu}.$$

Шаг 4. Решить задачу отыскания потоков по кратчайшим маршрутам, используя длины l_i . Пусть φ_i — результирующий поток по i -му каналу, который получается, если весь поток направляется по этим кратчайшим путям. Обозначим вектор потоков через

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M).$$

Шаг 5. Найти b_n — добавочный стоимостный коэффициент для потока по кратчайшему маршруту,

$$b_n = \sum_{i=1}^M l_i \varphi_i.$$

Шаг 6. (Правило остановки.) Если $\beta_n - b_n < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, надлежащим образом выбранный допуск, то STOP. В противном случае перейти к шагу 7.

Шаг 7. Найти такое значение a из интервала $0 \leq a \leq 1$, для которого поток $(1-a)f^{(n)} + a\varphi$ минимизирует T . Пусть это оптимальное значение обозначается через a . Оптимальное значение a можно найти с помощью любого подходящего метода поиска (например, с помощью метода Фибоначчи [107]).

Шаг 8. (Отклонение потока.) Положить $f^{(n+1)} = (1-a)f^{(n)} + a\varphi$.

Шаг 9. Положить $n = n+1$. Перейти к шагу 2.

Отметим, что наиболее важными шагами алгоритма являются шаг 2 (вычисление длины), шаг 4 (вычисление потоков по кратчайшим маршрутам), шаг 6 (правило остановки), шаг 7 (вычисление отклоняемой части потока) и, наконец, шаг 8 (определение самого отклонения потока). Заметим, что отклонение потока производится так, чтобы имело место максимальное снижение значения T . В общем случае это приводит к детерминированной процедуре выбора маршрутов, допускающей альтернативы.

Обратимся теперь к вопросу отыскания реализуемого начального потока $f^{(0)}$. Еще раз предположим, что задан внешний поток y [см. (5.12)]. Введем масштабный коэффициент h так, чтобы hy было равно интенсивности потока, с которым мы имеем дело при данном значении h . Алгоритм отыскания реализуемого начального потока заключается в следующем.

Шаг 1. Положить $h^0=1$ и считать, что $\mathbf{f}^{(0)}$ — решение задачи отыскания потоков по кратчайшим маршрутам в сети с длинами $l_i=1/\gamma C_i$ [заметим, что эти длины совпадают с длиной, представленной формулой (5.40) при нулевом потоке]. На этом шаге весь поток $h_0\gamma$ направляется по сети; обозначим через $\lambda_i^{(0)}/\mu$ поток в i -м канале на этом этапе. Положить $n=0$.

Шаг 2. Пусть

$$\sigma_n = \max_i \left(\frac{\lambda_i^{(n)}}{\mu C_i} \right).$$

Если $\sigma_n/h_n < 1$, то положить $\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)}/h_n$; STOP (это реализуемый начальный поток). Если $\sigma_n/h_n \geq 1$, то положить $h_{n+1} = h_n[1 - \varepsilon_1(1 - \sigma_n)]/\sigma_n$, где ε_1 — надлежащий параметр точности, такой, что $0 < \varepsilon_1 < 1$.

Шаг 3. Положить $\mathbf{g}^{(n+1)} = (h_{n+1}/h_n)\mathbf{f}^{(n)}$. Это реализуемый поток различных грузов, который несет полный трафик с интенсивностью $h_{n+1}\gamma < 1$.

Шаг 4. Теперь провести операцию отклонения потока на потоке $\mathbf{g}^{(n+1)}$; это значит, что нужно выполнить шаги 2, 4, 7 и 8 алгоритма ОП и найти Φ (поток по кратчайшим маршрутам с длинами, основанными на потоке $\mathbf{g}^{(n+1)}$) и оптимальное значение a (т. е. a), такие, чтобы поток $\mathbf{f}^{(n+1)} = (1-a)\mathbf{g}^{(n+1)} + a\Phi$ минимизировал T . Если $n=0$, то перейти к шагу 6; в остальных случаях перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если

$$\left| \sum_{i=1}^M l_i (\Phi_i - g_i^{(n+1)}) \right| < \theta \quad \text{и} \quad |h_{n+1} - h_n| < \delta,$$

где θ и δ — выбранные надлежащим образом положительные допуски, то STOP; задача не имеет реализуемого решения при допусках θ и δ . В остальных случаях перейти к шагу 6.

Шаг 6. Положить $n=n+1$ и перейти к шагу 2.

Эта процедура либо находит реализуемый начальный поток, либо объясняет, что задача не имеет реализуемого решения в пределах выбранных допусков.

Метод ОП обеспечивает оптимальный выбор маршрутов для трафика в сети и является сравнительно эффективным с точки зрения вычислений, однако оказывается, что существует более простой подоптимальный метод, который дает фиксированную процедуру выбора маршрутов и часто приводит к очень хорошим результатам, требуя намного меньше вычислений. Этот подопти-

мальный метод обходит задачу определения того, какую часть потока нужно отклонить; он просто решает, отклонить ли весь поток или ничего не отклонять для каждого γ_{jk} . Приближение основано на сделанном в предыдущем разделе замечании, что фиксированные процедуры выбора маршрутов имеют хорошие свойства в смысле коротких средних длин путей и очень концентрированного трафика. Класс сетей, для которых эффективен такой фиксированный алгоритм выбора маршрутов, называется классом больших и сбалансированных сетей. Говорят, что сеть большая, если она имеет большое число узлов, и сеть сбалансирована, если элементы γ_{jk} в основном не отличаются друг от друга. Дадим сейчас этим определениям конкретную количественную форму, выбор которой основывается на интуиции. А именно пусть

$$\gamma_0 \triangleq \frac{\varphi}{N(N-1)} \quad (5.42)$$

— среднее требование к потоку на упорядоченную пару узлов (на поток в одном направлении) и пусть

$$m \triangleq \max_{j,k} \frac{\gamma_{jk}}{\gamma_0} \quad (5.43)$$

— отношение наибольшей интенсивности к средней интенсивности потока для пары узлов (здесь также возможны многие другие подходящие определения для m). Для m справедливо неравенство $m \geq 1$; отметим, что $m=1$ соответствует однородный трафик, для которого $\gamma_{jk} = \gamma_0$ при всех j и k . Сеть называется сбалансированной, если m близко к 1. Обозначим отношение числа ребер в сети к числу узлов через $K=M/N$ и через n_0 среднюю длину пути, когда трафик направляется по кратчайшему пути и длина каждого канала принимается равной единице. Рассмотрим теперь параметр

$$\eta = \frac{Km}{(N-1)n_0}. \quad (5.44)$$

Сеть называется большой и сбалансированной, если $\eta \ll 1$. Исходя из этого определения, можно показать, что в среднем в большой и сбалансированной сети вклад трафика $j-k$ в любой канал пренебрежимо мал по сравнению с полным потоком в канале. Если это имеет место, то читателю нетрудно понять, почему рассмотрение фиксированных процедур выбора маршрутов (отклоняется все или ничего) приводит к хорошему приближению. Представим теперь подоптимальный алгоритм отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов. Опять предположим, что известен реализуемый начальный поток $f^{(0)}$, направляемый фиксированной процедурой выбора маршрутов.

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ПОТОКОВ, НАПРАВЛЯЕМЫХ ФИКСИРОВАННОЙ ПРОЦЕДУРОЙ ВЫБОРА МАРШРУТОВ

Шаг 1. Положить $n=0$.

Шаг 2. Используя поток $f^{(n)}$, найти множество кратчайших маршрутов [при метрике l_i , определенной равенством (5.40)].

Шаг 3. Положить $g=f^{(n)}$. Для каждого требования к потоку γ_{jk} провести следующие шаги.

Шаг 3а. Пусть v — поток, полученный из g путем отклонения *всего* потока γ_{jk} от его пути в потоке $f^{(n)}$ к кратчайшему пути $j-k$.

Шаг 3б. Если справедливы два утверждения: v — реализуемый поток и T , относящееся к v , строго меньше, чем T , относящееся к g , то перейти к шагу 3в. В противном случае перейти к шагу 3г.

Шаг 3в. $g=v$.

Шаг 3г. Если все потоки γ_{jk} рассмотрены, то перейти к шагу 4. В остальных случаях выбрать любой нерассмотренный поток γ_{jk} и перейти к шагу 3а.

Шаг 4. Если $g=f^{(n)}$, то STOP; этот метод больше не может улучшить поток, направляемый фиксированной процедурой выбора маршрутов. В остальных случаях положить $f^{(n+1)}=g$, $n=n+1$, и перейти к шагу 2.

Этот алгоритм сходится после конечного числа шагов, так как нужно рассмотреть лишь конечное число потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов, один и тот же поток дважды не рассматривается из-за условия остановки алгоритма. Реализуемый начальный поток $f^{(0)}$, направляемый фиксированной процедурой выбора маршрутов, можно найти методом, аналогичным тому, который использовался в алгоритме ОП.

Применим теперь алгоритм ОП и алгоритм отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов, к сети ARPANET. Рассмотрим сеть ARPANET с 21 узлом¹⁾ и будем считать ее однородной в том смысле, что для всех различных упорядоченных пар j, k ($j \neq k$) справедливо равенство $\gamma_{jk} = \gamma_0 = 1,187$ кбит/с. Для этой сети максимальное возможное значение γ_0 равно 1,25 (в соответствии с $\gamma^* = 525$ кбит/с) и требуется, чтобы указанные алгоритмы находили поток, который составляет не менее 95% от максимально возможного потока в сети. Эта сеть

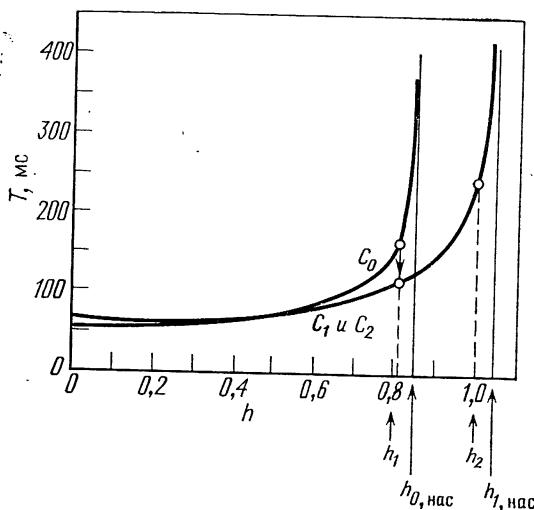
¹⁾ Это сеть, показанная на фиг. 5.20, г, без следующих трех узлов: MCCLEL-LAN, USC и RADC. Кроме того, добавлен один дополнительный канал между SRI и UCLA.

имеет параметры $N=21$, $M=52$ (26 полнодуплексных каналов), $m=1$, так что

$$\eta = \frac{52/21}{20n_0} = < 0,1 \ll 1.$$

Таким образом, удовлетворяется условие того, что сеть является большой и сбалансированной, поэтому можно ожидать, что алгоритм отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов, дает результаты, сравнимые с результатами оптимального алгоритма ОП.

Оптимальный алгоритм ОП дает минимальное значение T , равное $T_{\min}=0,2406$ с после 80 вычислений потоков по кратчайшим маршрутам с точностью 10^{-4} для T . Время работы алгоритма равно 30 с (программирование осуществлялось на ФОРТРАНе, вычисления проводились на IBM 360/91). Вместе с тем алгоритм отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов, дает $T_{\min}=0,2438$ с после 12 вычислений потоков по кратчайшим маршрутам и требует лишь 4 с (опять на ФОРТРАНе и IBM 360/91). На самом деле с помощью оптимизации кода можно уменьшить время работы обоих этих алгоритмов. Заметим, что более быстрый подоптимальный алгоритм дает результат, отклоняющийся в пределах 2% от результата



Фиг. 5.28. Средняя задержка T в зависимости от нормированного трафика h при оптимальном выборе маршрутов.

C_0 — оптимальный выбор маршрутов при $h=0.8$;
 C_1 — оптимальный выбор маршрутов при $h=1.0$;

оптимального алгоритма, что демонстрирует эффективность алгоритма отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов в больших и сбалансированных сетях. На фиг. 5.28 показаны результаты для алгоритма отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов. Кривая C_0 соответствует поиску реализуемого начального потока, когда поток направляется по кратчайшим путям при $h=0$. Насыщение для этого конкретного потока наступает при $h_0, \text{нас} = 0,85$, и поэтому при $h=1$ поток нереализуемый и нужно продолжать поиск реализуемого начального потока. Кривая C_1 соответствует следующей итерации поиска реализуемого потока. В данном случае насыщение наступает при $h_1, \text{нас} = 1,05$; это показывает, что при $h=1$ поток реализуемый и можно переходить к основному алгоритму отыскания потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов. Кривая C_2 представляет собой результирующую характеристику этого алгоритма распределения потоков; практически она совпадает с кривой C_1 и соответствует $T_{\min} = 0,2438$ с при $h=1$. Заметим, что C_0 фактически дает оптимальный поток при очень малых значениях h , что следовало ожидать.

Таким образом, алгоритм ОП является оптимальной процедурой, решающей задачу РП; он приводит к допускающей альтернативы процедуре выбора маршрутов для потоков. Для больших и сбалансированных сетей имеется более быстрый и довольно хороший алгоритм, приводящий к фиксированной процедуре выбора маршрутов.

5.9. ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ

В двух предыдущих разделах были даны оптимальные решения задач ВПС и РП. Объединив эти задачи в задачу ВПС и РП, мы не сможем найти глобально оптимальные решения, но зато опишем процедуры поиска локальных минимумов для T .

Так как нужно опять выбирать C_i , то представляется, что фиксированные процедуры выбора маршрутов также должны быть оптимальными. В задаче 5.17 нужно показать, что это действительно верно при линейной стоимостной функции, когда $d_i = 1$. В работе [43] показано, что в более общем случае линейных стоимостных функций с произвольными d_i фиксированные процедуры выбора маршрутов также являются оптимальными; это справедливо в силу определенного свойства T , выраженного при оптимальном T равенством (5.27). Кроме того, как можно показать, локальные минимумы T получаются на потоках по кратчайшим маршрутам (подкласс потоков, направляемых фиксированной процедурой выбора маршрутов), так как минимум-

мы должны располагаться в узлах выпуклого многогранника реализуемого множества потоков [49].

Наш подход к отысканию этих локальных минимумов состоит в том, чтобы, начиная с реализуемого начального потока, получить оптимальный набор пропускных способностей при линеаризованных стоимостях, с помощью алгоритма ОП найти оптимальные потоки, повторить решение задачи ВПС для этих новых потоков и продолжать итерации между решением задачи ВПС и задачи РП до отыскания (локального) минимума. Заметим, в частности, что алгоритм ОП будет особенно простым в этом случае, так как значение a всегда будет равно единице (поток, направляемый фиксированной процедурой выбора маршрутов). Таким образом, при известном реализуемом начальном потоке $f^{(0)}$ наш алгоритм состоит в следующем.

ПОДОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВПС И РП

Шаг 1. Положить $n=0$.

Шаг 2. Выполнить алгоритм ВПС для потока $f^{(n)}$ и найти оптимальное множество пропускных способностей, используя линеаризованные стоимости.

Шаг 3. Используя длины $l_i = \partial T / \partial (\lambda_i / \mu)$, выполнить алгоритм ОП при $a=1$ на каждом шаге. Полученный в результате оптимальный поток обозначается через $f^{(n+1)}$.

Шаг 4. Если T для потока $f^{(n+1)}$ больше или равно T для потока $f^{(n)}$, то STOP; поток $f^{(n)}$ дает локальный минимум. В противном случае положить $n=n+1$ и перейти к шагу 2.

Алгоритм сходится, так как имеется лишь конечное число потоков по кратчайшим маршрутам.

Как известно, при завершении шага 2 (алгоритм ВПС) C_i будут задаваться неравенством (5.26), а характеристика T — равенством (5.27), где λ_i заменяются на $\lambda_i^{(n)}$. При этом l_i [см. формулу (5.40)] задаются равенством

$$l_i \triangleq \frac{\partial T}{\partial (\lambda_i / \mu)} = \frac{\bar{n} \sum_{j=1}^M (\lambda_j d_j / \lambda)^{1/2}}{D_e} \left[\left(\frac{d_i}{\lambda \lambda_i} \right)^{1/2} + \frac{d_i}{\mu D_e} \sum_{j=1}^M \left(\frac{\lambda_j d_j}{\lambda} \right)^{1/2} \right]. \quad ■ (5.45)$$

Отсюда следует, что $l_i \geq 0$ и отрицательные циклы не могут существовать (что требует алгоритм отыскания кратчайших путей). Заметим также, что $\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} l_i = \infty$; это значит, что если в конце ите-

рации поток (и, следовательно, пропускная способность) обращается в нуль, то как поток, так и пропускная способность остаются нулевыми в последующих итерациях, поскольку добавочная стоимость размещения потока становится бесконечной.

Теперь перед нами стоят две задачи: 1) найти реализуемый начальный поток $f^{(0)}$ и 2) просматривая многие локальные минимумы, отыскать глобальный минимум. Обе эти задачи решим, повторяя алгоритм ВПС и РП для многих различных начальных реализуемых потоков. Каждый начальный реализуемый поток находится путем случайного назначения каналам исходных длин. Для каждого назначения затем выполняются алгоритм отыскания потоков по кратчайшим путям, использующий выбранные таким образом длины, и проверка условия $D_e > 0$ для этого потока. Если условие удовлетворяется, то найден реализуемый начальный поток и можно приступить к алгоритму ВПС и РП, в противном случае исходный поток отвергается и делается попытка случайного назначения множества других длин.

Как было указано в конце разд. 5.5, задачу ВПС и РП можно также сформулировать в двойственной форме.

ЗАДАЧА ВПС И РП (ДВОЙСТВЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ)

Дано: топология сети.

Минимизировать: $D = \sum_i d_i (C_i)$.

Варьируются: $\{C_i\}$ и $\{\lambda_i\}$.

Ограничение: $T = \sum_i \frac{\lambda_i}{\gamma} T_i \leq T_{\max}$.

Здесь стоимость D минимизируется при основном условии заданной максимальной задержки T_{\max} . Описанный выше подоптимальный алгоритм ВПС и РП по существу применим к этой двойственной задаче, если очевидным способом заменить определение длины [$l_i = \partial T / \partial (\lambda_i / \mu)$] на новое определение $l_i = \partial D / \partial (\lambda_i / \mu)$. В случае когда стоимостные функции пропускных способностей линейны [т. е. $d_i(C_i) = d_i C_i$], легко показать (см. задачу 5.15), что решение задачи ВПС в конце шага 2 будет иметь вид

$$C_i = \frac{\lambda_i}{\mu} + \left(\frac{\lambda_i}{\mu \gamma T_{\max}} \right) \frac{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j}}{\sqrt{\lambda_i d_i}} \quad ■ (5.46)$$

и минимальная стоимость, которая удовлетворяет ограничению на максимальную среднюю задержку, равна

$$D = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i d_i}{\mu} + \frac{1}{\gamma T_{\max}} \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i d_i}{\mu} \right)^{1/2} \right]^2. \quad ■ (5.47)$$

Можно показать, что эта функция является вогнутой по потокам $\{\lambda_i\}$; кроме того, можно показать, что любой поток, соответствующий локальному минимуму двойственной задачи ВПС и РП, также является потоком по кратчайшим маршрутам и что значение α в алгоритме ОП всегда равно единице [49]. (Эти три свойства справедливы также для любой вогнутой стоимостной функции пропускных способностей при ограничении $T \leq T_{\max}$.) Выражение для длины, соответствующей равенству (5.45) в двойственной задаче, имеет вид

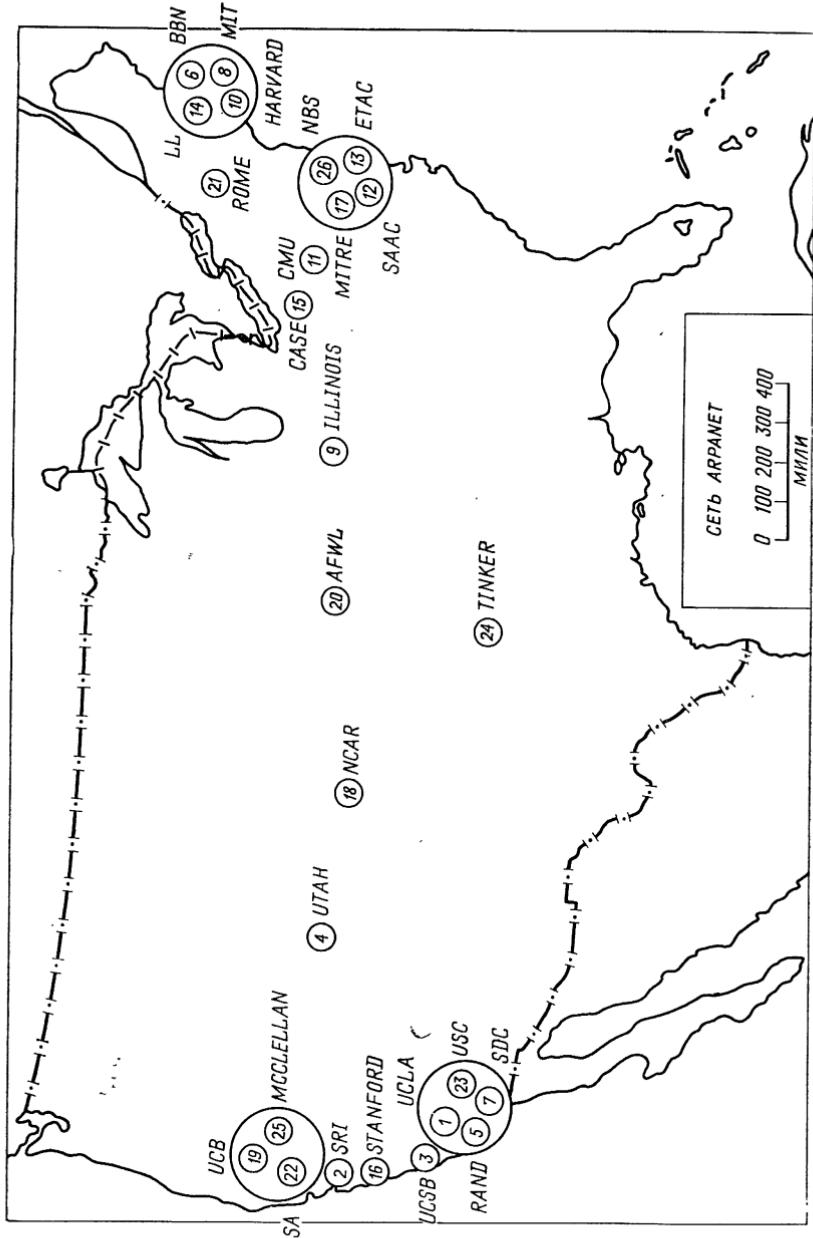
$$l_i \triangleq \frac{\partial D}{\partial (\lambda_i/\mu)} = d_i \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j}}{\gamma T_{\max} \sqrt{\lambda_i d_i}} \right), \quad ■ \quad (5.48)$$

где d_i — наклон кривой стоимости пропускной способности i -го канала, линеаризованной около текущего значения пропускной способности. В двойственной задаче равенства (5.46), (5.47) и (5.48) соответствуют равенствам (5.26), (5.27) и (5.45) из первоначальной задачи. Заметим опять, что все длины неотрицательны и поэтому отрицательные циклы не появляются. Кроме того, отметим, что, как и ранее, эффективная длина канала стремится к бесконечности при стремящемся к нулю потоке в этом канале. Здесь опять отыскиваются локальные минимумы, и, следовательно, нужно рандомизировать поиск для того, чтобы найти несколько таких минимумов.

Так как алгоритм ВПС и РП устраниет некоторые каналы при итерациях, приводящих к (локальному) минимуму, то его можно использовать как вспомогательное средство при топологическом проектировании сетей (т. е. в задаче ВТПС и РП). Это рассматривается в следующем разделе.

5.10. НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ; ПРИМЕНЕНИЯ К СЕТИ ARPANET

Выше было проведено достаточно подробное обсуждение трех подзадач — ВПС, РП, ВПС и РП. Перейдем теперь к истинной задаче проектирования, задаче ВТПС и РП, которую рассмотрим в ее двойственной форме, состоящей в минимизации стоимости D при заданной максимальной средней задержке T_{\max} . Как отмечалось в разд. 5.5, заданными являются положения узлов (как, например, на фиг. 5.29) и внешние требования к потокам от узлов-источников к узлам назначения γ_{jk} . В реальных сетях, кроме того, встречается трудный случай (заданного) множества *дискретных* пропускных способностей каналов; пример такого множества дан в табл. 5.1 (это множество пропускных способностей предлагалось для сети ARPANET). Если не делать никаких аппрокси-



Фиг. 5.29. Сеть ARPANET с 26 узлами.

Таблица 5.1

Пропускные способности каналов и соответствующие им стоимости, использованные при оптимизации^{a)}

Пропускная способность, кбит/с	Стоимость оконечного оборудования, долл./мес	Стоимость линии, долл./(мес·миля)
9,6	650	0,40
19,2 ($2 \times 9,6$) ^{b)}	1300	0,80
19,2	850	2,50
50	850	5,00
100 (2×50) ^{b)}	1700	10,00
230,4	1350	30,00

^{a)}Общая стоимость канала в месяц представляется следующим образом: общая стоимость = (стоимость оконечного оборудования) + (стоимость линии) × (длина в милях).

^{b)} Эта возможность появляется при использовании низкоскоростных каналов, соединенных параллельно.

маций этих дискретных стоимостей, то прямое решение задачи ВТПС и РП требует численного решения задачи с $N(N-1)/2$ переменными (пропускными способностями в предположении полнодуплексного режима) и решения задачи о потоках различных грузов; это слишком сложно для сетей размера сети ARPANET. Найдем приближенные (эвристические) решения, которые, по всей вероятности, находятся в 5—10% от оптимума и значительно снижают вычислительные трудности (в конце концов, так как редко можно предугадать γ_{jk} с большой точностью, то такой компромисс представляется удовлетворительным с технической точки зрения).

Наше (эвристическое) решение задачи ВТПС и РП представляет собой итеративную форму решения задачи ВПС и РП; оно использует тот факт, что каналы могут быть устраниены (и, следовательно, будут внесены топологические изменения) по мере выполнения алгоритма ВПС и РП. Как было упомянуто в предыдущем разделе (и должно быть доказано в задаче 5.15), такое устранение ребер (каналов) происходит в силу того, что выраженная равенством (5.47) стоимость D является вогнутой по потокам $\{\lambda_i\}$ функцией. Поэтому рассматриваемый итеративный алгоритм называется *вогнутым методом устранения ребер* (ВМУР) [49]. Алгоритм действует следующим образом.

ПОДОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВМУР

Шаг 1. Выбрать исходную топологию (как провести такой выбор, обсуждается ниже; часто на практике хорошо выбрать полно связанные сети).

- Шаг 2. Для каждого канала из топологии провести степенную аппроксимацию¹⁾, как в равенстве (5.37). При каждой итерации в следующем шаге для пропускной способности использовать величину, линеаризованную около значения потока для этого канала.
- Шаг 3. Выполнить алгоритм ВПС и РП. Если при какой-либо итерации нарушается ограничение связности²⁾, то прекратить оптимизацию и перейти к шагу 4; в противном случае провести алгоритм ВПС и РП до конца и после этого перейти к шагу 4.
- Шаг 4. Дискретизовать непрерывные пропускные способности, полученные с помощью подоптимального решения задачи ВПС и РП. Например, непрерывная пропускная способность может быть округлена до ближайшего допустимого ($\lambda_i/\mu < C_i$) дискретного значения, такого, что для него продолжает выполняться условие $T \leq T_{\max}$. При этом, видимо, изменится полная стоимость D .
- Шаг 5. Провести окончательную оптимизацию потока путем применения алгоритма ОП (и, если требуется, даже подстройкой пропускных способностей и потоков).
- Шаг 6. Повторить шаги 3—5 для ряда реализуемых случайных начальных потоков (с помощью случайногo выбора исходных длин с потоками, направляемыми по кратчайшим маршрутам; см. разд. 5.9).
- Шаг 7. Повторить шаги 1—6 для ряда начальных топологий.

Число повторений в шагах 6 и 7 зависит от того, сколько денег можно тратить на отыскание решения. Опыт, полученный на сети ARPANET, показывает, что к хорошим результатам приводят от 20 до 30 повторений в шаге 6 и несколько (грубо говоря, 5) исходных топологий (из которых одна полно связанные сеть, а другие сильно связанные сети) в шаге 7.

Скоро мы применим метод ВМУР к сети ARPANET, но сначала рассмотрим некоторые другие подходы к задаче ВТПС и РП. Хороший обзор ранее исследованных методов дан в работе [41]. Один из методов называется *методом замены ребер*. Исходя из произвольной реализуемой топологии, определяется класс локальных преобразований (замен ребер), при которых одно ребро устраняется, а какое-то новое ребро добавляется, так что реали-

¹⁾ Вместо степенной здесь можно использовать кусочно-линейную аппроксимацию.

²⁾ Так, например, как указано в разд. 5.4, сеть ARPANET удовлетворяет ограничению двусвязности, т. е. она должна иметь по меньшей мере два независимых пути (не имеющих общих процессоров IMP или каналов, кроме процессоров IMP, расположенных на концах пути) между каждой парой процессоров IMP.

зумость (т. е. двусвязность) сохраняется. Затем решается (упрощенно понимаемая) задача ВПС и РП с помощью процедуры минимального согласования [37]; если в результате получается улучшение, то преобразование закрепляется (в противном случае оно аннулируется). Эта процедура выполняется до тех пор, пока множество локальных преобразований не будет исчерпано. Развитием метода замены ребер является *метод насыщения сечений* [50]. Этот метод сужает множество локальных преобразований к таким, которые представляются подходящими для улучшения характеристики «пропускная способность сети — стоимость». Процедура начинается с дерева (или какой-либо другой слабо связанный топологии) и находится критическое сечение, возникающее в результате решения задачи РП. Затем к этому сечению добавляется канал (или увеличивается пропускная способность какого-то канала из этого сечения). Это повторяется до получения реализуемой топологии. Затем процедура продолжается, кроме того, на каждом шаге устраняется наименее используемый канал сети (если сохраняется реализуемость). После некоторого заданного числа итераций алгоритм заканчивается. Успех всех этих эвристических алгоритмов основан на наличии эффективных методов оценки топологий и случайного генерирования нескольких начальных топологий (разрешающих поиск многих локальных минимумов).

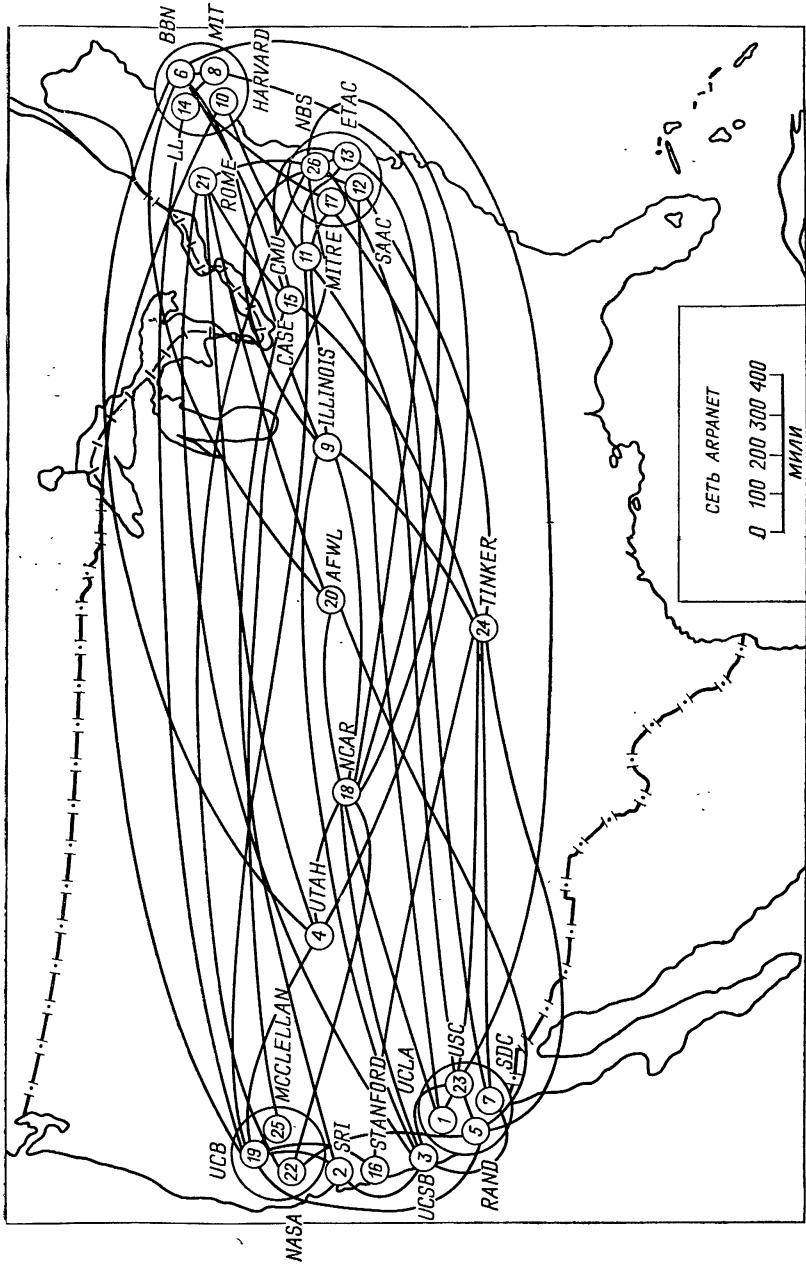
Примем теперь алгоритм ВМУР для решения задачи ВТПС и РП к одному из вариантов сети ARPANET. На фиг. 5.29 показана совокупность 26 узлов, которые требуется соединить сетью. Выберем стоимостные коэффициенты d_i пропорциональными длинам каналов (так как из табл. 5.1 видно, что на этом основан тариф, используемый телефонной компанией) и для каждого канала сделаем степенную аппроксимацию пропускной способности при использовании ее на шаге 2. Кроме того, предположим, что требования к трафику являются однородными, так что $\gamma_{jk} = \gamma_0 = 1,0$ кбит/с, в результате $\gamma = 650$ кбит/с.

Начнем с рассмотрения решений ВМУР без учета условия двусвязности. Наилучшее решение ВМУР в этом случае зависит от показателей степени α , используемых в степенной аппроксимации истинных стоимостей пропускных способностей. Ряд свойств можно обнаружить при изучении решений, полученных на основе различных начальных топологий; их можно резюмировать следующим образом. При уменьшении α , что ведет к увеличению экономии, связанной с изменением масштаба [см. равенство (5.37)], преимущественными становятся топологии с меньшим числом каналов, каждый из которых имеет высокую пропускную способность. В действительности при $\alpha \leq 0,6$ древовидные топологии (с 25 ребрами) всегда оказывались наилучшими из найденных. Более того, с уменьшением α снижается вариация в числе ка-

налов, а вариация в стоимости сетей возрастает (что справедливо для множества локальных минимумов, найденных при поиске). Это объясняется тем, что число локальных минимумов увеличивается и стоимости этих локальных минимумов широко разбросаны из-за быстроменяющейся целевой функции в этой окрестности. Поэтому, если в качестве начальной взять очень сильно связанную топологию (например, в рассматриваемом случае это означает, что имеется более 40 каналов), хороший минимум, возможно, никогда нельзя будет найти, так как такая топология, хотя и включает оптимальную топологию с вероятностью, большей, чем у слабо связанный топологии (с 26—29 каналами), то она содержит многое большее число локальных минимумов. Однако для α в диапазоне $0,8 \leq \alpha \leq 1,0$ оказывается, что сильно связанные топологии имеют вероятность содержать хорошее, если не оптимальное, решение, так как число локальных минимумов относительно мало и значения этих минимумов сравнительно близки. Наоборот, слабо связанные топологии заставляют просматривать меньшее множество решений, ни одно из которых не может быть близко к оптимальному. Однако для меньших значений α число локальных минимумов велико, и их значения меняются так быстро, что сильно связанные топологии, видимо, наведут на плохие локальные минимумы. В этом случае, наверное, лучше использовать тщательно подобранные слабо связанные начальные топологии, исходя из предположения, что оптимальная топология сама будет такого типа.

Итак, можно заключить, что для α в диапазоне $0,8 \leq \alpha \leq 1,0$ метод ВМУР является эффективным и выбор исходной (сильно связанный) топологии не так критичен; по-видимому, достаточно исследования нескольких локальных минимумов. При средних значениях α ($0,5 \leq \alpha \leq 0,8$) метод ВМУР работает хорошо лишь при тщательно выбранных (слабо связанных) начальных топологиях; в этом случае поиск осуществляется среди большого числа локальных минимумов. При меньших значениях α метод ВМУР, вероятно, не является очень эффективным и представляется, что более эффективны такие методы, как метод замены ребер и метод насыщения сечений.

Если теперь на сеть ARPANET наложить условие двусвязности, то, согласно алгоритму, можно продолжать использовать метод ВМУР, в котором алгоритм ВПС и РП следует остановить при попытке устраниТЬ ребро, которое делает сеть односвязной. Приведенные выше утверждения показывают, что когда уже имеются решения с достаточно сильной связанностью (как в случае $0,8 \leq \alpha \leq 1,0$), то условие двусвязности накладывает очень мало ограничений и, таким образом, метод ВМУР хорошо работает при этом. Показанная на фиг. 5.29 сеть с 26 узлами изучалась при условии двусвязности и ограничении $T_{\max} = 0,20$ с. Рассматрива-



Фиг. 5.30. Наилучшее решение; стоимость в месяц 89 580 долл.; $\gamma_0 = 1,05$.

Таблица 5.2

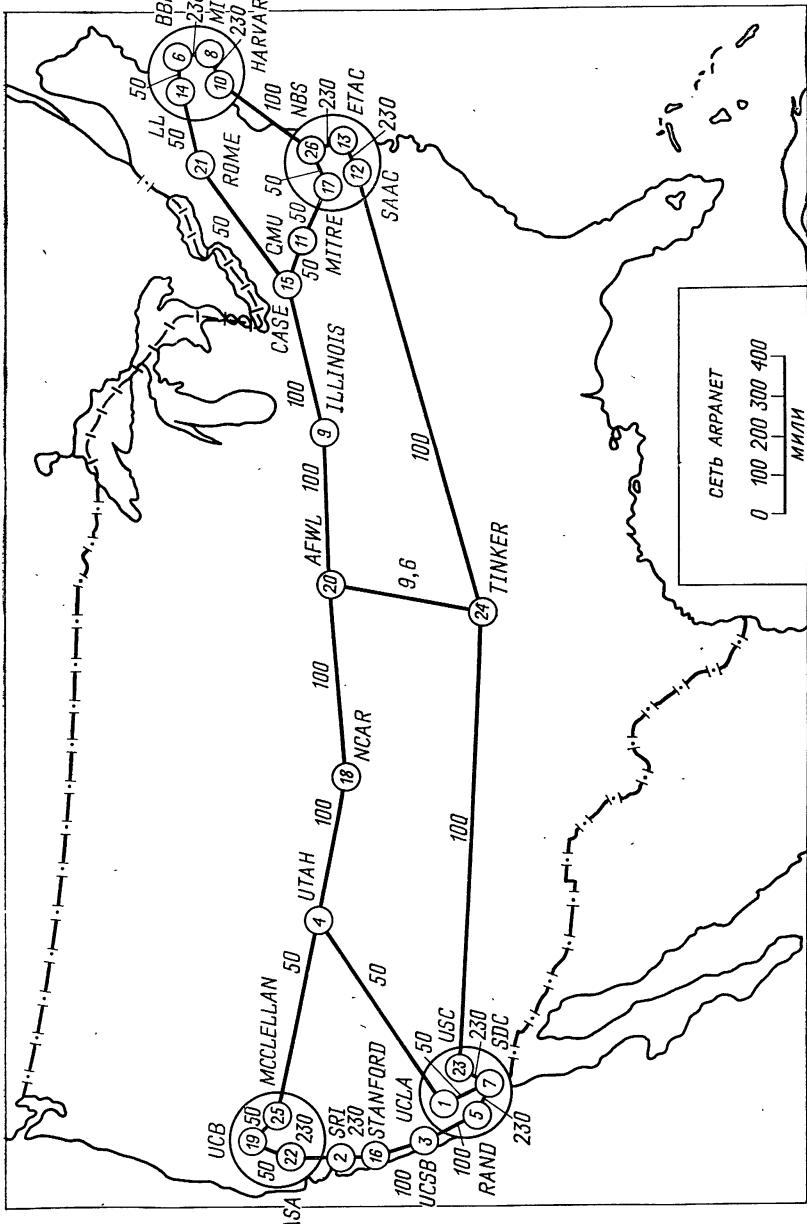
Распределение пропускных способностей по длинам линий в топологии с 61 каналом, показанной на фиг. 5.30

Пропускная способность, кбит/с	Длина линий, миля			
	<100	100—500	500—1000	>1000
9,6	0	3	8	20
19,2	1	8	2	6
50	11	2	0	0

Примечание. Каждое число, входящее в три последние строки четырех правых столбцов, представляет собой число линий, имеющих указанную пропускную способность и лежащих в указанном диапазоне длин.

лось около 30 исходных топологий и для каждой с помощью метода ВМУР было найдено 30 локальных минимумов. Каждая из 30 топологий требовала 30—60 с на IBM 360/91 (т. е. по 1—2 с на минимум). Во всех случаях стоимостные функции пропускных способностей аппроксимировались степенными выражениями, и после отыскания наилучшего решения при заданной топологии пропускные способности дискретизовались так, как было указано выше; в процессе дискретизации пропускных способностей увеличивались полная стоимость и полная скорость передачи сети. К нашему удивлению, наилучшее дискретизованное решение получено, исходя из полностью связанной топологии; это решение в виде необычной сети с 61 каналом показано на фиг. 5.30. В табл. 5.2 показан способ использования различных дискретных пропускных способностей как функций длины каналов в этом решении с 61 каналом. Заметим, что короткие линии имели более высокие пропускные способности, а более длинные линии — меньшие пропускные способности, что можно было ожидать. Стоимость этого оптимального решения 89 580 долл. в месяц. Стоимость второго по качеству решения (фиг. 5.31) составляет 94 288 долл. в месяц и оно получено, исходя из сравнительно слабо связанной топологии, которая содержала 29 каналов в исходной и окончательной формах; в этой сети используются более высокоскоростные линии (50 и 100 кбит/с, как указано на фигуре) на средних и дальних расстояниях и 230 кбит/с на очень коротких линиях. Оказывается, что важная часть этой процедуры (в смысле ее влияния на стоимость и характеристику) состояла в дискретизации непрерывных пропускных способностей, и эта сторона задачи нуждается в совершенствовании.

Если использовать непрерывные решения как приближенные нижние граници для характеристики, то получим штриховую кривую, представленную на фиг. 5.32, которая дает информацию,

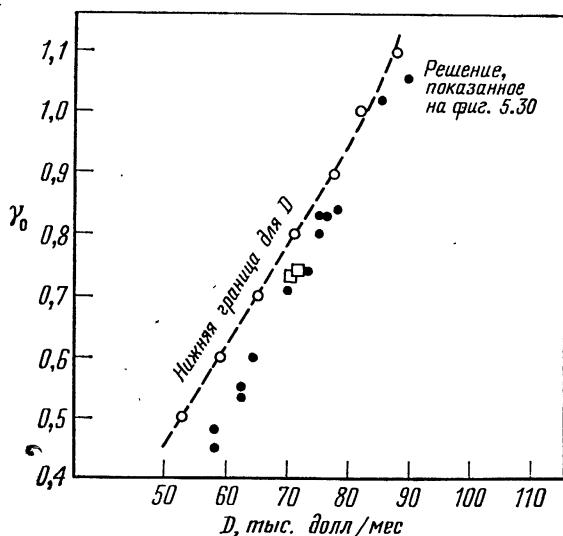


Фиг. 5.31. Второе по качеству решение; стоимость в месяц 94 288 долл.; $\gamma_0 = 1,00$.

по-видимому, наиболее ценную для проектирования сети, а именно *зависимость характеристики сети от стоимости*. Здесь показана скорость передачи сети на один узел $\gamma_0 = \gamma_{jk}$ (однородные требования к трафику) как функция стоимости сети в месяц D . Зачерненные кружки соответствуют другим решениям ВМУР, которые были наилучшими среди тех, которые рассматривались при различных значениях γ_0 . Все эти подоптимальные решения были получены из полно связанных исходных топологий, так как a для сети ARPANET не далеко от единицы, поэтому они дают лишь небольшую экономию в размере. (На фигуре также показаны результаты двух решений методом замены ребер.) Заметим, что эти решения отстоят на 5—10% от нижней границы; они представляют собой хорошие дискретные решения в довольно широком диапазоне скоростей передачи сети и стоимостей, полученные с помощью вычислений умеренной трудности. Данные, приведенные на фиг. 5.32, показывают эффективность больших систем коллективного пользования с точки зрения стоимости, так как скорость передачи сети увеличивается быстрее, чем ее стоимость. Действительно, связь между γ_0 и D приближенно линейна, т. е.

$$\gamma_0 \approx mD + b,$$

и из фиг. 5.32 получаем, что приближенно $m = 0,02$; $b = -0,7$. Таким образом, для малых γ_0 стоимость на единицу скорости



Фиг. 5.32. Зависимость характеристики сети ЭВМ от стоимости. (Решение, показанное на фиг. 5.30.)

● решения методом ВМУР; □ решения методом замены ребер. Нижняя граница соответствует непрерывным решениям со степенной аппроксимацией.

передачи сети больше ($\gamma_0=0,5$ дает $D/\gamma_0 \approx 120$), чем для пропорциональной укрупненной сети ($\gamma_0=1,0$ дает $D/\gamma_0 \approx 87$). Наклон m является важным параметром системы, так как при принятом выше предположении линейности $\lim_{\gamma_0 \rightarrow \infty} D/\gamma_0 = 1/m$. Для приведенного

выше примера предельная стоимость приближенно равна 50 долл. на сообщение в секунду и на пару узлов в месяц. Таким образом, метод ВМУР весьма эффективен при топологическом проектировании, если допустима точность достижения оптимума порядка 5—10%¹⁾.

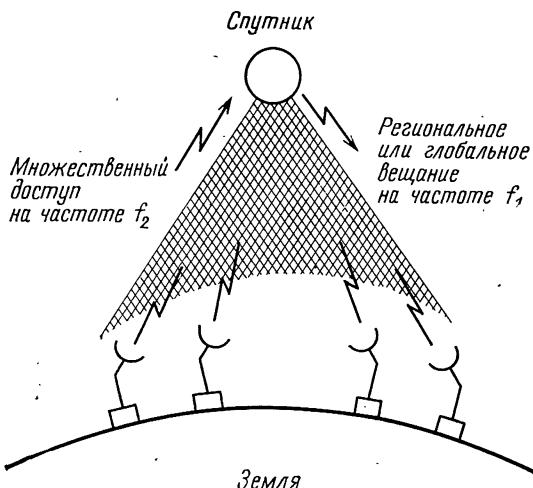
Эти методы представляют современное состояние проектирования подсети связи сетей ЭВМ. В следующих двух разделах рассматривается использование радиоканалов как средств связи для сетей.

5.11. КОММУТАЦИЯ ПАКЕТОВ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ЧЕРЕЗ СПУТНИК

Сети с коммутацией пакетов, подобные сети ARPANET, были созданы для удовлетворения потребности в быстрой, эффективной и экономичной передаче данных. По мере расширения таких сетей как по емкости, так и по охвату территории все более настоятельной становится необходимость в недорогих высокоскоростных дальних каналах связи. Спутниковая связь представляется многообещающей для выполнения такой передачи данных. В этом разделе мы рассмотрим использование коммутации пакетов при передаче по широкополосному спутниковому каналу. В следующем разделе обратимся к задаче, диаметрально противоположной, а именно к задаче организации недорогой связи терминалов пользователей с сетью высокого уровня; она приведет к рассмотрению коммутации пакетов при наземной радиосвязи.

Системы связи с коммутацией пакетов, использующие геостационарные спутники, имеют ряд важных свойств (фиг. 5.33). Первым и, возможно, самым решающим из них является большое время распространения при передаче туда и обратно (на спутник и со спутника), когда спутник находится на синхронной орбите примерно в 36 000 км от Земли. Это время распространения (или задержка) равна $\sim 0,24$ с, если спутник находится прямо в зените, и составляет $\sim 0,27$ с, когда спутник расположен близко к горизонту. Вторым свойством является то, что один групповой канал для передачи речи обеспечивает широкополосную передачу данных (50 кбит/с в используемой в сети ARPANET спутниковой линии через спутник INTELSAT IV от Гавайи до Калифорнии). Третьим свойством является то, что спутниковый передатчик транслирует в широковещательном режиме одновременно на все

¹⁾ Эта и другие эвристические процедуры топологического проектирования, а также методы построения границ подробно рассматриваются в работах [49, 51].



Фиг. 5.33. Коммутация пакетов при радиопередаче.

наземные станции, находящиеся в его зоне. Четвертое свойство состоит в том, что каждый (наземный) передатчик может прослушивать свою собственную передачу, так как он также находится в зоне широковещательного спутника; если можно пре轻бреchь ошибками из-за случайного шума (это будет предполагаться здесь и в следующем разделе), то будет иметь место идеальная обратная связь, которая дает *автоматическую квитанцию*. Эти свойства являются основными при рассмотрении задержки и скорости передачи, но, конечно, имеются многие другие свойства (которые мы не рассматриваем), например уязвимость, стоимость, доступ к наземным каналам, независимое от расстояния функционирование и др.

Наличие обязательной четвертьсекундной задержки при распространении указывает на то, что мы рассматриваем схемы доступа, которые радикально отличаются от схем, применяемых в системах связи на Земле. Именно коммутация пакетов позволяет выгодно использовать большую задержку, широкополосность канала и автоматическую посылку квитанции. (Рассматриваемая в следующем разделе коммутация пакетов при наземной радиосвязи дает возможность выгодно использовать то, что задержки при распространении в этом случае *малы* по сравнению с временем передачи пакета.)

Существует много способов применения спутникового канала для передачи данных. Так, например, канал можно разбить на подканалы и закрепить за ними отдельных пользователей (см. фиг. 5.2). Как было показано, этот способ очень расточителен в

условиях группирующейся нагрузки со стороны пользователей. Можно также предложить процедуру закрепления подканалов за пользователями только на время, необходимое им для передачи (как на фиг. 5.3). Кроме того, можно предоставлять всю емкость канала пользователям по их требованиям (как на фиг. 5.4), считая, конечно, что существует некоторая процедура опроса; при этом необходимо, чтобы у источников данных были буферы. Еще одной альтернативой является разрешение случайного доступа к полной пропускной способности канала в режиме коммутации пакетов; это согласуется с принципами сети ARPANET, и мы исследуем здесь характеристики различных схем такого случайного доступа.

Итак, рассмотрим спутниковые каналы, используемые для коммутации пакетов. Как и ранее, пакет определяется как блок данных, приготовленный одним пользователем для передачи некоторому другому пользователю системы. Спутник характеризуется высокоскоростным каналом с некоторым фиксированным временем распространения, которое велико по сравнению с временем, занимаемым пакетом при передаче. Рассмотрим схему передачи, при которой передатчик формирует пакет и после этого целиком передает его со скоростью, равной пропускной способности канала. Если в таком режиме работает множество пользователей, то они *автоматически уплотняют* свои передачи по требованию. Стационарный спутник работает как простой ретранслятор, повторяя то, что он принимает, и направляя передачу обратно к Земле¹⁾. Это транслируемое вещание принимается каждым пользователем системы и, в частности, пользователь может прослушать свою собственную передачу на ее пути вниз (это очень важное свойство!). В силу того что спутник выполняет лишь роль ретранслятора, всегда, когда передача одного пользователя достигает спутника во время трансляции им передачи некоторого другого пользователя, обе передачи накладываются и «разрушают» друг друга. Задача состоит в том, чтобы выбрать процедуру распространения времени на спутнике так, чтобы достичь приемлемых характеристик передачи.

Идеальной была бы ситуация, в которой пользователи коллективно устанавливали бы время передачи для каждого из них. Трудность, однако, состоит в том, что единственным средством связи для географически разнесенных пользователей служит сам спутник, поэтому возникает необходимость управлять передачей по каналу, который сам должен передавать информацию, управляющую передачей. По существу имеются три децентрализован-

¹⁾ Все пользователи передают пакеты на одной и той же частоте (т. е. они коллективно используют канал как единое средство), а приемники ведут прием на другой, но общей для всех частоте. Каждый приемник выделяет пакеты, адресованные лишь ему.

ных подхода к решению задачи коммутации пакетов. Первый из них известен под названием чистой системы ALOHA [2]; в этой системе пользователи передают в любой момент, который они выбирают¹⁾. Если спустя время распространения они прослушивают свою успешную передачу, то заключают, что избежали конфликтную ситуацию (т. е. тем самым они как бы получают положительную квитанцию). В противном случае они знают, что произошло наложение (или, быть может, действовал какой-либо другой источник шума) и они должны повторить передачу (т. е. они как бы получают отрицательную квитанцию). Если пользователи сразу же после прослушивания повторят свои передачи, то они наверняка опять попадут в конфликтную ситуацию. Таким образом, нужно изобрести некоторую схему для того, чтобы ввести случайные задержки при повторной передаче и разнести по времени вступающие в конфликт пакеты.

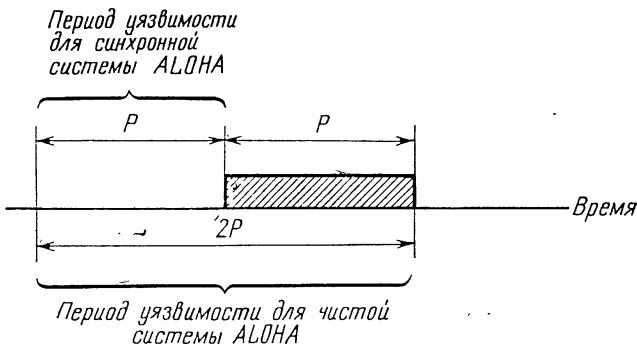
Второй метод использования спутникового канала состоит в разбиении времени на отрезки — окна, длина которых равна длине одного пакета при передаче (предполагается, что все пакеты имеют одну и ту же длину). Если теперь потребовать, чтобы передача всех пакетов начиналась только в начале окна (время в окне всегда привязано к спутнику), то получится выигрыш в эффективности, так как наложения при этом ограничиваются длиной одного окна. Эта система называется синхронной системой ALOHA.

Третий метод использования таких каналов связан с попыткой какого-то прямого упорядочения их загрузки; при этом образуется так называемая система с резервированием, причем временные окна резервируются с закреплением или по требованию для заданных передач пользователей.

Таким образом, мы имеем дело с обладающим конечной пропускной способностью каналом связи на передачу, по которому возникают непредсказуемые и конфликтующие запросы. При наложении требований канал «теряет» часть своей эффективной пропускной способности; нужно исследовать влияние этой конфликтной ситуации. Отметим, что всю пропускную способность канала можно использовать, когда обслуживания требует только один пользователь; это справедливо потому, что пользователь никогда не вступит в конфликт сам с собой (у него есть средства упорядочения своей собственной передачи).

В оставшейся части этого раздела рассматриваются следующие вопросы. Сначала вычисляется *скорость передачи* каналов чистой и синхронной систем ALOHA. Затем изучается задержка в этих каналах и устанавливаются *обменные соотношения между скоро-*

¹⁾ Фактически система ALOHA, построенная Гавайским университетом [1], представляет собой систему наземной радиосвязи, использующую этот метод доступа; системы наземной радиосвязи рассматриваются в следующем разделе.



Фиг. 5.34. Период уязвимости для системы ALOHA.

стью передачи и задержкой. Далее рассматривается неустойчивость, свойственная таким каналам, и обсуждаются обменные соотношения между устойчивостью, скоростью передачи и задержкой. Предлагаются некоторые методы управления для получения устойчивости в каналах синхронной системы ALOHA. Вслед за этим обсуждается поведение спутникового канала с резервированием. Наконец, проводится сравнение синхронной системы ALOHA с системой, использующей для распределения канала метод закрепления.

Рассмотрим теперь передачу пакетов в чистой системе ALOHA (фиг. 5.34). Если, как показано, длина пакета при передаче равна P секунд, то пакет уязвим в течение $2P$ секунд в том смысле, что любая другая передача пакета, начатая в период уязвимости пакета, наложится и разрушит его. Пусть S — скорость передачи спутникового канала (среднее число успешных передач на время передачи P), G — средний трафик в канале (также измеряемый числом попыток передач пакетов за P секунд). Если предположить, что полный входящий в канал трафик G представляет собой независимый процесс, создаваемый бесконечным числом пользователей (каждый из которых порождает трафик для канала с бесконечно малой скоростью, а в сумме получается скорость G), то, очевидно, что

$$S = Gp_0,$$

где $p_0 = P$ [никакие другие пакеты не были порождены в течение периода уязвимости]. Если предположить, что трафик в канале пуассоновский, то получим $p_0 = e^{-2G}$; это дает равенство

$$S = Ge^{-2G}, \quad \blacksquare \quad (5.49)$$

которое впервые было установлено Эбрамсоном [1] для случая радиоканала (конечно, оно в одинаковой мере применимо к спут-

никовым каналам). Легко установить, что наибольшая скорость передачи, которую можно получить от чистой системы ALOHA, достигается при $G=1/2$; эта максимальная (низкая) скорость равна $1/2 e \approx 0,184$.

Как было указано, модификацией чистой системы ALOHA является синхронная система ALOHA, в которой предполагается, что время в канале разбивается на промежутки (окна), равные времена передачи пакета P , и, кроме того, считается, что все пользователи синхронизированы с этими окнами. Пользователь, создав пакет, должен задержать передачу так, чтобы она была точно синхронизирована со следующим возможным окном в канале. В результате период уязвимости для синхронной системы ALOHA имеет длительность лишь P секунд (фиг. 5.34). Конфликты возникают только тогда, когда более одного пользователя порождают пакеты во время одного и того же окна (конфликт при этом будет полным, а не частичным, как в чистой системе ALOHA). В результате, предполагая опять, что трафик в канале является пуссоновским, получаем $p_0=e^{-G}$ и для синхронной системы ALOHA имеем

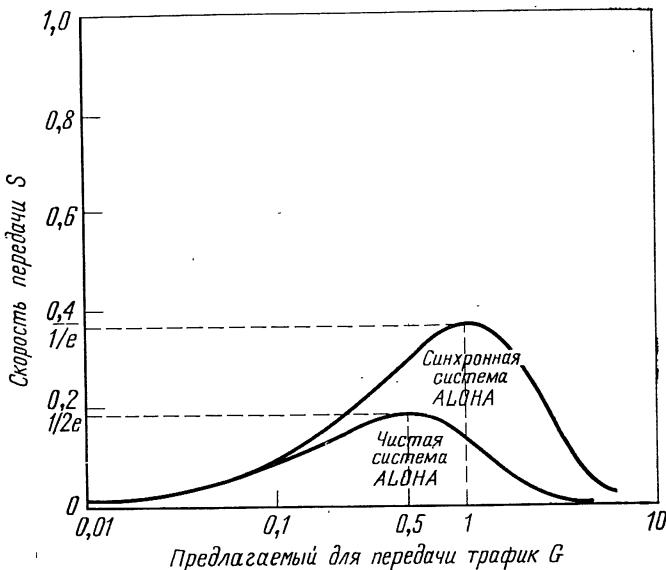
$$S = Ge^{-G}. \quad \blacksquare \quad (5.50)$$

Разбиение на окна впервые предложил Робертс [94], и он указал на значительный выигрыш в скорости, который получается при оптимизации G , а именно при $G=1$ достигается максимальная скорость синхронной системы ALOHA, равная $1/e \approx 0,368$, т. е. вдвое выше, чем у чистой системы ALOHA.

Не будем сейчас обсуждать задержку и устойчивость. Рассмотрим лишь допустимые значения скорости передачи S и трафика в канале G . На фиг. 5.35 графически представлено соотношение между S и G для чистой и синхронной систем ALOHA [см. (5.49) и (5.50)]. (Отметим, что $G > 1$ возможно, так как, быть может, будет передаваться более чем один пакет на окно.) Приведенные кривые относятся к случаю бесконечного множества пользователей, суммарная скорость порождения новых пакетов для которого равна G . Рассмотрим теперь модель с конечным числом пользователей [2], в которой считается, что в синхронной системе ALOHA имеется M независимых пользователей. Будем математически моделировать передачу пакетов каждого пользователя¹⁾ как последовательность независимых испытаний Бернулли, т. е. пусть

$$G_m = P [m\text{-й пользователь передает пакет в каком-либо заданном окне}], \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

¹⁾ Пакеты могут быть старыми, проходящими повторную передачу, и новыми, передаваемыми впервые.



Фиг. 5.35. Скорость передачи для чистой и синхронной систем ALOHA.

Средний трафик (на одно окно), обусловленный m -м пользователем, равен, следовательно, G_m . Таким образом, полный средний трафик в канале равен $G = \sum_{m=1}^M G_m$ пакет/окно. Пусть

$$S_m = P [\text{передача пакета } m\text{-го пользователя прошла успешно}], \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Ясно, что средняя скорость передачи (на окно), связанная с m -м пользователем, равна S_m , а средняя полная скорость передачи есть $S = \sum_{m=1}^M S_m$. Доля трафика m -го пользователя, входящая в успешную передачу, равна вероятности того, что, когда он передавал, никакие другие пользователи не передавали, т. е.

$$S_m = G_m \prod_{i \neq m} (1 - G_i), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.51)$$

Эта система M уравнений имеет решение $\{S_m\}$, определяющее допустимые наборы скоростей источников, которые данный ка-

нал еще может обслуживать. Рассмотрим теперь простой пример.

Пример 1

Предположим, что все пользователи статистически одинаковы. Тогда $S_m = S/M$ и $G_m = G/M$. Уравнения (5.51) дают

$$S = G \left(1 - \frac{G}{M} \right)^{M-1}. \quad (5.52)$$

При $M \rightarrow \infty$ получаем $S = Ge^{-G}$, что совпадает со случаем бесконечного числа пользователей, образующих пуассоновский поток [см. (5.50)]. Выражение (5.52) с ростом M быстро сходится к пуассоновской скорости передачи. Следует отметить, что при $M=1$ имеем $S=G$ с максимальным значением $S=1$. Ниже мы вернемся к этому замечанию.

Обращаясь вновь к (5.51), определим

$$g = \prod_{i=1}^M (1 - G_i). \quad (5.53)$$

Теперь имеем

$$S_m = \frac{G_m}{1 - G_m} g, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.54)$$

Хотя мы не обращаем сейчас внимания на задержку и устойчивость, все же обязательно нужно учесть ограничение на среднюю нагрузку. Канал имеет (конечную) скорость передачи, и трафик нужно ограничить так, чтобы скорость порождения новых пакетов не превышала скорости передачи канала (например, для канала чистой системы ALOHA $S \leq 1/2e$). Если попытаться использовать канал со скоростью, большей этой максимальной величины, то его скорость передачи будет отставать от скорости порождения новых пакетов. Это приведет к неприятным последствиям: появятся неограниченные очереди и задержки, а скорость передачи снизится до бесконечно малой величины (на самом деле, как будет показано в дальнейшем, такая ситуация с вероятностью 1 возникает в канале системы ALOHA с бесконечным числом пользователей на входе при любом значении $S > 0$; эту ситуацию можно избежать, только если использовать управление). Полезно определить допустимые значения скорости передачи и границы области допустимых значений. Равенство (5.54) задает множество достижимых скоростей передачи $\{S_m\}$ через множество значений трафиков в канале $\{G_m\}$. Это равенство определяет область в M -мерном пространстве, координаты которой представляют собой скорости порождения новых пакетов S_1, S_2, \dots, S_M . Граница этой области, которая определяет максимальную скорость передачи для

S_m , когда все остальные $S_i (i \neq m)$ фиксированы (и равны допустимым значениям), отыскивается (для всех m одновременно) приравниванием якобиана (определителя) $J=J(S_1, S_2, \dots, S_M; G_1, G_2, \dots, G_M)$ к нулю¹⁾. Из формулы (5.54) получаем

$$\frac{\partial S_j}{\partial G_i} = \begin{cases} \frac{g}{1-G_i}, & i=j, \\ \frac{-gG_j}{(1-G_j)(1-G_i)}, & i \neq j. \end{cases} \quad (5.55)$$

Таким образом, после выполнения алгебраических преобразований имеем

$$J = g^{M-2} \begin{vmatrix} (1-G_1) & -G_1 & -G_1 & \cdots & -G_1 \\ -G_2 & (1-G_2) & -G_2 & \cdots & -G_2 \\ -G_3 & -G_3 & (1-G_3) & \cdots & -G_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -G_M & -G_M & -G_M & \cdots & (1-G_M) \end{vmatrix} = \\ = g^{M-2} (1-G_1-G_2-\cdots-G_M). \quad (5.56)$$

Используя условие $J=0$, получаем следующее общее условие на множество скоростей трафика в канале, при которых достигаются значения максимальных скоростей передачи:

$$G = \sum_{m=1}^M G_m = 1. \quad ■ (5.57)$$

Это равенство задает контуры скоростей передачи, которые будут рассмотрены ниже на нескольких примерах.

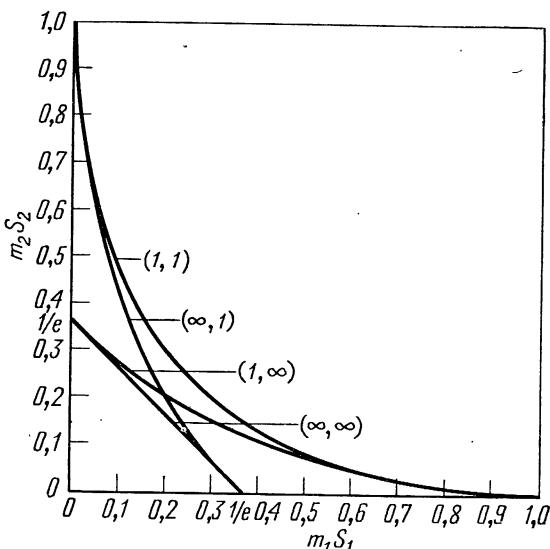
Пример 2

Пусть $M=1$. Тогда имеем $S=G=1$. Это, конечно, самое лучшее, чего можно достичь (одна успешная передача пакета на одно временное окно), и объясняется тем, что пользователь никогда не производит наложение одного своего пакета на другой и не разрушает свои пакеты; допуская «кровосмешение» (т. е. внутриузловой трафик, см. гл. 6) в сети ARPANET, мы не разрешаем «самоубийства»!

Пример 3

Предположим, что M пользователей разбиты на две группы так, что m_1 из них имеют скорость S_1 , а $m_2=M-m_1$ имеют ско-

¹⁾ Элемент (i, j) этого определителя равен $\partial S_j / \partial G_i$. Это условие ($J=0$) подробно обсуждается в работе [5, разд. 3.2].



Фиг. 5.36. Допустимые скорости для источников данных при синхронной системе ALOHA.

рость S_2 . Таким образом, $S = m_1 S_1 + m_2 S_2$ и $G = m_1 G_1 + m_2 G_2$. В (5.54) M уравнений сводятся к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} S_1 &= G_1(1-G_1)^{m_1-1}(1-G_2)^{m_2}, \\ S_2 &= G_2(1-G_2)^{m_2-1}(1-G_1)^{m_1}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

которые определяют множество допустимых скоростей $\{S_1, S_2\}$ как функцию скоростей трафика $\{G_1, G_2\}$. Если теперь наложить условие $G=1$, то можно выразить S_1 и S_2 через G_1 для любого G_1 из промежутка $0 \leq G_1 \leq 1/m_1$ [отметим, что $G_2 = (1-m_1 G_1)/m_2$]. Результаты этих вычислений приведены на фиг. 5.36 и 5.37 для различных значений пар (m_1, m_2) [2]. Благодаря группированию M -мерный контур сводится к двумерному, а именно к зависимости между $m_1 S_1$ и $m_2 S_2$. Здесь опять мы видим скорости передачи S , которые превышают $1/e$. Действительно, когда $S_1=0$ и $S=MS_2$, для оптимального контура будем иметь $S=(1-1/M)^{M-1}$, как в примере 1 (в котором первым был рассмотрен случай $S>1/e$). При $m_1=m_2=1$

$$S_2 = 1 - 2\sqrt{S_1} + S_1. \quad (5.59)$$

При $m_2=\infty$ получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= G_1(1-G_1)^{m_1-1} e^{-(1-m_1 G_1)}, \\ m_2 S_2 &= (1-m_1 G_1)(1-G_1)^{m_1} e^{-(1-m_1 G_1)}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Наконец, при $m_1 = m_2 = \infty$ имеем

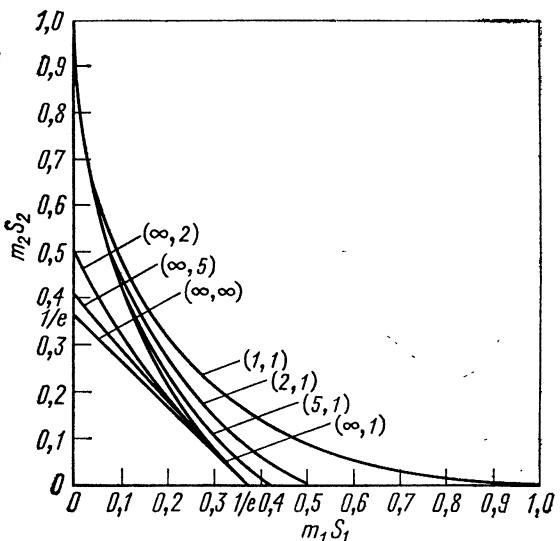
$$\lim_{m_1, m_2 \rightarrow \infty} (m_1 S_1 + m_2 S_2) = \frac{1}{e}, \quad (5.61)$$

где $S = m_1 S_1 + m_2 S_2$.

Синхронная система ALOHA может достичь $S = 1$ лишь в случае, когда в системе имеется только один активный пользователь. Отметим, что получается выигрыш в скорости передачи при расбалансировке скоростей источников; это обсуждается более подробно при рассмотрении модели, учитывающей задержку.

Границы, установленные выше для скорости передачи, никак не учитывают задержку, которой подвергаются пакеты. Теперь рассмотрим этот вопрос для синхронной системы ALOHA [66, 72]. Начнем с модели, предполагающей бесконечное число пользователей¹⁾, которые совместно образуют источник, порождающий пакеты независимо от условий в канале. Этот источник порождает V пакетов на окно с распределением вероятностей $v_k = p[V=k]$ со средним значением S пакетов на окно²⁾.

Предположим опять, что каждый пакет имеет постоянную длину, занимающую P секунд при передаче. При численном анализе, представленном ниже, будем считать, что канал допускает



Фиг. 5.37. Допустимые скорости для источников данных при синхронной системе ALOHA.

¹⁾ Эти пользователи называются «слабыми».

²⁾ Ниже потребуется различать скорость передачи и скорость порождения новых пакетов. Здесь же предполагается, что они равны.

передачу со скоростью 50 кбит/с и каждый пакет содержит 1125 бит, занимая $P=22,5$ мс. Заметим, что $S'=S/P$ — среднее число пакетов, поступающих в секунду от источника. Пусть d — максимальное время распространения туда и обратно для каждого пользователя и $R=d/P$ — число окон, которые можно вложить в одно время распространения туда и обратно. При численных подсчетах будем предполагать, что $d=270$ мс, так что $P=12$ окон. Спустя R окон после передачи пользователь либо услышит, что его передача была успешной, либо узнает, что она была разрушена. В последнем случае если он повторит передачу во время следующего окна и если все другие пользователи будут поступать точно так же, то *наверняка наложение опять повторится*; поэтому будем предполагать, что каждый пользователь передает ранее разрушенный пакет случайно во время одного из K следующих окон (каждое окно выбирается с вероятностью $1/K$). Таким образом, повторная передача произойдет в одном из окон $R+1, R+2, \dots, R+K$ после начальной передачи. В результате трафик, входящий в канал от множества пользователей, будет состоять из новых пакетов и ранее блокированных пакетов; общее число пакетов, переданных на окно, будет теперь равно L и $p_k = P[L=k]$ — распределение для L со средним трафиком G пакетов на окно. Предположим, что в бесконечном множестве каждый пользователь в любой момент времени требует передачи *самое большое одного пакета*, включая любые ранее блокированные пакеты. Для нас представляют интерес максимальная скорость S и средняя задержка пакета T как функции трафика в канале G . Очевидно, что S/G — просто вероятность успешной передачи, а G/S — среднее число, показывающее, сколько раз пакет должен быть послан, пока не произойдет его успешная передача. Из равенства (5.50) следует, что максимальная скорость передачи равна $1/e$; она получается, когда $G=1$. Однако эта скорость передачи приводит к бесконечной задержке T , так как $G=1$ соответствует $\rho=1$. Предположим, что трафик в канале представляет собой независимый процесс (эксперименты по математическому моделированию показывают, что это предположение блестяще подтверждается [72]). Определим $P(z) = \sum_k p_k z^k$ и $V(z) =$

$= \sum_k v_k z^k$ как производящие функции для числа пакетов, переданных за окно, и числа пакетов, порожденных за окно соответственно. Тогда, как требуется показать в задаче 5.22 [72],

$$P(z) = \left[\frac{p_1}{K} (1-z) + P \left(1 - \frac{1-z}{K} \right) \right]^K V(z). \quad (5.62)$$

Если считать, что источник образует независимый процесс и является пуассоновским, то $V(z) = e^{-S(1-z)}$ [см. (1.52)]; поэтому сра-

зу получаем

$$\lim_{K \rightarrow \infty} P(z) = e^{-G(1-z)}.$$

Это показывает, что предположение о пуассоновском графике в канале весьма разумно.

До сих пор были определены следующие важные параметры системы: S , G , K , T и R . При детальном рассмотрении будем подразделять пакеты, передаваемые в некотором заданном окне, на новые и пакеты, которые в прошлом уже имели наложения. Это приводит к приближению, так как мы не учитываем, сколько раз пакет испытал наложение. Математическое моделирование показывает, что корреляция трафика в различных окнах пренебрежимо мала, за исключением сдвигов на $R+1$, $R+2$, ..., $R+K$; это как раз обосновывает рассматриваемое приближение, так как для нас представляет интерес лишь самое последнее наложение. Ниже потребуются еще два дополнительных определения:

$q = P$ [новый пакет успешно передан],

$q_t = P$ [ранее блокированный пакет успешно передан].

Основной задачей является изучение обменного соотношения между средней задержкой T и скоростью передачи S , где T — среднее время (в числе окон), за которое пакет получает успешный прием.

Будем исходить из равенства (5.50). Видоизменим это равенство, приняв во внимание влияние параметра K , определяющего случайную задержку при повторной передаче. В результате получим (см. задачу 5.23)

$$S = G \frac{q_t}{q_t + 1 - q}, \quad (5.63)$$

где

$$q = \left[e^{-G/K} + \frac{G}{K} e^{-G} \right]^K e^{-S} \quad (5.64)$$

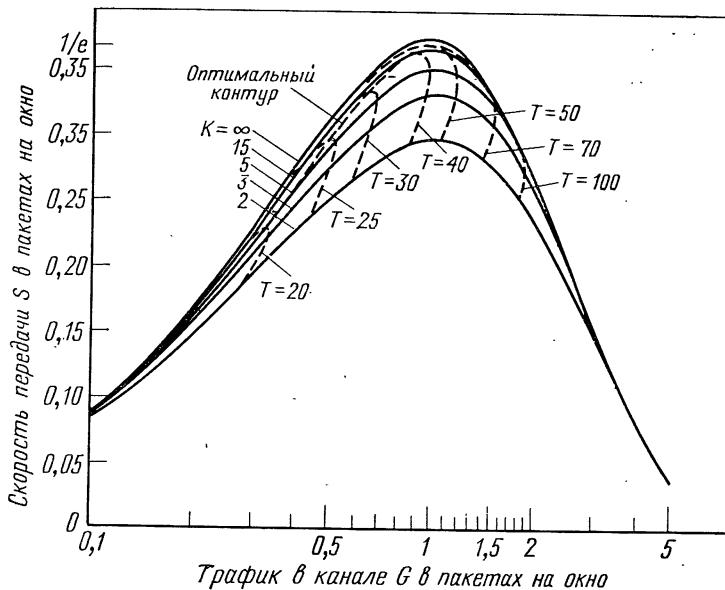
и

$$q_t = \left[\frac{e^{-G/K} - e^{-G}}{1 - e^{-G}} \right] \left[e^{-G/K} + \frac{G}{K} e^{-G} \right]^{K-1} e^{-S}. \quad (5.65)$$

Рассмотрения, приводящие к (5.63), были подсказаны Робертсоном [94], который предложил приближение (5.65) в виде

$$q_t \approx \frac{K-1}{K} e^{-G}. \quad (5.66)$$

Это приближение довольно хорошее. Равенства (5.63) — (5.65) составляют систему нелинейных уравнений для S , q и q_t , которая должна быть решена для получения явного выражения для S .



Фиг. 5.38. Скорость передачи в зависимости от трафика в канале.

через параметры системы G и K . В общем случае провести решение невозможно. Однако заметим, что при стремлении K к бесконечности три указанных уравнения сводятся к

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{S}{G} = \lim_{K \rightarrow \infty} q = \lim_{K \rightarrow \infty} q_t = e^{-G}. \quad (5.67)$$

Таким образом, равенство (5.50) дает правильное выражение для скорости передачи S , только когда K стремится к бесконечности, что соответствует случаю бесконечной средней задержки. Заметим, что при большом K проблемы с большой задержкой не возникает, если только P мало (очень высокоскоростной канал).

Результаты численного решения уравнений (5.63) — (5.65) представлены на фиг. 5.38, где изображены графики скорости передачи S как функции трафика в канале G для различных значений K . Заметим, что максимальная скорость передачи при любом K достигается, когда $G=1$. Скорость передачи улучшается с ростом K , достигая в конце концов максимального значения $S=1/e \approx 0,368$ при $G=1$, $K=\infty$. Таким образом, мы выяснили, что, к сожалению, полная пропускная способность этого канала, работающего с большим числом слабых пользователей, составляет меньше чем 37% от его теоретического максимального значения, равного 1. Заметим, что скорость передачи быстро стремится к

этому предельному значению (т. е. к $1/e$) с ростом K и при $K=15$ оно уже почти достигается. На фигуре показаны также некоторые контуры для задержки, которые будут обсуждаться ниже.

Средняя задержка пакета задается равенством (см. задачу 5.25)

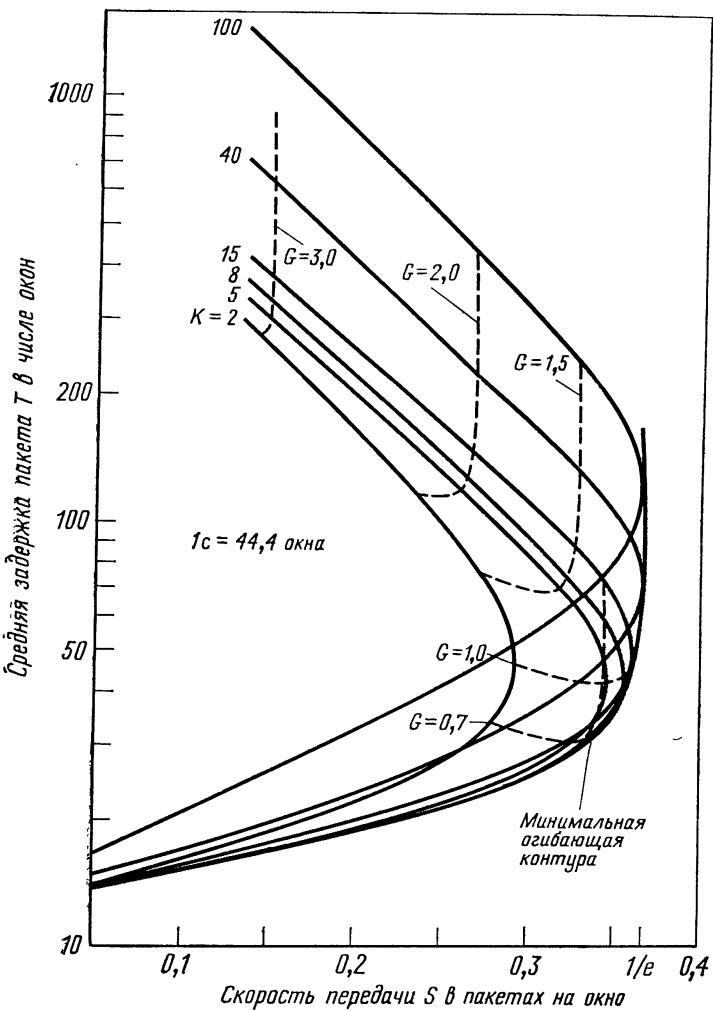
$$T = R + 1 - \frac{1-q}{q_t} \left[R + 1 + \frac{K-1}{2} \right]. \quad \blacksquare \quad (5.68)$$

Если воспользоваться результатом Литтла и равенствами (5.63) и (5.68), то для среднего числа пакетов в системе \bar{N} получим

$$\bar{N} = ST = G \left[R + 1 + \frac{K-1}{2} \right] - S \left[\frac{K-1}{2} \right]. \quad (5.69)$$

На фиг. 5.38 изображены также кривые постоянной задержки на плоскости (S, G) . Отметим, что эти кривые резко выгибаются вверх при увеличении K , определяя максимальную скорость передачи $S_{\max}(T)$ при любом заданном значении T . Следует отметить ту цену, которую приходится платить за счет скорости передачи при желании ограничить среднюю задержку. Это ясно видно из фиг. 5.39, которая демонстрирует основное обменное соотношение между задержкой и скоростью передачи. На этой фигуре показаны контуры задержка — скорость для заданных значений K . Проведена также минимальная огибающая этих контуров, которая определяет оптимальную характеристику системы (подобная оптимальная кривая изображена на фиг. 5.38). Нетрудно заметить, насколько резко увеличивается задержка вблизи максимальной скорости передачи, $S=1/e$. Очевидно, что нужно согласиться на очень большие задержки при желании повысить скорость передачи канала выше значения 0,360 (приращение скорости передачи в этой области будет очень малым). Заметим, что если S стремится к 0, T стремится к $R+1$. Здесь показаны также контуры постоянного G . Таким образом, на этой фигуре и на фиг. 5.38 представлены соотношения между четырьмя основными параметрами системы S , G , K и T двумя различными способами.

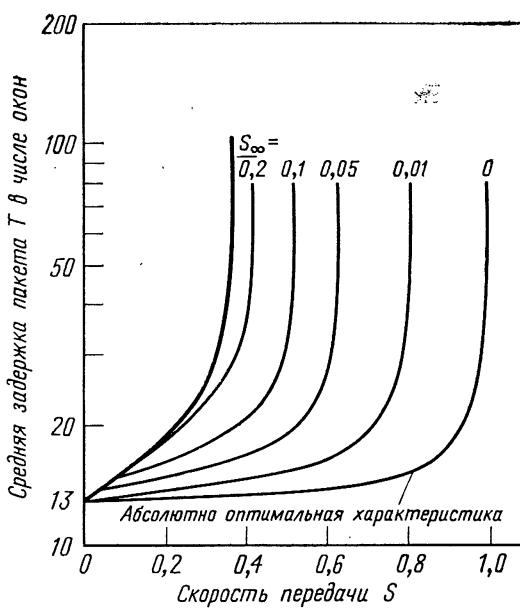
Рассмотрим теперь обменное соотношение между скоростью передачи и задержкой в частном случае описанной ранее модели с конечным числом пользователей. Положим $m_1=\infty$ и $m_2=1$. Это предположение приводит к случаю бесконечного множества слабых (или «фоновых») пользователей, поведение которых соответствует фиг. 5.38 и 5.39. Обозначим через $S_\infty=\lim_{m_1 \rightarrow \infty} m_1 S_1$ их суммарную скорость, а через $G_\infty=\lim_{m_1 \rightarrow \infty} m_1 G_1$ их суммарный трафик. Кроме того, имеется один сильный пользователь со скоростью S_2 и трафиком в канале G_2 . Сильный пользователь порож-



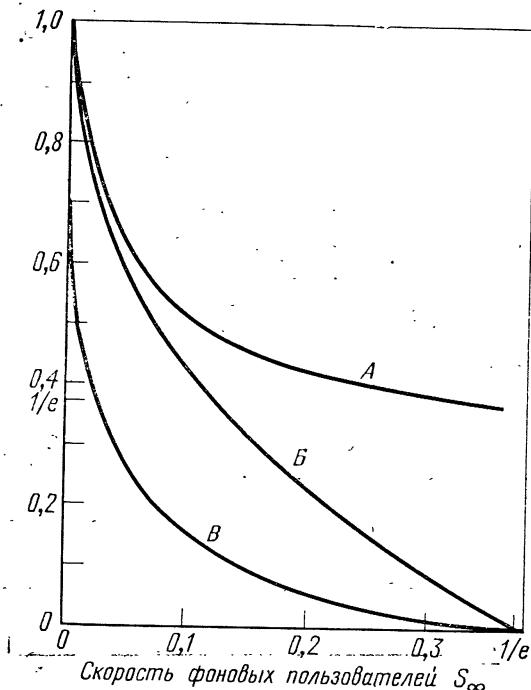
Фиг. 5.39. Обменное соотношение между задержкой и скоростью передачи.

пает пакеты в соответствии с независимым пуассоновским процессом (со скоростью S_2 пакетов за P секунд). Этот процесс пользователь при необходимости пропускает через очередь, чтобы регламентировать передачу пакетов и не допустить среди них взаимной интерференции. (Подробное рассмотрение регламентирования передачи для организации режима коллективного использования канала сильным пользователем совместно со слабыми пользователями можно найти в работах [66, 79].) Конечно, полная

скорость передачи равна $S = S_\infty + S_2$ и полный трафик в канале составляет $G = G_\infty + G_2$. Как и ранее, при заданном S_∞ величина S_2 достигает максимума при $G = G_\infty + G_2 = 1$. Для слабых и сильного пользователей можно получить выражения, подобные (5.63) — (5.68), которые связывают скорость передачи и задержку. Оптимальная характеристика скорость — задержка показана на фиг. 5.40, где изображено семейство оптимальных кривых задержки при различных S_∞ . Задержка T является взвешенной средней задержкой фоновых пользователей T_∞ и сильного пользователя T_2 , т. е. $T = (S_\infty T_\infty + S_2 T_2)/S$. На любой кривой с заданной S_∞ имеем $S_2 = S - S_\infty$ и при любой S_∞ определим максимальную полную скорость передачи как S_{\max} . При выполнении условия $S_\infty < 1/e$ можно достичь увеличения полной скорости передачи S путем введения дополнительного трафика сильного пользователя. Эта дополнительная скорость медленно увеличивается с уменьшением S_∞ , однако когда S_∞ становится меньше чем 0,1, появляется значительный выигрыш в S_2 . Заметим также, что все кривые с заданной S_∞ отходят от общей кривой в точке $S = S_\infty$. Множество таких точек образует огибающую, представляющую собой оптимальную характеристику, которая изображена на фиг. 5.39. В точке $S_\infty = 0$ работает лишь сильный пользователь.



Фиг. 5.40. Оптимальные обменные соотношения между задержкой и скоростью передачи.



Фиг. 5.41. Контуры скоростей передачи.

$A - S_{\max}$; $B - S_{2\max}$; B — суммарный выигрыш в скорости передачи по отношению к $1/e$.

без всяких надеждений; ситуация сводится к классической системе массового обслуживания с пуссоновским входом и постоянным временем обслуживания ($M/D/1$), и получается *абсолютно оптимальный контур* при любом методе использования спутникового канала с пуссоновским входом (при других распределениях на входе можно, используя наши результаты для системы $G/D/1$, найти *абсолютно оптимальный контур*).

На фиг. 5.41 представлены обменные соотношения между скоростями фоновых и сильного пользователей. Верхняя кривая дает абсолютный максимум S при каждом значении S_∞ ; она ясно показывает значительный выигрыш в S_2 , который достигается при снижении фоновой скорости. Средняя кривая [которая также изображена на фиг. 5.36 как кривая $(\infty, 1)$] дает абсолютный максимум S_2 при каждом значении S_∞ . Самая нижняя кривая показывает суммарный выигрыш в скорости системы S , когда S_∞ уменьшается, начиная со своего максимального значения $1/e$.

Выше были получены установившиеся значения для скорости передачи и задержки в предположении, что имеют место условия

равновесия. Часто это предположение не удовлетворяется; при этом указанные значения применимы только на некотором (возможно, малом) интервале времени. Изучим теперь эту ситуацию [69, 79]. Предположим, что канал синхронной системы ALOHA используется для передачи при большом (но конечном) числе активных терминалов M . Каждый терминал имеет буфер для хранения ровно одного пакета с сообщением (предполагается, что все пакеты имеют одну и ту же длину). Новый пакет с сообщением порождается (внешним источником этого терминала), только когда буфер терминала пуст; при этом в данном окне пакет порождается с вероятностью σ . Пусть $N(t)$ — случайная величина, представляющая полное число не пустых (занятых) терминалов (эта величина будет называться задолженностью канала), а $S(t)$ — суммарная входная скорость пакетов во все терминалы в момент t . Вектор $[N(t), S(t)]$ определяется как вектор состояния канала, или нагрузка канала, в момент t . При $N(t)=n$ имеем $[N(t), S(t)]=[n, (M-n)\sigma]$ и получается так называемая линейная модель с обратной связью. Заметим, что входная скорость канала $S(t)$ уменьшается линейно с ростом $N(t)$ из-за того, что число пользователей конечно. Пакеты, испытывающие наложение, передаются повторно (после задержки распространения туда и обратно, равной R окнам) во время одного из K следующих окон, выбираемых случайно с вероятностью $1/K$. Таким образом, повторная передача в среднем происходит в $R+(K+1)/2$ -м окне после предыдущей передачи. Такую схему повторной передачи трудно изучать, поэтому примем более простую схему¹⁾, в которой каждый задолженный пакет передается независимо с вероятностью p . Эта схема дает очень хорошее приближение для вышеприведенного спутникового канала с окнами, что подтверждается математическим моделированием, проводимым для средних и больших значений K при выборе

$$p = \frac{1}{R + (K+1)/2}. \quad (5.70)$$

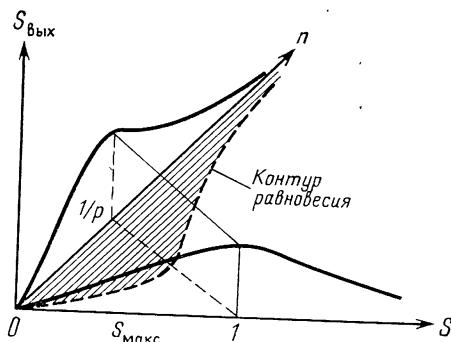
Как и ранее, предположим, что $R=12$, и, используя формулу (5.70), выразим численные результаты через K , а не через p .

Определим $S_{\text{вых}}$ как выходную скорость²⁾ канала, равную вероятности одной (успешной) передачи пакета в окне канала. Для принятой выше модели если $[N(t), S(t)]=[n, (M-n)\sigma]$, то

$$S_{\text{вых}} = (1-p)^n(M-n)\sigma(1-\sigma)^{M-n-1} + np(1-p)^{n-1}(1-\sigma)^{M-n}. \quad (5.71)$$

¹⁾ Эта схема применима также к системам коммутации пакетов при наземной радиосвязи (разд. 5.12).

²⁾ Впервые здесь делается различие между входной скоростью S и выходной скоростью $S_{\text{вых}}$ (которая может быть больше или меньше, чем S).



Фиг. 5.42. Выходная скорость канала в зависимости от нагрузки и задолженности.

В пределе при $M \rightarrow \infty$ и $\sigma \rightarrow 0$ (при условии, что $M\sigma = S < \infty$) получается модель с бесконечным числом пользователей, в которой новые пакеты порождаются для передачи по каналу со средней пуссоновской скоростью S . В этом случае равенство (5.71) принимает вид

$$S_{\text{вых}} = (1-p)^n S e^{-S} + np(1-p)^{n-1} e^{-S}. \quad (5.72)$$

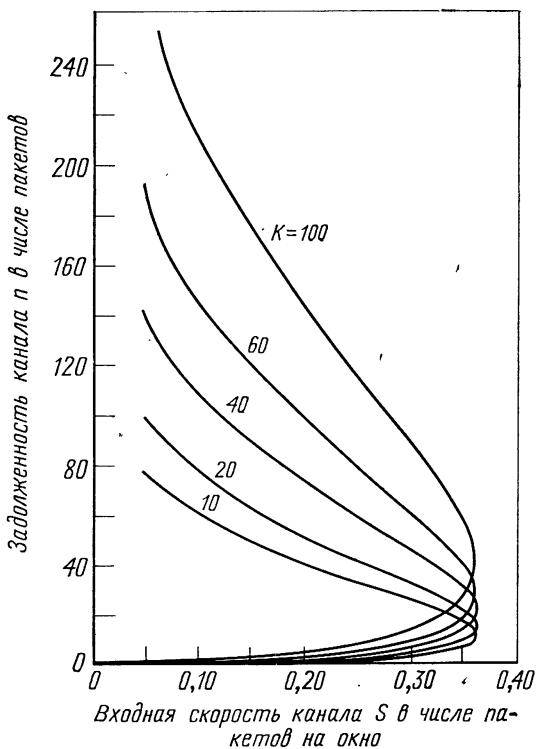
Это выражение очень точно даже при конечных M , если $\sigma \ll 1$ и произвести замену $S = M\sigma$ на $S = (M-n)\sigma$.

На фиг. 5.42 при фиксированном K показано качественное поведение $S_{\text{вых}}$ как функции нагрузки канала $[n, S]$ в соответствии с равенством (5.72). Отметим, что на «фазовой плоскости» (n, S) имеется контур равновесия, на котором входная скорость канала S равна выходной скорости канала $S_{\text{вых}}$. В заштрихованной области, ограниченной контуром равновесия, $S_{\text{вых}}$ превосходит S , а вне этой области $S > S_{\text{вых}}$ (пропускная способность системы превышена!). Как показано на фиг. 5.43, где изображено семейство контуров равновесия, площадь заштрихованной области можно увеличить, увеличивая K ; эти контуры подобны кривым постоянного K на фиг. 5.39.

Рассмотрим пример, в котором $M = M(t)$ (фиг. 5.44). Используем непрерывную аппроксимацию для траектории вектора состояния канала $[N(t), S(t)]$ на плоскости (n, S) , как показано на фиг. 5.45. Здесь представлены два возможных случая, соответствующие фиг. 5.44 при различных значениях M_3 . (Стрелки указывают направление потока «жидкости» везде, кроме горизонтальных участков траектории. Отметим, что непрерывная аппроксимация требует, чтобы траектория совпадала с линией $n = M - (S/\sigma)$, когда $M(t) = M$; движение по этой линии направлено вверх, если $S > S_{\text{вых}}$, и вниз, если $S < S_{\text{вых}}$.) Первому случаю соответствует траектория $ABCDEFGA$, которая возвращается к пер-

во начальной точке равновесия A на контуре равновесия, несмотря на входной импульс. Второй случай демонстрирует неприятную ситуацию, в которой снижения $M(t)$ в момент t_2 недостаточно для приведения траектории назад в «безопасную» область. Здесь показана ситуация, в которой $M_3 = M_1$ и траектория идет от A в момент, предшествующий t_1 , к B в момент t_1 , к C в момент, предшествующий t_2 , и к D в момент t_2 . После момента t_2 траектория поднимается по штриховой линии до пересечения контура равновесия (это пересечение не показано); в конце концов, канал будет парализован в результате увеличения задолженности и малой выходной скорости канала.

Мы показали, что имеет место неустойчивость канала из-за изменений (во времени) входа. Рассмотрим условия, при которых канал со *стационарным* входом является неустойчивым. (Если M и σ не изменяются во времени, то вход считается стационарным.) В этом случае определим *линию нагрузки канала* на плоскости (n, S) как прямую $n = M - (S/\sigma)$. Считается, что канал устойчи-

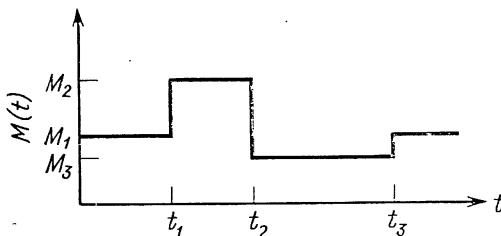


Фиг. 5.43. Контуры равновесия. (Канал 50 кбит/с, $R=12$ окон.).

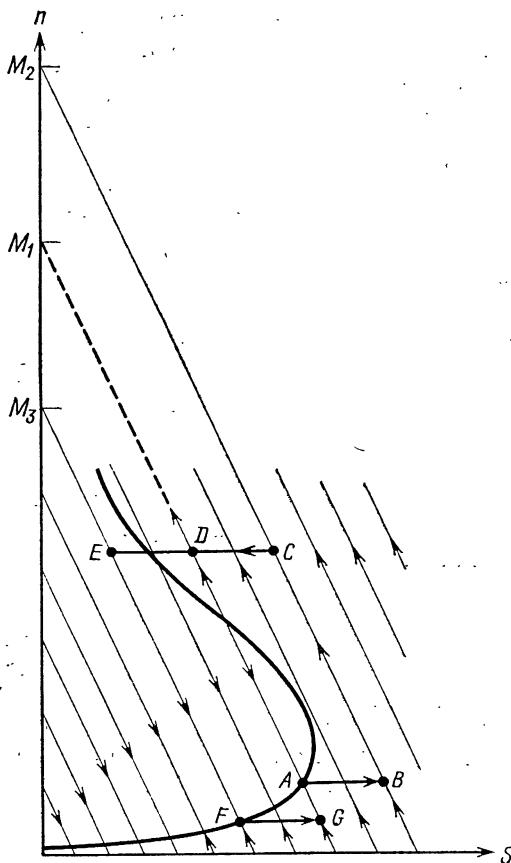
вый, если линия нагрузки пересекает контур равновесия в одной точке (именно пересекает, а не просто касается). На фиг. 5.46, а показан пример устойчивого канала и его рабочей точки. Если M конечно, то устойчивый канал всегда можно получить, используя достаточно большое K (см. фиг. 5.43). Большее значение K , естественно, приведет к большим средним задержкам пакета.

На фиг. 5.46, б показан пример неустойчивого канала. (Заметим, что если линия нагрузки либо не пересекает, либо лишь касается контура равновесия, канал по определению является неустойчивым.) Точка (n_0, S_0) представляется удобной рабочей точкой, так как она соответствует наибольшей скорости передачи по каналу и наименьшей задержке пакетов. Однако канал не может все время поддерживать равновесие в этой рабочей точке, так как $N(t)$ является случайным процессом. Это значит, что с вероятностью 1 за конечное время задолженность $N(t)$ перейдет через критическое значение n_c и, как только это произойдет, S превысит $S_{\text{вых}}$. Как показывает проведенное математическое моделирование, при этом условии, несмотря на то, что с малой вероятностью $N(t)$ может спуститься ниже n_c , вектор состояния канала $[N(t), S(t)]$ поднимается вверх по линии нагрузки канала, увеличивая задолженность и уменьшая выходную скорость. В этой ситуации канал выходит из рабочего состояния и требуется внешнее вмешательство для восстановления его нормальной работы (см. ниже). Ряд исследований показал, что неуправляемая модель с бесконечным числом пользователей всегда неустойчива [31, 33, 72].

Исходя из проведенного рассмотрения и принимая во внимание фиг. 5.46, б, разобъем линию нагрузки канала на два участка: *надежный* участок, состоящий из состояний канала $\{[n, S] : n \leq n_c\}$, и *ненадежный* участок, состоящий из состояний канала $\{[n, S] : n > n_c\}$. Хорошой мерой устойчивости (для неустойчивых каналов!) является среднее время перехода на ненадежный участок, начиная из надежного состояния канала, а точнее среднее время *первого достижения* (ВПД) состояния на ненадежном участке при выходе из пустого (задолженность равна нулю) началь-



Фиг. 5.44. Зависимые от времени скорости источников.



Фиг. 5.45. Траектории непрерывной аппроксимации.

ного состояния канала. ВПД будет использоваться в качестве меры устойчивости канала. Вывод ВПД и описание процедуры его численного нахождения приведены в работе [72].

Как и ранее, при численном анализе предположим, что имеется спутниковый канал 50 кбит/с с пакетами 1125 бит и временем распространения туда и обратно 0,27 с (это дает $R=12$ и 44,4 окна в секунду).

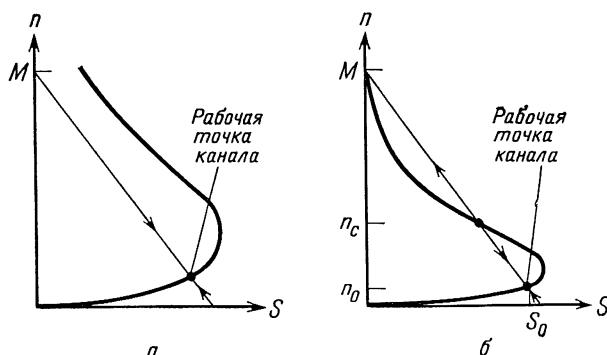
На фиг. 5.47 показано ВПД в зависимости от K для модели с бесконечным числом пользователей при заданных значениях выходной скорости канала S_0 , соответствующих рабочей точке канала. Результаты, относящиеся к модели с бесконечным числом пользователей, дают оценки наихудшего случая; это показано на фиг. 5.48, где ВПД изображено в зависимости от M при $K=10$.

для четырех значений S_0 . ВПД для канала растет с убыванием M , и существует критическое значение M , ниже которого канал всегда устойчив (фиг. 5.46, а). Из фиг. 5.47 видно, что устойчивость канала (т. е. значение ВПД) может быть улучшена либо путем снижения скорости канала, либо путем увеличения K (что приводит в свою очередь к увеличению средней задержки пакетов). Так, например, если ограничить S_0 сверху значением 0,25 и положить $K=10$, то в среднем канал будет достигать ненадежный участок самое большое один раз за два дня.

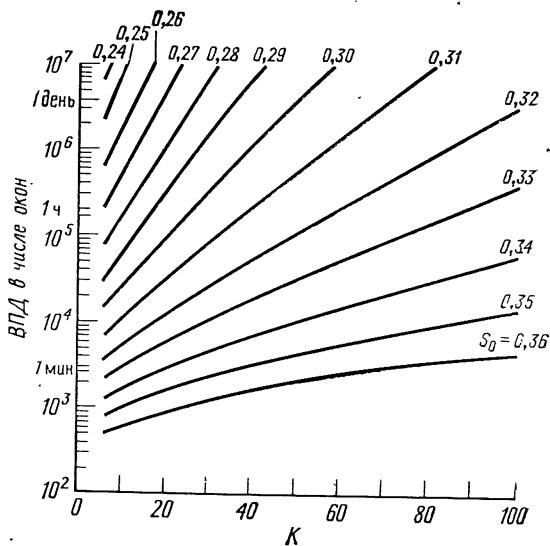
На фиг. 5.49 показаны два семейства кривых зависимости скорости от задержки при установленных ВПД. (Для сравнения здесь приведена нижняя граница, оптимальная характеристика, не учитывающая устойчивость канала; она была показана на фиг. 5.39.) Первое семейство состоит из трех сплошных кривых, соответствующих модели с бесконечным числом пользователей с $\text{ВПД} \geq 1$ день, 1 ч и 1 мин. Второе семейство представлено двумя штриховыми кривыми, соответствующими модели с конечным числом $M=150$ пользователей и $\text{ВПД} \geq 1$ день и 1 ч. На этой фигуре показано обменное соотношение между устойчивостью, скоростью передачи и задержкой.

Таким образом, для неустойчивого канала любые результаты (касающиеся зависимости скорости передачи от задержки), полученные в предположении, что канал устойчив (как в более раннем рассмотрении), остаются справедливыми лишь на конечных интервалах времени.

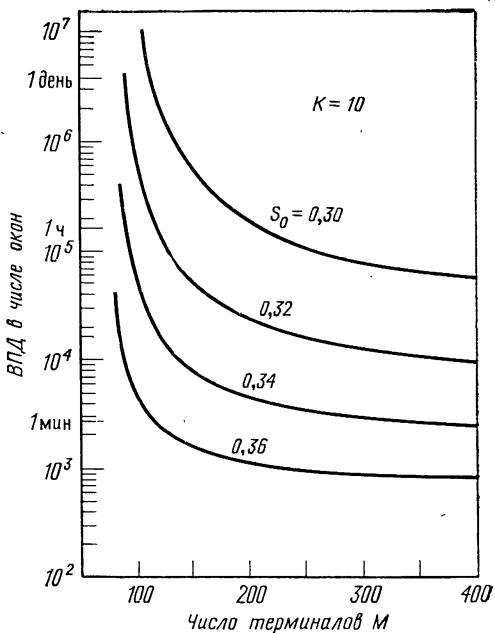
Итак, до сих пор рассматривались абсолютные контуры для скорости передачи (без учета задержки), обменное соотношение между скоростью передачи и задержкой (без учета вопросов устойчивости) и неустойчивость неуправляемого спутникового ка-



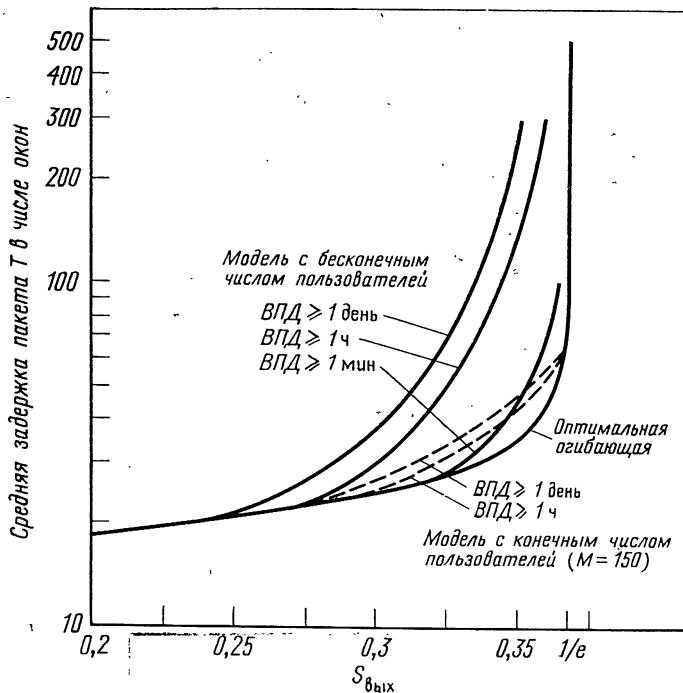
Фиг. 5.46. Устойчивость канала.
а — устойчивый канал; б — неустойчивый канал.



Фиг. 5.47. ВПД для модели с бесконечным числом пользователей.



Фиг. 5.48. ВПД в зависимости от M для модели с конечным числом пользователей.



Фиг. 5.49. Обменное соотношение между устойчивостью, скоростью передачи и задержкой.

нала с коммутацией пакетов. Опишем теперь методы управления, позволяющие сделать канал устойчивым.

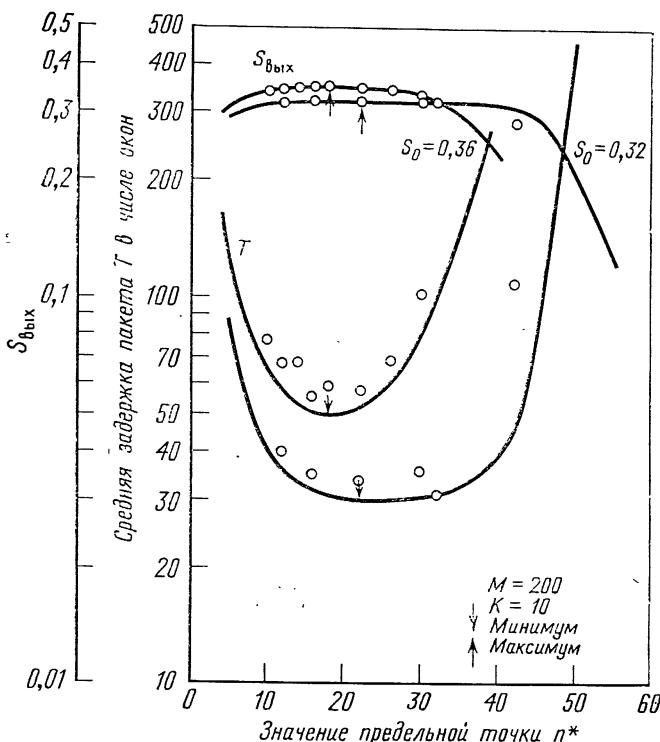
Цель состоит в том, чтобы получить оптимальную характеристику задержка — скорость в условиях, когда можно использовать управление, обеспечивающее устойчивость канала. Процедура управления будет найдена в предположениях, что время распространения равно нулю (точнее $R \rightarrow 0$) и терминалам точно известно состояние канала [т. е. задолженность $N(t)$]; ниже эти предположения будут ослаблены. Рассмотрим линейную модель с обратной связью (конечное число M пользователей), так что входная скорость канала равна $S(t) = [M - N(t)]\sigma$. Предположим далее, что каждый задолженный пакет передается повторно в любом заданном окне с вероятностью p . Рассмотрим лишь такие процедуры управления [72], при которых каждый задолженный пакет передается независимо с одной из двух вероятностей: $p = p_0$ и $p = p_1$ ($p_0 > p_1$). Процедура управления решает, какую вероятность p_0 или p_1 выбрать (одно и то же значение для всех терминалов в любой момент времени), основываясь лишь на величине

текущей задолженности $N(t)$. Выбор p_0 или p_1 по существу эквивалентен выбору параметров повторной передачи K_0 и K_1 соответственно, так как, согласно формуле (5.70), $p = \{R + (K + 1)/2\}^{-1}$. Таким образом, управление каналом состоит в увеличении средней задержки повторной передачи, когда задолженность становится большой, и уменьшении ее при малой задолженности. Задача теперь состоит в том, чтобы определить, какое значение p следует использовать для каждого заданного значения $N(t)$; требуется найти оптимальное правило решения, либо максимизирующее выходную скорость $S_{\text{вых}}$ при некотором ограничении на среднюю задержку T , либо минимизирующее T при некотором ограничении на $S_{\text{вых}}$. К счастью, как можно показать [72, 73], всегда существует стационарная процедура управления, которая одновременно минимизирует T и максимизирует $S_{\text{вых}}$ в классе всех рассматриваемых процедур. Такая процедура может быть найдена методом Ховарда [55], затраты на машинный поиск ее в значительной степени снижаются путем использования некоторых хитроумных алгоритмов. Эта процедура рассмотрена в работе [72] для всех возможных случаев и представляется, что она приводит к стационарной процедуре управления с предельной точкой. Следовательно, существует критическое значение задолженности n^* , при котором

$$p = \begin{cases} p_0, & \text{когда } N(t) < n^*, \\ p_1, & \text{когда } N(t) \geq n^*. \end{cases} \quad (5.73)$$

Характеристика канала при такой процедуре управления с предельной точкой показана на фиг. 5.50, где сплошной линией нанесены аналитические результаты, а кружками — результаты математического моделирования. Можно заметить, что одновременно минимизируется T и максимизируется $S_{\text{вых}}$ при критическом значении задолженности. Более удивительным, возможно, является то, что характеристика канала (при средних нагрузках) почти не чувствительна к вариации критической задолженности! Другой способ представления тех же результатов показан на фиг. 5.51. Здесь приведены оптимальные характеристики задержка — скорость, которые сдвигаются вправо с уменьшением M . Каждая точка на этих оптимальных кривых соответствует оптимальному значению n^* и, как показано, любое увеличение или уменьшение n^* приводит к ухудшению как T , так и $S_{\text{вых}}$, что указывает на упомянутую выше одновременную оптимизацию T и $S_{\text{вых}}$. На фигуре также показана оптимальная нижняя граница для модели с бесконечным числом пользователей ($M = \infty$).

Выше предполагалось, что каждый терминал точно знает состояние канала $N(t)$. Конечно, это предположение не реально. Однако можно оценить $N(t)$ путем наблюдения числа свободных

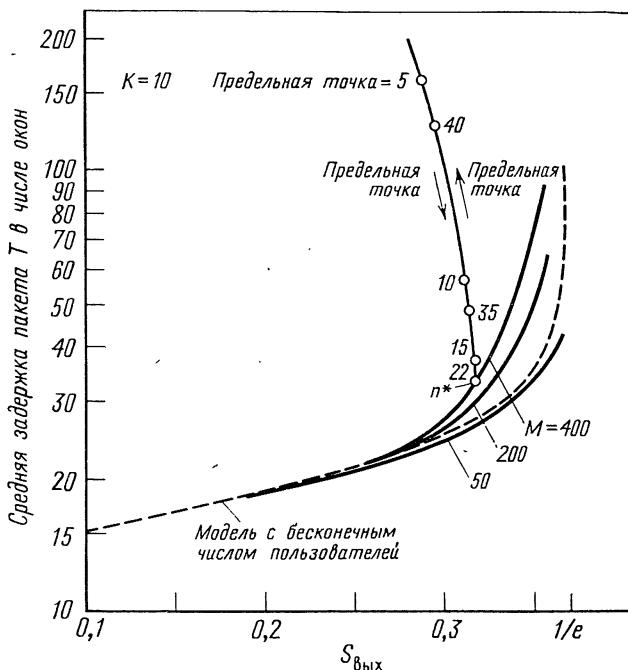


Фиг. 5.50. Скорость передачи и задержка в зависимости от значения предельной точки.

○ — результаты моделирования.

окон на подходящем временном интервале в прошлом (на интервале порядка времени распространения туда и обратно). Результаты математического моделирования показывают, что алгоритмы, основанные на таких оценках, работают довольно хорошо благодаря наличию плоских участков на характеристиках, показанных на фиг. 5.50 (это значит, что они достигают значений задержки и скорости передачи, близких к оптимальным, и в то же время обеспечивают устойчивость) [72].

Рассмотрим теперь третий метод организации доступа в канал с коммутацией пакетов, а именно *динамическую систему с резервированием*. Выше исследовалось поведение каналов системы АЛОНА, допускающей свободную (в значительной степени неуправляемую) конкуренцию за время в канале. Для этой системы типичными были наложение пакетов и повторные передачи. Конечно, существуют и другие методы коллективного использования (уплотнения) канала, и конец этого раздела посвящается крат-



Фиг. 5.51. Оптимальная зависимость задержка — скорость.

кому обсуждению таких методов. Этот материал заимствован главным образом из работы [96].

В настоящее время типичным разделением спутникового канала является разделение его на подканалы (каждый подканал для пары абонентов) с помощью частотного уплотнения (ЧУ) с минимальным защитным интервалом частот, приближенно равным 2 кГц на подканал. Очевидно, что такой способ разделения создает ряд частных систем. Защитные интервалы можно устраниć, если использовать синхронное временное уплотнение (СВУ); оно также создает частные системы. Как было показано в разд. 5.1, большие системы с коллективным использованием ресурсов имеют много преимуществ, наиболее существенным из которых является более эффективное использование пропускной способности (по сравнению с частными системами, в которых рабочий цикл низкий и имеет место группирование нагрузки). Вместе с тем система СВУ¹⁾ в высшей степени эффективна при условии, что каждому выделенному каналу разрешается хранить данные в буфере для

¹⁾ Известная также под названием система множественного доступа с временным разделением (система МДВР).

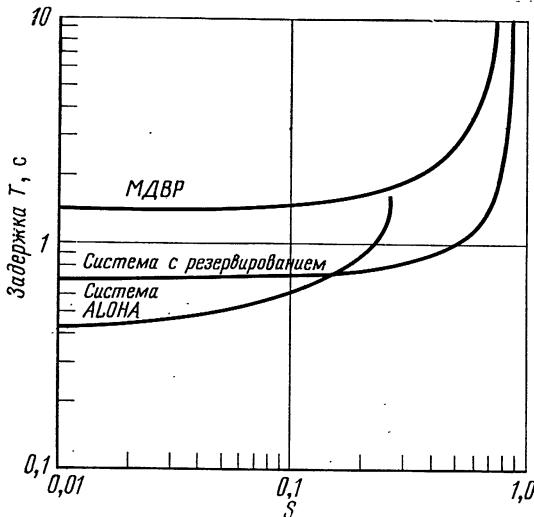
того, чтобы подавать в канал сглаженный трафик с высоким рабочим циклом. Это возможно, например, если каждый выделенный канал имеет дело с уже сконцентрированным трафиком (как в сети ARPANET). Возможно то, что это априорное резервирование временных окон гарантирует отсутствие наложений. Аналогичного результата можно достичь путем *динамического распределения окон*; именно такая система с резервированием будет сейчас описана.

Динамическая (синхронная) система с резервированием, которая здесь рассматривается, имеет как резервированные, так и нерезервированные (обычные для ALOHA) окна, чередующиеся, как описано ниже. Меньшие окна используются станциями для размещения заказов, причем указывается, сколько окон им нужно (это число должно быть ограничено сверху). Заказы могут накладываться друг на друга, как в системе ALOHA. Однако если заказ был успешно передан, то каждая станция прибавляет к подсчитываемому ей числу зарезервированных окон J число, равное числу окон, резервируемых в этом заказе. Фактически имеется одна очередь из зарезервированных окон, общее число которых J известно всем пользователям. Место в очереди, которое принадлежит данному пользователю, должно быть известно только этому пользователю; другие пользователи должны знать лишь общую длину очереди для того, чтобы они имели возможность в дальнейшем найти подходящие окна для размещения своих собственных заказов¹⁾. В силу того что получение правильной информации о заказах очень важно для нормальной работы системы, целесообразно, например, передавать каждый заказ три раза²⁾. Это даст хорошую помехоустойчивость. Если ни одно из окон не было зарезервировано, то все окна становятся обычными окнами системы ALOHA. Однако как только будет успешно передан первый заказ, используется r окон (каждое длиной P секунд) в качестве резервированных и за ними следует один интервал длиной P секунд, в котором можно разместить V (утроенных) обычных окон системы ALOHA ($V \approx 6$). Это повторяется до тех пор, пока не будут заказаны некоторые окна. Можно положить $r = A\sqrt{m}/2e$, где $A = (K-1)/K$ [см. (5.66)], $K \approx 2,3\sqrt{R}$, $\bar{m} = E$ [число пакетов на одно сообщение] ($m \approx 4,5$), что дает $r = 5$ (где проведено округление до ближайшего целого числа)³⁾. Значение r можно также подбирать динамически. С помощью указанных числовых значений и некоторой модели для задержки было найдено (см. [96]),

¹⁾ Это значит, что, с точки зрения данного пользователя, существуют два типа зарезервированных окон — его окна и окна, принадлежащие другим, в которых ему не разрешено вести передачу.

²⁾ Даже при утроении требования в P -секундных окнах можно разместить много заказов, так как заказы существенно короче пакетов [96].

³⁾ Робертс использовал пакеты 1350 бит; при этом $R = 10$.



Фиг. 5.52. Средняя задержка; канал 50 кбит/с, 10 станций.

что МДВР, система с резервированием и синхронная система ALOHA ведут себя так, как показано на фиг. 5.52. Графики построены исходя из предположения, что половина новых (пуассонских) порождаемых сообщений требует по одному пакету, а вторую половину составляют мультипакеты по восемь пакетов в каждом. Заметим, что при небольших скоростях передачи синхронная система ALOHA лучше. Однако с увеличением скорости передачи становится лучше метод резервирования, а в случае каналов с очень большой нагрузкой ($S \rightarrow 1$) метод МДВР оказывается сравнимым с методом резервирования. Более подробно эти методы¹⁾ рассмотрены в работе [96].

Исследования и эксперименты, описанные в этом разделе, привели к разработке нового процессора IMP — спутникового процессора IMP (SIMP) — для использования в сети ARPANET. Процессор SIMP представляет собой обычный процессор IMP с некоторыми добавлениями и модификациями в программном обеспечении и аппаратуре [12]. Например, в качестве так называемой спутниковой пакетной памяти добавлены 32 буфера. Аппаратура обеспечивает точные временные отсчеты и имеет средства обнаружения, необходимые для образования окон. Процессор SIMP дает случайную задержку при повторной передаче, используя параметр p [см. (5.70)]. Процедуры обновления информации о маршрутах, выбора маршрутов и уведомления были при-

¹⁾ Другой метод динамического распределения канала предложен Биндером [6], который соединил метод динамического кругового опроса и МДВР.

способлены к особенностям спутникового канала. Расчетная скорость работы процессора SIMP ограничена сверху выражением $(7C/M) + C \leq 1,2$ Мбит/с, где C — эффективная пропускная способность канала, а M — число процессоров SIMP, коллективно использующих канал. Экспериментальная сеть процессоров SIMP начала строиться летом 1975 г.

Полезно сейчас эти схемы коллективного использования ресурсов со случайным множественным доступом сравнить со схемой с закрепленным распределением ресурсов, пользуясь несколько другой точкой зрения [69]. Сравним синхронную систему ALOHA с системой множественного доступа с частотным разделением (МДЧР)¹⁾. Закрепленное распределение каналов при МДЧР позволяет устраниć их наложение, но это делается, возможно, за счет плохого использования каждого канала, так как эффект сглаживания, свойственный системам с большим числом пользователей, здесь отсутствует. При исследовании МДЧР примем следующие предположения: а) число пользователей M конечно, но велико; б) каждый пользователь порождает новые пакеты длины b бит в соответствии с пуассоновским процессом интенсивности λ пакетов в секунду; в) канал в целом имеет полосу H Гц и использует модуляцию, дающую 1 бит/(с·Гц); при этом пропускная способность канала составляет H бит/с. Таким образом, если M пользователей работают в режиме МДЧР, то каждому предоставляется канал H/M бит/с. Любой такой канал ведет себя как система $M/D/1$; при этом среднее время пребывания в системе T (ожидание плюс передача), согласно (1.82), равно

$$T = \frac{(\rho/\lambda)(1 - \rho/2)}{1 - \rho}, \quad (5.74)$$

где $\rho = \lambda Mb/H$.

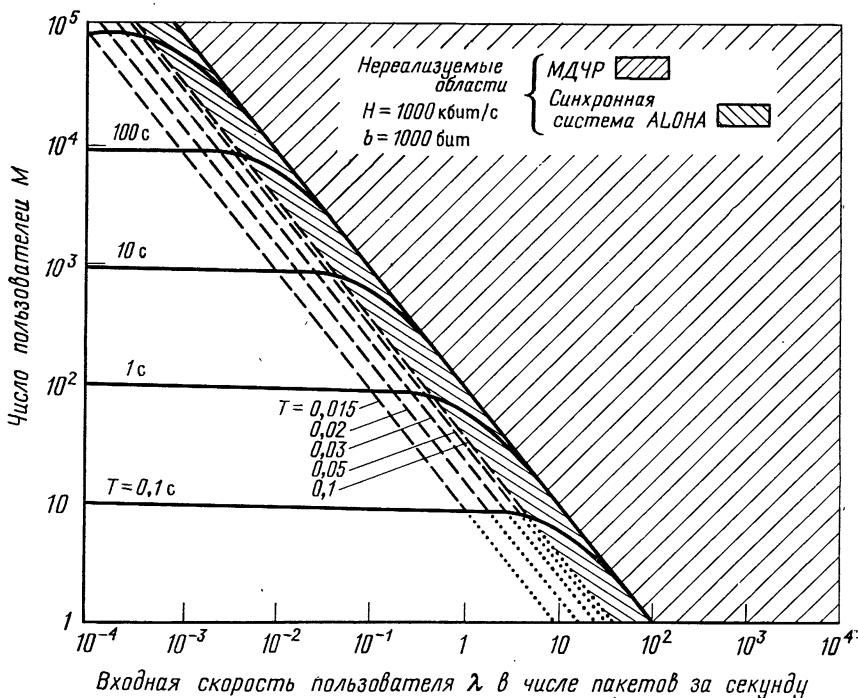
Мы считаем, что образование очереди допускается на каждом терминале. Однако при анализе для синхронной системы ALOHA будет предполагаться бесконечное число пользователей с суммарной входной скоростью $M\lambda$ пакетов в секунду и в результате будет установлена граница сверху для задержки. (Отметим, что модель с конечным числом пользователей M каждый со скоростью λ , в которой допускается образование очереди, приводит к меньшему числу наложений, чем модель с бесконечным числом пользователей, так как терминалы не допускают наложения своих пакетов.)

Сравним равенство (5.74), полученное для МДЧР, с результатами для задержки в синхронной системе ALOHA с бесконечным числом пользователей (см. фиг. 5.39). Рассмотрим плоскость (M, λ) на фиг. 5.53, на которой нанесены кривые постоянных T .

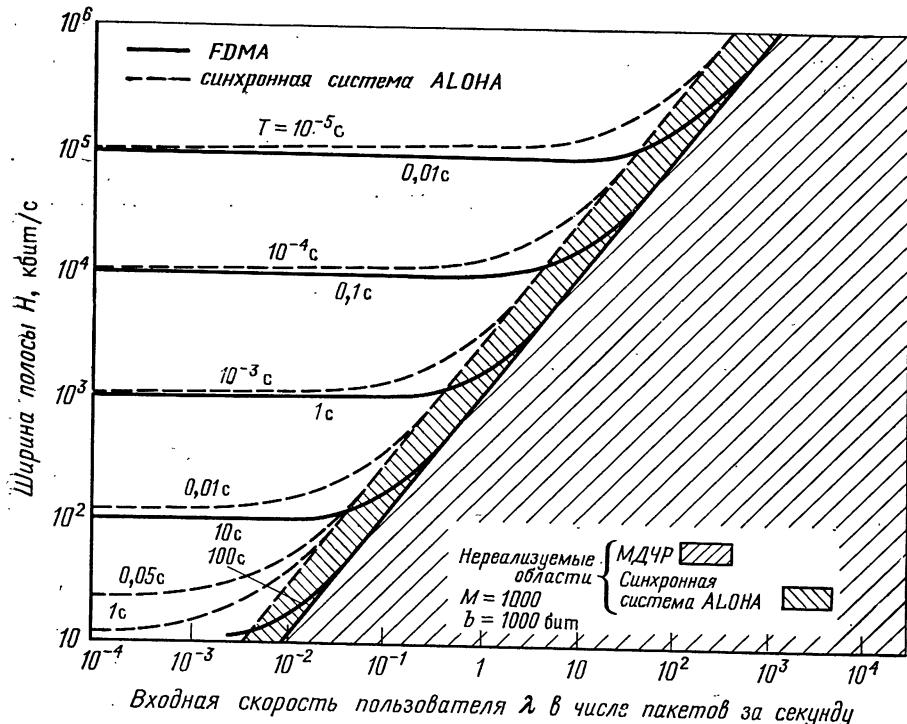
¹⁾ Для сравнения положим $R=0$.

Сравнивая задержки этих двух систем, можно заметить, что в случае пользователей с группирующейся нагрузкой (λ мало) синхронная система ALOHA может обслуживать намного больше их, чем система МДЧР при одном и том же значении задержки пакета. Например, при $T=0,1$ с синхронная система ALOHA может обслужить на три порядка больше пользователей, чем система МДЧР при $\lambda=10^{-3}$ пакет/с; с ростом λ (т. е. при уменьшении сгруппированности нагрузки) эта разница становится не так заметна и при $\lambda \approx 5$ обе системы могут обслуживать примерно одинаковое число пользователей. После этого система МДЧР становится лучше. Эта точка пересечения зависит, очевидно, от значения T . В действительности синхронная система ALOHA может обслуживать весь трафик только в диапазоне $\rho < 1/e \approx 0,37$ и вне этого диапазона МДЧР всегда лучше (до точки насыщения $\rho = 1$). Эти выводы легко получить также из рассмотрения кривых на фиг. 5.52.

Указанные выше результаты можно также представить следующим образом. Пусть M — некоторое большое число, напри-



Фиг. 5.53. Система МДЧР и синхронная система ALOHA при случайному доступе; характеристика для канала 100 кбит/с.



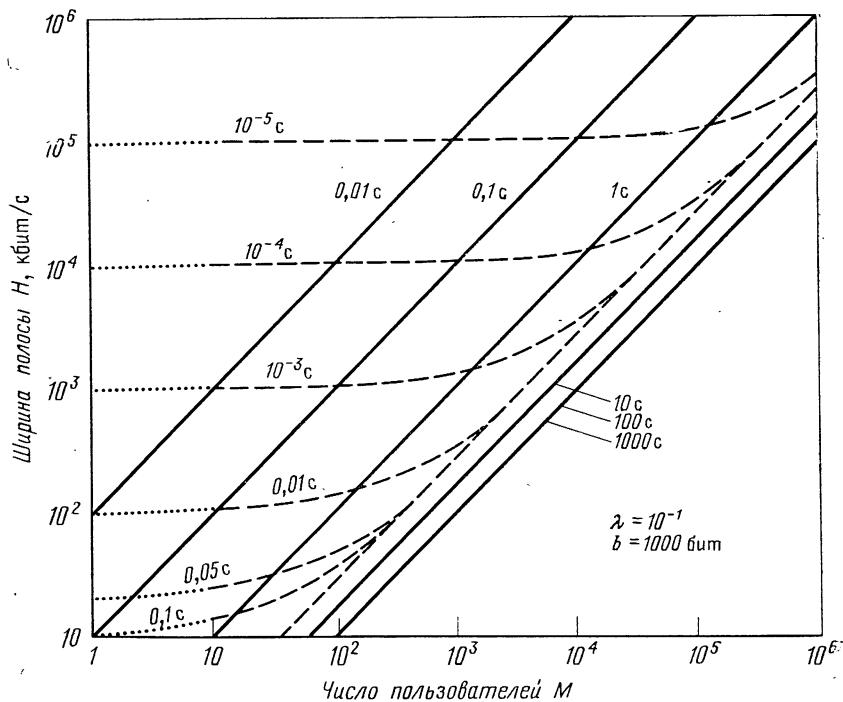
Фиг. 5.54. Система МДЧР и синхронная система ALOHA при случайному доступе; требованияния к ширине полосы для 1000 терминалов.

мер 1000. На фиг. 5.54 показаны кривые постоянных T на плоскости (H, λ) . Отметим опять, что если рассматриваются пользователи с группирующейся нагрузкой, то для достижения некоторой заданной малой задержки система МДЧР требует на три порядка большую ширину полосы частот, чем синхронная система ALOHA. Этот проигрыш равен M при $\lambda \rightarrow 0$, так как при этом роль очередей становится несущественной; в этом пределе задержка T равна времени передачи пакета (см. плоские участки кривых на фиг. 5.53 и 5.54), которое составляет $T = Mb/H$ для системы МДЧР и $T = b/H$ для синхронной системы ALOHA. Очевидно также, что при $\lambda \rightarrow 0$ и заданной полной ширине полосы частот H система МДЧР имеет в M раз большую задержку по сравнению с синхронной системой ALOHA. Это различие сокращается с ростом λ до тех пор, пока в конце концов ситуация не меняется на обратную при $\rho \rightarrow 1/e$ (как указывалось выше).

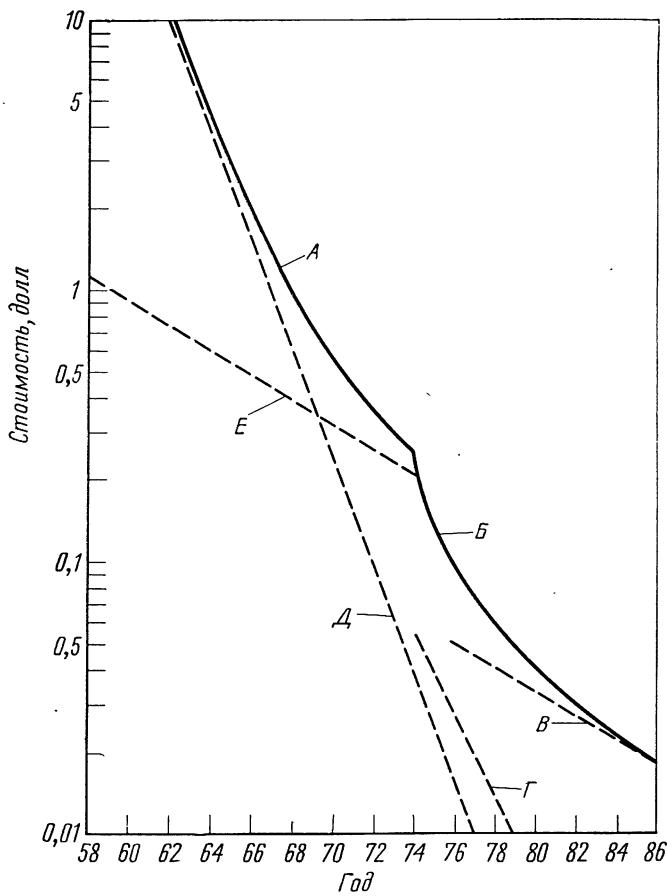
Зададим, наконец, λ и рассмотрим кривые задержки на плоскости (H, M) . Фиг. 5.55 относится к случаю $\lambda = 10^{-1}$ пакет/с.

Такие входные скорости соответствуют пользователям с группирующейся нагрузкой. Заметим опять, что при обслуживании большого числа пользователей система МДЧР требует большей ширины полосы частот при той же самой задержке по сравнению с синхронной системой ALOHA.

Из приведенного сравнительного рассмотрения следует, что система со случайным доступом намного лучше МДЧР (или МДВР) при наличии большого числа пользователей с группирующейся нагрузкой. Однако, как было отмечено, синхронная система ALOHA не использует канал так эффективно, как хотелось бы, и это побудило нас рассмотреть некоторые схемы с резервированием. Фактически системы МДЧР и МДВР являются системами с резервированием, а именно системами с постоянным резервированием. В следующем разделе рассматривается другой протокол доступа, который лучше, чем протокол в синхронной системе ALOHA в условиях работы, отличных от условий спутниковой связи.



Фиг. 5.55. Система МДЧР и синхронная система ALOHA при случайному доступе; характеристика при $\lambda = 10^{-1}$ пакетов в секунду.



Фиг. 5.56. Стоимость (инкрементальная) передачи одного килопакета (1 Мбит) по национальной сети.

А — полная стоимость передачи с коммутацией пакетов (без спутниковой связи); Б — полная стоимость передачи с коммутацией пакетов (включая спутниковую связь); В — стоимость региональной наземной связи; Г — стоимость спутниковой связи; Д — стоимость вычислительной техники; Е — стоимость связи по наземным магистральным линиям США.

Как отмечает, например, Робертс [97], роль спутниковой связи в будущем будет весьма существенной, поскольку стоимость наземных систем связи падает со скоростью 11% в год (в 10 раз за 22 года), а исследование зависимости стоимости вычислительных машин (различных размеров) от их характеристик показывает, что стоимость ЭВМ ежегодно снижается более чем на 50%. В первой сноске в этой главе было указано, что стоимость коммутации средств связи в 1969 г. впервые оказалась ниже стоимости самих коммутируемых средств связи; стоимость связной части

сетей, использующих ЭВМ, с этого времени растет относительно стоимости включенных в сети средств обработки. Это демонстрируется на фиг. 5.56 [97], где приведены данные о стоимости (инкрементальной) передачи 10^6 бит (1 килопакет) по национальной сети в зависимости от года, в который передача имела место. Предполагалось, что данные должны пройти расстояние 1200 миль (грубо говоря, половину расстояния между восточным и западным побережьем США, если принять, что все требования на соединение равномерно распределены) по четырем участкам сети. Отсюда следует, что средняя длина арендуемой линии равняется 300 милям [т. е. среднему расстоянию между коммутационными (вычислительными) машинами в сети, состоящей примерно из 100 узлов и имеющей по три различных пути между каждой парой узлов]. Таким образом, в среднем обслуживание пакета связано с двумя стоимостными факторами: 1) стоимостью связи, т. е. передачи по четырем 300-мильным арендуемым линиям, и 2) стоимостью коммутации, т. е. обработки пакета в пяти коммутационных (вычислительных) машинах. На фигуре эти составляющие стоимости представлены раздельно и, кроме того, указана их сумма для сети с коммутацией пакетов. Отметим, что до 1969 г. коммутационная составляющая (определенная стоимостью ЭВМ) была больше. Но уже к 1974 г. связная составляющая составляла примерно 85% стоимости. С развитием спутников связи, обслуживающих США, к 1974 г. для дальней связи нужно было использовать наземную связь лишь для получения регионального доступа к наземным спутниковым станциям. Расчетная суммарная стоимость коммутации, спутникового канала и наземной передачи указана начиная с 1974 г. Как видно, стоимость значительно снижается (и в будущем она, видимо, также будет ниже стоимости наземной связи). С этой точки зрения коммутация пакетов через спутники в недалеком будущем окажет влияние на сети ЭВМ.

5.12. КОММУТАЦИЯ ПАКЕТОВ ПРИ НАЗЕМНОЙ РАДИОСВЯЗИ

В этом разделе рассматривается метод организации связи между большим числом терминалов местных пользователей. Эта местная система связи может, например, обеспечить терминалам допуск в сеть высокого уровня, такую, как ARPANET. В 1970 г. Робертс [93] описал в общих чертах конструкцию ручного терминала, использующего радиоканал в режиме коммутации пакетов. Это привело к ряду исследований под руководством Кана [61] по коммутации пакетов при наземной радиосвязи с целью построения системы связи для соединения местных (возможно, подвижных) терминалов.

Подвижные радиосистемы производятся уже в течение многих лет (автомобильные, авиационные, морские и др.). Однако они

использовали каналы такого типа, которые применяются для передачи речи, и поэтому ориентировались на принципы, развитые в телефонии. При этом получаются системы коллективного использования ресурсов типа показанной на фиг. 5.3. Изучим, насколько применима для этих целей техника коммутации пакетов в сочетании с высоким уплотнением и случайным доступом.

Ясно, что основные относящиеся к этой задаче принципы очень похожи на те, которые были исследованы в предыдущем разделе применительно к коммутации пакетов при передаче через спутник. Рассмотрим множество терминалов, каждый из которых передает данные на центральную станцию. Образуется широковещательный канал, в котором передачи двух пакетов, частично или полностью перекрывающихся, будут разрушать друг друга. Основным отличием (от спутниковой системы) является то, что при наземной радиосвязи время распространения туда и обратно мало по сравнению с временем передачи пакета (т. е. $R \ll 1$). Например, для пакетов 1000 бит, передаваемых по каналу 100 кбит/с, время передачи $P = 10$ мс, и если максимальное расстояние передачи составляет 10 миль, то время распространения при передаче пакета (со скоростью света), равное $d = 0,054$ мс, дает $R = d/P = 0,005 \ll 1$. (В спутниковой системе $R \gg 1$ и это привело к рассмотрению чистой системы ALOHA, синхронной системы ALOHA и системы с резервированием.) Малое значение R позволяет предложить четвертый метод использования канала с коммутацией пакетов, а именно режим *множественного доступа с проверкой несущей* (МДПН). При МДПН терминалы могут прослушивать канал, и если «слышна» несущая сигнала, то терминал решает, что канал уже используется каким-то другим терминалом, и «из вежливости» откладывает свою передачу до того, как канал освободится. (Эта информация бесполезна в спутниковом канале, так как она показывает, каким было его состояние в далеком прошлом, т. е. R пакетов тому назад.)

Максимальная пропускная способность канала устанавливается конкретными правилами (т. е. протоколом) решения, определяющими, когда терминал может передавать. Например, протокол чистой системы ALOHA (не проверяющей несущую!) дает максимальную скорость передачи $1/2e \approx 0,184$ пакетов за P секунд, а для синхронной системы ALOHA (опять без проверки несущей) $1/e \approx 0,368$. Для МДПН были исследованы два протокола (так называемый ненастойчивый МДПН и r -настойчивый МДПН); они будут рассмотрены ниже [68—70, 103, 104].

Отметим, что кроме вопросов протокола доступа имеется много других важных аспектов коммутации пакетов при наземной радиосвязи. К ним, например, принадлежит топология пакетной радиосети с рядом увлекательных относящихся к ней задач. Серьезного рассмотрения заслуживает также вопрос распространения

радиоволн при наличии многих лучей и шумов. Если к этому добавить также подвижность терминалов, то станет ясно, что использование коммутации пакетов при таких условиях приводит к множеству новых интересных задач. (См. [7, 11, 35, 36, 42, 61, 69].)

Различные рассматриваемые ниже протоколы отличаются друг от друга действием (по отношению к передаче пакетов) терминала после проверки канала. Во всех случаях, когда терминал определяет (по отсутствию положительной квитанции от центральной станции), что его предыдущая передача потерпела неудачу, он назначает повторную передачу в соответствии со случайно распределенной задержкой повторной передачи. В этот новый момент времени терминал проверяет канал и повторяет алгоритм, задаваемый протоколом. В любой момент терминал называется *готовым*, если он содержит пакет, готовый для передачи в этот момент (это может быть новый, только что порожденный пакет или пакет, ранее испытавший наложение и назначенный для повторной передачи в этот момент).

В одно и то же время терминал может либо передавать, либо принимать (но не делать то и другое одновременно). Вместе с тем время, требуемое на переключение с одного режима на другой, предполагается пренебрежимо малым. Все пакеты имеют одну и ту же длину b бит и передаются по бесшумному каналу (это значит, что ошибки при приеме пакета, возникающие из-за случайного шума, не рассматриваются как серьезная проблема и малы по сравнению с ошибками, вызываемыми наложением пакетов). Система считается «незахватывающей» (т. е. наложение любых частей каких-либо двух пакетов приводит к разрушающей интерференции и оба пакета должны быть переданы повторно). Упростим еще далее задачу, предположив, что время распространения в одном направлении $d/2$ одно и то же для всех пар источник—адресат¹⁾.

Рассмотрим теперь два протокола, причем сначала возьмем *ненастойчивый МДПН*. Идея его состоит в том, чтобы ограничить интерференцию пакетов путем повторного назначения передачи любого пакета, который при своем поступлении столкнется с занятым каналом, а именно готовый терминал проверяет канал и далее действует следующим образом:

- если канал при проверке оказался свободным, то он передает пакет;
- если канал при проверке оказался занятым, то терминал назначает повторную передачу пакета на более позднее время в соответствии с распределением задержки повторной пе-

¹⁾ Если считать, что это постоянное время распространения равно наибольшему возможному, то можно получить нижнюю (т. е. пессимистическую) границу для характеристики системы.

передачи. Когда наступает это время, терминал вновь проверяет канал и повторяет описанный алгоритм.

[Можно рассмотреть синхронный вариант ненастойчивого МДПН, при котором ось времени разбивается на окна длиной $d/2$ секунд (равной времени распространения в одну сторону). Все терминалы синхронизируются¹⁾ и начинают передачу только в начале окна. Если пакет поступает в течение некоторого окна, терминал проверяет канал в начале следующего окна и действует в соответствии с описанным выше протоколом.]

Рассмотрим далее протокол для r -настойчивого МДПН. Но прежде чем перейти к общему случаю (произвольного r), рассмотрим частный случай $r=1$.

Протокол для 1-настойчивого МДПН предназначен для того, чтобы получить приемлемую скорость передачи, не разрешая каналу оставаться свободным, если имеется готовый терминал. Точнее готовый терминал проверяет канал и далее действует следующим образом:

- если канал при проверке оказался свободным, то он передает пакет с вероятностью 1;
- если канал при проверке оказался занятым, то он ждет того момента, когда канал освободится (т. е. настойчиво осуществляет проверку канала), и только тогда передает пакет с вероятностью 1 (отсюда и название протокола «1-настойчивый»).

(Можно также рассмотреть синхронный вариант 1-настойчивого МДПН, при котором ось времени разбивается на окна, а передача пакетов синхронизируется подобно тому, как было описано для предыдущего протокола.)

Указанные выше 1-настойчивый и ненастойчивый протоколы отличаются друг от друга вероятностью (1 или 0) того, что не будет повторного назначения передачи пакета, если он поступил в то время, когда канал был занят. В случае 1-настойчивого МДПН всегда, когда два или более терминалов становятся готовыми во время передачи какого-то другого терминала, они ждут освобождения канала (от передачи этого другого терминала), и затем все они передают с вероятностью 1. При этом наложение также происходит с вероятностью 1. Идея рандомизации времени начала передачи пакетов, накопленных к концу передачи, направляется сама собой; рандомизация поможет снизить интерференцию, повысить скорость передачи и привести к r -настойчивым протоколам для МДПН, которые обобщают 1-настойчивый протокол для МДПН. Эти протоколы включают дополнительный параметр r , который представляет собой вероятность того, что готовый пакет «настаивает» на своей передаче ($1-p$ есть вероят-

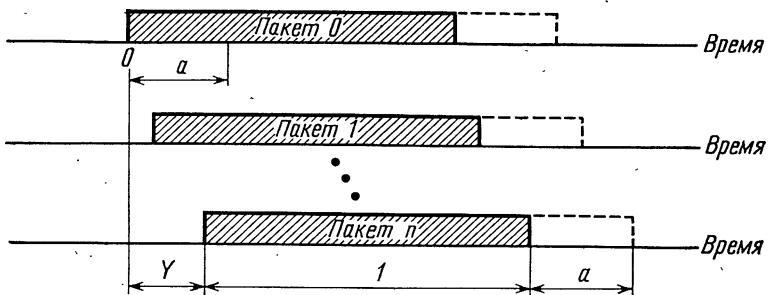
¹⁾ Практические вопросы синхронизации терминалов здесь не обсуждаются.

ность задержки передачи на $d/2$ секунд). Параметр p выбирается так, чтобы снижать уровень интерференции и делать свободные интервалы между двумя последовательными успешными передачами по возможности малыми. Этот протокол состоит из следующих требований. Ось времени разбивается на окна длиной $d/2$ секунд. Для простоты считается, что система синхронизируется так, что передача пакетов всегда начинается в начале окна.

Рассмотрим теперь готовый терминал.

- Если этот терминал при проверке канала обнаружил, что канал свободный, то с вероятностью p он передает пакет, а с вероятностью $1-p$ задерживает передачу пакета на $d/2$ секунд (т. е. на одно окно). Если в этом новом окне будет обнаружено, что канал свободный, то указанный процесс повторяется; в противном случае какой-то другой пакет должен начать передачу, и рассматриваемый терминал назначает повторную передачу пакета в соответствии с распределением задержки повторной передачи (т. е. он действует так, как если бы произошла неуспешная передача и терминал учел ее).
- Если готовый терминал при проверке канала находит его занятым, то он ждет, когда канал освободится (т. е. ждет конца текущей передачи), и действует, как указано выше.

Предположим, что имеется пуассоновский трафик, создаваемый бесконечным числом пользователей, каждый из которых порождает трафик канала с бесконечно малой скоростью. Суммирование его с трафиком других пользователей приводит к среднему трафику в канале, равному G пакетам за P секунд. Обозначим через S среднюю скорость канала в пакетах за P секунд. Каждый пакет имеет постоянную длину, требующую P секунд для его передачи. Если бы можно было идеально планировать передачу пакетов в канале без допущения их перекрытий и свободных мест между пакетами, то имели бы $S=1$; поэтому, как и ранее, S определяет *меру использования канала*, или его *скорость передачи*. Максимально достижимая скорость передачи для некоторого режима доступа называется *пропускной способностью* канала при этом режиме. Каждый готовый терминал имеет один (и не более чем один) пакет, ожидающий передачи. Предположим, что все пары источник—адресат имеют постоянное (максимальное) нормированное время распространения в одну сторону, обозначаемое через a , которое равно $(d/2)/P=R/2$. Пусть радиоканал является бесшумным и все терминалы находятся в пределах прямой видимости (т. е. все терминалы могут слышать друг друга в режиме взаимного вещания). Будем считать, что канал для передачи квитанций от центральной станции отделен от рассматриваемого канала (т. е. считается, что квитанции прибывают надежно и без каких-либо затрат).



Фиг. 5.57. Интерференция при ненастойчивом МДПН.

Найдем пропускную способность системы для всех описанных выше протоколов доступа. Выразим S через G (а также через другие параметры системы). Пропускная способность получается путем максимизации S по G . Отметим, что S/G есть вероятность успешной передачи, а G/S — среднее число, показывающее, сколько раз пакет должен быть передан или назначен для передачи, пока не произойдет успешная передача. Здесь будут выведены результаты лишь для протокола ненастойчивого МДПН; остальные выводы даны в работах, упомянутых выше при рассмотрении других протоколов (выводы результатов во всех случаях сходны между собой).

Рассматривая протокол для ненастойчивого МДПН, будем считать, что некоторый пакет (обозначим его через 0) порожден терминалом как новый пакет в момент 0, когда канал свободен. Этот терминал при проверке установит, что канал свободен, и передаст пакет. Наступили условия конкуренции! Если никакой другой терминал не передаст пакет в течение последующих $d/2$ секунд (интервала уязвимости), то передача пакета 0 будет успешной (так как спустя $d/2$ секунд все другие терминалы при проверке канала найдут его занятым из-за передачи пакета 0 и поэтому интерференции не будет). Вероятность того, что ни один терминал не передает во время этих $d/2$ секунд, равна $e^{-dG/2P} = e^{-aG}$. Так же, как и ранее, удобно нормировать время, измеряя его интервалами по P секунд. Этот масштаб используется на фиг. 5.57, где показан случай, когда n других пакетов входят в канал во время интервала уязвимости пакета 0 (если $n \geq 1$, то эти пакеты будут разрушены). Определим Y как время прихода последнего пакета, который накладывается на пакет 0; очевидно, что $0 \leq Y \leq a$. Если $n=0$, то считается, что $Y=0$. Как следует из задачи 5.27, $P[Y \leq y] = e^{-G(a-y)}$, что дает

$$\bar{Y} = a - \frac{1 - e^{-aG}}{G}. \quad (5.75)$$

Итак, средняя длина интервала занятости канала равна $\bar{Y}+1+a$, т. е. пакет n приходит в среднем на \bar{Y} единиц времени позже начала интервала занятости, проводит одну единицу времени в передаче и покидает канал через a единиц времени после этого (т. е. спустя нормированное время распространения). Средняя длина свободного от передачи интервала в канале равна $1/G$ (пуассоновский поток требований!). Таким образом, средний цикл занимает $\bar{Y}+1+a+(1/G)$ единиц времени. Средняя продолжительность работы канала без наложений во время интервала занятости (т. е. среднее число успешных передач длины 1) равна e^{-aG} ; поделенная на длину среднего цикла эта величина дает S — среднюю скорость в пакетах на единицу времени (т. е. на P секунд). Таким образом, используя формулу (5.75), получаем

Ненастойчивый МДПН

$$S = \frac{Ge^{-aG}}{G(1+2a) + e^{-aG}}. \quad \blacksquare (5.76)$$

Отметим, что тогда как вероятность успешной передачи пакета 0 равна e^{-aG} , вероятность успешной передачи некоторого произвольного пакета равна S/G ; последняя величина, очевидно, должна быть меньше, чем e^{-aG} . Отметим далее, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} S = \frac{G}{1+G}. \quad (5.77)$$

Аналогично выражения для скорости передачи можно найти для других протоколов; приведем здесь лишь окончательные результаты.

Синхронная система ненастойчивого МДПН

$$S = \frac{aGe^{-aG}}{1 - e^{-aG} + a}. \quad \blacksquare (5.78)$$

1-настойчивый МДПН

$$S = \frac{G[1+G+aG(1+G+aG/2)]e^{-G(1+2a)}}{G(1+2a)-(1-e^{-aG})+(1+aG)e^{-G(1+a)}}. \quad \blacksquare (5.79)$$

Синхронная система 1-настойчивого МДПН

$$S = \frac{Ge^{-G(1+a)}[1+a-e^{-aG}]}{(1+a)(1-e^{-aG})+ae^{-G(1+a)}}. \quad \blacksquare (5.80)$$

p -настойчивый МДПН

$$S(G, p, a) = \frac{(1-e^{-aG})(P_s\pi_0 + P_s(1-\pi_0))}{(1-e^{-aG})(a\bar{t}'\pi_0 + a\bar{t}(1-\pi_0) + 1+a) + a\pi_0}, \quad \blacksquare (5.81)$$

где P'_s , P_s , \bar{t}' , \bar{t} и π_0 определены в работах [69, 103]. Отметим, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} S(G, p, 0) = \frac{G}{G + e^{-G}}.$$

На фиг. 5.58 для $a=0,01$ показана зависимость S от G для различных рассмотренных режимов случайного доступа; с помощью этой фигуры можно представить себе сравнительные характеристики этих режимов.

Пропускная способность канала системы ALOHA не зависит от времени распространения, а пропускная способность канала системы МДПН зависит от него. С увеличением a растет период уязвимости пакета и снижается пропускная способность канала. Это также приводит к старению информации о состоянии канала, получаемой при его проверке. На фиг. 5.59 показана зависимость пропускной способности канала от a для всех рассмотренных выше режимов случайного доступа. Заметим, что при больших a синхронная система ALOHA (и даже чистая система ALOHA) лучше, чем система с любым МДПН, так как решения, основанные на частично устаревшей информации, могут привести к ошибкам; это происходит отчасти из-за принятого предположения о постоянстве времени распространения.

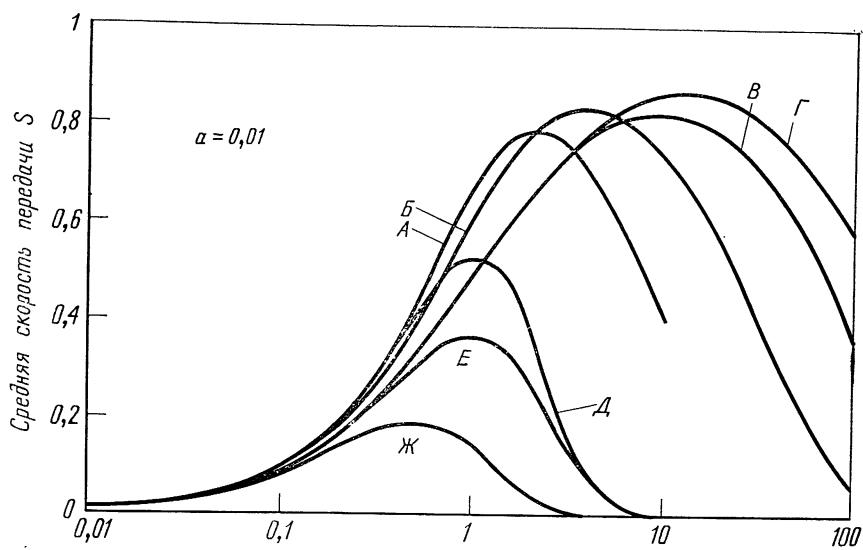
Рассмотрим теперь среднюю задержку T . Определим сначала задержку из-за того, что пакет назначается для более поздней повторной передачи (это происходит из-за наложений при передаче или из-за обнаружения несущей при проверке канала). Так же, как в случае спутникового канала, задержку повторной передачи будем считать равномерно распределенной со средним значением \bar{X} единиц времени¹⁾, нормированного на P . В задаче 5.28 для ненастойчивого МДПН требуется показать, что

$$T = \left(\frac{G}{S} - 1 \right) [2a + 1 + \beta + \bar{X}] + 1 + a, \quad ■ (5.82)$$

где β — нормированное время до получения квитанции и предполагается, что каждый блокированный (обнаруженной несущей) или потерпевший наложение пакет задерживается на время до получения квитанции. Отметим, что \bar{X} нужно оптимизировать по S . На фиг. 5.60 показана полученная с помощью математического моделирования характеристика задержка — скорость для двух режимов ALOHA и трех режимов МДПН.

Характеристика задержка — скорость была получена выше с использованием (сильного) предположения, что все терминалы находятся в пределах видимости друг друга. При некоторых об-

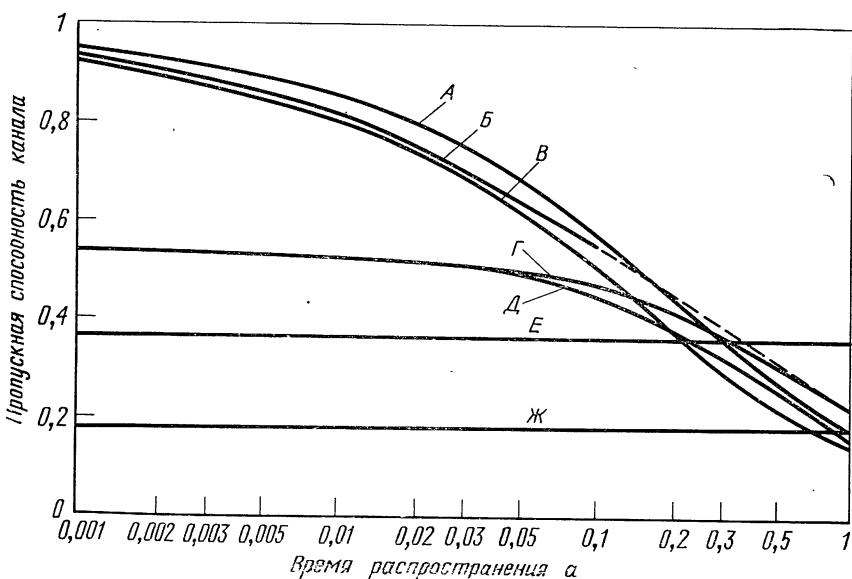
¹⁾ Величина \bar{X} при проектировании системы может зависеть от S .



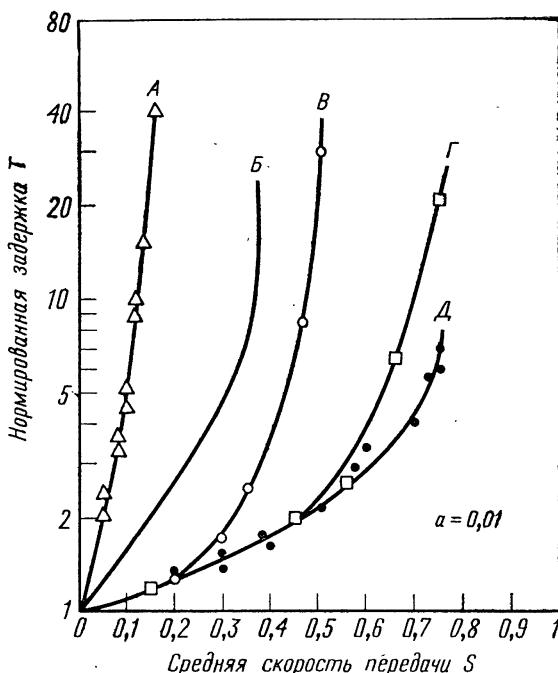
Преобразуемый для передачи по каналу трафик G

Фиг. 5.58. Средняя скорость передачи для различных режимов случайного доступа.

А — 1-настичивый МДПН; Б — 0,03-настичивый МДПН; В — ненастичивый МДПН; Г — синхронный ненастичивый МДПН; Д — 1-настичивый МДПН; Е — синхронная система ALOHA; Ж — чистая система ALOHA.



Фиг. 5.59. Влияние времени распространения на пропускную способность канала. А — синхронный ненастичивый МДПН; Б — оптимальный р-настичивый МДПН; В — ненастичивый МДПН; Г — синхронный 1-настичивый МДПН; Д — 1-настичивый МДПН; Е — синхронная система ALOHA; Ж — чистая система ALOHA.



Фиг. 5.60. Системы МДПН и ALOHA; полученные путем моделирования обменные соотношения между скоростью передачи и задержкой.

А — чистая система ALOHA; Б — синхронная система ALOHA; В — синхронный 1-настойчивый МДПН; Г — синхронный ненастойчивый МДПН.

стоятельствах это предположение не справедливо и поэтому его хотелось бы ослабить. Терминалы могут находиться в зоне связи со станцией (вычислительным центром, пунктом входа в какую-либо сеть, процессором SIMP и т. п.), но не в зоне связи друг с другом (в частности, они могут быть разделены некоторыми препятствиями, затрудняющими передачу УКВ-радиосигналов). При этом возникает так называемая ситуация со скрытыми терминалами. Очевидно, что наличие скрытых терминалов влияет на характеристику МДПН (ухудшает ее). Количественное рассмотрение этого влияния проведено в работах [103, 104]. Например, если имеется N одинаковых независимых групп (с бесконечным числом терминалов), каждая из которых скрыта от других (но в пределах данной группы все терминалы могут проверять состояние друг друга), то пропускная способность канала ведет себя так, как показано на фиг. 5.61. Отметим, что пропускная способность канала сильно падает при переходе от случая $N=1$ (нет скрытых терминалов) к случаю $N \geq 2$. При $N \geq 2$ синхронная си-

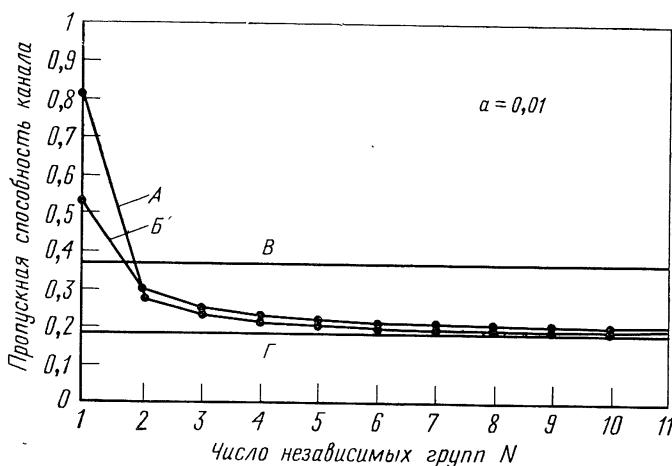
стема ALOHA лучше, чем МДПН. Как видно из графиков, характеристика для ненастойчивого МДПН ухудшается быстрее, чем характеристика для p -настойчивого МДПН. При $N > 2$ пропускная способность канала довольно нечувствительна к N и стремится с ростом N к пропускной способности чистой системы ALOHA.

Рассмотренный пример не обнаруживает влияния небольшой доли терминалов, скрытых от остальных. Рассмотрим теперь пример, когда имеются две независимые группы ($N=2$) разных размеров, так что

$$S_1 = \alpha S,$$

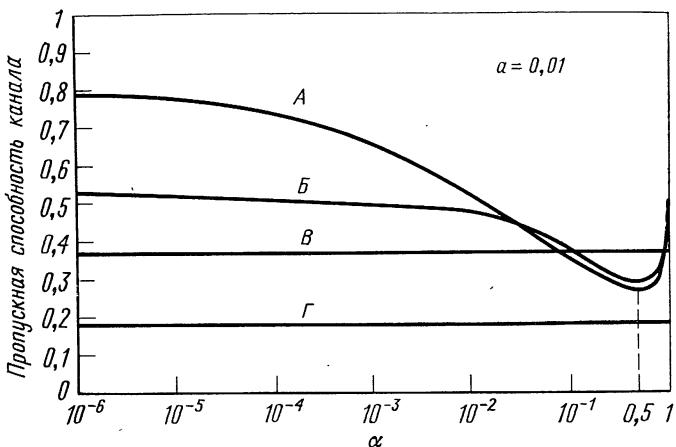
$$S_2 = (1 - \alpha)S.$$

На фиг. 5.62 приведены графики зависимости пропускной способности от α для двух протоколов МДПН. Здесь опять отметим, что пропускная способность быстро спадает при возрастании α от нуля. Для ненастойчивого протокола это более заметно, чем для 1-настойчивого. При $\alpha = 10^{-2}$ пропускная способность ненастойчивого МДПН составляет $\sim 0,5$, а при $\alpha = 0$ она равна 0,82. Кроме того, МДПН работает так же успешно, как синхронная система ALOHA (с точки зрения пропускной способности), когда $\alpha = 0,08$ при ненастойчивом протоколе и $\alpha = 0,1$ при 1-настойчивом протоколе. В этих двух случаях минимальная пропускная способность получается при $\alpha = 0,5$, что соответствует $N = 2$ в предыдущем примере. На фиг. 5.63 показано влияние разбиения термина-



Фиг. 5.61. Случай независимых групп; пропускная способность канала в зависимости от числа групп.

А — ненастойчивый МДПН; Б — 1-настойчивый МДПН; В — синхронная система ALOHA; Г — чистая система ALOHA.

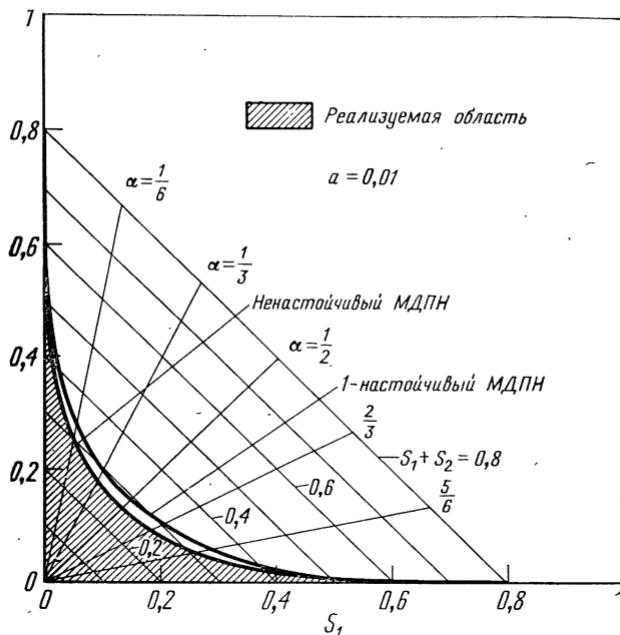


Фиг. 5.62. Случай двух дополнительных групп; зависимость пропускной способности канала от α .

А — ненастойчивый МДПН; Б — 1-настойчивый МДПН; В — синхронная система ALOHA; Г — чистая система ALOHA.

лов на группы (α) несколько другим способом. Здесь представлено обменное соотношение между S_1 , S_2 , S_1+S_2 и α .

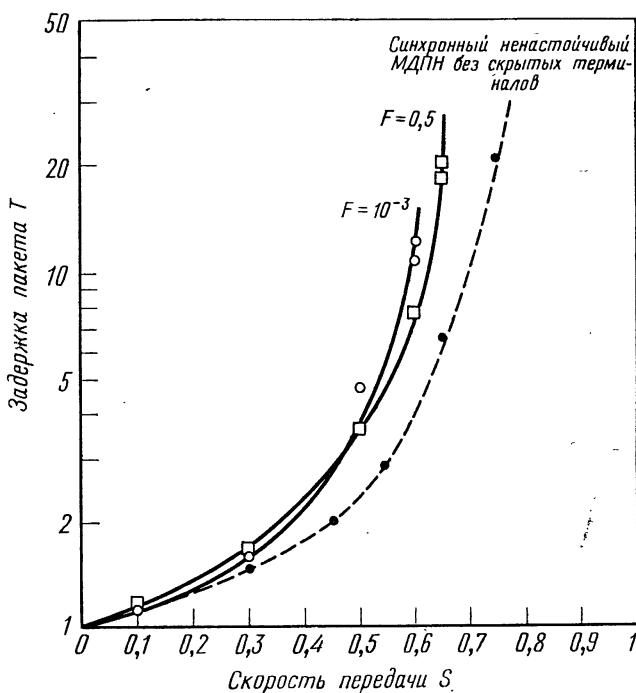
Рассмотрим решение проблемы скрытых терминалов, которое называется режимом множественного доступа с сигналом «занято» (МДСЗ). В МДСЗ используется предположение, что станция находится в зоне связи всех терминалов. Полоса частот делится на два канала: канал сообщений и канал сигнала «занято» (СЗ). В течение всего времени, когда станция обнаруживает несущую (терминала) в канале приходящих сообщений, она передает сигнал «занято» (синусоиду) по каналу сигнала «занято». Проверяя наличие несущей в канале сигнала «занято», терминалы определяют, когда занят канал сообщений. Способ передачи терминалом пакета в этом случае опять описывается обычными ранее рассмотренными протоколами. При МДПН трудность обнаружения наличия сигнала в канале сообщений, когда сообщение использует всю ширину полосы, не была серьезной и поэтому на нее не обращалось внимания. Положение, однако, меняется при (статистическом) обнаружении (синусоидального) сигнала «занято» в узкополосном канале СЗ. Время обнаружения t_d не является уже пренебрежимо малым, и его нужно учитывать. Рассмотрим лишь протокол для ненастойчивого МДСЗ, который аналогичен протоколу для ненастойчивого МДПН и состоит в следующем. Когда терминал имеет пакет, готовый для передачи, он проверяет канал сигнала «занято» в течение t_d секунд (время обнаружения); в конце этого времени он решает, присутствует



Фиг. 5.63. Случай двух дополнительных групп; реализуемая область.

ли сигнал СЗ. (Параметр t_d является одним из параметров системы, подлежащих оптимизации.) Если терминал решает, что сигнал СЗ отсутствует, то он передает пакет. В противном случае терминал назначает передачу пакета на более позднее время в соответствии со случайной задержкой; по прошествии этой задержки он проверяет канал СЗ и повторяет алгоритм. В случае наложения, о котором терминал узнает по отсутствию квитанции от станции, он опять назначает передачу пакета на более позднее время и повторяет описанный выше процесс. Такая система рассматривается в работах [70, 103, 104]. Результаты оптимизации различных параметров системы (включая F — вероятность неправильного обнаружения канала как занятого) показаны на кривых фиг. 5.64, полученных при математическом моделировании. В частности, можно заметить, что ухудшение задержки и скорости передачи из-за наличия скрытых терминалов очень мало при использовании МДСЗ.

В табл. 5.3 приведены результаты для различных протоколов доступа. Из этой таблицы видно, что скорость, «потерянная» в системах АЛОНА, может быть «восстановлена» с помощью сист-



Фиг. 5.64. Синхронная система ненастойчивого МДСЗ; обменное соотношение между скоростью передачи и задержкой ($a=0,01$).

Так же как для коммутации пакетов при передаче через спутник, можно рассмотреть системы динамического резервирования; например, в работах [103, 104] показано, что такие системы весьма эффективны в широком и важном диапазоне параметров.

В этих широковещательных каналах со случайным множественным доступом (ALOHA, МДПН, МДСЗ) как и в большинстве систем, в которых допускается конкуренция, скорость передачи стремится к нулю, когда нагрузка становится слишком большой, определяя таким образом предельную пропускную способность системы. Это свойство и характеристика задержка—скорость рассматриваются в этом разделе с точки зрения анализа стационарного состояния в предположении, что выполняются условия равновесия. Эти каналы демонстрируют нестационарное поведение для большинства входных нагрузок (см. разд. 5.11, посвященный коммутации пакетов при передаче через спутник), и поэтому для них также можно рекомендовать специальные процедуры управления.

Таблица 5.3

Пропускная способность для различных протоколов
($a=0,01$)

Протокол	Пропускная способность C
Чистая система ALOHA	0,184
Синхронная система ALOHA	0,368
1-настойчивый МДПН	0,529
Синхронная система 1-настойчивого МДПН	0,531
Ненастойчивый МДСЗ	
$H=100$ кГц	0,680
$H=1000$ кГц	0,720
0,1-настойчивый МДПН	0,791
Ненастойчивый МДПН	0,815
0,03-настойчивый МДПН	0,827
Синхронная система ненастойчивого МДПН	0,857
Идеальная организация передачи	1,000

Исследование коммутации пакетов при наземной радиосвязи находится на начальной стадии. При анализе этой коммутации возникает множество интересных нерешенных проблем, а вопросы проектирования и оптимизации систем очень сложные. Тем не менее такие системы представляются многообещающими по своим методам доступа, которые относительно эффективны в системе связи терминал — ЭВМ при трафике с группирующейся нагрузкой.

Здесь заканчиваются анализ сетей ЭВМ и рассмотрение вопросов их проектирования. В данной главе были отмечены некоторые интересные нерешенные проблемы и представлены эффективные процедуры анализа и синтеза, которые приводят к недорогим сетям с коммутацией пакетов. В следующей главе будет рассмотрено поведение сети ARPANET, показана важность управления потоками и отмечены сложности, которые возникают при неправильной организации управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramson N., The ALOHA System — Another Alternative for Computer Communications, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Fall Joint Computer Conference, 37, p. 281—285.
2. Abramson N., Packet Switching with Satellites, 1973 National Computer Conference, *AFIPS Conference Proceedings*, 42, p. 695—702.
3. Abramson N., Kuo F., Computer-Communication Networks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
4. Baran P., On Distributed Communications, RAND Series Reports, August 1964.

5. Beveridge G. S., Schecter R. S., Optimization: Theory and Practice, McGraw-Hill, New York, 1970.
6. Binder R., A Dynamic Packet-Switching System for Satellite Broadcast Channels, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, San Francisco, California, June 16—18, 1975, p. 41-1—41-5.
7. Binder R., Abramson N., Kuo F. F., Okinaka A., Wax D., ALOHA Packet Broadcasting — A Retrospect, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 203—215.
8. Bobrow D. G., Burchfiel J. D., Murphy D. L., Tomlinson R. S., TENEX, A Paged Time Sharing System for the PDP-10, Third ACM Symposium on Operating System Principles, October 18—20, 1971, published in *Communications of the Association for Computing Machinery*, 15, 135—143 (1972).
9. Bouknight W. J., Grossman G. R., Grothe D. M., The ARPA Network Terminal System: A New Approach to Network Access, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 73—79.
10. Brumelle S. L., Some Inequalities for Parallel Service Queues, *Operations Research*, 19, 402—413 (1971).
11. Burchfiel J., Tomlinson R., Beeler M., Functions and Structure of a Packet Radio Station, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 345—251.
12. Butterfield S., Rettberg R., Walden D., The Satellite IMP for the ARPA Network, Proceedings of the Seventh Hawaii International Conference on System Science, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii, January 8—10, 1974, p. 70—73.
13. Cantor D. G., Gerla M., The Optimal Routing of Messages in a Computer Network via Mathematical Programming, IEEE Computer Conference Proceedings, San Francisco, California, September 1972, p. 167—170.
14. Cantor D. G., Gerla M., Capacity Allocation in Distributed Computer Networks, Proceedings of the Seventh Hawaii International Conference on System Sciences, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii, January 8—10, 1974, p. 115—117.
15. Carr C. S., Crocker S. D., Cerf V. G., HOST — HOST Communication Protocol in the ARPA Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Spring Joint Computer Conference, 36, p. 589—597.
16. Chou W., Kershenbaum A., A Unified Algorithm for Designing Multidrop Teleprocessing Networks, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 148—156.
17. Chu W. W., A Study of the Technique of Asynchronous Time Division Multiplexing for Time-Sharing Computer Communications, Proceedings of the Second Hawaii International Conference on System Science, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii, January 1969, p. 607—610.
18. Closs F., Time Delays and Trunk Capacity Requirements in Line-Switched and Message-Switched Networks, *ISS Record*, 428—433 (1972).
19. Closs F., Packet Arrival and Buffer Statistics in a Packet Switching Node, Proceedings of the Third IEEE Data Communications Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 12—17.
20. Clowes G. J., Jayasuriya C. S., Traffic Considerations in Switched Data Networks, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 18—22.
21. Crocker S. D., Heafner J. F., Metcalfe R. M., Postel J. B., Function-Oriented Protocols for the ARPA Computer Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1972 Spring Joint Computer Conference, 40, p. 271—279.
22. Crowther W. R., Heart F. E., McKenzie A. A., McQuillan J. M., Walden D. C., Issues in Packet-Switching Network Design, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 161—175.

23. Data Channels, Vol. 1, No. 3, Verona, New Jersey, November 1973.
24. Davies D. W., The Principles of a Data Communication Network for Computers and Remote Peripherals, Proceedings of the IFIP Congress 68, Edinburgh, Scotland, Hardware, p. 709—714.
25. Davies D. W., The Control of Congestion in Packet Switching Networks, Proceedings of the Second ACM IEEE Symposium in the Optimization of Data Communications Systems, Palo Alto, California, October 1971, p. 46—49.
26. Дэвис Д., Барбер Д. Сети связи для вычислительных машин. Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.
27. Ellis L. W., The Law of the Economies of Scale Applied to Computer-Communications System Design, Proceedings of the International Conference on Computer Communication, Stockholm, Sweden, 1974, p. 299—306.
28. Eurodata — A Market Study on Data Communications in Europe, 1972—1985, study sponsored by the European Conference of Postal and Telecommunications Administrations, 1973.
29. Everett H., III, Generalized LaGrange Multipliers Method for Solving Problems of Optimal Allocation of Resources, *Operations Research*, 11, 399—418 (1963).
30. Farber D. J., Larson K. C., The Structure of the Distributed Computer System — The Communications System, Proceedings of the International Symposium on Computer-Communication Networks and Teletraffic, Polytech Press, Brooklyn, N. Y., April 1972, p. 539—545.
31. Fayolle G., Gelenbe E., Labetoule J., Bastin D., The Stability Problem of Broadcast Packet Switching Computer Networks, in Computer Architectures and Networks, E. Gelenbe R. Mahl (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1974, p. 135—140.
32. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967.
33. Ferguson M. J., On the Control, Stability, and Waiting Time in a Slotted ALOHA Random Access System, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, San Francisco, California, June 16—18, 1975, p. 41-6—41-9.
34. Floyd R., Algorithm 97, Shortest Path, *Communications of the ACM*, 5, 345 (1962).
35. Fralick S. C., Garrett J. C., Technological Considerations for Packet Radio Networks, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 233—243.
36. Fralick S. C., Brandin D. H., Kuo F., Harrison C., Digital Terminals for Packet Broadcasting, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 253—261.
37. Frank H., Frisch I. T., Chou W., Topological Considerations in the Design of the ARPA Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Spring Joint Computer-Conference, 36, p. 381—587.
38. Frank H., Frisch I. T., Communication, Transmission, and Transportation Networks, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.
39. Frank H., Frisch I. T., Chou W., van Slyke R., Optimal Design of Centralized Computer Networks, Networks, Vol. 1, No. 1, Wiley, New York, 1971, p. 43—57.
40. Frank H., Kahn R. E., Kleinrock L., Computer Communication Network Design — Experience with Theory and Practice, *AFIPS Conference Proceedings*, 1972 Spring Joint Computer Conference, 40, p. 255—270.
41. Frank H., Chou W., Topological Optimization of Computer Networks, *Proceedings of IEEE*, 60, 1385—1397 (1972).
42. Frank H., Gitman I., van Slyke R., Packet Radio System — Network Considerations, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 217—231.

43. Fratta L., Gerla M., The Synthesis of Computer Networks: Properties of the Optimum Solution, ACM-International Computing Symposium, Venice, Italy, April 1972.
44. Fratta L., Gerla M., Kleinrock L., The Flow Deviation Method — An Approach to Store-and-Forward Communication Network Design, *Networks*, 3, 97—133 (1973).
45. Fuchs E., Jackson P. E., Estimates of Distributions of Random Variables for Certain Computer Communications Traffic Models, *Communications of the ACM*, 13, 752—757 (1970).
46. Fultz G. L., Kleinrock L., Adaptive Routing Techniques for Store-and-Forward Computer-Communication Networks, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, June 14—16, 1971, p. 39-1—39-8.
47. Fultz G. L., Adaptive Routing Techniques for Message Switching Computer-Communication Networks, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, Engineering Report UCLA-ENG-7252, July 1972.
48. Gaines E. C., Specialized Common Carriers — Competition and Alternative, *Telecommunications*, 7, No. 9, 15—26 (1973).
49. Gerla M., The Design of Store- and Forward (S/F) Networks for Computer Communications, University of California, Los Angeles, School of Engineering and Applied Science, Engineering Report UCLA-ENG-7319, 1973.
50. Gerla M., Frank H., Chou W., Eckl J., A Cut-Saturation Algorithm for Topological Design of Packet Switched Communications Networks, Proceedings of the National Telecommunications Conference, San Diego, California, December 1974.
51. Gerla M., Approximations and Bounds for the Topological Design of Distributed Computer Networks, Proceedings for the Fourth Data Communications Symposium, Quebec, Canada, October 1975, p. 4-9—4-15.
52. Hassing T. E., Hampton R. M., Bailey G. W., Gardella R. S., A Loop Network for General Purpose Data Communications in a Heterogeneous World, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 88—96.
53. Heart F. W., Kahn R. E., Ornstein S. M., Crowther W. R., Walden D. C., The Interface Message Processor for the ARPA Computer Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Spring Joint Computer Conference, 36, p. 551—567.
54. Hildebrand F. B., *Methods of Applied Mathematics* (2nd ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
55. Ховард Р. А. *Динамическое программирование и марковские процессы*. Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1964.
56. Itoh K., Kato T., An Analysis of Traffic Handling Capacity of Packet Switched and Circuit Switched Networks, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 29—37.
57. Jackson J. R., Networks of Waiting Lines, *Operations Research*, 5, 518—521 (1957).
58. Jackson J. R., Jobshop-Like Queueing Systems, *Management Science*, 10, No. 1, 131—142 (1963).
59. Jackson P. E., Stubbs C. D., A Study of Multi-access Computer Communications, *AFIPS Conference Proceedings*, 1969 Spring Joint Computer Conference, 34, p. 491—504.
60. Kahn R. E., Crowther W. R., Flow Control in a Resource Sharing Computer Network, Proceedings of the Second ACM IEEE Symposium on Problems in the Optimization of Data Communications Systems, Palo Alto, California, October 1971, p. 108—116.
61. Kahn R. E., The Organization of Computer Resources into a Packet Radio-Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 177—186.

62. Karp P. M., Origin, Development and Current Status of the ARPA Network, CompCon 73, Proceedings of the Seventh Annual IEEE Computer Society International Conference, p. 49—52.
63. Клейнрок Л., Коммутационные сети. Стохастические потоки и задержки сообщений. Пер. с англ. — М.: Наука, 1970.
64. Kleinrock L., Models for Computer Networks, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, Boulder, Colorado, June 9—11, 1969, p. 21-9—21-16.
65. Kleinrock L., Analytic and Simulation Methods in Computer Network Design, AFIPS Conference Proceedings, 1970 Spring Joint Computer Conference, 36, p. 569—579.
66. Kleinrock L., Lam S. S., Packet Switching in a Slotted Satellite Channel, AFIPS Conference Proceedings, 1973 National Computer Conference, 42, p. 703—710.
67. Kleinrock L., Lam S. S., On Stability of Packet Switching in a Random Multi-access Broadcast Channel, Proceedings of the Special Subconference on Computer Nets, Seventh Hawaii International Conference on System Sciences, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii, January 1974.
68. Kleinrock L., Tobagi F. A., Carrier Sense Multiple Access for Packet-Switched Radio Channels, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, Minneapolis, Minnesota, 21B-1—21B-7, June 1974.
69. Kleinrock L., Tobagi F. A., Random Access Techniques for Data Transmission over Packet-Switched Radio Channels, AFIPS Conference Proceedings, 1975 National Computer Conference, 44, p. 187—201.
70. Kleinrock L., Tobagi F. A., Packed Switching in Radio Channels, Part I. Carrier Sense Multiple-Access Modes and their Throughput-Delay Characteristics, IEEE Transactions on Communications, Com-23, 1400—1416 (1975).
71. Клейнрок Л., Теория массового обслуживания. Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1979.
72. Lam S. S., Packet Switching in a Multi-access Broadcast Channel with Applications to Satellite Communication in a Computer Network, Computer Science Department, School of Engineering and Applied Science, Engineering Report UCLA-ENG-7429, March 1974.
73. Lam S. S., Kleinrock L., Dynamic Control Schemes for a Packet-Switched Multi-access Broadcast Channel, AFIPS Conference Proceedings, 1975 National Computer Conference, 44, p. 143—153.
74. Лоэв М., Теория вероятностей. Пер. с англ. — М.: Мир, 1962.
75. Мартин Дж., Системный анализ передачи данных, т. I и II. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.
76. Maxemchuk N. F., Dispersity Routing, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, San Francisco, California, June 16—18, 1975, p. 41-10—41-13.
77. McKenzie A. A., HOST-HOST Protocol for the ARPA Network, (NIC 8246), ARPA Network Information Center, Stanford Research Institute, Menlo Park, California, January 1972.
78. McKenzie A. A., Cossell B. P., McQuillan J. M., Thrope M. J., The Network Control Center for the ARPA Network, ICCC Proceedings, October 1972, p. 185—191.
79. McKenzie A. A., Status Report on the Terminal IMP, ARPANET News, Issue 9 (NIC 19720), November 1973, p. 3—11.
80. McQuillan J. M., Crowther W. R., Cossell P. P., Walden D. C., Heart F. E., Improvements in the Design and Performance of the ARPA Network, AFIPS Conference Proceedings, 1972 Fall Joint Computer Conference, 41, p. 741—754.
81. Meister B., Muller H., Rudin H., New Optimization Criteria for Message-Switching Networks, IEEE Transactions on Communication Technology, Com-19, 256—260 (1971).

82. Mimno N. W., Cossell B. P., Walden D. C., Butterfield S. C., Leven J. B., Terminal Access to the ARPA Network: Experience and Improvements, CompCon 73, Proceedings of the Seventh Annual IEEE Computer Society International Conference, February 1973, p. 39—43.
83. Miyahara H., Hasegawa T., Teshigawara Y., A Comparative Analysis of Switching Methods in Computer Communication Networks, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, San Francisco, California, June 16—18, 1975, p. 6-6—6-10.
84. Morse P. M., Queues, Inventories and Maintenance, Wiley, New York, 1958.
85. Opderbeck H., Kleinrock L., The Influence of Control Procedures on the Performance of Packet-Switched Networks, Proceedings of the National Telecommunications Conference, San Diego, California, December 1974.
86. Ornstein S. M., Heart F. E., Crowther W. R., Rising H. K., Russel S. B., Michel A., The Terminal IMP for the ARPA Computer Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1972 Spring Joint Computer Conference, 40, 243—254.
87. Peters R. A., Simpson K. M., Eurodata: Data Communications in Europe 1972—1985, *DataNation*, 19, No. 12, 76—80 (1973).
88. Pierce J. R., Network for Block Switching of Data, IEEE Convention Records, New York, March 1971, p. 222—223.
89. Port E., Closs F., Comparison of Switched Data Networks on the Basis of Waiting Times, IBM Zurich Research Laboratory Report, April 28, 1971.
90. Price W. L., Simulation of Packet-Switching Networks Controlled on Isarithmic Principles, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 44—49.
91. Ritchie D. M., Thompson K., The UNIX Time-Sharing System *Communications of the Association for Computing Machinery*, 17, 365—375 (1974).
92. Roberts L. G., Multiple Computer Networks and Inter-Computer Communications, Proceedings of the ACM Symposium on Operating Systems, Gatlinburg, Tennessee, 1967.
93. Roberts L. G., Wessler B. D., Computer Network Development to Achieve Resource Sharing, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Spring Joint Computer Conference, 36, p. 543—549.
94. Roberts L. G., Extensions of Packet Communication Technology to a Hand Held Personal Terminal, *AFIPS Conference Proceedings*, 1972 Spring Joint Computer Conference, 40, p. 295—298.
95. Roberts L. G., Network Rationale: A 5-Year Re-evaluation, CompCon 73, Seventh Annual IEEE Computer Society International Conference, February 3—5, 1973.
96. Roberts L. G., Dynamic Allocation of Satellite Capacity through Packet Reservation, *AFIPS Conference Proceedings*, 1973 National Computer Conference, 42, p. 711—716.
97. Roberts L. G., Data by the Packet, *IEEE Spectrum*, February 1974, p. 46—51.
98. Rosner R. D., Springer B., A Cost and Performance Tradeoff Study of Circuit and Packet Switching of Data, to appear in *IEEE Transactions on Communications*, 1975.
99. Rubin I., Communication Networks: Message Path Delays, *IEEE Transactions of the Professional Group on Information Theory*, IT-20, 738—745 (1974).
100. Stidham S. Jr., On the Optimality of Single-Server Queueing Systems, *Operations Research*, 18, No. 4, 708—732 (1970).
101. Syski R., Introduction to Congestion in Telephone Systems, Oliver & Boyd, Edinburgh and London, 1960.
102. Thomas R. H., Henderson D. A., McROSS — A Multi-Computer Programming System, *AFIPS Conference Proceedings*, 1972 Spring Joint Computer Conference, 40, p. 281—293.
103. Tobagi F. A., Random Access Techniques for Data Transmission Over Packet Switched Radio Networks, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, UCLA-ENG-7499, December 1974.

104. Tobagi F. A., Kleinrock L., Packet Switching in Radio Channels, Part II, The Hidden Terminal Problem in Carrier Sense Multiple-Access and the Busy Tone Solution, *IEEE Transactions on Communications*, COM-23, 1417—1433 (1975).
105. Tobagi F. A., Kleinrock L., Packet Switching in Radio Channels, Part III, Split Channel Reservation Multiple Access, to appear in *IEEE Transactions on Communications*.
106. Whitney V. K. M., LaGrangian Optimization of Stochastic Communication Systems Models, Proceedings of the International Symposium on Computer-Communication Networks and Teletraffic, Polytechnic Press, Brooklyn, N. Y., April 1972, p. 385—395.
107. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. Единый подход. Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1973.

Задачи

- 5.1. Рассмотрите систему $G/M/m$. Используя представленные неравенством (2.73) верхнюю и нижнюю границы для W , покажите, что результаты (5.3) и (5.8) для системы $M/M/m$ справедливы также для системы $G/M/m$, т. е. для этой системы

$$\begin{aligned} T(1, \lambda, C) &\leq T(m, \lambda, C), \\ W(1, \lambda, C) &\geq W(m, \lambda, C). \end{aligned}$$

- 5.2 [19]. Требуется найти ПРВ для времени между моментами поступления соседних пакетов. Предполагается, что сообщения порождаются очень большим числом пуассоновских источников, суммарная интенсивность которых равна λ . Каждое сообщение разбивается на целое число пакетов; среднее число пакетов в сообщении равно α ; каждый пакет имеет фиксированную длину \bar{b} бит. При возникновении данного сообщения его пакеты начинают появляться в интервалах длины \bar{b}/C (где C — пропускная способность канала, подающего эти пакеты к центральному коммутационному устройству). Пакеты от многих источников могут прибывать одновременно; через \tilde{t} обозначается интервал времени между моментами поступления соседних пакетов.

a) Покажите, что

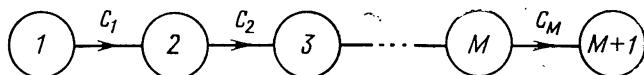
$$P[\tilde{t} \leq t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \alpha t}, & 0 \leq t < \frac{\bar{b}}{C}, \\ 1 - \left[\frac{1}{\alpha} e^{-\lambda \bar{b}(\alpha-1)/C} \right] e^{-\lambda t}, & \frac{\bar{b}}{C} \leq t. \end{cases}$$

б) Найдите $E[\tilde{t}]$.

в) Найдите $\sigma_{\tilde{t}}^2$.

- 5.3. В этой и следующей задаче нужно изучить поведение трафика сообщений в цепи из M тандемных каналов, показан-

ных ниже. Имеется $N=M+1$ узлов.



Таким образом, $\gamma_{1,M+1}=\gamma$ ($\gamma_{jk}=0$ для других j и k) и $\lambda_i=\gamma$ ($i=1, 2, \dots, M$). Трафик входит в узел 1 (трафик является пуссоновским с интенсивностью γ) и уходит из узла $M+1$. Пусть длины сообщений выбираются в соответствии с произвольным распределением, среднее значение которого равно b бит на сообщение. Заметьте, что если сообщение поступило в узел 1, то все его дальнейшее поведение становится детерминированным.

- Пусть $U_i(t)$ — незаконченная работа в i -м узле в момент t . Предполагается, что последовательность моментов поступлений сообщений в узел 1 имеет вид $\{0; 1; 3; 8; 10; 11; 14,5; 18; 19; 20; 22; 23; 24; 27; \dots\}$, а соответствующая последовательность длин сообщений — $\{2; 3; 1; 3; 1; 2; 2; 2; 1; 2; 1; 2; 2; 1; \dots\}$. Пусть вся сеть пуста до момента $t=0$. Аккуратно изобразите $U_i(t)$ для $i=1, 2, 3$ и 4 , чтобы выяснить поведение этих 14 сообщений в предположении, что $C_1=C_2=\dots=C_M=1$ бит/с.
- Используя результаты п. а, рассмотрите поведение трафика сообщений в N -м узле при $N \rightarrow \infty$ [63]. В частности, для узла N :
 - рассмотрите время, проведенное сообщением в системе (очередь плюс обслуживание) в течение, например, n -го периода занятости;
 - сравните время, проведенное сообщением в системе в течение n -го периода занятости, с аналогичным временем для $(n-1)$ -го периода занятости;
 - рассмотрите интервал, разделяющий $(n-1)$ -й и n -й периоды занятости.

- 5.4.** Рассмотрите цепь из M тандемных каналов, такую, как в предыдущей задаче. Здесь предполагается, что все сообщения имеют *постоянную* длину b бит и допускаются различные пропускные способности каналов C_i [99]. Таким образом, время обслуживания в i -м канале в точности равно b/C_i секунд; обозначим это время через $x(i)$. Ясно, что средняя задержка сообщения равна $T = \sum_{i=1}^M T_i$, где $T_i = W_i + x(i)$ и W_i — среднее время ожидания для i -го канала. При $M=1$ получается система $M/D/1$, полное решение для которой дано в разд. 1.7.

a) Покажите, что

$$w_{n+1}^{(i)} = [w_n^{(i)} + u_n^{(i)}]^+,$$

где $w_n^{(i)}$ — время ожидания (в очереди) для n -го сообщения в узле i ,

$$u_n^{(i)} = \begin{cases} x(i) - x(i-1), & \text{если } w_{n+1}^{i-1} > 0, \\ x(i) - x(i-1) - I_{n+1}^{i-1}, & \text{если } w_{n+1}^{i-1} = 0, \end{cases}$$

$I_n^{(i)}$ — длина свободного периода в узле i , который заканчивается n -м сообщением.

- б) Покажите, что $w_n^{(i)} = 0$, если $x(t) \leq x(i-1)$ при $i \geq 2$.
 в) Из п. б следует, что натуральное множество узлов, которых можно «выбросить», составляют узлы, для которых $w_n^{(i)} = 0$. Таким образом, определите множество решетчатых индексов $\{k_i\}$, таких, что $k_1 = 1$ и

$$k_j = \min \{i : k_{j-1} < i \leq M, x(i) > x(k_{j-1})\}.$$

Найдите $\{k_j\}$ для последовательности $\{C_1 = 1, C_2 = 1/2, C_3 = 2, C_4 = 2, C_5 = \frac{1}{10}, C_6 = 1\}$.

- г) Пусть $W(M) = \sum_{i=1}^M W_i$ и $T = T(M)$.

Таким образом,

$$T(M) = W(M) + \sum_{i=1}^M x(i).$$

Пусть $w_n = \sum_{i=1}^M w_n^{(i)}$. Покажите, что

$$w_{n+1} = [w_n + \max(x(1), x(2), \dots, x(M)) - t_{n+1}]^+,$$

где t_n — интервал времени между моментами поступления в узел 1 [см. (1.2)].

- д) Сравните выражение для w_{n+1} из п. г с равенством (1.120). Исходя из этого, покажите, что распределение w_n является таким же, как в системе $M/D/1$ с интенсивностью поступлений γ и временем обслуживания $\bar{x} = \max(x(1), x(2), \dots, x(M))$.
 е) Докажите, что условие стационарности для tandemной СМО состоит в том, что $\rho^* = \gamma x(k^*) < 1$, где k^* — наибольший решетчатый индекс.
 ж) Докажите, что

$$W(M) = \frac{1}{2} \frac{\rho^* x(k^*)}{1 - \rho^*}.$$

- з) Пользуясь результатом п. ж, найдите W_i .
 и) Как влияет на $W(M)$ перестановка N каналов?
 5.5. Докажите, что минимальное значение числителя суммы в равенстве (5.29) равняется

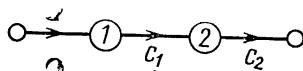
$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0 \end{cases}$$

- при любом i_0 .
 5.6. Предполагается, что установлены *нижние* границы для потоков в каналах, т. е. $\lambda_i \geq a_i$. Для линейной задачи ВПС с $d_i = d$ при всех $i = 1, 2, \dots, M$ найдите оптимальные C_i , которые минимизируют T при условии заданной полной стоимости D в долларах и полного трафика λ .
 5.7. Имеется N независимых систем $M/M/1$, которым присвоены номера $i = 1, 2, \dots, N$. Пусть параметры λ_i и C_i для i -й системы такие, что $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$; $C = C_1 + \dots + C_N$.
 Пусть

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda} \left(\frac{1}{\mu C_i - \lambda_i} \right),$$

где $1/\mu$ — средняя длина сообщения в битах.

- а) Для заданного множества $\{\lambda_i\}$ найдите оптимальные C_i ($i = 1, 2, \dots, N$), которые минимизируют T .
 б) Найдите λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$), дающие наименьшее значение T при оптимальных $\{C_i\}$.
 5.8. Пусть T_p — значение T , которое дает равенство (5.19) при $C_i = (\lambda_i/\lambda)C$ (значения C_i пропорциональны трафику), а T_s — решение, представленное равенством (5.29).
 а) Найдите T_p/T_s .
 б) Докажите, что $T_p/T_s \geq 1$. При каком условии $T_p = T_s$?
 5.9. Рассмотрите систему $M/M/m$ с $\bar{x} = m/\mu C$. Докажите, что $m=1$ дает минимум T .
 5.10. Рассмотрите простую сеть связи, состоящую из двух узлов в tandemном соединении.



Предполагается, что все сообщения порождаются пуассоновским источником с интенсивностью λ и поступают в узел 1, где они выстраиваются в очередь, ожидая передачи по каналу 1 с пропускной способностью C_1 ; после передачи они выстраиваются в очередь, ожидая передачи по каналу 2 с пропускной способностью C_2 . Пусть $C_1 = C_2 = 1$. Сообщения имеют показательное распределение со средним значением

$1/\mu$ бит. Пусть x_n — длина n -го сообщения в битах, а t_{in} — интервал времени между моментами поступления $(n-1)$ -го и n -го сообщений в узел i .

а) Найдите ПРВ для t_{in} и ПРВ для t_{2n} .

б) Найдите совместную ПРВ $p(x_n, t_{2n})$ в предположении, что сообщения сохраняют свою первоначальную длину (т. е. не делается предположение о независимости). Обратите внимание, что это доказывает зависимость x_n от t_{2n} .

5.11. а) Выведите равенства (5.30) — (5.35).

б) Сравните задержки T в случаях, когда оптимизируется пропускная способность при $k=0$ и $k=1$.

5.12. Рассмотрите сеть ЭВМ с M каналами и логарифмической стоимостной функцией (5.36). Выразите оптимальные пропускные способности в явном виде через $\{\lambda_i\}$, $\{d_i\}$, μ , a , D , M и множитель Лагранжа.

5.13. Рассмотрите сеть ЭВМ с M каналами и показательной стоимостной функцией (5.37). Покажите, что оптимальное решение для C_i дается равенствами (5.38) — (5.39).

5.14. Рассмотрите сеть с нелинейной стоимостной функцией $d_i(C_i)$, которая непрерывна и строго возрастающая. Пусть $T^{(\infty)}$ — характеристика, которую требуется минимизировать.

а) Выразите оптимальные C_i через $T^{(\infty)}$ и стоимостную функцию.

б) Найдите (одно) нелинейное уравнение, которое определяет $T^{(\infty)}$; предполагается, что полная стоимость равна D .

5.15. а) Докажите равенство (5.45).

б) Решите двойственную задачу ВПС и РП для линейных стоимостей $d_i(C_i)=d_iC_i$ и докажите равенства (5.46) и (5.47).

в) Покажите, что D , представленная равенством (5.47), является вогнутой функцией $\{\lambda_i\}$.

г) Докажите равенство (5.48).

5.16. Рассмотрите идеализированную сеть связи с $N=4$ узлами, для которой справедлива простая модель с $M/M/1$, следующая из (5.19). Предполагается, что $\mu=1$, а матрица трафика (γ_{jk}) и матрица маршрутов (r_{ij}) (где r_{ij} — номер следующего узла, в который должно быть передано сообщение, если сейчас оно находится в узле j и окончательно адресовано узлу i) имеют вид

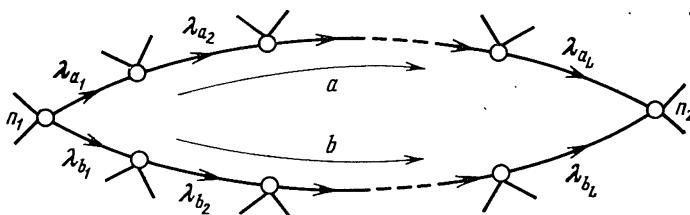
$$(\gamma_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (r_{ij}) = \begin{bmatrix} - & 3 & 1 & 3 \\ 2 & - & 1 & 2 \\ 2 & 3 & - & 3 \\ 4 & 3 & 1 & - \end{bmatrix}.$$

- a) Найдите среднюю длину пути \bar{n} .
- б) Пусть задана полная пропускная способность $C = \sum_i C_i = 34$. Найдите пропускные способности $\{C_i\}$, которые минимизируют среднюю задержку сообщения T .
- в) Изобразите сеть, снабдите каждое ребро стрелкой и парой (λ_i, C_i) .
- г) Найдите T .
- д) Определите длину канала, как в равенстве (5.40).
- 1) Найдите длину всех путей из узла 1 к узлу 3 и укажите кратчайший путь.
 - 2) Пошел ли по этому пути трафик γ_{13} ? Сохранится ли ответ в оптимизированных сетях?
- е) Пусть сделан пропорциональный выбор пропускных способностей. Найдите $\{C_i\}$ и T и проведите сравнение с результатами п. г.
- ж) Пусть матрица маршрутов заменяется на следующую:

$$(r_{ij}) = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & - & 2 & 2 \\ 3 & 3 & - & 3 \\ 4 & 4 & 4 & - \end{bmatrix}.$$

Найдите T , если (γ_{jk}) , μ и C остаются прежними и производится оптимальный выбор пропускных способностей.

- 5.17. Рассмотрите сеть ЭВМ с линейной стоимостной функцией $D = C = \sum_i C_i$ ($d_i = 1$). Пусть используется фиксированная процедура выбора маршрутов везде, кроме как между узлами n_1 и n_2 ; имеются два равновесных (длины L) альтернативных пути, таких, что из трафика, идущего из n_1 в n_2 , поток интенсивности λ_{a_1} направляется по первому пути (a), а поток интенсивности λ_{b_1} — по второму пути (b), как показано ниже.



Здесь λ_{a_i} (λ_{b_i}) — полный трафик канала в i -м ребре пути a (b). Покажите, что если пропускные способности всегда выбираются оптимально, полную задержку сети T можно сни-

зить, направляя *весь* трафик $n_1 \rightarrow n_2$ интенсивности $(\lambda_1 + \lambda_2)$ либо по пути a , либо по пути b , но не сразу по обоим.

- 5.18. Найдите матрицу кратчайших путей \mathbf{H} для матрицы расстояний \mathbf{D}_0 вида

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 1 & \infty & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 5.19. Пусть линейный канал обратной связи (см. стр. 423) имеет задолженность $N(t)$, которая является марковским процессом со стационарными переходными вероятностями p_{ij} . Выразите p_{ij} через M , σ и r .

- 5.20. Докажите равенство (5.56).

- 5.21. Докажите равенства (5.59) — (5.61).

- 5.22. Докажите равенство (5.62).

- 5.23. Докажите равенства (5.63) — (5.65).

- 5.24. С помощью равенств (5.63) — (5.65) докажите, что

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{S}{G} = \lim_{K \rightarrow \infty} q = \lim_{K \rightarrow \infty} q_t = e^{-G}.$$

- 5.25. Докажите равенство (5.68).

- 5.26. Пользуясь равенством (5.68), покажите, что

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial K} = \frac{1 - e^{-G}}{2e^{-G}}.$$

- 5.27. Рассмотрите случайную величину Y , указанную на фиг. 5.57.

- а)* Покажите, что

$$P[Y \leqslant y] = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ e^{-G(a-y)}, & 0 \leqslant y \leqslant a, \\ 1, & a < y. \end{cases}$$

- б)* Используя результат п. *а*, покажите, что

$$\bar{Y} = a - (1 - e^{-aG})/G.$$

- 5.28. Докажите равенство (5.82); для этого сначала дайте интерпретацию величины $(G/S) - 1$.

Глава 6

Сети ЭВМ; измерения, управление потоками и недостатки сети ARPANET

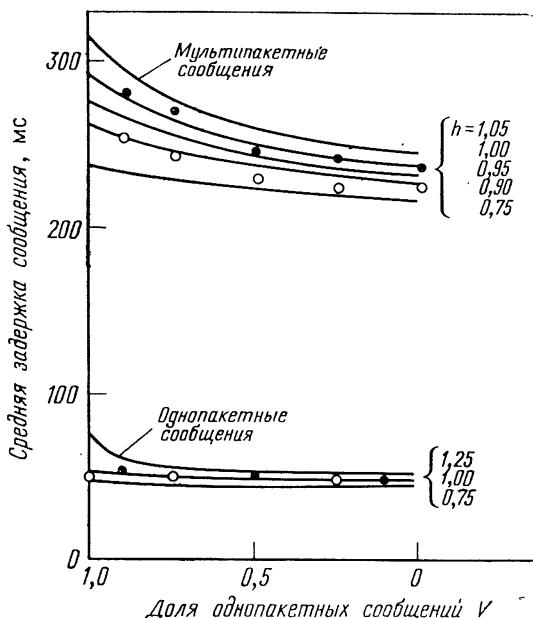
«Без измерений не может быть науки»¹⁾. Справедливость этих слов следует из того, что наши модели реального мира являются всего лишь моделями. Для подтверждения этих моделей и их улучшения необходимо обратиться к реальному миру, провести измерения и определить, что на самом деле происходит в природе. Математические модели должны выдержать проверку, проводимую с помощью этих измерений. В предыдущей главе в основном рассматривались вопросы теоретического моделирования и оптимизации сетей ЭВМ. В этой главе ценность развитых методов будет проверена с помощью моделирования на ЭВМ и экспериментальных данных, полученных на сети ARPANET. Мы увидим, что, к счастью, наши модели при таком испытании достаточно робастны. Проведенные измерения обнаружили также некоторые ошибки, неудачные решения и затруднения, возникшие из-за тонкостей процедуры управления потоками; все они также обсуждаются ниже. На самом деле по своей природе первойшей и наиболее важной задачей измерений на сети (и, следовательно, главной задачей Центра измерений на сети в UCLA) является определение слабых мест в работе системы. Поэтому в данной главе мы сосредоточим внимание на недостатках (а не на сильных сторонах) сети ARPANET. Читатель должен рассматривать это не как критику сети ARPANET, а лишь как попытку представить опыт, который был накоплен в результате эксперимента с сетью ARPANET. Лишь с помощью такого рассмотрения можно предложить хорошо продуманный план развития сети. Фактически эксперимент с сетью ARPANET имеет большой успех, и эта сеть прекрасно работает, предоставляя сложное обслуживание большинству пользователей в течение почти всего времени эксперимента. Не удивительно, что с помощью этих экспериментов было найдено большое число новых явлений и задач, которые требуют изучения и уже исследуются в настоящее время.

¹⁾ Это любимое высказывание Ричарда В. Хэмминга из Лабораторий Белл (г. Мэрии-Хилл, шт. Нью-Джерси).

6.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ И ВЫБОР МАРШРУТОВ

Ранее уже проводилось некоторое сравнение основных рассмотренных моделей сетей (разработанных с помощью теории массового обслуживания) и результатов моделирования на ЭВМ сети ARPANET (см. фиг. 5.22 и 5.23). При этом главное внимание уделялось задержке однопакетного сообщения в зависимости от нагрузки (т. е. скорости передачи) в сети. Было установлено, что согласие моделирования на ЭВМ и теории более чем хорошее; это дало возможность определить и использовать пороговое поведение сети, возникающее из-за «преждевременного» насыщения. Напомним, что сообщения в сети ARPANET, имеющие длину до 8063 бит данных, воспринимаются как одно сообщение, которое далее разбивается на пакеты (максимальной длины 1008 бит). Однопакетным сообщением называется такое сообщение, которое требует не более чем одного пакета; мультиплексивное сообщение требует от двух до восьми пакетов. В работе [11] разработана мультипакетная модель; на фиг. 6.1 относящиеся к ней аналитические результаты сравниваются с результатами моделирования на ЭВМ (см. разд. 6.6, где более подробно рассматривается мультипакетная модель). При моделировании на ЭВМ предполагалось, что однопакетные сообщения имеют приоритет перед мультипакетными сообщениями при конкуренции за канал. На фиг. 6.1 показана зависимость сообщения от V — доли однопакетного трафика при условии, что поддерживается постоянная средняя интенсивность бит в сети. При $V=1,0$ все сообщения однопакетные, при $V=0$ — мультипакетные. Мультипакетная модель подобна модели, для которой справедливо равенство (5.20), и ей соответствуют сплошные кривые на фигуре. Точками представлены результаты моделирования на ЭВМ (Напомним, что h — масштабный коэффициент для нагрузки сети.) Из рассмотрения этой фигуры следует, что разработана модель, которую можно использовать для предсказания средней задержки сообщения в таких сетях.

Гораздо большую пользу можно извлечь из моделирования на ЭВМ, если направить его на решение задач, не поддающихся математическому анализу. Одной из таких задач является определение адаптивных процедур выбора маршрутов в сети, в которых решения о назначениях маршрутов строятся на основе динамического поведения сети в каждый момент. Ясно, что эффективная процедура выбора маршрутов для сообщений является существенным фактором успешной работы сети ЭВМ. Как указывалось, задачей процедуры выбора маршрутов является такое направление трафика сообщений по путям сети, которое позволяет избежать перегрузки. (Наряду с процедурой выбора маршрутов необходимо дать методы управления входящим в сеть трафиком, который в противном случае может перегрузить сеть; эти методы, которые ранее мы условились называть процедурами управления потока-



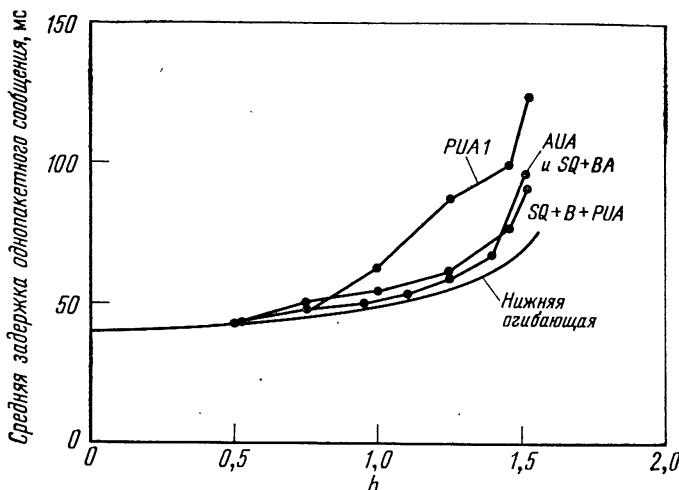
Фиг. 6.1. Задержка сообщения в сети с 19 узлами в зависимости от доли однопакетных сообщений.

Результаты моделирования на ЭВМ: ● $h=1,0$; ○ $h=0,9$.

ми, будут рассмотрены ниже.) Хорошая процедура выбора маршрутов должна:

- 1) обеспечивать быструю и надежную доставку сообщений;
- 2) адаптироваться к изменениям топологии сети, происходящим в результате повреждений узлов и каналов;
- 3) адаптироваться к меняющейся нагрузке между парами источника — адресата;
- 4) направлять пакеты в сторону от временно перегруженных узлов в сети;
- 5) определять связность сети;
- 6) допускать простое и автоматическое снятие и установку процессоров IMP.

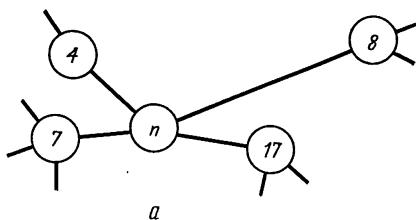
Ряд алгоритмов выбора маршрутов приведен в работе [10], где дается также их классификация. С помощью метода отклонения потоков удалось найти приближенные зависящие от относительной нагрузки h нижние границы задержки сообщения для различных таких алгоритмов; полученная нижняя огибающая показана на фиг. 6.2. Эта фигура соответствует сети с 19 узлами, представленной на фиг. 5.23. Характеристика процедуры выбора марш-



Фиг. 6.2. Сравнение изображенных в зависимости от нагрузки в сети характеристик алгоритмов выбора маршрутов.

● результаты моделирования на ЭВМ.

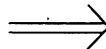
рутов, подобной той, которая *первоначально* использовалась в сети ARPANET, а именно алгоритма периодического обновления (PUA1), представлена верхней кривой; можно заметить, что эта характеристика ухудшается и отходит от оптимальной с ростом нагрузки в сети. Важным свойством этого алгоритма является то, что он представляет собой *распределенный* алгоритм управления. Это значит, что не существует центра, который принимал бы решения, обязательные для всей сети. Все узлы выносят *местные* решения относительно маршрутов следующим динамическим образом. Каждый узел, например n , хранит таблицу маршрутов, которая представляет собой справочник с одной записью для каждого узла назначения в сети. Запись, например для узла назначения k , дает название узла, к которому узел n будет направлять *весь* поступающий к нему трафик, предназначенный для узла k . На фиг. 6.3, а показан случай, когда узел n имеет четыре соседних узла (4, 7, 8, 17). Из таблицы маршрутов, представленной на фиг. 6.3, в, видно, что весь трафик, проходящий через узел n и предназначенный для узла k , направляется далее к узлу 7. Эта запись в таблице маршрутов фактически получается следующим образом. Время от времени (периодически) каждый соседний узел передает столбец в таблицу задержек, находящуюся в узле n . В этом столбце содержится наилучшая текущая, сделанная соседним узлом, оценка минимальной задержки передачи ко всем узлам назначения. К каждому числу b в этом столбце узел n добавляет $4+q$, где q — число пакетов в настоящий момент стоящих в выходной



a

Соседний узел	4	7	8	17
Узел назначения	8	12	9	9
1	17	13	9	10
2	18	13	24	17
3	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
k	11	9	15	11
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
N	16	19	14	12

б



Узел назначения	Следующий узел	Оценка задержки
1	4	8
2	8	9
3	7	13
•	•	•
•	•	•
k	7	9
•	•	•
•	•	•
N	17	12

в

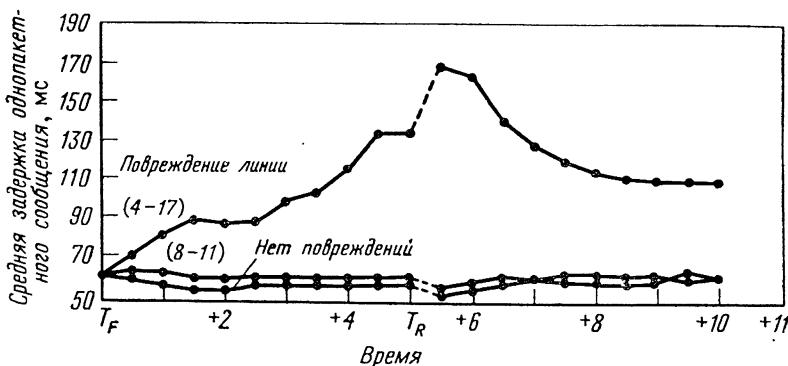
Фиг. 6.3. Составление таблицы маршрутов.

очереди узла n к этому соседу (число 4 произвольное и представляет собой время передачи по одному участку). Эти записи затем компонуются в таблицу задержек (см. фиг. 6.3, б). Узел n при составлении таблицы маршрутов выбирает минимальное число из каждой строки; кроме столбца «Следующий узел» таблица маршрутов содержит столбец наилучших (минимальных) оценок задержки. На самом деле вся таблица задержек далее не хранится в процессорах IMP сети ARPANET, так как периодическое обновление (которое происходит каждые 640 мс в сильно загруженном канале 50 кбит/с) случайно фазируется по узлам. Таким образом, при поступлении обновления (столбца) от соседа (и прибавлении $4+q$ к каждому числу столбца) каждое значение задержки непосредственно сравнивается с задержкой в таблице маршрутов. Если

новая задержка для некоторого k меньше, чем старая оценка, то она заменяется и маршрут к k меняется (когда это обновление приходит от соседа, который не был первоначально указан в записи как следующий узел). В настоящее время рассматриваются некоторые уточнения этой процедуры. Заметим, что обновление, происходящее между соседями, в действительности несет глобальную информацию о маршрутах. Одно из достижений сети ARPANET состоит в том, что, как было показано, распределенная процедура выбора маршрутов является в основном стабильной и приводит к очень хорошим маршрутам. Она в разумной степени реагирует на повреждения узлов и каналов сети (об этом еще будет сказано) и, что более важно, автоматически узнает о появлении нового узла, как только он присоединяется к сети (или возвращается после исправления). Эта способность к расширению является замечательной стороной сети ARPANET.

Возвращаясь к фиг. 6.2, заметим, что другие процедуры, использующие асинхронный алгоритм обновления (AUA)¹⁾ или алгоритм кратчайшей очереди и наилучшего пути (SQ+BA), лучше, чем PUA 1, хотя для их выполнения требуется большая нагрузка на процессор IMP. Хорошим алгоритмом выбора маршрутов является алгоритм кратчайшей очереди, кратчайшего пути и периодического обновления (SQ+B+PUA)¹⁾, который относительно прост при реализации и не слишком требователен к нагрузке на процессор IMP [11]. Одной из важных задач, возникающих при рассмотрении процедур выбора маршрутов, является задача устранения циклов. Цикл получается, если процедура выбора маршрутов посылает сообщение вокруг некоторой части сети и в конце концов возвращает его в ранее посещенный узел. Ясно, что если такой цикл устойчиво повторяется, то сообщения замкнуты в сети и средние задержки стремятся к бесконечности. Любая эффективная процедура выбора маршрутов будет либо избегать циклов, либо разрушать их вскоре после их возникновения. При использовании алгоритма PUA 1 нередко проводится обнаружение недолгоживущих циклов длины 2 (так называемого пинг-понга между двумя узлами). Борьба с циклами стала важным вопросом в сети ARPANET [20]; проводится исследование свободных от циклов алгоритмов выбора маршрутов [28].

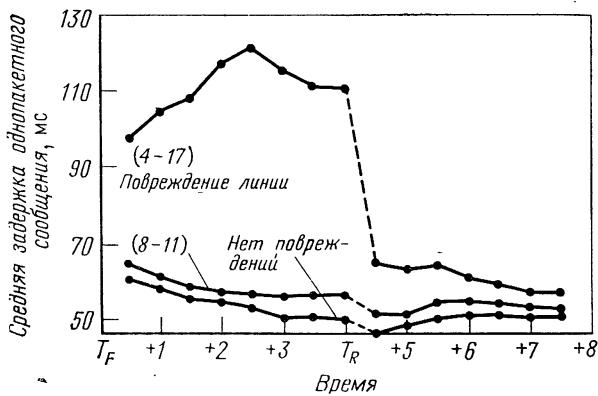
¹⁾ При использовании алгоритма PUA 1 информация о маршрутах передается между соседними процессорами IMP примерно два раза в секунду, что позволяет проводить довольно частое обновление таблиц маршрутов. В случае же алгоритма AUA обновление передается соседу только тогда, когда пересекаются критические пороговые задержки. При использовании алгоритма SQ+BA не производится обмен какими-либо данными между соседями, а решение о маршрутах принимается на основе длин внутренних очередей (SQ) и длин кратчайших путей (B). Наконец, алгоритм SQ+B+PUA добавляет к алгоритму SQ+BA периодическое обновление между соседями для указания о повреждениях каналов и процессоров IMP (эта информация обновляет значения длин путей).



Фиг. 6.4а. Алгоритм PUA1 (периодическое обновление).

● результаты моделирования на ЭВМ.

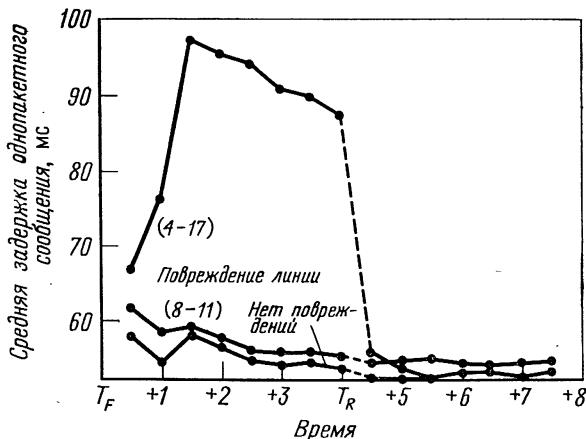
Программы моделирования на ЭВМ также эффективно использовались для изучения адаптивности процедур выбора маршрутов при наличии ненадежных каналов. Для упомянутой ранее сети с 19 узлами было проведено моделирование на ЭВМ переходной реакции на повреждение линии и последующее ее восстановление. На фиг. 6.4 показана зависимость сглаженной¹⁾ средней задержки T от времени в случае, когда критический (дальней связи) канал (канал 4-17) объявляется вышедшим из строя в момент $t = T_F$ и



Фиг. 6.4б. Алгоритм AUA (асинхронное обновление).

● результаты моделирования на ЭВМ.

¹⁾ Значение T равно геометрическому среднему (сглаженному среднему) значений задержки в прошлом и в настоящий момент. При $t = T_R$ усреднение (сглаживание) проводится снова.



Фиг. 6.4в. Алгоритм SQ+B+PUA (кратчайшая очередь, кратчайший путь и периодическое обновление).

● результаты моделирования на ЭВМ.

восстановленным в момент $t = T_R$. Показано также поведение сети, когда некритический канал (канал 8-11) выходит из строя в момент T_F и восстанавливается в момент T_R . Для сравнения изображена кривая для случая отсутствия повреждений. На фиг. 6.4а все три кривые относятся к алгоритму PUA 1; можно заметить плохую реакцию на повреждение критического канала (задержки становятся очень большими, и проявляется очень слабая адаптация) и медленное (неполное) восстановление характеристики после ликвидации повреждения в момент T_R . На фиг. 6.4б показана реакция при алгоритме AUA; видно, что поведение сети заметно улучшается как при адаптации к повреждению, так и после восстановления канала. На фиг. 6.4в представлена отличная характеристика, соответствующая алгоритму SQ+B+PUA. Быстрая адаптация алгоритма выбора маршрутов к этим событиям является наиболее важной его характеристикой. В настоящее время процедура выбора маршрутов в сети ARPANET модифицируется с учетом требований, возникающих из-за увеличения числа узлов и уровней трафиков [25, 26]. Одна из современных модификаций допускает обновление таблиц маршрутов с переменной скоростью, причем скорость увеличивается с ростом пропускной способности канала и убывает с ростом показателя использования канала. Изучается также алгоритм выбора маршрутов, который ищет высокоскоростные пути, а не пути с малой задержкой, как в применяемых в настоящее время алгоритмах; такой подход отчасти обусловлен предсказанием роста передачи файлов и дистанционного ввода заданий. Кроме того, рассматриваются специфические

требования, выдвигаемые спутниковые каналами, и концепция региональных процедур выбора маршрутов, которая представляется привлекательной для проектирования больших сетей [18].

6.2. ПЕРВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ НА СЕТИ ARPANET

Моделирование на ЭВМ не всегда удовлетворяет проектировщиков, и если представляется возможность (как в случае с сетью ARPANET), то следует провести прямые измерения на сети. Ранее при проектировании этой сети было установлено, что проведение прямых измерений имеет первостепенное значение и представляет собой существенную часть эксперимента, состоящего в создании этой сети. Поэтому при проектировании сети была предусмотрена возможность измерения как в процессорах IMP, так и в некоторых машинах HOST [особенно находящихся в Центре измерений на сети (NMC) при UCLA]. Эти измерения дают информацию относительно задержек трафика, скорости передачи, перегрузок и блокировок в сети, средства для проверки предельных возможностей ресурсов при обработке трафика, метод обоснования и улучшения теоретических моделей и, наконец, работающий в реальном масштабе времени механизм контроля за трафиком на маршрутах.

Измерительные средства предоставляют шесть возможностей; 1) осуществлять трассировку, 2) накапливать статистику, 3) производить мгновенные замеры, 4) порождать искусственные сообщения, 5) проводить контроль, сбор данных и анализ и, наконец, 6) осуществлять проверку состояния. Четыре первые операции дают статистику (или трафик), которая собирается (или порождается) лишь в сети процессоров IMP, когда используется одно или несколько измерительных средств; при этом процессоры IMP порождают измерительные пакеты и посылают их любой машине HOST, потребовавшей от них сбора этой статистики (обычно это машина HOST в Центре измерений на сети при UCLA). Пятая из указанных возможностей обеспечивается набором программ, написанных и используемых центром NMC при UCLA. Программы управляют экспериментами по измерениям и анализируют их результаты. Шестая операция представляет собой организацию непрерывной последовательности докладов, исходящих от процессоров IMP и направляемых Центру управления сетью (NCC) при BBN. Более подробно эти измерения описываются ниже.

Трассировка представляет собой способ, с помощью которого можно проследить прохождение сообщений через последовательность процессоров IMP. Процессор IMP, параметр трассировки которого установлен, генерирует один трассовый блок на каждый маркированный пакет (т. е. пакет, трассовый бит которого установлен в состояние трассировки), проходящий через этот процессор. Трассовый блок содержит четыре временные марки, которые

заполняются, когда 1) прибывает последний бит пакета, 2) пакет помещается в выходную очередь, 3) пакет начинает передаваться, 4) надлежащим образом закончилась передача к соседнему процессору IMP (т. е. квитанция получена) или к машине HOST. Кроме того, в трассовом блоке указаны длина пакета, адрес места назначения пакета и заголовок данного процессора IMP. Заголовок процессора IMP составляют адреса источника и адресата и некоторые другие данные управляющей информации. Существуют также средства самотрассировки, с помощью которых каждое n -е сообщение трафика γ_{ik} может быть маркировано для трассировки; кроме того, имеется новое средство трассировки пакета, с помощью которого трассируется каждый n -й пакет, проходящий через заданный процессор IMP.

Сообщение с *накопленной статистикой* состоит из ряда таблиц данных, суммирующих активность узла сети на интервале времени, который контролируется программой. Во-первых, приводится суммарная активность машин HOST. Она описывается статистикой длин сообщений, уходящих из набора машин HOST, присоединенных к данному процессору IMP и приходящих к ним. (Активность отдельных машин HOST при этом не регистрируется, а собирается лишь общая информация.) Статистика длин сообщений включает в себя гистограмму длин сообщений (в числе пакетов) для мультипакетных сообщений и логарифмическую (по основанию 2) гистограмму длин пакетов (в числе слов), построенную для всех последних пакетов [т. е. регистрируется число пакетов, имеющих от 0 до 1, от 2 до 3, от 4 до 7, от 8 до 15, от 16 до 31, от 32 до 63 процессорных (IMP) слов данных]. Кроме того, здесь содержится шлейфовая статистика. В ней указываются число шлейфов [шлейф — это посылка сообщения и получение на него требования следующего сообщения (RFNM)¹⁾], посланных от зондируемого пункта к каждому из других пунктов, и полное время шлейфов. Эти статистические сведения составляются для каждого возможного адресата зондируемого пункта. Во-вторых, посыпается статистика каналов зондируемого пункта, которая содержит: 1) число посланных сигналов «алло» на один канал (сигналы «алло» — это тест-сигналы канала, которые в действительности представляют собой сообщения, обновляющие маршрутную информацию), 2) число посланных слов данных на один канал, 3) число принятых входных единиц на один канал (это могут быть пакеты данных, пакеты управления, квитанции и др.), 4) число обнаруженных ошибок на один канал, 5) число полученных пакетов «я вас слышу» на один канал (пакет «я вас слышу» — ответ на сигнал

¹⁾ Требование следующего сообщения (RFNM) представляет собой квитацию подтверждения успешной передачи от конца до конца. Подробности можно найти в разд. 6.3.

«алло»), 6) число, показывающее, сколько раз был пуст свободный список буфера, и 7) логарифмические гистограммы длин пакетов, выраженных в числе слов данных (по одной гистограмме на канал).

Мгновенные замеры дают мгновенную картину процессора IMP. Мгновенный замер регистрирует длины очередей к машинам HOST и каналам. Он также содержит информацию о загрузке памяти; длину свободного списка памяти; число буферов, используемых для передачи пакетов с промежуточным хранением; число буферов, используемых для компоновки сообщений, и, наконец, число буферов, отпущеных для компоновки (но еще не используемых; см., ниже схемы резервирования). Мгновенные замеры содержат также таблицы маршрутов процессоров IMP. Каждая запись k в таблице маршрутов включает адрес канала, указывающий, куда посыпается пакет, предназначенный пункту k , а также минимальное число участков до пункта k и оценку задержки передачи к пункту k .

В добавление к указанным выше средствам, которые вложены в каждый процессор IMP, имеется возможность *порождать искусственные сообщения*. Генератор сообщений любого процессора IMP может посылать сообщения фиксированной длины к одному из адресатов через фиксированные управляемые сообщением RFNM (требованием следующего сообщения) интервалы времени. Наряду с генерированием каждый процессор IMP может сбросить данные фiktивных машин HOST. (Кроме того, для некоторого подмножества машин HOST на сети было сделано несколько пар генератор — получатель; они чрезвычайно полезны при экспериментировании.) Упомянутые выше средства измерения и генерирования сообщений включаются и выключаются путем посылки сообщений к фоновой программе «изменение параметра» процессоров IMP. Набор программ в UCLA автоматически укладывает в форматы и посыпает соответствующие сообщения «изменение параметра», которые начинают эксперименты.

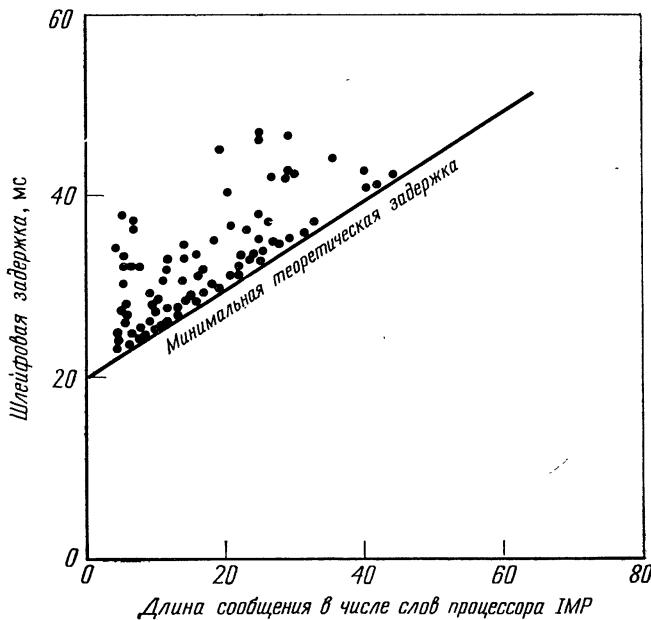
Контроль, сбор и анализ данных выполняются центром NMC с помощью специальных подпрограмм для общей задающей программы; в настоящее время анализ данных проводится в UCLA на машине IBM 360/91.

В добавление к упомянутым выше средствам измерений, которые предназначены главным образом для экспериментальных целей, центр NCC заложил в процессоры IMP контрольные функции, названные *проверкой состояния*. Каждый процессор IMP посыпает информацию о состоянии машине HOST центра NCC один раз в минуту (точнее каждые 52 с), а также в те моменты, когда возникают исключительные условия. Информация о состоянии содержит 1) данные о том, являются ли машины HOST и каналы включенными, 2) число сигналов «алло», которые не смогли прибыть в каждый из каналов в течение последней минуты, 3) число пере-

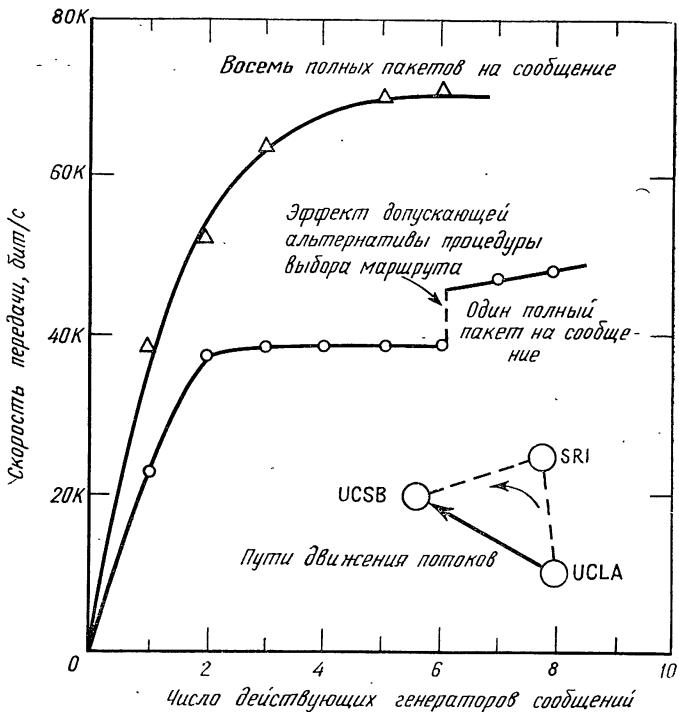
данных за последнюю минуту для каждого канала пакетов, для которых были получены квитанции, 4) число пакетов, вошедших в процессор IMP от каждой из машин HOST. Эта информация о состоянии непрерывно принимается центром NCC и обрабатывается на мини-ЭВМ, которая сообщает оператору о повреждениях в сети и готовит сводную статистику.

В UCLA проведены многочисленные измерения шлейфовой задержки сообщения, скорости передачи, показателя использования и потоков в сети, а также исследовано поведение машин HOST; сравним некоторые полученные там данные с теоретическими моделями и результатами моделирования на ЭВМ, которые обсуждались ранее.

В работе [3] показано (на основе подсчета времен обработки, передачи и распространения), что средняя шлейфовая задержка между двумя узлами в сети ARPANET (а именно между узлами SRI и UTAH) легко могла быть найдена по формуле $20 + 0,03 b$ мс, где b — длина сообщения в битах, совершающего этот шлейф; в формуле предполагается, что в сети не передается никакой другой трафик, так что эта формула дает точную нижнюю границу для таких задержек. На фиг. 6.5 представлены результаты измерений



Фиг. 6.5. Измерения шлейфовой задержки трафика SRI — UTAH в 1971 г.



Фиг. 6.6. Измерения скорости передачи между узлом UCLA и соседним процессором IMP в узле UCSB.

этой шлейфовой задержки и также указанная теоретическая зависимость; можно заметить, что теоретические результаты точны, а задержки, превышающие минимальную, обусловлены интерференцией трафика в сети. Другие приведенные в работе [3] измерения были выполнены ранее (также на первоначальной системе, в которой еще не были сделаны определенные усовершенствования, например дополнительно навешиваемые квитанции, см. ниже) с целью определения предельной скорости передачи; они представлены на фиг. 6.6. Приведенные данные относятся к трафику, проходящему между пунктами UCLA и UCSB. В этом эксперименте использовался генератор искусственного трафика, который мог создавать более одного диалога между этими пунктами. Первоначальная процедура управления потоками в сети требует, чтобы каждый диалог [воображаемая (виртуальная) линия между передающим и принимающим процессами] имел не больше чем одно сообщение в сети в любой момент времени. Следующее сообщение диалога может быть порождено только после того, как это сообщение

будет доставлено. При этом, когда сообщение достигает своего адресата, процедура управления потоками посыпает из процессора IMP адресата к процессору IMP источника управляющее сообщение, которое сигнализирует его готовность принять новое сообщение от машины HOST источника в сеть. Это управляющее сообщение является квитанцией, посыпаемой от конца до конца; оно называется RFNM (требование следующего сообщения). На фиг. 6.6 иллюстрируется эффект этой первоначальной процедуры управления. Нижняя кривая соответствует однопакетным сообщениям; она показывает рост скорости передачи с возрастанием числа диалогов (генераторов) и наличие плато, когда происходят два или более диалогов; это плато расположено на уровне ~ 38 кбит/с, что соответствует эффективной скорости передачи данных, возможной в линии 50 кбит/с при учете всей избыточности первоначальной системы. Уровень трафика на плато не достижим для одного диалога из-за задержек на ожидание RFNM. Отметим, что процедура выбора маршрутов допускала альтернативные пути, когда одновременно велось больше шести диалогов; в этом случае в пункте UCLA выстраивалась достаточно длинная очередь, в результате чего при следующем обновлении таблицы маршрутов устанавливался альтернативный маршрут через SRI. Верхняя кривая на фиг. 6.6 соответствует сообщениям полной длины, состоящим из восьми пакетов. В этом случае, по-видимому, RFNM не ограничивает значительно скорость передачи, так как квитанция RFNM посыпается лишь через восемь пакетов, поэтому один диалог уже достигает значения скорости передачи на плато, относящегося к ранее рассмотренному случаю. В таком мультипакетном режиме плато расположено на уровне ~ 70 кбит/с, ниже 76 кбит/с, что можно было бы ожидать для двух используемых путей; это объясняется тем, что допускающая альтернативы процедура выбора маршрутов не могла поддерживать полную загрузку двух путей из-за конечной емкости запоминающих устройств процессора IMP. Эти и другие первоначальные измерения показали, что одним из наиболее критических ресурсов сети была емкость памяти процессора IMP, используемая для компоновки мультипакетных сообщений перед их отправкой в машину HOST адресата. Операционная система первоначального процессора IMP в случае, когда мультипакетное сообщение проходило через сеть в виде отдельных пакетов (и должно было быть собрано и скомпоновано в последнем процессоре IMP перед его доставкой), выделяла восемь буферов в процессоре IMP адресата (для восьми пакетов сообщения максимальной длины) только при поступлении в этот процессор первого из пакетов (в противоположность резервированию места заранее, как это делается в настоящее время; см. ниже). Первоначальная процедура управления потоками обеспечивала в процессоре IMP пространство, достаточное для одновременной компоновки лишь

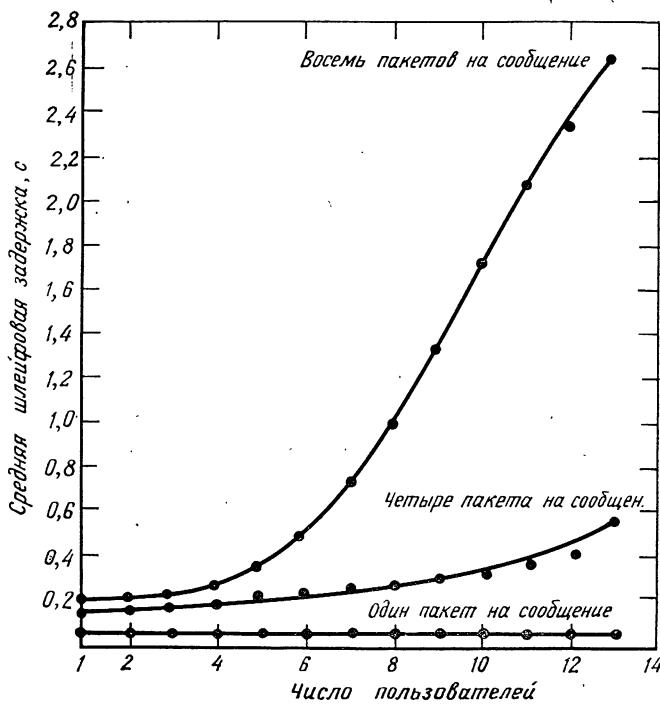
трех мультипакетных сообщений. Этот критический ресурс был главным фактором для определения скорости и задержки при передаче мультипакетных сообщений; положение было частично поправлено путем введения дополнительной оперативной памяти на 4К в процессоре IMP, которая в основном использовалась для компоновки.

Результаты измерения скорости передачи, представленные на фиг. 6.6, были получены при отсутствии какого-либо мешающего трафика со стороны других источников. Более интересно провести наблюдение диалогов, которые интерферируют в сети. Это было сделано для сети, подобной той, которая показана на фиг. 5.20,²¹⁾; узел UCLA здесь создавал трафик сообщений, направляемых в узел RAND. Измерения проводились в узле UCLA на следующих друг за другом шестиминутных интервалах, а другим узлам была дана команда посыпать интерферирующий трафик в узел RAND с помощью своих генераторов искусственного трафика. Новые процессоры IMP в этом эксперименте вводились в следующем порядке: UCLA, BBN, SDC, STAN, HARV, UTAH, AMEC, MIT, ILL, BBN — TIP, CASE, LINC и, наконец, CARN.

На фиг. 6.7 показано, каким образом меняется средняя шлейфовая задержка из UCLA в RAND (и назад для RFNM) в зависимости от числа интерферирующих пользователей. Каждая из трех приведенных кривых относится к определенной длине сообщения; в этом эксперименте указанные длины использовались сразу всеми генераторами сообщений. Отметим, что в случае однопакетных сообщений с ростом числа пользователей интерференция по существу не происходила²²⁾; однако в случае четырехпакетных и особенно восьмипакетных сообщений интерференция вызывала значительные шлейфовые задержки для трафика сообщений. Большая часть этой задержки происходила из-за конкуренции за необходимое для компоновки место в памяти процессора IMP в узле RAND. На фиг. 6.8 приведены данные для скорости передачи, отнесенной к одному пользователю (т. е. к передаче от UCLA к RAND). Как и ожидалось, поток однопакетных сообщений происходил при по существу постоянной скорости передачи данных. При переходе к четырехпакетным и далее к восьмипакетным сообщениям можно заметить, что скорость передачи данных увеличивается с ростом длины сообщения, если число пользователей меньше четырех. Увеличение скорости передачи происходит из-за того, что малые (од-

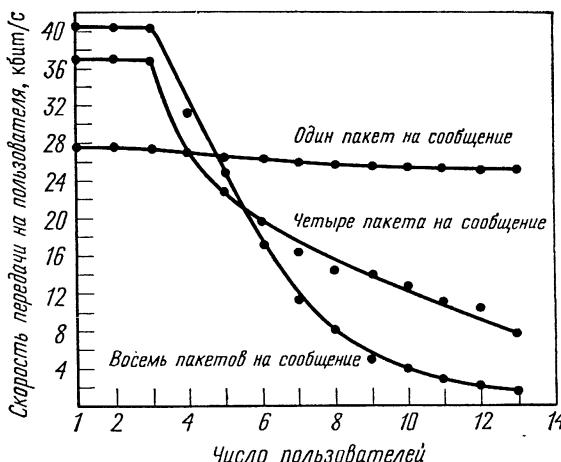
²¹⁾ Сеть, на которой проводились измерения, отличалась в следующих деталях: узлы NCAR и GWC еще не были соединены, отсутствовали линии из UTAH в CASE и узлы McCLELLAN, USC и TINKER на линиях, соединяющих их соседей; кроме того, на линии MIT — BB последовательно имелся еще один узел BBN — TIP, а на линии SRI — AMES — еще один узел AMES — TIP.

²²⁾ Этот результат обусловлен тем, что узел UCLA непосредственно соединен с узлом RAND.



Фиг. 6.7. Измеренные шлейфовые задержки.

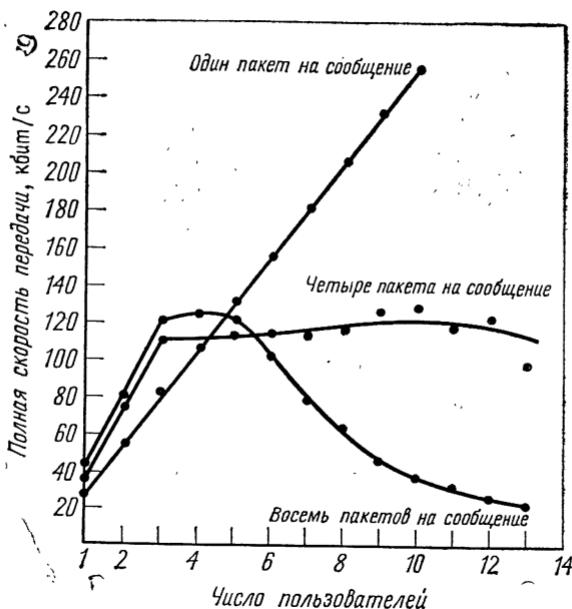
напакетные) сообщения вынуждены «платить» большие штрафы за пользование процедурой управления потоками путем передачи требований следующего сообщения (RFNM). Задержка, вызванная RFNM, при передаче однопакетных сообщений происходит для каждого пакета, а для восьмипакетных сообщений — лишь раз за восемь пакетов; этим объясняется указанное увеличение скорости передачи при малом числе интерферирующих пользователей. Причина, по которой скорость передачи мультипакетных сообщений начинает существенно падать при работе четырех и более пользователей, состоит в том, что каждый процессор IMP имеет конечную емкость памяти, которая, как указывалось выше, резервируется для компоновки мультипакетных сообщений. На фиг. 6.7 и 6.8 показано влияние этой интерференции на увеличение задержки и падение скорости передачи. Однако можно возразить, что полная скорость передачи сети увеличивается с ростом числа диалогов. На фиг. 6.8 показана зависимость скорости передачи в расчете на одного пользователя от числа пользователей. Можно аппроксимировать полную скорость передачи (как функцию числа пользователей), если взять каждую измеренную точку на фиг. 6.8 и умножить



Фиг. 6.8. Измеренная скорость передачи, отнесенная к одному пользователю.

жить ее на число пользователей, которым соответствует эта точка. Конечно, при этом получится некоторая фиктивная кривая, так как измеренные точки на фиг. 6.8 соответствуют скоростям передачи лишь между узлами UCLA и RAND. Однако полученная таким образом кривая даст некоторое представление о поведении полной скорости передачи; она показана на фиг. 6.9. Отметим, что в случае однопакетных сообщений наблюдается линейный рост полной скорости передачи; отчасти эта кривая является фиктивной, так как ясно, что рассматриваемая функция может расти только до тех пор, пока не достигнет максимальной скорости работы процессора IMP. В случае четырехпакетных сообщений видно, что, когда работают три и более пользователей, скорость передачи перестает расти и уровень ее насыщения находится несколько выше 100 кбит/с. Более интересным (хотя и неблагоприятным) является случай восьмипакетных сообщений, в котором полная скорость передачи достигает максимума примерно при четырех пользователях и затем очень быстро падает¹⁾, когда сеть приближается к так называемой компоновочной блокировке [17]. На самом деле при более чем 13 интерферирующих пользователях скорость передачи падает до нуля. Компоновочная блокировка является наиболее известным из тупиковых условий для сети ARPANET и возникает из-за логического дефекта в первоначальной процедуре управления потоками. Она происходит, когда частично скомпонованные сообщения не мо-

¹⁾ Это похоже на основную диаграмму дорожного трафика [14], с которым можно провести прямые аналогии.



Фиг. 6.9. Оценка полной скорости передачи.

гут завершить компоновку из-за того, что перегруженная сеть не дает возможности оставшимся пакетам достичь пункта назначения. Это значит, что каждый из соседей пункта назначения уже отдал все свои (предназначенные для обеспечения передачи с промежуточным хранением) буферы каким-то другим сообщениям, идущим к тому же самому пункту назначения (в котором уже нет ни одного незарезервированного буфера для компоновки). Таким образом, чрезвычайно необходимые оставшиеся пакеты не могут пройти через барьер блокированных процессоров IMP, окружающих рассматриваемый пункт назначения.

Трудности, связанные с проблемой компоновочной блокировки, привели к необходимости разработки новой процедуры управления потоками в сети ARPANET, которая рассматривается в следующем разделе; эта процедура обеспечивает компоновочное пространство для всех сообщений, находящихся в сети. В общем эффект блокировки узлов (из-за недостаточности емкости буферов и других причин) представляется относительно важным в сетях. В работе [34] проведено теоретическое изучение этого вопроса и дается приближение для поведения очередей в сетях с учетом явления блокировки. Введенная в этой работе модель удивительно хорошо описывает блокировки в сети.

6.3. УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКАМИ

Как было обещано в разд. 5.4, рассмотрим здесь идеи, связанные с управлением потоками, и дадим описание некоторых процедур управления, применявшихся в сети ARPANET. В последующих разделах будут указаны их недостатки (тушки и ухудшения, к которым они могут приводить) и подсчитана избыточность, появляющаяся при реализации этих процедур [20, 29].

Для того чтобы системы обработки информации могли обмениваться данными, необходимы процедуры управления, обеспечивающие надежную и правильную передачу информации. Внутренние по отношению к сети процедуры управления (например, процедура выбора маршрутов) имеют дело с пакетами, уже допущенными в сеть. Однако важным является также решение относительно первого допуска пакетов в сеть. Сети не могут разрешать бесконтрольный допуск всего предлагаемого трафика. Такой допуск может привести к неизбежным тяжелым перегрузкам (и даже к блокировкам) всей сети в целом. Должны существовать правила допуска внешнего трафика в сеть. Эти правила обычно называются *процедурами управления потоками*.

Существуют два типа управления потоками: локальное и глобальное. Локальное управление потоками используется в любой сети с коммутацией пакетов. Оно является прямым следствием ограниченной емкости буферов в каждом узле. Если емкость буферов полностью использована, то доступ в узел должен быть прекращен как извне сети, так и со стороны его соседей. Для предотвращения перегрузки доступ извне обычно прекращается даже раньше момента, когда все буфера оказываются занятыми. Например, может быть разрешено иметь лишь ограниченное число пакетов в каждой из выходных очередей. Пакеты, которые требуют присоединения к заполненным выходным очередям, отвергаются. Может также существовать ограничение на полное число буферов, предназначенных для обеспечения передачи с промежуточным хранением, так что, когда все такие буфера оказываются занятыми, узел может принимать лишь пакеты, которые уходят из сети через этот узел (т. е. может принимать лишь компонуемые пакеты) [15, 23].

При локальных процедурах управления потоками пакеты могут подвергаться *задержке допуска*, которая будет ненулевой в случае (локальных) перегрузок. Важно понимать, что эта задержка допуска вносит вклад в полную задержку точно так же, как время ожидания в выходных очередях.

Локального управления потоками недостаточно для предотвращения перегрузок в сети с коммутацией пакетов. Нужно ввести также некоторое ограничение на полное число пакетов, которое сеть одновременно может обрабатывать. Процедуры, которые вводят ограничение, называются *процедурами глобального управле-*

ния потоками. При надлежащем глобальном управлении потоками дальнейший вход в сеть связи прекращается задолго до того, как все буферные емкости в сети окажутся занятыми. Существуют два метода глобального управления потоками, которые были изучены: межконцевое (как в сети ARPANET [23]) и изаритическое (как в сети NPL¹⁾ [6]).

Если процедура управления потоками выбрана неудачно, то могут возникать блокировки или тупиковые условия; они являются одними из наиболее серьезных неприятностей, которым подвержена как вычислительная система, так и сеть. Следует очень тщательно составлять протоколы связи для того, чтобы предотвратить возникновение этих блокировок. Общей чертой блокировок является то, что они возникают только при необычных обстоятельствах, которые либо нельзя предсказать, либо, по мнению составителей протокола, являются маловероятными. (Однако эти составители часто не в состоянии оценить вероятности таких событий.) В предыдущем разделе уже было указано, каким образом может возникать компоновочная блокировка в подсети, когда для приходящих мультипакетных сообщений не может быть выделена память, необходимая для их компоновки. Блокировки были предсказаны и изучены в работе [17].

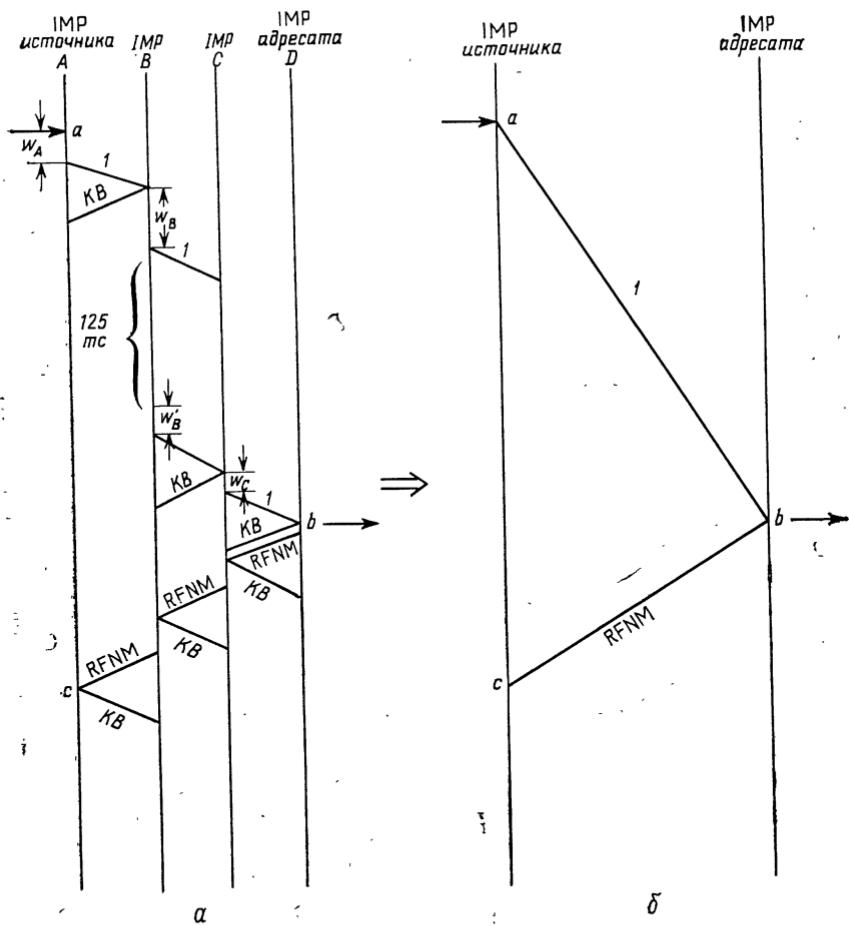
Другим примером блокировки, возникающей в сети с коммутацией пакетов, в которой не предприняты специальные меры предосторожности, является *прямая блокировка передачи с промежуточным хранением* [17]. Предположим, что в процессоре IMP узла A все буфера, обеспечивающие передачу с промежуточным хранением, наполнены пакетами, предназначенными для передачи некоторому процессору IMP узла назначения C через соседний процессор IMP узла B; все буфера, обеспечивающие передачу с промежуточным хранением, в процессоре IMP узла B наполнены пакетами, предназначенными для передачи некоторому процессору IMP узла назначения D и идущими через процессор IMP узла A. Так как в обеспечивающих передачу с промежуточным хранением буферах процессоров IMP узлов A и B нет свободного места, ни один пакет не может быть успешно передан между этими двумя процессорами IMP и возникает тупиковая ситуация. Легко, однако, исправить эту ситуацию. Нужно, чтобы всем буферам, обеспечивающим передачу с промежуточным хранением, не разрешалось находиться в одной выходной очереди. (В сети ARPANET лишь восемьми из 20 имеющихся в пуле буферов, обеспечивающих передачу с промежуточным хранением, разрешается находиться в одной выходной очереди.) Когда все буфера, обеспечивающие передачу с промежуточным хранением, в пете из процессоров IMP напол-

¹⁾ Имеется в виду сеть Национальной физической лаборатории в Англии. — Прим. ред.

няются пакетами, передаваемыми в одном и том же направлении (по часовой или против часовой стрелки), возникает *косвенная блокировка передачи с промежуточным хранением* [17]. Можно показать, что, хотя вероятность появления такого весьма специального отрезка трафика очень мала, для возникновения подобной блокировки нужно, чтобы этот нежелательный отрезок потока пакетов просуществовал в течение ~ 1 с в сети ARPANET.

Первоначальная процедура управления потоками в сети ARPANET разрешала допуск только одного сообщения за один раз между двумя концевыми процессами, передающими друг другу. Точнее говоря, новое сообщение не допускалось в процессор IMP источника до передачи межконцевой квитанции (RFNM) из процессора IMP узла назначения в процессор IMP источника. Это обеспечивало необходимое упорядочение сообщений, идущих от процесса к процессу. Ясно, что такая процедура разрешала одновременно посыпать сообщения сразу многим различным парам процессов, передающим друг другу. На фиг. 6.10, а подробно показана передача однопакетного сообщения по пути с тремя участками и четырьмя узлами с процессорами IMP (источник IMP A \rightarrow IMP B \rightarrow IMP C \rightarrow адресат IMP D). В момент *a* пакет (сообщение 1) прибывает в *A*. После задержки из-за ожидания в очереди (w_A) пакет передается в *B*, а квитанция (KB) возвращается в *A*. После другой задержки из-за ожидания в очереди (w_B) пакет передается в *C*. Предположим, что шум в линии искажает эту передачу и процессор IMP в узле *C* обнаруживает ошибку и сбрасывает этот пакет. После 125-миллисекундного тайм-аута для квитанции узел *B* вновь передает этот пакет в узел *C*, который на этот раз получает его верно и уведомляет об этом узел *B* посылкой квитанции¹⁾. Последним является участок от *C* до *D*; процессор IMP узла назначения *D* сначала подтверждает правильность передачи от *C* к *D*, а после этого генерирует сообщение RFNM, которое движется по сети назад (подтверждается квитанциями на своем пути) и достигает в момент *c* процессора IMP узла источника *A*. На фиг. 6.10, б упрощенно представлено прибытие сообщения 1 в момент *a*, его прием адресатом в момент *b* и доставка RFNM в момент *c*. Так как такое простое управление с помощью RFNM является довольно бесхитростным, оно имеет неприятное свойство разрешать требованиям (сообщениям) входить в сеть тогда, когда для них не отведены все необходимые ресурсы (т. е. компонующие буферы). Это приводило к катастрофическим компновочным тупикам, которые рассматривались ранее. Кроме того, сеть ARPANET страдала от случайных повреждений аппаратуры.

¹⁾ Эта процедура уведомления между процессорами IMP не изменилась до настоящего времени (за исключением того, что разрешается дополнительно наполнять квитанции на пакеты, передаваемые к ожидающему процессору IMP, см. ниже).



Фиг. 6.10. Механизм однопакетной передачи.

a — подробности, связанные с передачей квитанции, ожиданием в очереди и повторными передачами; *б* — эквивалентная диаграмма без подробностей.

В то время как ошибки, возникающие в линиях передачи, контролировались с помощью циклических кодов, обнаруживающих ошибки (коды порождались аппаратурно, а контроль ошибок осуществлялся в линейных модемах), в первоначальном варианте сети какая-либо защита от аппаратурных ошибок в процессорах IMP не предусматривалась. Это приводило к некоторым забавным поломкам сети. Например, был случай, когда один процессор IMP неправильно генерировал сообщения, обновляющие маршруты, заявляя, что он имеет пути с нулевыми задержками ко всем адре-

сатам на сети. Этот процессор IMP стал абсорбирующим узлом для ничем не ограниченного трафика, что выбило сеть из «колеи». В другом случае, который привел к определенному хаосу, один из процессоров IMP объявил себя узлом UCLA (хотя он таковым не был). Эти аппаратурные ошибки сейчас обнаруживаются путем включения 16-битовой контрольной суммы (вычисляемой с помощью программных средств), сопровождающей все пакеты при их передаче по сети.

Трудности, связанные с первоначальной процедурой управления потоками (которую будем называть вариантом 1), привели весной 1972 г. к некоторым существенным изменениям (соответствующую процедуру будем называть вариантом 2) [23]. (Дополнительные изменения, которые привели к варианту 3, рассматриваемому в разд. 6.8, внесены в декабре 1974 г. Главные параметры этих трех вариантов приведены в табл. 6.8.) Опишем сейчас вариант 2.

При внедрении варианта 2 процедуры управления потоками в сети ARPANET было положено, что между процессорами IMP любой пары источник — адресат может находиться максимум четыре сообщения. Заметим, что это является существенным отличием от варианта 1, который вводил ограничения на поток по индивидуальным виртуальным линиям связи данной пары процессоров в машинах HOST. Эта процедура имеет два главных преимущества: 1) она легко реализуется (при наличии четырех RFNM прекращается вход от любой из машин HOST, присоединенных к источниковому узлу пары), 2) вход в сеть через источниковый узел быстро прерывается, когда адресатные процессор IMP или машина HOST выключаются. К сожалению, при этом появляется конкуренция между различными присоединенными к одному и тому же процессору IMP машинами HOST за право допуска по этим четырем «билетам»; тем самым машины влияют на работу друг друга. Более того, при этом возникает необходимость разработать способ сохранения соответствующего упорядочения сообщений.

Как указывалось, процедура управления потоками в сети ARPANET была существенно модифицирована для того, чтобы предотвратить возникновение компоновочной блокировки, а именно в варианте 2 мультипакетному сообщению запрещается входить в сеть до отведения в адресатном процессоре IMP места в памяти, необходимого этому сообщению. Приняв первый пакет мультипакетного сообщения, источниковый процессор IMP посыпает короткое управляющее сообщение адресатному процессору IMP с требованием зарезервировать необходимую для компоновки память (т. е. восемь буферов). Он не принимает следующих пакетов от данной машины HOST до получения ответного сообщения о резервировании памяти. Высокая скорость передачи для длинных последовательностей сообщений получается за счет того, что лишь первое сообщение из последовательности мультипакетных сообще-

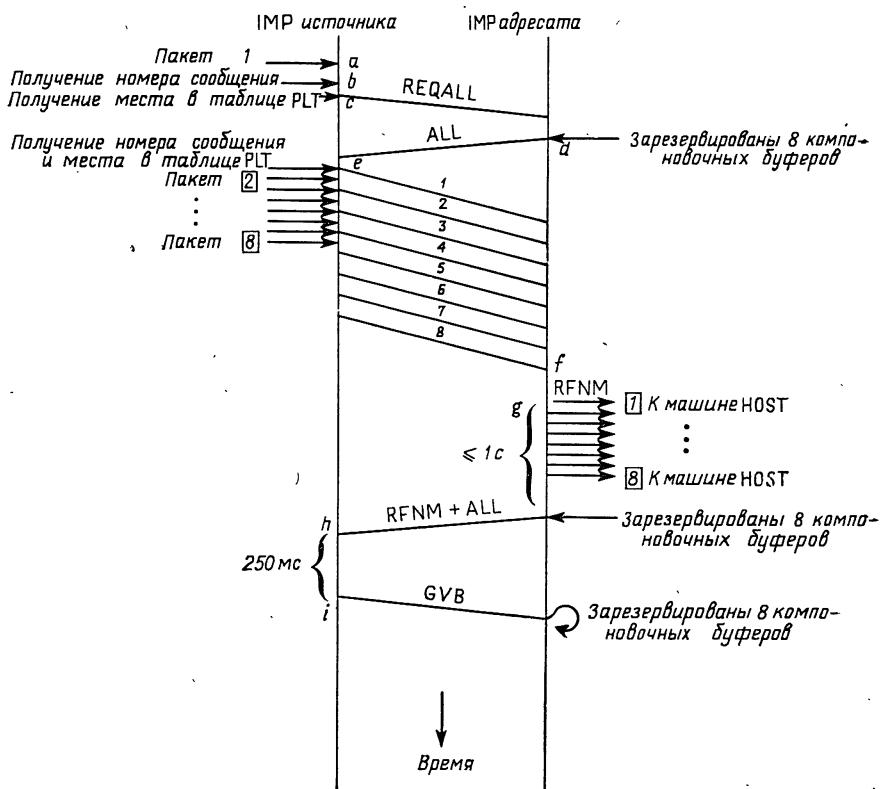
ний должно пройти через процедуру резервирования (т. е. посылку требования на восемь буферов и ожидание ответа); после этого резервирование сохраняется для последовательности сообщений, если новые данные доставляются в источниковый процессор IMP в течение 250 мс¹⁾ после получения RFNM (см. ниже). *Быстрая передача короткого сообщения* (однопакетного) происходит потому, что оно прямо посыпается к месту назначения; в источником процессоре IMP оставляется его копия. Если в месте назначения имеется свободная память для приема сообщения, то оно принимается и передается машине HOST. В этот момент формируется квитанция RFNM, которая отправляется по сети назад к источниковому процессору IMP, сбрасывающему после приема RFNM копию сообщения. Если в месте назначения нет свободной памяти, однопакетное сообщение сбрасывается и его передача рассматривается как требование места в памяти; когда место освобождается, источниковый процессор IMP информируется об этом, после чего хранящееся однопакетное сообщение может быть передано вновь. Это позволяет производить немедленную доставку коротких сообщений, когда освобождается требуемое место в памяти адресата. Заметим, что вариант 2 требует хранения первого пакета сообщения в источником процессоре IMP.

В следующем описании варианта 2 будет использоваться фиг. 6.11, где показана последовательность событий при передаче потока данных, которые требуют одного полного (т. е. восьмипакетного) мультипакетного сообщения. Сообщение обрабатывается как мультипакетное сообщение, если сопряжение HOST — IMP не получает указание «конец сообщения» после завершения ввода первого пакета (точка *a*). В это время передача оставшихся пакетов сообщения из машины HOST временно прекращается до получения сообщением некоторых указываемых ниже ресурсов сети. Сначала мультипакетное сообщение получает номер (от процессора IMP), который используется для упорядочения сообщений (точка *b*); напомним, что для всех сообщений, возникающих в данном процессоре IMP и направляемых к одному и тому же адресатному процессору IMP, используется общее множество номеров, так что сообщениям в сети могут быть присвоены самое большое четыре номера. Далее, как показано в точке *c*, нужно получить место в таблице ожидающих лидеров (PLT). Таблица PLT содержит копии лидеров всех мультипакетных сообщений, которые в настоящее время обрабатываются источниковым процессором IMP. Наряду с другими задачами функцией таблицы PLT является формирование заголовков для последовательных пакетов мультипакетного сообщения. Это место в таблице аннулируется после по-

¹⁾ При использовании варианта 2 операционной системы IMP впервые весной 1972 г. этот тайм-аут равнялся 125 мс. В 1974 г. его заменили на 250 мс.

лучения RFNM от адресатного процессора IMP. Таблица PLT используется сообщениями всех машин HOST, присоединенных к одному и тому же процессору IMP, и для всех возможных адресатов; она может содержать не больше шести записей.

После того как мультипакетное сообщение получает место в таблице PLT, таблице поручается выяснить, зарезервированы ли восемь компоновочных буферов для этого источникового процессора IMP в адресатном процессоре IMP. Если они не зарезервированы, то формируется управляющее сообщение (REQALL), которое требует резервирования этих буферов; оно посыпается из источникового процессора IMP (точка c) к адресатному процессору IMP. Сообщение REQALL теперь присваивает себе полученный исходным сообщением номер и использует место исходного сообщения в таблице PLT для своих собственных нужд. Это требование удовлетворяется адресатным процессором IMP, как только он



Фиг. 6.11. Последовательность событий при передаче мультипакетного сообщения.

найдет у себя восемь свободных буферов (точка *d*). Для извещения об этом источниковому процессору IMP посыпается в ответ управляющее сообщение подсети (ALL); оно доставляет извещение о резервировании восьми буферов. Так как ранее полученные исходным сообщением номер и место в таблице PLT уже были использованы, исходное мультипакетное сообщение должно получить в этой таблице новый номер и новое место. (Если бы восемь компоновочных буферов были зарезервированы с самого начала, то в источниковом процессоре IMP это было бы отражено наличием неприсвоенного сообщения ALL.) Только после того, как произойдут эти события, первый пакет может перемещаться к адресатному процессору IMP и начинается ввод оставшихся пакетов (точка *e*).

Когда адресатный процессор IMP примет все пакеты мультипакетного сообщения (точка *f*), это сообщение становится в выходную очередь от IMP к HOST. После передачи к машине HOST первого пакета (точка *g*) в адресатном процессоре IMP формируется квитанция RFNM для этого сообщения (см. также точку *g*), предназначенная для отправки назад к источниковому процессору IMP. Эта квитанция RFNM «предпочитает» перенести дополнительно навешиваемое сообщение ALL (явное резервирование восьми буферов для следующего мультипакетного сообщения), если в процессоре имеется необходимая свободная буферная емкость. В случае ее отсутствия RFNM ждет эту буферную емкость самое большое 1 с. Если необходимые восемь компоновочных буферов не появляются в течение этой секунды, RFNM посыпается без дополнительного навешивания сообщения ALL. Источниковый процессор IMP ждет ~30 с квитанцию RFNM и затем формирует управляющее сообщение с запросом относительно переданного сообщения.

После приема квитанции RFNM в источниковом процессоре IMP (точка *h*) освобождаются номер сообщения и место в таблице PLT, связанные с переданным сообщением, и источниковая машина HOST информируется об успешной доставке сообщения. Если квитанция RFNM переносит дополнительно навешенное сообщение ALL, счетчик для соответствующего адресатного процессора IMP получает приращение. Это явное резервирование буферов возвращается адресатному процессору IMP, если ни одна из машин HOST, присоединенных к данному источниковому процессору IMP, не использует его в течение последующих 250 мс (точка *i*); это оформляется в виде возвратного управляющего сообщения GVB, которое формируется в источниковом процессоре IMP. Если, однако, от *какой-либо* источниковой машины HOST принимается следующее мультипакетное сообщение для того же самого адресатного процессора IMP, то это сообщение присваивает себе ALL и нуждается лишь в получении номера и места в таблице PLT для того, чтобы быть посланным к адресатному процессору IMP.

Таким образом, каждое мультипакетное сообщение до своей передачи по сети должно получить три различных ресурса: номер сообщения, место в таблице PLT и сообщение ALL.

Рассматриваемая система должна платить некоторую цену за использование этой процедуры управления. Эта цена платится в виде избыточности пакетов, передаваемых по каналам связи, буферов для хранения пакетов в процессорах IMP, управляющих сообщений (от IMP к IMP, от IMP к HOST и от HOST к HOST), а также в виде необходимости проводить измерения, контроль и т. д. Укажем теперь цены избыточности варианта 2. Самый короткий допустимый пакет данных имеет длину 168 бит при передаче (он не содержит битов данных¹⁾, имеет 96 бит программной избыточности и 72 бит аппаратурной избыточности) и 176 бит при хранении (опять не содержит битов данных и имеет 176 бит программной избыточности); самый длинный передаваемый пакет имеет длину 1176 бит (он содержит 1008 бит данных и 168 бит избыточности). Для передачи обновления маршрутов передаются 1160 бит. Наибольшее из остальных управляющих сообщений подсети имеет длину 152 бит. В варианте 2 также введено дополнительное навешивание квитанций от IMP к IMP на трафик пакетов, идущих к ожидающему процессору IMP; оно требует дополнительно 16 бит в заголовке пакета. Подробности, связанные с приведенными числами, и их влияние на скорость передачи по сети будут рассмотрены в разд. 6.7, а сейчас укажем некоторые необычные явления, которые были замечены после введения варианта 2.

6.4. БЛОКИРОВКИ, УХУДШЕНИЯ И ЛОВУШКИ

Последовательные номера сообщений, упомянутые выше в варианте 2, используются для того, чтобы обеспечить уход сообщений из адресатного процессора IMP в том же порядке, в котором они входили в источниковый процессор IMP. Это упорядочение сообщений потенциально может привести к тупиковым условиям из-за того, что любое сообщение, например $(n+1)$ -е, которое выбилось из порядка (и поэтому не может быть доставлено адресатной машине HOST), может удерживать ресурсы адресатного процессора IMP, необходимые n -му сообщению, которое должно быть доставлено следующим. Следовательно, n -е сообщение может быть не в состоянии достичь адресатного процессора IMP, который в свою очередь не разрешает доставку своей адресатной машине HOST других сообщений [$(n+1)$ -го, $(n+2)$ -го и др.], которые выбились из порядка. В связи с этим нужно быть очень осторожным и не

¹⁾ В действительности из-за требования заполнения холостыми словами памяти процессора IMP должен быть по крайней мере один холостой бит данных и это потребует еще одно (16-битовое) процессорное (IMP) слово для «данных».

отдавать слишком много ресурсов (т. е. буферов) сообщениям, которые выбились из порядка.

Чтобы избежать условий блокировки, в варианте 2 процедуры управления потоками в сети ARPANET принимаются следующие две меры предосторожности:

1. Требования на резервирование буферов (сообщения REQALL) всегда обслуживаются в порядке номеров сообщений; это значит, что извещение ALL не отправляется для $(n+1)$ -го сообщения, если n -е сообщение (или требование на резервирование буферов для n -го сообщения) не поступило и не было обслужено.

2. Однопакетные сообщения, прибывающие к адресатному процессору IMP вне порядка, не принимаются, за исключением тех случаев, когда они повторно передаются в ответ на ранее проведенное резервирование буфера. Эти сообщения рассматриваются как требования на резервирование одного буфера (с учетом первой меры предосторожности) и текст сообщения сбрасывается.

С этими двумя мерами предосторожности появление тупиковых условий как будто бы становится невозможным, но тем не менее они возникают! В самом деле, когда на поток сообщений накладываются некоторые условия, существует опасность, что эти условия не смогут быть выполнены и тогда поток сообщений прекратится. Примерами таких условий являются компоновка и упорядочение. Опишем теперь некоторые блокировки и ухудшения, которые были замечены при работе сети ARPANET с вариантом 2.

В декабре 1973 г. реализовались потенциально возможные условия блокировки, названной *рождественской блокировкой*. Эта блокировка проявилась при сборе в узле UCLA сообщений о мгновенных замерах от всех узлов одновременно. Рождественская блокировка возникла, когда сообщения о мгновенных замерах, прибывшие в процессор IMP узла UCLA и имевшие зарезервированную для себя компоновочную память, не нашли свободных компоновочных блоков. (Компоновочным блоком называется некоторая часть памяти, которая используется в процессе компоновки сообщений из пакетов.) Эти сообщения не могли найти зарезервированные для них буфера, так как указатель зарезервированных буферов является частью компоновочного блока; поэтому зарезервированные буфера нельзя было ни занять, ни освободить. Эта трудность была вызвана тем, что система резервировала буфера, не убедившись в том, что компоновочный блок будет доступен. Чтобы избежать такой блокировки, компоновочные блоки теперь присваиваются вместе с компоновочными буферами каждому мультипакетному сообщению.

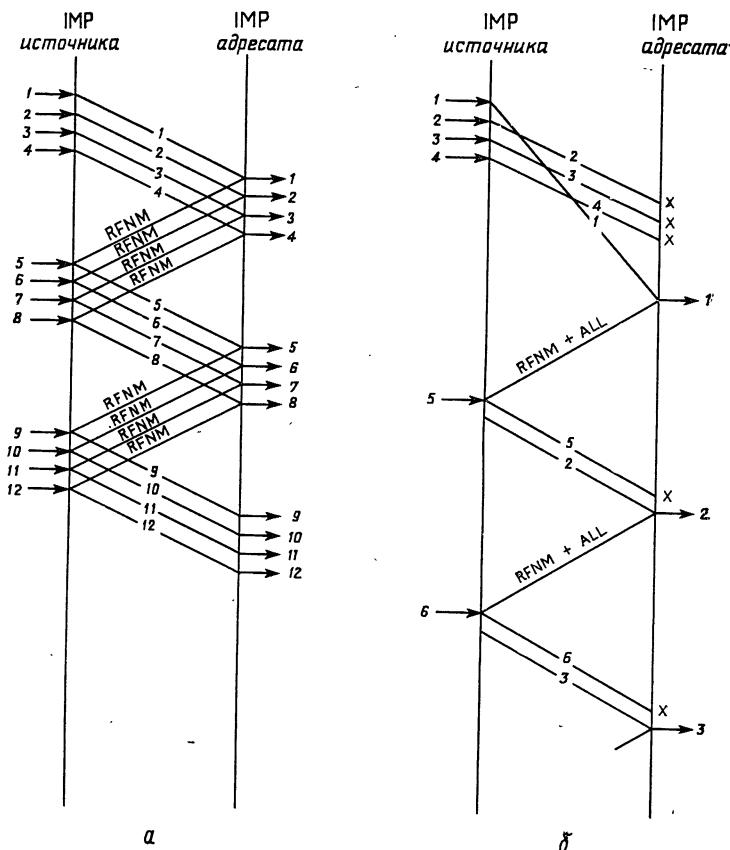
Недавно были описаны условия другой блокировки (но, насколько нам известно, она никогда не наблюдалась), названной *блокировкой дополнительного навешивания* [29]. Эта блокировка связана с упорядочением сообщений и происходит из-за извещений

ALL, которые дополнительно навешиваются на квитанцию RFNM (см. фиг. 6.11). Дополнительно навешенное извещение ALL дает резервирование буферов для следующего мультипакетного сообщения, а не для следующего по порядку сообщения. Таким образом, если следующим сообщением является однопакетное сообщение, дополнительно навешенное извещение ALL фактически резервирует буфера сообщению, которое выпадает из порядка. Рассмотрим теперь, как это обстоятельство приводит к тупиковым условиям. Предположим, что в каждом процессоре IMP имеется максимум восемь компоновочных буферов; выбор восьми буферов в этом рассмотрении делается для простоты; рассуждения остаются справедливыми в общем случае. Пусть процессор IMP A непрерывно передает восьмипакетные сообщения одному и тому же адресатному процессору IMP B так, что все восемь компоновочных буферов в процессоре IMP B используются для этой передачи мультипакетных сообщений. Если теперь в потоке восьмипакетных сообщений процессор IMP A посыпает одно однопакетное сообщение, оно в общем не будет принято адресатным процессором IMP B, так как в нем нет компоновочного буфера, разрешенного для использования. (Возможно, что появится свободный компоновочный буфер, если однопакетное сообщение случайно прибудет в момент, когда одно из восьмипакетных сообщений находилось в процессе передачи к машине HOST.) Однопакетное сообщение, следовательно, будет рассматриваться как требование на резервирование буфера. Это требование не будет обслужено до передачи RFNM на предыдущее мультипакетное сообщение. В это время, однако, все свободные компоновочные буфера будут немедленно присвоены следующему мультипакетному сообщению путем механизма дополнительного навешивания извещения ALL. В этом случае восьмипакетное сообщение из процессора IMP A, которое позднее поступит в процессор IMP B, не будет доставлено к его адресатной машине HOST из-за того, что оно выбилось из порядка. Однопакетное сообщение, которое должно быть доставлено следующим, никогда не достигнет адресатного процессора IMP, так как в нем нет зарезервированного для него компоновочного буфера и поэтому REQALL никогда не будет обслужен. Возникает тупик. Как только мы узнаем о возможности образования тупика (например, такого, как здесь), мы, как правило, можем не допустить его возникновения в будущем (сложно, однако, заранее исключить все тупики из механизма управления потоками). Блокировка дополнительного навешивания устраняется путем небольшой модификации процедуры. В самом деле, описанный тупик возникает из-за того, что однопакетные и мультипакетные сообщения используют один и тот же пул компоновочных буферов. Если отложить один компоновочный буфер (или по одному для каждой адресатной машины HOST) и разрешить его использование лишь

однопакетным сообщениям, то условия этой блокировки, возникающей из-за упорядочения сообщений, будут исключены.

Сеть ARPANET первоначально была спроектирована в расчете на обработку трафика только двух видов: диалогового трафика с короткими группирующими посылками, которые требуют малой задержки сети, и передачи файлов, которая в общем характеризуется длинными последовательностями мультипакетных сообщений, требующих большой скорости передачи по сети (см. фиг. 5.14). Однако сейчас третий вид трафика, а именно трафик, идущий в реальном масштабе времени, выступает потенциальным кандидатом для передачи по сети с коммутацией пакетов. Требования к скорости передачи и задержке со стороны трафика, идущего в реальном масштабе времени, сильно отличаются от требований к скорости передачи и задержке со стороны диалогового трафика или передачи файлов. Так, например, при передаче цифровой речи [7] необходимо получить относительно высокую скорость передачи для малых сообщений; формирование длинных сообщений приводит к большим (неприемлемым для речи) задержкам в источнике, которые возникают при наполнении больших буферов. Мы понимаем, что на начальной стадии было предпринято мало усилий для оптимизации передачи по сети ARPANET трафика, идущего в реальном масштабе времени. Тем не менее удивительно то, что наблюдалась скорость передачи однопакетных сообщений во многих случаях равнялась лишь одной четверти скорости, которую ожидалось получить. Выясним причину этого. Как упоминалось ранее, однопакетные сообщения не принимаются адресатным процессором IMP, если они приходят выбывшими из порядка. В этом случае они рассматриваются как требования для резервирования одного компоновочного буфера. Соответствующее извещение ALL при этом посыпается в ответ к источниковому процессору IMP только после передачи RFNM на предыдущее сообщение. Рассмотрим фиг. 6.12. На фиг. 6.12,а показан хороший случай, когда последовательность однопакетных сообщений течет через сеть; основное ограничение на пропускную способность связано с тем, что только четыре сообщения могут быть одновременно включены в передачу¹⁾, и поэтому

¹⁾ В связи с этим отметим свойство протокола HOST—HOST, которое перешло из варианта 1, а именно протокол HOST—HOST продолжает запускаться с помощью RFNM и ограничивать любую виртуальную линию связи от процесса к процессу лишь передачей одного сообщения за раз. Одна машина HOST может использовать полный лимит из четырех выдвигаемых для передачи сообщений с помощью уплотнения в сети более чем одной виртуальной линии. Аналогично совокупность машин HOST может (и должна) коллективно использовать этот лимит из четырех сообщений, если все машины присоединены к одному процессору IMP. Однако сейчас мы интересуемся источником трафика, идущего в реальном масштабе времени, который сам захватывает полное множество из четырех «билетов»; это возможно, если машины HOST, находящиеся в связи, принуждаются к нарушению стандартного протокола, что предполагается в данном абзаце.



Фиг. 6.12. Падение скорости при передаче трафика в реальном масштабе времени.

а — хороший случай; б — плохой случай.

наблюдаются волны из четырех сообщений, текущие по сети со скоростью одна волна за шлейфовое время. По прибытии сообщения 1 источниковому процессору IMP посыпается в ответ квитанция RFNM, которая позволяет этому процессору сбросить копию сообщения 1 и выпустить следующее сообщение (5) и т. д. На фиг. 6.12,б показан случай, когда (например) первое сообщение задерживается (возможно, из-за ошибки при передаче) и прибывает в адресатный процессор IMP позже, чем сообщения 2, 3 и 4. Так как эти три сообщения поступили с нарушением порядка, они не принимаются адресатным процессором IMP (т. е. пакеты сбрасываются; это обозначено с помощью \bar{X}), но рассматриваются как требования на однобуферное резервирование. Когда, наконец,

прибывает сообщение 1, оно доставляется, формируется RFNM, дополнительно навешивается извещение ALL для сообщения 2 и они посылаются в ответ к источнику (т. е. сообщение 2 сейчас является следующим *по порядку* и его можно выпускать). Когда в источник поступает RFNM+ALL, квитанция RFNM выпускает следующее сообщение (5), а извещение ALL [для сообщения (2)] заставляет источниковый процессор IMP вновь передать сообщение 2. Когда в место назначения прибывает сообщение 5, оно, так же как и ранее, сбрасывается (*X*) и вслед за сообщениями 3 и 4 помещается в очередь как требование на резервирование буфера. Сообщение 2 поступает в правильном порядке, и поэтому оно принимается и доставляется; это формирует квитанцию RFNM на сообщение 2 и дополнительно на нее навешивается извещение ALL для сообщения 3 и т. д. Самым интересным в этой последовательности событий является то, что прибытие сообщения 2 до сообщения 1 в адресатный процессор IMP приводит к тому, что повторным передачам должны подвергаться не только сообщение 2, но и все будущие сообщения! Таким образом, шлейфовое время для всех будущих сообщений более чем в четыре раза превышает значение, которое получается без этих нежелательных повторных передач. Полезно также заметить, что, как только такой режим повторных передач возникнет, у системы почти не остается других способов избавиться от *падения скорости передачи*, кроме как с помощью прерывания входного потока в источниковом процессоре IMP. Однако в случае передачи речи это требование нельзя будет осуществить в течение какого-то времени. Поэтому системы передачи речи во многих случаях должны работать лишь на четверти скорости, ожидаемой для передачи однопакетных сообщений. Так как ясно, что это условие неприемлемо, опишем сейчас метод, который можно использовать, чтобы избежать нежелательные повторные передачи сообщений. Напомним, что однопакетное сообщение отвергается адресатным процессором IMP и позже повторно передается, если квитанция RFNM на предыдущее сообщение не посыпается в источниковый процессор IMP. Это сделано главным образом для того, чтобы предотвратить возникновение условий компоновочной блокировки. Следовательно, проблему нельзя решить простым приемом всех однопакетных сообщений без каких-либо дополнительных мер предотвращения тупиков. Компоновочная блокировка может, например, произойти, если большое число однопакетных сообщений из нескольких источниковых процессоров IMP поступит в общий для них адресатный процессор IMP не в правильном порядке.. В этом случае адресатный процессор IMP может быть не в состоянии принять те сообщения, которые окажутся в *правильном порядке* из-за недостатка компоновочных буферов. В результате система может оказаться в тупике. Любое решение проблемы падения скорости передачи должно обеспечи-

вать прием адресатным процессором IMP всех сообщений, поступающих в правильном порядке. Предположим, что все однопакетные сообщения вначале принимаются (или запоминаются). Рассмотрим более внимательно ситуацию, когда все однопакетные сообщения принимаются (или запоминаются), так что не остается ни одного компоновочного буфера, доступного для сообщений, которые должны быть доставлены их машинам HOST в дальнейшем. На самом деле это еще не условие блокировки, так как источниковые процессоры IMP хранят копии всех однопакетных сообщений, для которых еще не были получены RFNM. Поэтому любое однопакетное сообщение, которое прибыло не в правильном порядке и не было принято адресатным процессором IMP, может тем не менее быть сброшено позже без потери этого сообщения. Адресатный процессор IMP должен лишь послать ALL для каждого сброшенного однопакетного сообщения в соответствующий источниковый процессор IMP, когда появится доступный компоновочный буфер. Это можно также рассматривать как отсроченный отказ. Но теперь повторная передача необходима, если только адресатный процессор IMP действительно выходит из имеющихся компоновочных буферов. В этом случае достигаются физические пределы системы и нельзя надеяться на большое увеличение скорости передачи за счет изменений протокола.

На этом заканчивается описание блокировок и ухудшений для варианта 2. Далее рассматриваются результаты измерений скорости передачи для этого варианта.

6. СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ПО СЕТИ

Рассмотрим теперь ограничения на скорость передачи, которую можно достичь между парой машин HOST в сети ARPANET при использовании варианта 2 процедуры управления потоками; кроме того, приведем здесь результаты измерений скорости передачи в сети ARPANET [20]. Сначала рассмотрим аппаратурные ограничения. Пропускная способность линии накладывает самое очевидное и наиболее важное ограничение на скорость передачи. Так как машина HOST присоединена к процессору IMP с помощью одной линии связи 100 кбит/с, скорость передачи не может превысить 100 кбит/с. Если в подсети нет альтернативных маршрутов, то скорость передачи далее ограничена 50 кбит/с — пропускной способностью канала связи подсети. (Вопрос, связанный с альтернативными маршрутами, рассматривается ниже.)

Напомним, что скорость обработки процессора IMP позволяет получить скорость передачи, близкую к 700 и 850 кбит/с для моделей 316 и 516 процессоров IMP соответственно [23]. Следовательно, процессоры IMP способны одновременно обрабатывать несколько линий 50 кбит/с. Чтобы избежать падения скорости пере-

дачи из-за ограничений, связанных с ЦП машины HOST, в нашем эксперименте использовалась мини-ЭВМ PDP 11/45 в узле UCLA, на которую возлагалась лишь задача генерирования восьмипакетных сообщений.

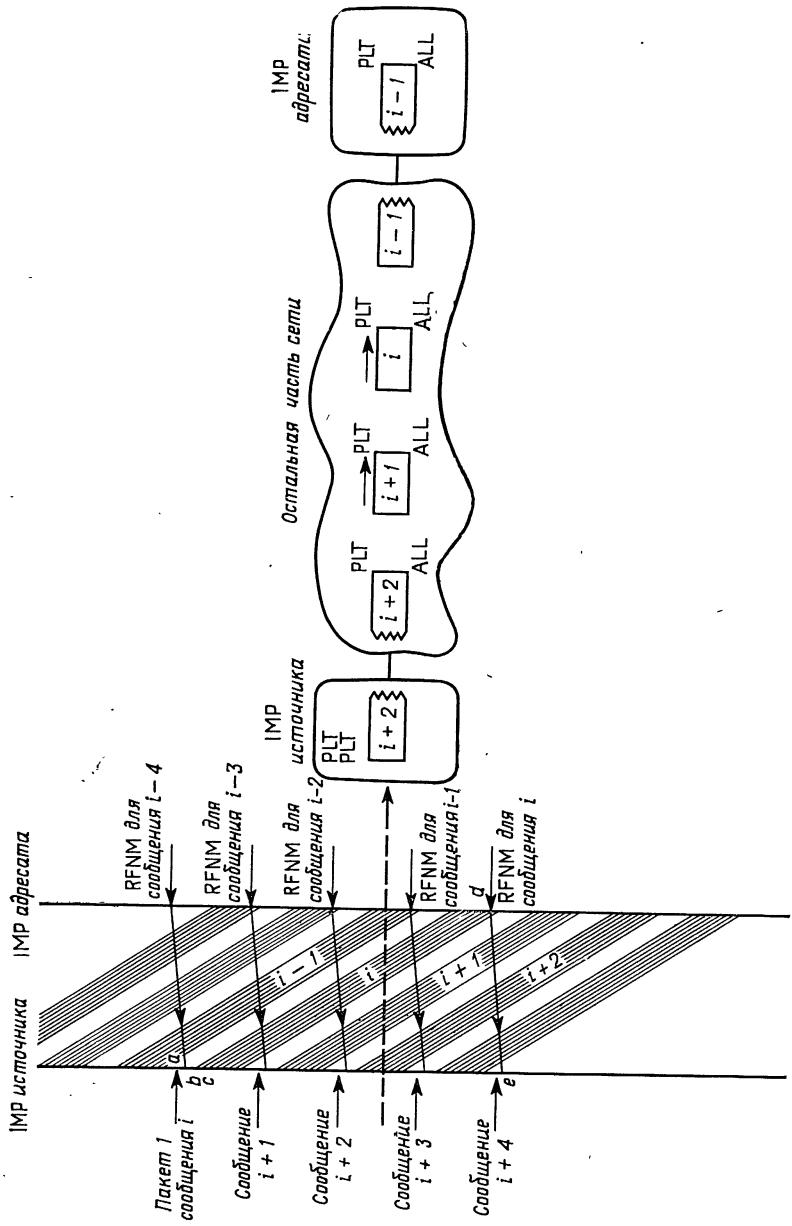
Рассмотрим теперь, какие ограничения на скорость передачи возникали в системе из-за действия процедуры *управления* в подсети связи. Как указывалось выше, имеются два вида ресурсов, которые должно получить сообщение для организации передачи: буферы и управляющие блоки (а именно номера сообщений и места в таблице). Естественно, что существует лишь конечное число этих номеров и мест. Кроме того, большая часть буферов и управляющих блоков должна коллективно использоваться сообщениями из различных машин HOST. Недостаток любого из этих ресурсов может образовать узкое место, ограничивающее скорость передачи машины HOST. Обсудим теперь, сколько имеется единиц каждого ресурса, и рассмотрим вероятность образования узкого места.

Пакету разрешается войти в источниковый процессор IMP, если только этот процессор имеет не менее четырех свободных буферов. В октябре 1974 г. (когда проводились представленные ниже измерения) полное число пакетных буферов в процессоре IMP с программным обеспечением VDH и без него (VDH — программное обеспечение для связи с очень удаленной машиной HOST) было равно 30 и 51 соответственно. Это означало, что прерывание ввода сообщений из-за недостатка буферов могло произойти только чрезвычайно редко, когда источниковый процессор IMP обрабатывал интенсивный трафик передачи с промежуточным хранением и трафик, требующий компоновки.

Следующими ресурсами, которые должно получить сообщение, являются номер сообщения и место в таблице PLT. Напомним, что существует ограничение, состоящее в том, что для пары процессоров IMP источника и адресата разрешается присваивать лишь четыре номера сообщений. Это означает, что все источниковые машины HOST, присоединенные к некоторому источниковому процессору IMP A и ведущие передачу с какими-либо адресатными машинами HOST, присоединенными к некоторому адресатному процессору IMP B, коллективно используют один и тот же поток номеров сообщений, идущий от процессора IMP A к процессору IMP B. Эта возможная интерференция между машинами HOST и тот факт, что имеются лишь четыре номера сообщений, допустимых для параллельного использования, означают, что присвоение номеров сообщений может стать серьезным узким местом в случаях, когда источниковый и адресатный процессоры IMP разделены несколькими участками. (Это главная причина недавних изменений процедуры обработки сообщений. Новая процедура недавно была реализована; она называется вариантом 3; см. разд. 6.8)

После получения номера сообщения мультипакетное сообщение должно получить одно из мест в таблице PLT, которая имеет пул всего из шести мест. Так как таблица коллективно используется всеми машинами HOST, которые присоединены к источниковому процессору IMP, и для всех возможных узлов назначения, то она потенциально также представляет собой узкое место. Это узкое место можно легко устраниТЬ, увеличив число допустимых мест в таблице PLT. Однако таблица PLT также применяется при управлении потоками; она ограничивает полное число мультипакетных сообщений, которые одновременно могут обрабатываться подсетью. Следовательно, устранивая конкуренцию, связанную с малым размером таблицы PLT, можно вызвать какие-либо другие перегрузки или неустойчивости. Аналогичное рассуждение применимо также к процедуре распределения номеров сообщений. Кроме того, ограниченным является число имеющихся в какой-то момент восьмипакетных сообщений, не получивших квитанции; ограничение на это число следует из конечности компоновочного пространства. В октябре 1974 г. в адресатном процессоре IMP (без программного обеспечения VDH) было не более 34 буферов для компоновки¹⁾. Это значит, что в одно и то же время компоновать могут не более четырех восьмипакетных сообщений. Компоновочное пространство, естественно, должно коллективно использоваться всеми машинами HOST, посылающими сообщения к тому же самому адресатному процессору IMP. Поэтому может возникнуть другое серьезное узкое место для скорости передачи. Как известно, даже если другие машины HOST не мешают, между любой парой машин HOST в передаче не может находиться более четырех сообщений в силу ограничения на число номеров сообщений. Это ограничение снижает достижимую скорость передачи в случае, когда пропускная способность линии, умноженная на шлейфовое время, больше, чем учетверенная длина сообщения. Этот случай показан на фиг. 6.13. Ввод первого пакета сообщения i начинается в момент a после того, как последний пакет сообщения $i-1$ был обработан источником процессором IMP. После ввода первого пакета источниковый процессор IMP ждет до момента времени b , когда поступает квитанция RFNM на сообщение i — 4 (здесь возникает узкое место). Вскоре после обработки RFNM (к моменту c) происходит передача первого пакета по первому участку и начинается ввод оставшихся пакетов из машины HOST. В момент d все пакеты пройдут через компоновку в адресатном процессоре IMP, рассматриваемый первый пакет будет передан к адресатной машине HOST и восемь компоновочных буферов будут

¹⁾ Когда для выполнения новых функций возникала потребность в расширении оперативной памяти процессора IMP, число буферов увеличивалось; эта тенденция продолжается в сети ARPANET.



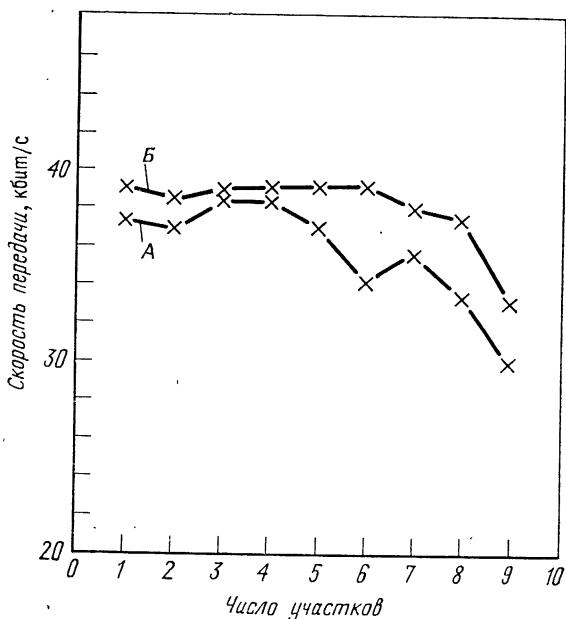
Фиг. 6.13. Нормальная последовательность мультипакетных сообщений;

зарезервированы; сообщение о последнем с помощью RFNM пойдет к источниковому процессору IMP. Эта квитанция RFNM достигнет источникового процессора IMP в момент e и тем самым разрешит передачу сообщения $i+4$. На фигуре также представлен мгновенный замер сети в момент, указанный штриховой стрелкой. Показаны четыре сообщения (каждое со своими ALL и PLT), а именно сообщение $i+2$ выходит из источникового процессора IMP, сообщения $i+1$ и i передаются по сети, а сообщение $i-1$ вводится в адресатный процессор IMP. Показаны также два неиспользованных места в таблице PLT в источниковом процессоре IMP. Возможные зазоры в последовательной передаче сообщений представляют потери в скорости передачи; они возникают из-за ограничения, состоящего в том, что лишь четырем сообщениям разрешено одновременно находиться между парой процессоров IMP; это проявляется в наличии следующего (пятого) сообщения, ожидающего возвращения квитанции RFNM.

Выше еще не упоминалась интерференция, возникающая из-за пакетов, проходящих транзитную передачу с промежуточным хранением; эта интерференция существенно снижает скорость передачи от машины HOST к машине HOST. Интерференция приводит к увеличению времени ожидания в очереди и, возможно, к отказам со стороны процессоров IMP, лежащих на пути пакета. Отказ возникает, если в соседнем процессоре IMP находятся 20 пакетов, проходящих передачу с промежуточным хранением, или если выходная очередь к следующему участку заполнена. (Напомним, что в выходной очереди может находиться не более восьми пакетов.) Пакет, получивший отказ, передается повторно, если в течение тайм-аута продолжительностью 125 мс на него не поступает квитанция.

Обратимся теперь к краткому рассмотрению альтернативных маршрутов и их влияния на результаты наших экспериментов по измерению скорости передачи. Оказывается, что в сети ARPANET альтернативные пути редко используются, если они длиннее первоначального пути более чем на два участка. Это обусловлено способом вычисления и обновления оценок задержек и способом оперирования с выходными очередями. Каждый участок на пути от источника к адресату вносит четыре (произвольные) единицы задержки. Каждый пакет в выходной очереди между источником и адресатом вносит одну единицу задержки в оценку задержки. Так как длина выходных очередей не может быть больше восьми (пакетов), то один участок может увеличить оценку задержки самое большее на 12 единиц. Таким образом, минимальная и максимальная оценки задержек для пути из n участков равны $4n$ и $12n$ соответственно. Как было отмечено в разд. 6.1, пакеты всегда посылаются по пути с наименьшей текущей оценкой задержки. Из этого следует, что альтернативный путь никогда не используется, если

он в три или более раз длиннее (в числе участков) первоначального пути. Таким образом, если первоначальный путь имеет длину n , то альтернативные маршруты возможны лишь по путям длины, меньшей $3n$ участков. Предположим, что все каналы на первоначальном пути имеют одну и ту же пропускную способность и что мешающий трафик отсутствует. Если посылается столько пакетов, сколько возможно передать по первоначальному пути, то эти пакеты обычно не будут иметь большие задержки из-за очередей, так как такой поток достаточно детерминированный при прохождении по рассматриваемой цепочке (см. задачи 5.3 и 5.4). Это значит, что оценка задержки лишь незначительно возрастает, хотя используется полная скорость. Следовательно, переключение на альтернативный путь происходит только тогда, когда он лишь немногого длиннее первоначального пути. При наличии мешающего трафика длины выходных очередей возрастают и поэтому переключение происходит с большей вероятностью. Такое переключение на альтернативный путь может помочь вновь приобрести некоторую скорость передачи, потерянную из-за мешающего трафика. Как было указано в работе [24], если даже первый и второй (по задержке) пути имеют одинаковую длину, можно достичь увеличения скорости передачи максимум на 30%. Это обусловлено ограничением

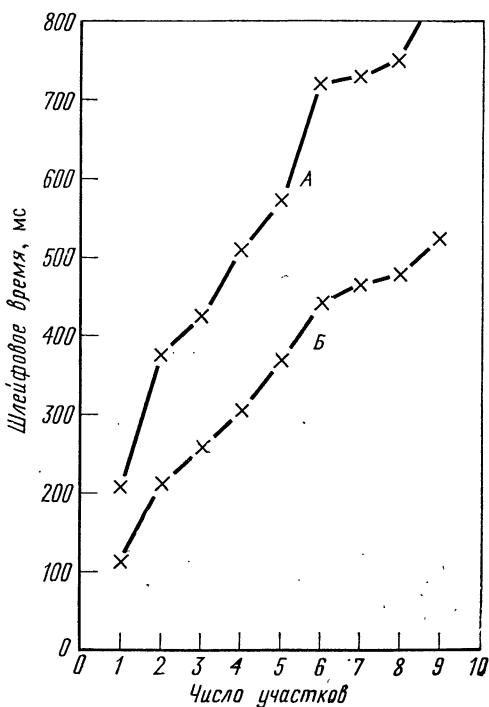


Фиг. 6.14. Скорость передачи в сети ARPANET (октябрь 1974 г.).

А — средняя скорость; Б — максимальная скорость для наилучшего блока из 150 сообщений.

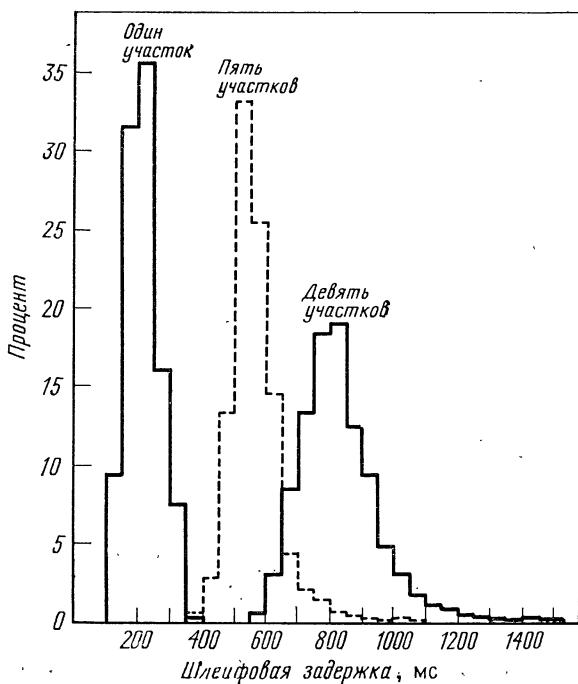
выходной очереди максимум восемью пакетами и тем, что частота переключений между линиями не превышает одного переключения за 640 мс (в случае сильно загруженных линий 50 кбит/с). Таким образом, очередь из восьми пакетов на старом пути даст перекрытую передачу лишь длины $8 \cdot 23,5$ мс = 188 мс в течение полного времени между обновлениями, равного 640 мс (альтернативные пути могут выбираться только в моменты обновлений). Относительно медленное распространение маршрутной информации приводит к дальнейшему снижению частоты переключений между первоначальным и альтернативным путями. Это рассмотрение показывает, что альтернативные пути оказывают небольшое влияние на максимально достижимую скорость передачи. Однако альтернативные пути очень важны для обеспечения надежности сети (это обсуждалось ранее).

Проведенные в октябре 1974 г. эксперименты по измерению скорости передачи для варианта 2 [20] привели к результатам, представленным на фиг. 6.14. Здесь дана скорость передачи в кбит/с в зависимости от числа участков между источником и ад-

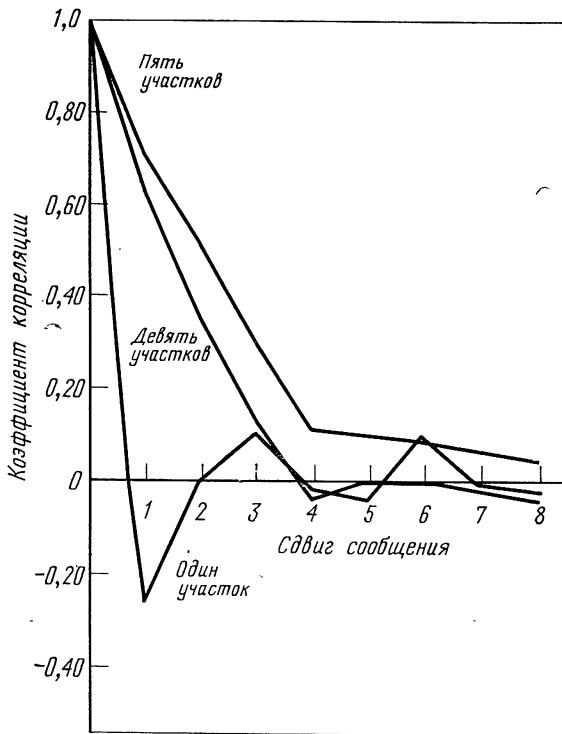


Фиг. 6.15. Шлейфовая задержка в сети ARPANET (октябрь 1974 г.).
A — средняя задержка; A — минимальная средняя задержка для наилучшего блока из 150 сообщений.

ресатом. Кривая *A* относится к скорости передачи, усредненной по всему десятиминутному эксперименту; кривая *B* представляет скорость передачи для лучшего блока из 150 последовательных сообщений. Заметим, что удается получить среднюю скорость, приближенно равную 37—38,5 кбит/с, когда число участков меньше пяти; затем она падает до 30 кбит/с (когда число участков равно девяти) главным образом из-за ограничения четырьмя сообщениями. Кроме того, наилучшая скорость передачи для 150 сообщений не намного лучше, чем общая средняя скорость. На фиг. 6.15 изображены соответствующие кривые для средней шлейфовой задержки в зависимости от числа участков между источником и адресатом. Заметим, что средняя задержка для *n* участков аппроксимируется функцией $200 + 75n$ (мс). Полученная в эксперименте гистограмма для задержки представлена на фиг. 6.16 для расстояний в 1,5 и 9 участков. Далее интерес представляет коэффициент корреляции шлейфовой задержки для последовательных сообщений в сети; он показан на фиг. 6.17. Заметим, что задержка сообщений



Фиг. 6.16. Гистограмма шлейфовой задержки, мс.



Фиг. 6.17. Коэффициент корреляции для задержки сообщения.

коррелирована на протяжении примерно трех или четырех последовательных сообщений.

Перейдем теперь к изучению измерений в сети ARPANET, выполненных в течение одной недели.

6.6. ДАННЫЕ О СЕТИ ARPANET, ПОЛУЧЕННЫЕ В ТЕЧЕНИЕ ОДНОЙ НЕДЕЛИ

В августе 1973 г. было выполнено измерение всего трафика, переносимого показанной на фиг. 5.21,*a* 39-й узловой сетью ARPANET, управляемой по варианту 2. Целью этого эксперимента было наблюдение характеристик трафика в действующей сети [19]. Эти характеристики включали 1) распределение длин сообщений и пакетов, 2) среднюю шлейфовую задержку, 3) среднюю взвешенную по трафику длину пути, 4) величину внутриузлового трафика (трафика к машинам HOST и от машин HOST в одном

и том же пункте), 5) наиболее популярные пункты и каналы, 6) тяготение (это свойство, которое пункт демонстрирует, посыпая большую часть своих сообщений одному или небольшому числу пунктов) и, наконец, 7) использование каналов. Эти данные имеют не только историческое значение, они позволяют оценить правильность наших подходов к проектированию сети. В частности, имеется несколько параметров сети, значения которых выбираются до практической реализации сети и которые следует вновь оценить путем таких измерений. К этим параметрам относятся длина пакета (и, следовательно, объем буфера), число буферов, пропускная способность каналов, параметры, связанные с процедурой компоновки и передачей одно- и мультипакетных сообщений.

Для получения этих характеристик трафика данные собирались (почти) непрерывно в течение семидневного периода с 8 ч 37 мин 1 августа 1973 г. до 17 ч 06 мин 7 августа 1973 г. Накопленная статистика посыпалась в узел UCLA-NMC из каждого пункта сети периодически примерно через 7 мин. Данные последовательно обрабатывались и привели к следующим результатам.

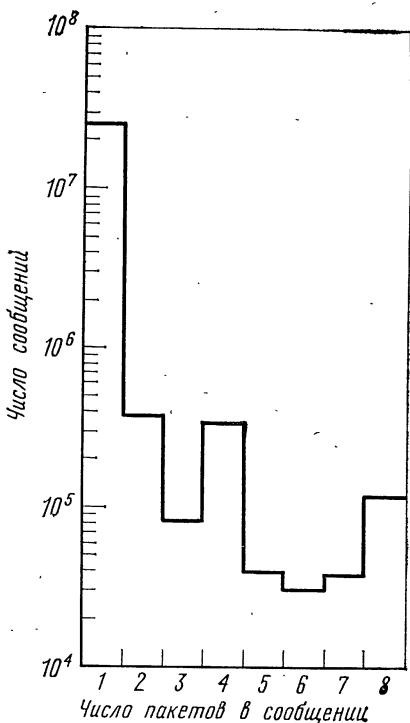
В течение семи дней¹⁾ в общем около 6,31 млрд. бит трафика машин HOST было передано по сети с помощью около 26,0 млн. сообщений (в среднем 4,1 млн. сообщений в день). Это значит, что в среднем вся сеть принимала $\gamma = 47,4$ сообщения в секунду и переносила в среднем 11 495 бит в секунду между машинами HOST. Сообщения, входившие в сеть со стороны всех машин HOST, были распределены по длине так, как показано на фиг. 6.18. Из этой гистограммы видно, что в среднем в сообщении машины HOST содержалось лишь 1,12 пакета! Более того, измеренная средняя длина сообщения равна лишь 243 бит данных! Эти факты показывают, что не только было очень мало мультипакетных сообщений²⁾, но и что однопакетные сообщения были весьма короткими (по результатам измерений 218 бит данных). Этот последний вывод подтверждается логарифмической (по основанию 2) гистограммой длины пакетов, входящих в сеть со стороны машин HOST; она показана на фиг. 6.19. Такой малый размер сообщений оказал влияние на эффективность использования памяти, которая сейчас будет рассмотрена. Определим эффективность использования буфера η следующим образом:

$$\eta = \frac{\bar{b}_p}{L + H},$$

где $\bar{b}_p = E$ [длина пакета], L — (максимальная) длина пакета и H — величина (длина) избыточности памяти для пакетов (фиксированная длина буфера процессора IMP для хранения пакета равна

¹⁾ В действительности в течение 548 951 с.

²⁾ Это дает основания для пересмотра подхода, использующего мультипакетные сообщения.

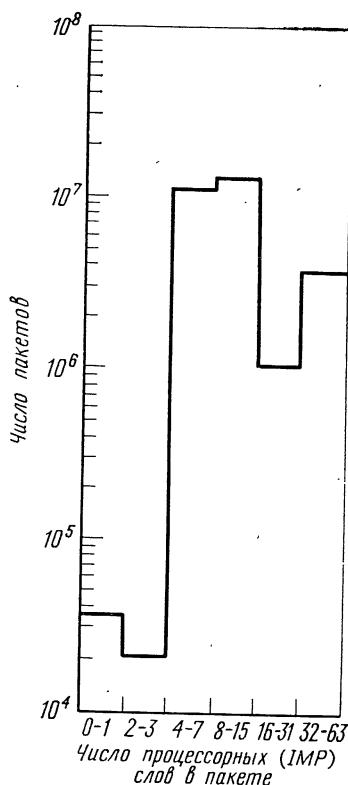


Фиг. 6.18. Гистограмма длины сообщений машин HOST, выраженной в числе пакетов.

$L+H$ бит). Семидневные измерения показывают, что $\bar{b}_p=218$ бит. Используя это значение вместе с $L=1008$ и $H=176$, получаем для эффективности использования буфера лишь $\eta=0,184$! В задаче 6.5 [3] требуется показать¹⁾, что $\bar{b}_p=\bar{b}[1-e^{-\bar{b}}]$ в предположении, что сообщения имеют показательное распределение со средним \bar{b} бит. Если в этом выражении использовать измеренное значение $\bar{b}=243$ бит, то получим $\bar{b}_p=239$, что приближенно на 10% больше измеренного значения $\bar{b}_p=218$; это значит, что имеется больше коротких сообщений, чем указывает показательное распределение. Даже используя $\bar{b}_p=239$, получаем $\eta=0,202$ (опять малую величину). В задаче 6.5 требуется найти оптимальную длину пакета L_0 ; при $\bar{b}=243$ и $H=176$ эта длина $L_0=244$ бит (в предположении показательного распределения), а максимальная возможная эффективность $\eta=0,366$ ($\bar{b}_p=154$ бит)²⁾. Это значение эффективив-

¹⁾ Усечение сообщений длиной 8063 бит не оказывает заметного влияния на эти результаты.

²⁾ Увеличить эту эффективность можно, лишь уменьшая H .



Фиг. 6.19. Гистограмма длины пакета, выраженной в числе слов.

ности ($\sim 37\%$) существенно выше измеренного значения. Таким образом, основываясь на этих семидневных измерениях (и привлечь ранее проведенные, а также недавно выполненные измерения), приходим к заключению, что, если требуется максимизировать использование буферов, нужно применять пакеты в четыре раза короче тех, которые используются в настоящее время. Кроме того, главная причина использования этих очень коротких сообщений заключена в способе функционирования общей операционной системы коллективного пользования для PDP-10 (TENEX), которая является ориентированной на знаки системой, выполняющей отражение знаков [1]. Это значит, что для каждого набранного на терминале пользователя знака формируется восьмибитовое сообщение (к которому добавляется вся избыточность), предназначенное для передачи по сети (оно вызывает подтверждения от процессора IMP к процессору IMP и квитанцию RFNM); после того как система TENEX обработает прерывание, вызванное этим знаком, она формирует восьмибито-

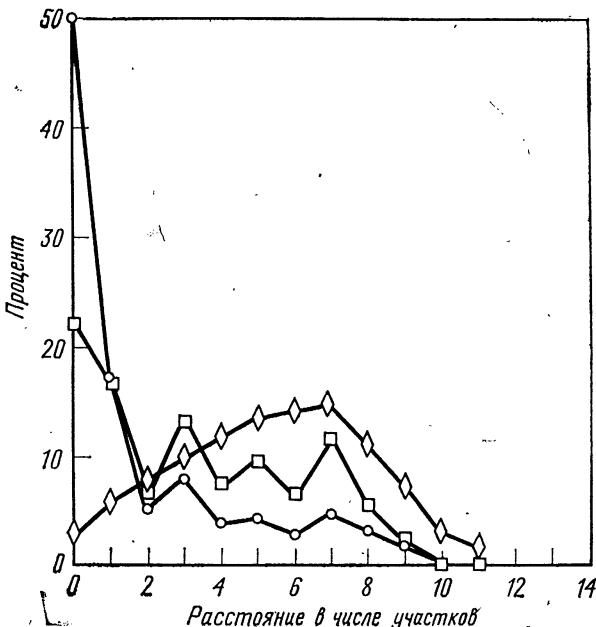
вое сообщение (эхо) для сети. Естественно, что это приводит к громадной избыточности (которая обсуждается ниже); здесь отметим, что такая процедура сильно снижает среднюю длину сообщений в сети (обратите внимание на то, сколько машин PDP-10 включено в сеть ARPANET). В последнее время система TENEX была модифицирована с целью повышения эффективности обработки ее сообщений (введены передача более чем одного знака за раз и местное отражение знаков).

Измеренная средняя за семь дней шлейфовая¹⁾ задержка сообщений была равна 93 мс. Фактически сеть удовлетворяет поставленному при ее проектировании требованию: получить среднюю задержку для однопакетного сообщения, меньшую 200 мс. Таким образом, как и требовалось, подсеть связи по существу прозрачна для пользователя (в отношении задержки). Главный источник задержки (иногда достигающей многих секунд) в процессе диалога пользователя с машиной находится как в его местной машине HOST, так и в обслуживающей его адресатной машине HOST (и почти никогда не находится в подсети связи; исключение составляют случаи возникновения петель). Основными причинами малой задержки сети являются малые (указанные выше) размеры сообщений и тот факт, что значительное число сообщений пересекает сеть по очень коротким путям. Ниже обсуждение задержки еще будет продолжено, а теперь изучим распределение трафика и дадим объяснение наличию коротких путей, внутриузловому трафику, тяготениям и т. п. Из равенства (5.22) видно, что среднюю длину пути \bar{n} (измеряемую в числе участков) легко найти, измения интенсивность входа сообщений γ и внутреннюю интенсивность сообщений λ , так как $\bar{n} = \lambda/\gamma$. Семидневные измерения дают значение $\bar{n} = 3,31$. Для этой средней длины пути можно найти нижнюю границу, измеряя уровень трафика между парой машин HOST и считая, что этот трафик течет по кратчайшему пути в сети. Если эти вычисления выполнить на основе данных измерения, то можно найти, что минимальная (взвешенная по трафику) длина пути равна 3,24 участка. Сравнение этой длины с $n = 3,31$ показывает, что большая часть трафика, в настоящее время проходящего по сети, фактически течет по кратчайшему пути! Вместе с тем если подсчитать длину кратчайшего пути между парами узлов для топологии, показанной на фиг. 5.21, *a*, и усреднить ее по всей сети, то можно найти, что два пункта разделены в среднем 5,32 участка. Это число заметно отличается от измеренного взвешенного по трафику значения 3,31. Может вызвать удивление такое заметное отличие этих двух оценок длины пути, так как пред-

¹⁾ Шлейфовая задержка измерялась процессорами IMP; она определяется как время от момента входа сообщений в сеть до момента возвращения сетевой межконцевой квитанции RFNM.

полагается, что пользователи сети связываются с пунктами, которые находятся поблизости. Это неожиданно, поскольку расстояние в сети не должно ощущаться пользователями. Ответ можно найти, рассматривая более подробно направления течения трафика. На самом деле оказывается, что значительная доля графика течет через *нуль* участков. Это соответствует трафику, текущему из одной машины HOST в данном пункте через ее процессор IMP ко второй машине HOST того же самого пункта (в конце концов процессор IMP также представляет собой очень удобное сопряжение между *местными* машинами). Такой трафик естественно называть внутриузловым. Например, установлено, что внутриузловыми являются 70% трафика SRI, 34% трафика MIT, 34% трафика Линкольновской лаборатории, 54% трафика USC, 33% трафика ARPA, 46% трафика CCA, 36% трафика XEROX. В среднем по всей сети $\sim 22\%$ трафика является внутриузловым. Более того, процессор IMP узла Ames и процессор TIP узла Ames (которые хотя и отделены расстоянием в один участок, оба расположены в Ames), оказалось, имеют связь (по существу внутриузловую), при которой первый посыпает 85% своего трафика второму, а в обратном направлении движется 58% трафика (это дает 13% полного трафика сети). Фактически 16% всего трафика сети проходит полное расстояние, равное одному участку. Продолжая рассмотрение этого явления, укажем доли трафика по путям сети различной длины. На фиг. 6.20 показана зависимость доли трафика (в процентах) от длины проходимого им пути (в числе участков); видно, что 22% передач происходит на нулевое расстояние (внутриузловой трафик), около 16% передач ведется на расстояние 1 и т. д. Можно возразить, что эти доли должны быть модифицированы с помощью числа пар узлов, находящихся на заданном расстоянии (в числе участков); поэтому на фиг. 6.20 показано также число узлов, находящихся на заданном расстоянии в сети ARPANET для топологии, представленной на фиг. 5.21,а. Можно показать, что для этой топологии распределение минимальных расстояний между двумя узлами, представленное на фиг. 6.20, получается из следующего списка упорядоченных пар (x, y) (здесь x — длина в числе участков, а y — число¹⁾ пар узлов, находящихся на этом расстоянии): (0,39), (1,86), (2,118), (3,148), (4,176), (5,204), (6,210), (7,218), (8,160), (9,102), (10,40) и (11,20). Никакие узлы не находятся на расстоянии, большем 11 участков. Заметим, что на расстоянии 7 находится больше узлов, чем на любом другом заданном расстоянии (как упоминалось; среднее расстояние равно 5,32).

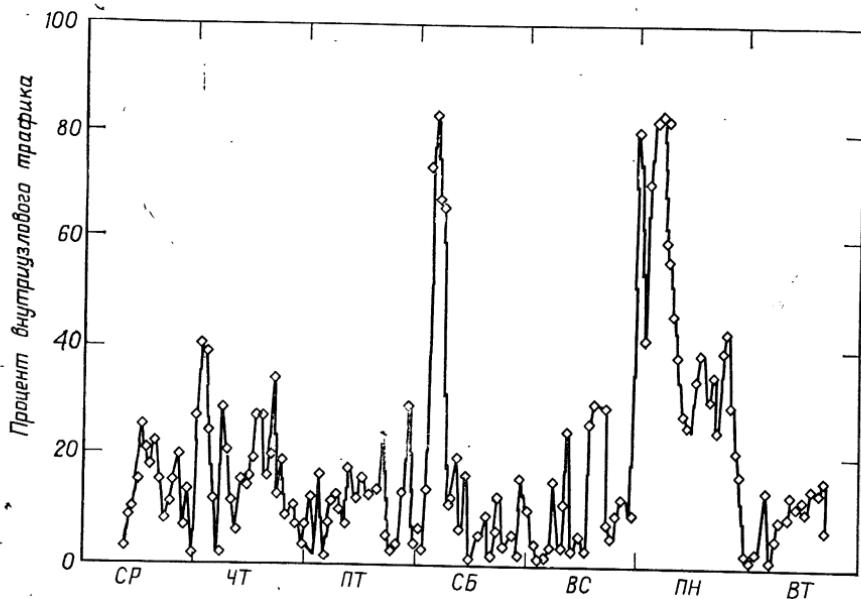
¹⁾ Мы рассматриваем пары узлов как *упорядоченные* пары; таким образом, пара (MIT, UCLA) отлична от пары (UCLA, MIT). Это естественно, так как трафик не обязательно симметричен. Важный частный случай (узел i , узел i) рассматривается как одна пара.



Фиг. 6.20. Зависимость трафика от расстояния (внутриузловой и другой трафик).
 ◇ пары узлов; □ трафик; ○ трафик на пару узлов.

В сети с N узлами и $M/2$ полнодуплексными каналами первыми двумя парами в списке должны быть $(0, N)$, $(1, M)$. Если разделить измеренную долю трафика на число пар узлов, находящихся на данном расстоянии, получим третью кривую на фиг. 6.20, которая показывает долю трафика (в процентах) на пару узлов, находящихся на данном расстоянии. Если не учитывать трафик на нулевое расстояние (внутриузловой трафик) и на расстояние 1, то можно заключить, что этот нормированный трафик приближенно постоянен (по крайней мере, для расстояний 2, 3, ..., 9 узлов). [Последний факт, который влияет на остающуюся неравномерность, состоит в том, что существуют большие пользователи (например, университет ILLINOIS) и большие обслуживающие приборы (например, ISI.)]. Если бы трафик был равномерно распределен на сети, то трафиковая кривая на фиг. 6.20 шла бы горизонтально на уровне 8,25 %. На фиг. 6.21 показана доля внутриузлового трафика в сети для каждого часа¹⁾ эксперимента. Заметим, что внутриузло-

¹⁾ Эти и другие приведенные ниже «часовые» трафики в действительности показывают точки, разделенные 56 мин (это время связано со скоростью синхронизатора процессора IMP, который отмерял семиминутные интервалы для накопления статистики; восемь таких интервалов дают 56-минутный «час»). Разделение между узлами на горизонтальной оси проводится в полночь.

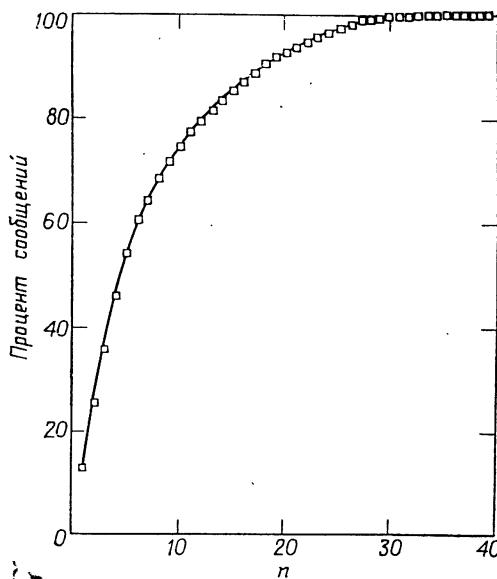


Фиг. 6.21. Часовой внутриузловой трафик в сети ARPANET.

вой трафик возрастает более чем до 80% всего трафика в определенные часы (при среднем за неделю 22%); этот трафик имеет пики в ранние утренние часы.

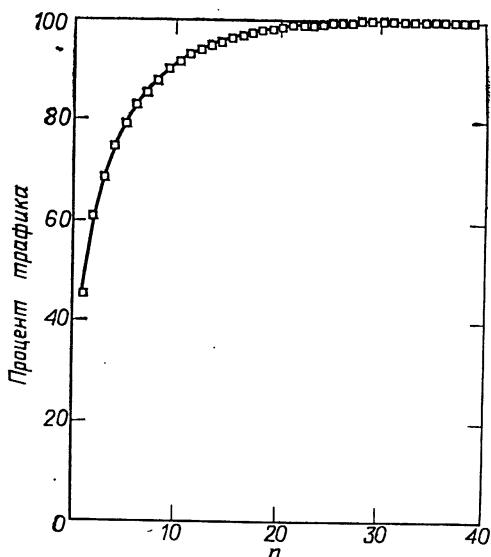
Дальнейшая иллюстрация неравномерности трафика представлена на фиг. 6.22. Здесь показана доля сообщений, посылаемых от n наиболее интенсивных источников, в зависимости от n . Заметим, что более 80% трафика создается наиболее интенсивной одной третью пунктов. Аналогичное утверждение справедливо для наиболее загруженных (самых популярных) адресатов.

Еще одним явлением, относящимся к движению трафика между машинами HOST, является появление тяготений между пунктами сети. Фаворитом машины HOST A на данном интервале времени называется такая машина HOST, к которой A посыпает больше сообщений, чем к любой другой машине на этом интервале. Например, в среднем за семь дней узел SDC направил 70% своего трафика в узел BBN, ILLINOIS — 50% в ISI, BBN — TIP — 59% в BBN и узел ARPA — 47% в ISI. Как было указано, некоторые машины HOST направляют больше трафика себе, чем другим. Принимая во внимание весь фаворитный трафик, можно найти, что 44% трафика сети направляется в фаворитный пункт. На фиг. 6.23 показана (просуммированная по всем источникам) доля трафика (в процентах), направляемая к n наиболее сильным фаворитам.



Фиг. 6.22. Трафик наиболее интенсивных источников.

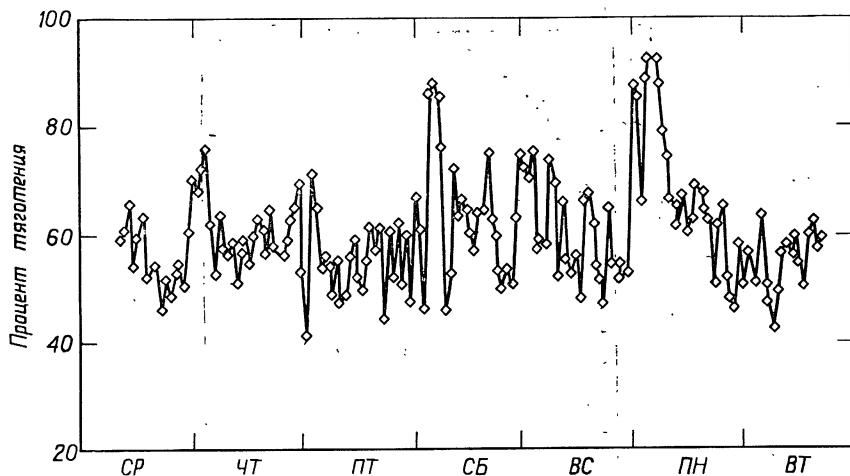
(адресатам) источника, в зависимости от n . Если указанные упорядочения и доли остаются независимыми от времени (т. е. имеет место случай стационарной матрицы трафика), то эту информацию можно использовать при выборе топологии. Однако, как можно показать [9, 13], конструкция сети и ее характеристики относительно нечувствительны к изменениям матрицы трафика (поэтому при проектировании обычно берутся однородные требования; мы также использовали их в разд. 5.10). (Однородная матрица трафика дает наиболее фаворитному пункту лишь $100/N = 2,56\%$ трафика.) Заметим, что к моменту, когда мы, увеличивая число фаворитов, запросили уровень трафика, направляемый к девяти наиболее сильным фаворитам, было уже охвачено более 90% трафика сети. Однако важно представлять себе, что при этом рассматривается более девяти пунктов, так как каждый источник не обязательно имеет один и тот же набор наиболее сильных фаворитов (фактически вошли 33 различных адресата). Наиболее показательно этот эффект тяготения между пунктами представлен на фиг. 6.24, которая демонстрирует долю трафика [в процентах к самому сильному фавориту (пункту)] всех источников в зависимости от часа суток (т. е. на часовой основе). Большая часть трафика (минимум 40%, а в среднем 61%) состояла из диалогов между N источниками и их фаворитами. Всего существует N^2 пар; таким образом, на семидневной основе N фаво-



Фиг. 6.23. Эффект тяготения.

ритов имеют в $0,44N=17$ раз больше трафика, чем в случае, когда матрица трафика была однородной (на часовой основе получаем $0,61N=24$). Заметим, что эффект тяготения должен возрастать при уменьшении временного интервала, на котором определяется фаворит. Действительно, если выбрать интервал, сравнимый с временем передачи пакета, то наиболее сильные фавориты будут иметь почти 100% трафика. Это объясняется тем, что название каждого фаворита источника будет динамически меняться, совпадая с названием пункта назначения, текущего в настоящий момент трафика этого источника. Таким образом, интерпретация доли трафика, идущего к фаворитным пунктам, меняется с изменением временного интервала. Среднее за семь дней значение 44% имеет две возможные интерпретации. Первая состоит в том, что имеет место истинное тяготение, возможно, из-за существования малого числа полезных систем обслуживания¹⁾. Вторая интерпретация состоит в том, что пользователи сети консервативны; как только пользователь знакомится с некоторой адресатной машиной HOST, он продолжает тяготеть (и, возможно, агитирует других) к этой машине HOST, а не экспериментировать с другими системами. Еще одно объяснение этого явления состоит в том, что не так легко использовать чужую машину HOST на данном уровне

¹⁾ 39 семидневных фаворитов состояли из 17 различных адресатов.

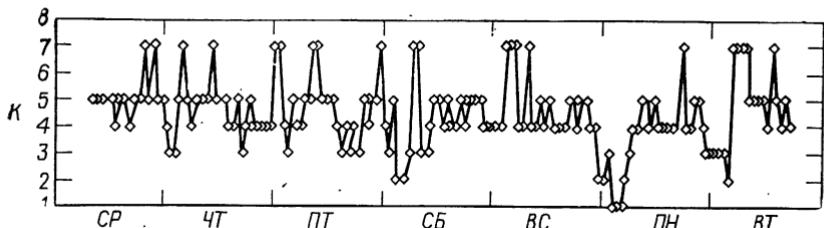


Фиг. 6.24. Часовое поведение тяготения.

развития сетей. Не принимая пока во внимание ограничивающие свободу законодательные процедуры (например, финансовые расчеты), следует ожидать, что эта тенденция в будущем сократится по мере того, как мы научимся делать отдаленные средства обработки более технически доступными для пользователей.

С фиг. 6.24 связана фиг. 6.25, на которой показано число фаворитных адресатов K , охватывающих 90% всего трафика на часовой основе. Это означает, что в любой час 90% сообщений посыпалось между самое большое NK парами из общего числа $N^2 = 1521$ пар в сети. Заметим, что K имеет максимальное часовое значение 7 (которое меньше среднего за неделю $K=9$ из-за меньшего интервала усреднения в соответствии со сказанным выше). Следовательно, в любой час требуется самое большое 18% пар узлов для передачи 90% сообщений [в самом крайнем случае $K=1$; в эти часы самое большое $1/N$ (т. е. 2,56%) пар узлов посылает 90% сообщений].

Последнее связанное с матрицей трафика явление, которое будет здесь рассмотрено, также имеет отношение к эффекту тяготения. Наиболее популярным пунктом является SRI; 13% полного трафика сети направляется в этот пункт. Следующим по популярности является пункт 1SI, к которому направляется 12,3% трафика. На третьем месте стоит AMES-TIP, к которому направляется 10,8% трафика. Интенсивность трафика здесь определяется общим числом сообщений. Однако, если рассмотреть эти числа внимательнее, можно найти, что из 13% трафика, направляемого в SRI, более двух третей (т. е. 9% полного трафика сети) составляет внут-

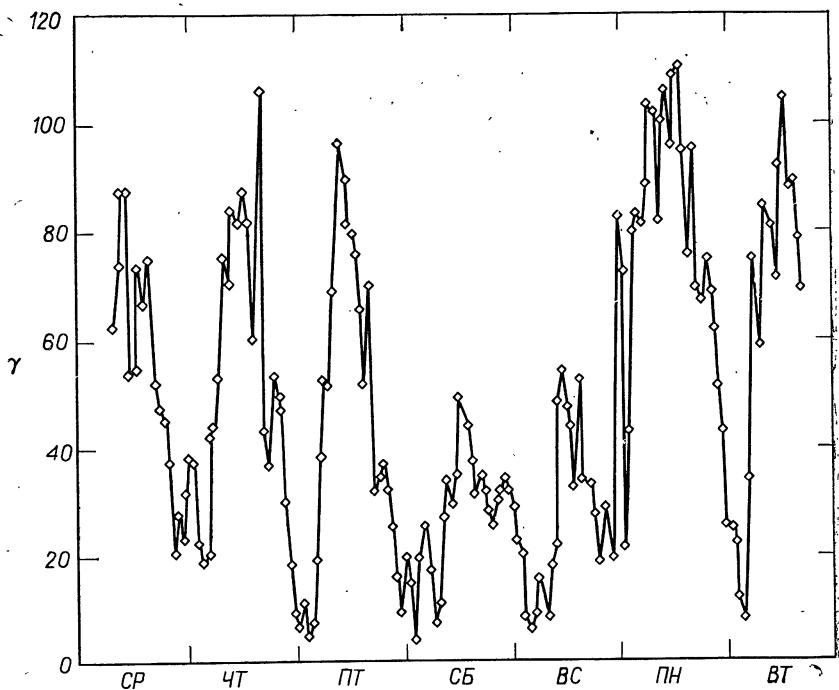


Фиг. 6.25. Число фаворитных адресатов, которые дают 90% трафика.

риузловой трафик, а менее чем одна треть (т. е. 4%), действительно, приходит от удаленных машин HOST. Для ISI менее чем одна сотая доля трафика является внутриузловой, и поэтому ISI на самом деле представляет собой наиболее популярный пункт сети. Другой мерой популярности может быть среднее число бит в секунду, направляемых в пункт (для ISI это число равно 842). С точки зрения этой меры наиболее популярным пунктом является CCA, который получает в среднем 1931 бит/с; однако пункт CCA был лишь шестым в списке, основанном на числе *сообщений* в секунду, и получал 5,4% полного трафика сообщений (причем почти половину составляет внутриузловой трафик). Таким образом, ясно, что определение наиболее популярного пункта неоднозначно. Тем не менее очевидно также, что любой пункт, увеличивая внутриузловой трафик, может превратить себя в самый популярный пункт сети.

Рассмотрим теперь поведение γ , λ и других аналогичных глобальных параметров сети в зависимости от времени. На фиг. 6.26 показана средняя (за час) скорость (измеряемая числом сообщений в секунду), с которой генерируются сообщения машин HOST; она дает представление о том, когда сеть выполняет работу. Поведение трафика очень естественно; наблюдается увеличение трафика в дневное время и рабочие дни недели. Интересно, что в понедельник трафик заметно выше, чем в другие рабочие дни недели (возможно, пользователи чувствовали вину или проявляли беспокойство за снижение активности в выходные дни). Заметим, что истинно мировая сеть, охватывающая многие часовые пояса, видимо, сможет использовать эти часовые и суточные периоды снижения активности.

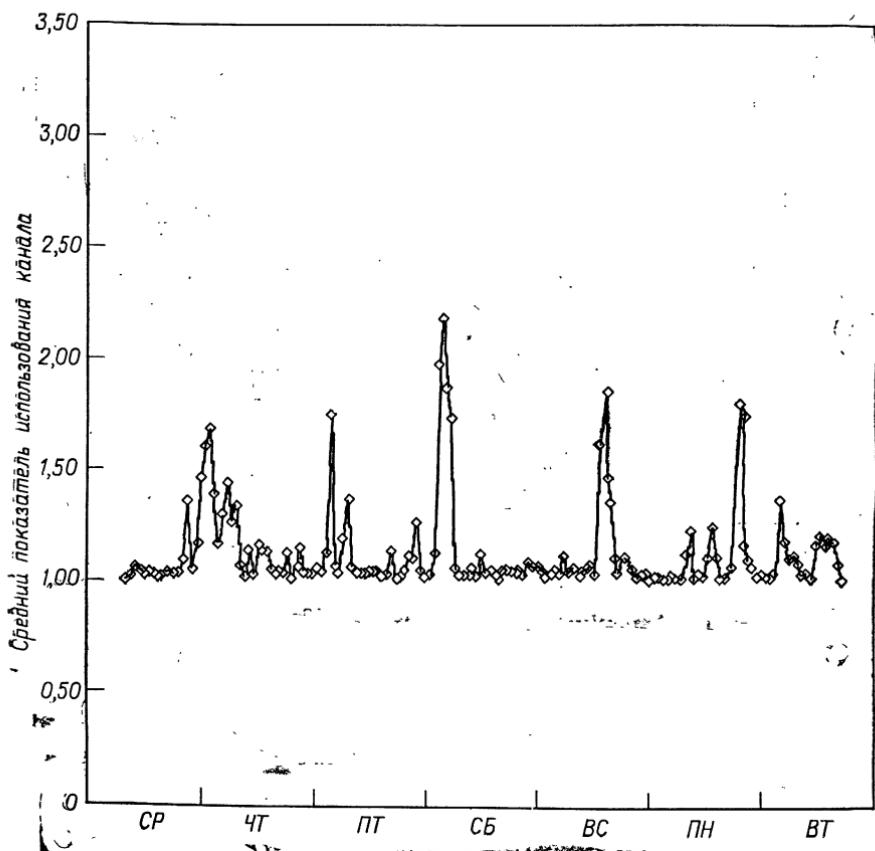
На фиг. 6.27 иллюстрируется изменение показателя использования сети в зависимости от времени; показано поведение среднего числа пакетов на сообщение. Пики относятся к тем часам, когда преимущественно имела место передача файлов, а не диалоговый трафик. Эти пики в основном расположены у точек, отделяющих сутки (подобный эффект заметен для внутриузлового трафика). Видимо, пользователи чувствуют, что поздно ночью они полу-



Фиг. 6.26. Интенсивность поступления сообщений от машин HOST.

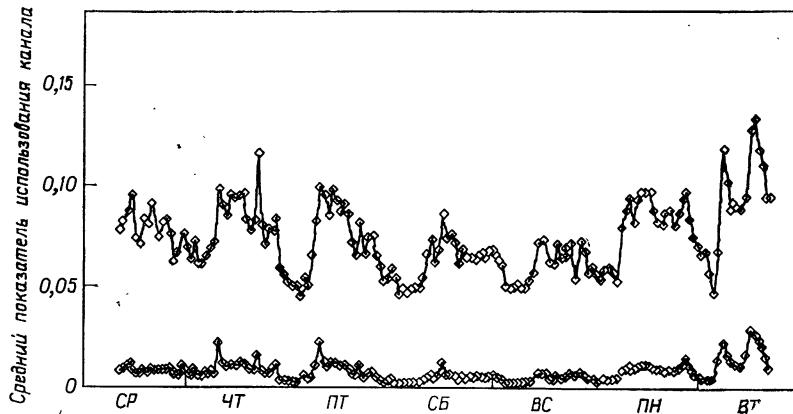
чат большую надежность или лучшее обслуживание со стороны машины HOST, или, возможно, фоновая передача файлов имеет место все время, но становится заметной, только когда диалоговые пользователи спят.

Внутренний трафик в каналах служит одной из мер эффективности конструкции сети и ее использования. На фиг. 6.28 показан показатель использования канала, усредненный по всей сети на часовой основе, с учетом и без учета избыточности (которая возникает из-за трафика обновления маршрутов и др.). Низкий показатель использования (среднее значение за неделю которого равно 0,071 при включении избыточности и 0,0077 без ее включения) показывает, что линии в сети обладают в среднем большим избытком пропускной способности (который необходим для пиковых нагрузок). Максимальная часовая нагрузка линии (усредненная по всем каналам) была приближенно равна 13,4% (она возникла за 5 ч до конца измерений) и соответствовала внутреннему потоку в сети, превышающему 600 кбит/с; без учета избыточности максимальный часовой показатель использования приближенно равнялся 2,8% (129 кбит/с для внутреннего потока). Интересно проследить



Фиг. 6.27. Часовое изменение числа пакетов на сообщение.

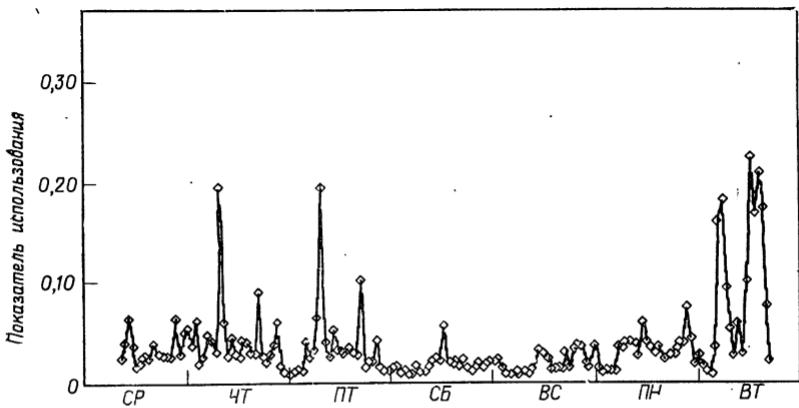
за наиболее загруженной линией для каждого часа. Результаты этих наблюдений представлены на фиг. 6.29а и фиг. 6.29б. Заметим в связи с фиг. 6.29б, что наиболее занятая линия (из узла HARVARD в узел ABERDEEN) в час наибольшей нагрузки имела показатель использования, равный 0,48; в случае когда избыточность не учитывалась, наиболее занятая линия (от узла GWC к узлу CASE) имела в час наибольшей нагрузки показатель использования, равный 0,225. Часовые нагрузки этих каналов в течение семи дней показаны на фиг. 6.30. Отметим, насколько сильно было группирование трафика в этих линиях (несмотря на усреднение в течение часа). Еще одной интересной линией является линия, которая имела максимальную среднюю за неделю нагрузку. Если пренебречь обновлениями маршрутов и всей другой избыточностью, то получим, что наибольшая нагрузка за семь дней (0,017)



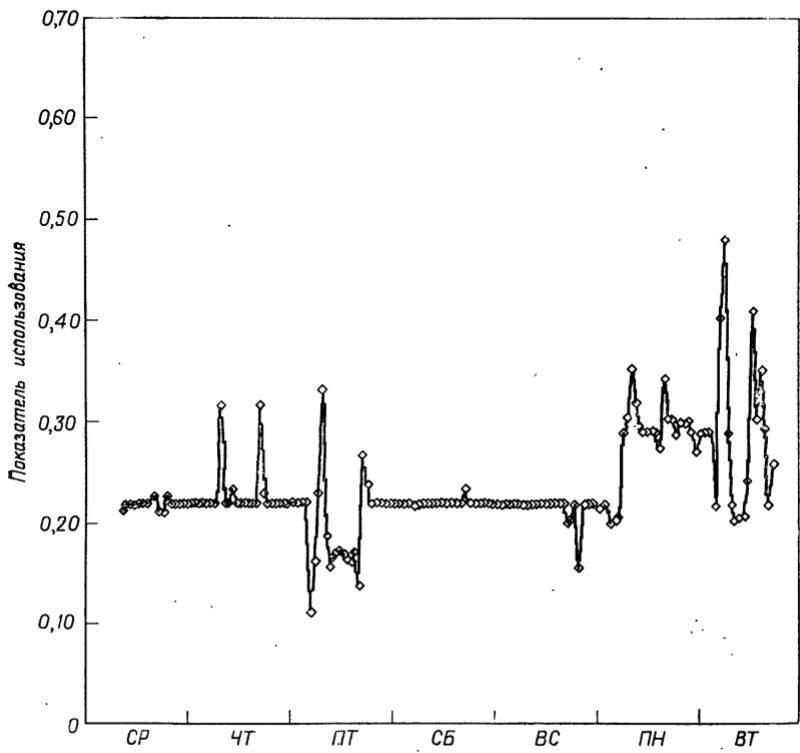
Фиг. 6.28. Часовое использование линий для всей сети.

была в канале от узла ISI к узлу RML. Часовое поведение этого канала показано на фиг. 6.31а; опять можно заметить группирование избыточности. Если избыточность включить в полезную нагрузку, то наибольший средний за семь дней показатель использования будет иметь спутниковый канал в Норвегию (от узла SDAC к узлу NSAT). Этот канал обладает пропускной способностью лишь 7,2 кбит/с, и, следовательно, если подвести к нему весь трафик, то он почти в семь ($50/7,2$) раз превысит допустимую нагрузку канала (в этом случае приблизенно 2 кбит/с, или 28% пропускной способности этой линии, использовалось лишь для обновления маршрутов). Фиг. 6.31б иллюстрирует часовое поведение этого канала. Здесь же показано состояние включено/выключено (т. е. линия работает/линия не работает) для этой линии (для каждого из двух направлений)¹⁾. Заметим, что канал действовал в двух направлениях в течение небольшой доли времени измерений (главным образом в понедельник) и лишь в это время он передавал свои собственные обновления маршрутов, а также ответы «я вас слышу» на обновления маршрутов, относящиеся к каналу от NSAT к SDAC; это давало упомянутую выше избыточность 28%. Канал был выключен (не работал) большую часть пятницы; в это время

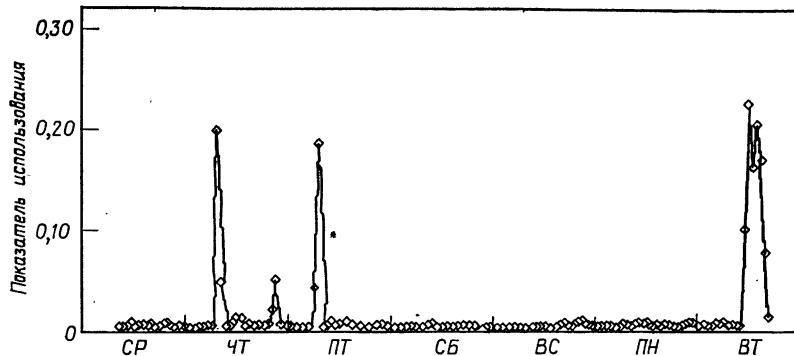
¹⁾ Наши измерения в действительности дают состояние включено/выключено для процессоров IMP, наблюдаемых из центра NMC. Когда узел NSAT был недоступен (т. е. отсутствовал пакет «я вас слышу»), канал от NSAT к SDAC показан выключенным; аналогично канал от SDAC к NSAT (и от NSAT к SDAC) показан выключенным, когда узел SDAC объявлялся включенным. На самом деле когда полнодуплексный канал (или узел на одном конце) выключается, он выключается одновременно для двух направлений, но попытки передачи обновляющих маршрутную информацию сообщений (т. е. тест-сигналов «калло») продолжаются так, как будто бы канал включен.



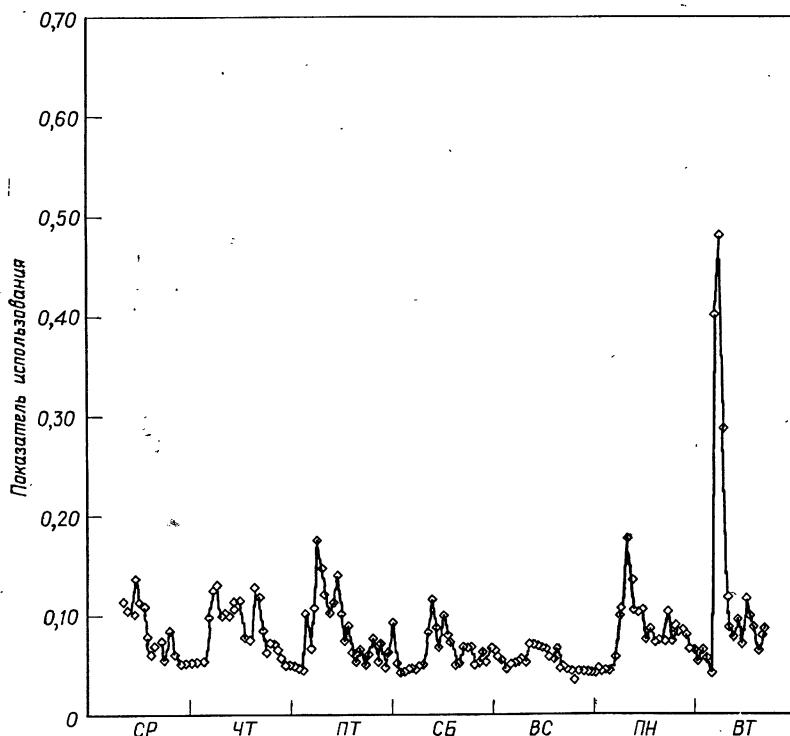
Фиг. 6.29а. Использование наиболее загруженного канала для каждого часа (без учета избыточности).



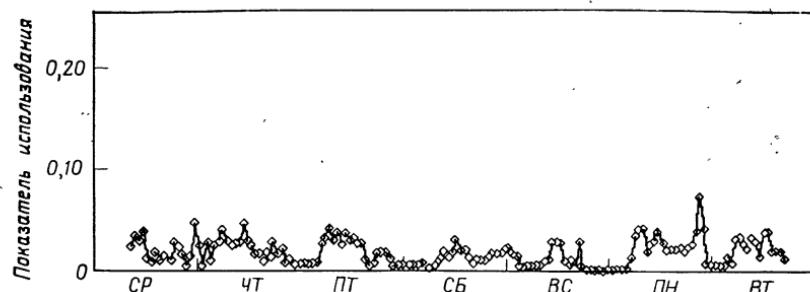
Фиг. 6.29б. Использование наиболее загруженного канала для каждого часа (с учетом избыточности).



Фиг. 6.30а. Использование канала (от GWC к CASE) с наибольшей часовой средней нагрузкой (без учета избыточности).



Фиг. 6.30б. Использование канала (от HARVARD к ABERDEEN) с наибольшей часовой средней нагрузкой (с учетом избыточности).



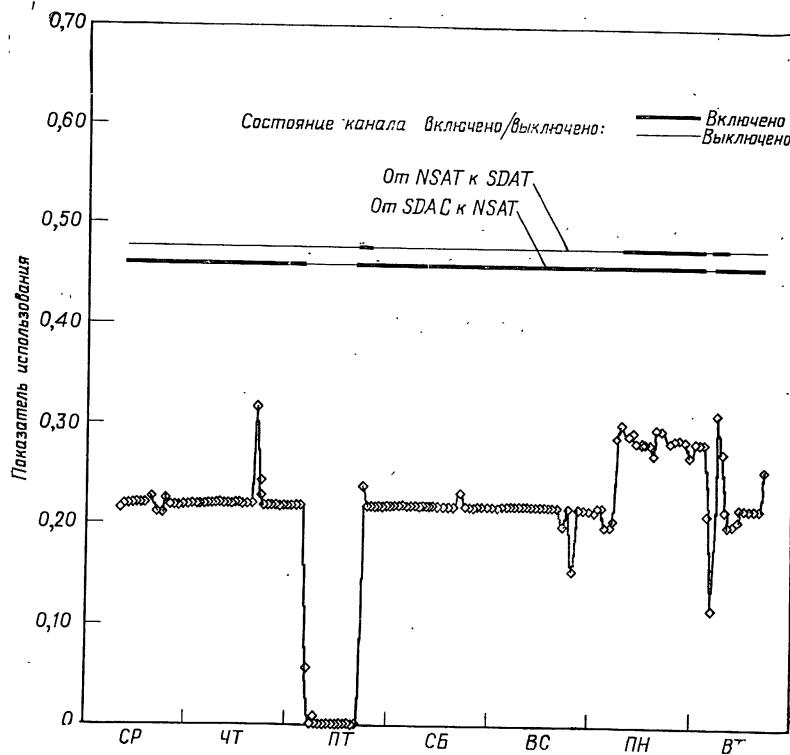
Фиг. 6.31а. Использование канала (от ISI к RML) с наибольшей семидневной средней нагрузкой (без учета избыточности).

он не передавал никакого трафика. В остальное время этой недели (почти всю неделю) был выключен канал от NSAT к SDAC, так что в канале от SDAC к NSAT не было сделано ни одной записи сигнала «я вас слышу»; это показано на фиг. 6.31б.

За малыми исключениями, каналы в сети работают очень надежно. Средняя интенсивность ошибочных пакетов характеризовалась одной ошибкой в 12 880 переданных пакетах. Из 86 каналов сети 14 каналов доложили о том, что ошибок за семь дней не было, и лишь шесть каналов имели интенсивность ошибочных пакетов, большую, чем одна ошибка на 1000 пакетов. Наихудшим был канал от узла RAD—TIP к узлу LINCOLN, в котором была одна ошибка на 340 пакетов. Эти ошибки не ухудшали характеристику сети, так как при передаче предусмотрены обнаружение ошибок и повторение (это упоминалось выше). На фиг. 6.32 показано число каналов с данной частотой ошибок по результатам семидневного эксперимента. (Усредненная за последние четыре года и по всем каналам частота полного отключения канала была очень близка к одному проценту.) Конечно, нужно учесть частоту повреждений процессоров IMP, но измерения в течение семи дней не дают возможности это сделать. Поэтому на фиг. 6.33 показана надежность процессоров IMP в течение 19-месячного периода с июня 1972 г. по декабрь 1973 г. [72]. Средняя частота отключения процессоров IMP равнялась 1,64 %, в худшем случае частота составляла 9,13 %.

Вернемся теперь опять к рассмотрению средней задержки сообщения. На фиг. 6.34 показано часовое поведение измерений задержки. Минимальное значение приближенно равно 20 мс (оно получалось, когда внутриузловой трафик был выше 80%; см. фиг. 6.21), а максимальное значение приближенно составляет 325 мс¹⁾. Напомним, что среднее за семь дней значение было равно 93 мс.

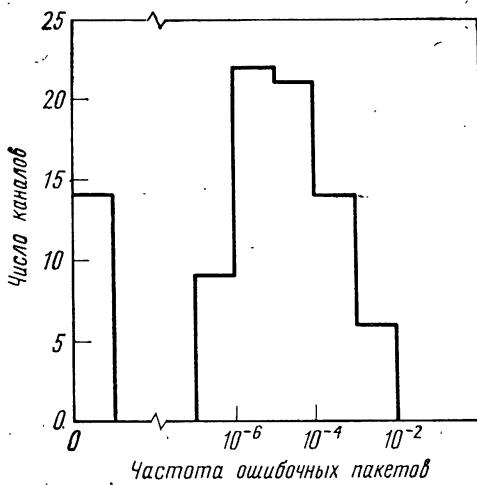
¹⁾ Это не нарушает требование к системе обеспечивать задержку, меньшую 200 мс для диалогового трафика, так как из фиг. 6.27 видно, что в это время в трафике преобладали мультипакетные сообщения.



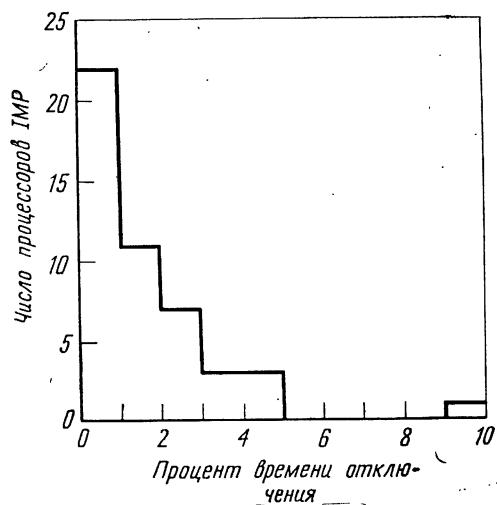
Фиг. 6.316. Использование канала (от SDAC к NSAT) с наибольшей семидневной средней нагрузкой (с учетом избыточности).

Можно поинтересоваться, насколько хорошо предсказывает поведение задержки, показанной на фиг. 6.34, модель для задержки в сети, которая разработана в разд. 5.6. Обобщим эту модель так, чтобы она подходила для описания сети ARPANET. После обобщения этой модели проведем сравнение предсказываемой и измеренной задержек.

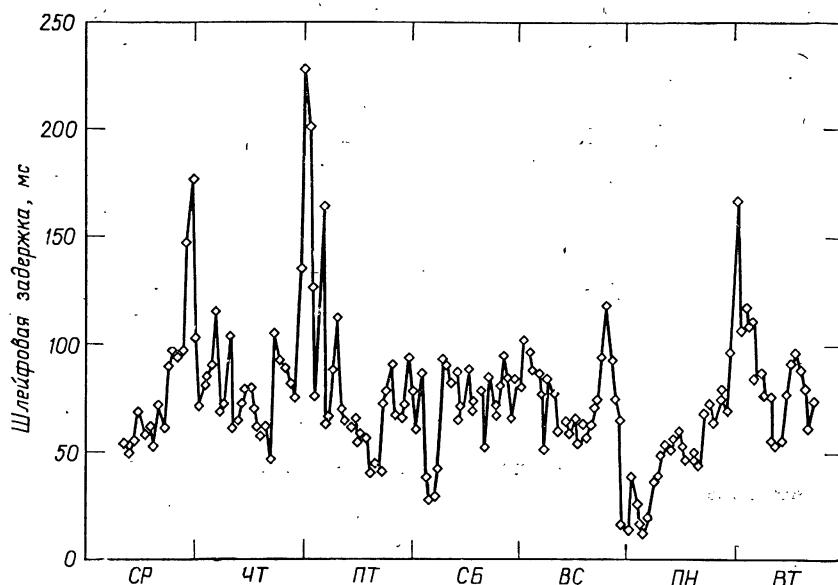
Исходным для нашего рассмотрения является равенство (5.20). Как и ранее, нужно принять во внимание трафик управления (как и трафик данных), который влияет на время пребывания в очередях. Таким образом, определим λ'_i — среднюю интенсивность поступления всех сообщений (данные плюс управление) в i -й канал. Кроме того, отбросим предположение, что время обработки одно и то же для всех узлов; включим также в рассмотрение время передачи от адресатного процессора IMP к адресатной машине HOST. В результате получим следующее выражение для средней задержки T_{SP} однопакетного сообщения:



Фиг. 6.32. Число каналов с данной частотой ошибок по результатам семидневного эксперимента.



Фиг. 6.33. Надежность процессоров IMP по результатам 19-месячных измерений (июнь 1972 — декабрь 1973).



Фиг. 6.34. Измеренная средняя задержка сообщения.

$$T_{SP} = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \left[\frac{\lambda'_i / \mu' C_i}{\mu' C_i - \lambda'_i} + \frac{1}{\mu C_i} + P_i + K_i \right] + \\ + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma \cdot i}{\gamma} \left(K_j + \frac{1}{\mu_H C_{Hj}} \right), \quad (6.1)$$

где K_i — время обработки пакета в узле i (i — начальный узел канала i), γ_j — средняя интенсивность ухода сообщений из сети в машину HOST в пункте j , а $1/\mu_H C_{Hj}$ — среднее время передачи сообщений к машине HOST в пункте j .

Представленная формула предполагает трафик однопакетных сообщений, а в сети ARPANET сообщения разбиваются на несколько (до 8) пакетов. Рассматриваемая модель допускает следующее обобщение, дающее среднюю задержку мультипакетного сообщения T_{MP} [3, 11, 19]. Рассмотрим сначала τ_{jk} — среднее время между моментами поступления (к адресату) пакетов сообщения, идущего от источника j к адресату k . Трудно измерить τ_{jk} для каждой пары (j, k) в сети. Поэтому воспользуемся приближением [3], из которого следует

$$E[\tau(n \text{ участков})] \approx \frac{\rho(1 - \rho^{n-1})}{1-\rho} S_F(n).$$

Это равенство дает выражение для математического ожидания величины τ_{jk} для узлов j и k , разделенных n участками. Оно подразумевает, что 1) показатель использования канала ρ_i для всех каналов на пути от j к k постоянен и равен ρ , 2) путь является единственным и 3) $S_F(n)$ — среднее время передачи полного пакета по каждому из n каналов пути. Найдем теперь приближение для усредненного по всей сети среднего времени между пакетами $\bar{\tau}$. Средний коэффициент использования канала $\bar{\rho} = \lambda/\mu C M$. Время передачи полного пакета, усредненное по всем каналам сети, равно

$$\bar{S}_F = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{1}{\mu_F C_i},$$

где $1/\mu_F$ — длина полного пакета. Теперь получается следующее приближение для $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} \approx \bar{\rho} \left(\frac{1 - (\bar{\rho})^{n-1}}{1 - \bar{\rho}} \right) \bar{S}_F.$$

Предполагая далее, что последние пакеты мультипакетных сообщений имеют такую же длину, что и однопакетные сообщения, для средней задержки мультипакетного сообщения получаем

$$\begin{aligned} T_{MP} &= \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \left[\frac{\lambda'_i / \mu' C_i}{\mu' C_i - \lambda'_i} + \frac{1}{\mu_F C_i} + P_i + K_i \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\lambda} \left[(\bar{m} - 2) \frac{1}{\mu_F C_i} + \frac{1}{\mu C_i} \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^M \frac{\gamma \cdot j}{\gamma} \left(K_j + \frac{1}{\mu_{FH} C_{Hj}} \right) + (\bar{m} - 1) \bar{\tau}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $1/\mu_{FH} C_{Hj}$ — время передачи полного пакета к машине HOST в пункте j .

Пусть β обозначает долю полного числа сообщений, которую составляют однопакетные сообщения. Тогда получаем окончательное выражение для средней задержки сообщения в сети:

$$T = \beta T_{SP} + (1 - \beta) T_{MP}. \quad (6.3)$$

Мерой задержки, учитывающей действие процессоров IMP, является шлейфовая задержка. Поэтому для того, чтобы сравнить модель с измерениями, нужно получить выражение для шлейфовой задержки (т. е. мы должны включить в модель среднюю задержку T_{RFNM} квитанции RFNM). Квитанию RFNM можно рассматривать как однопакетное сообщение, идущее от адресата к источни-

ку. Таким образом, она получает задержку однопакетного сообщения T_{SP} при соответствующем значении μ и без члена, относящегося к передаче к машине HOST,

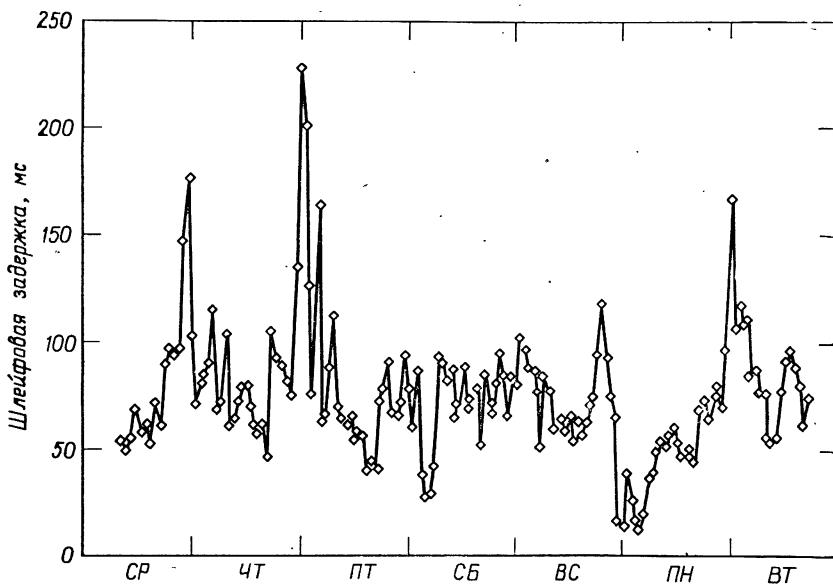
$$T_{RFNM} = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_{Ri}}{\gamma} \left[\frac{\lambda'_i/\mu' C_i}{\mu' C_i - \lambda'_i} + \frac{1}{\mu_R C_i} + P_i + K_i \right] + \\ + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{\gamma} (K_j),$$

где λ_{Ri} — средняя интенсивность поступлений квитанций RFNM в i -й канал, $1/\mu_R$ — длина квитанции RFNM, а γ_j — средняя интенсивность ухода квитанций RFNM из сети к машинам HOST в пункте j (которая равна средней интенсивности поступлений сообщений в сеть от машин HOST пункта j).

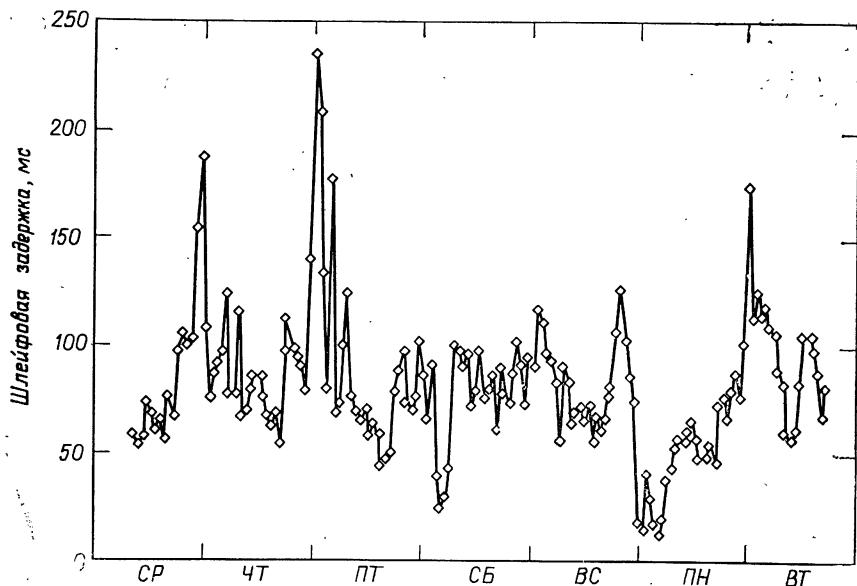
Таким образом, выражение для средней шлейфовой задержки T_R принимает вид

$$T_R = T + T_{RFNM}. \quad (6.4)$$

В семидневном эксперименте сначала была найдена задержка T_R при нулевой нагрузке; для нее получено $T_R = 69$ мс; часовые изменения этой величины показаны на фиг. 6.35. (Причиной этих изменений во времени является сдвиг в совокупном трафике между



Фиг. 6.35. Вычисленная средняя задержка сообщения (при нулевой нагрузке).



Фиг. 6.36. Средняя задержка сообщения от машин (при измеренной нагрузке).

источником и адресатом.) Эта задержка соответствует случаю, когда λ_i и γ стремятся к нулю (но их отношение для каждого i остается неизменным). Это приводит к нулевому среднему времени, проведенному в очереди. Задержка при нулевой нагрузке должна быть меньше, чем измеренное значение; результаты измерений приведены на фиг. 6.34. Заметим, что в сети почти не наблюдается эффект перегрузки. Кроме того, на фиг. 6.36 показано часовое изменение T_R (для этого графика среднее за семь дней $T_R = 73$ мс) при действующей (измеренной) нагрузке.

Представленная выше модель довольно сложная, причем ее сложность главным образом связана с тем, что не всем каналам (или процессорам IMP) нужно иметь одну и ту же скорость. Кроме того, члены, относящиеся к времени ожидания, имеют сложные выражения и представляют ту часть модели, которая вызывает больше всего сомнений (а именно часть, связанную с марковскими предположениями). Однако, как видно из фиг. 6.35 и 6.36, результаты, полученные при нулевой и измеренной нагрузках, близки друг к другу. Таким образом, влияние времени ожидания пре-небрежимо мало и любой отход от марковских к более реальным предположениям даст непренебрежимо малые изменения T в сети с небольшой нагрузкой. Это приводит к следующей более простой модели (с нулевой нагрузкой) для оценки T_R , которая аналогична пороговой модели, представленной на фиг. 5.24. Выражение для

T_{SP} (и T_{RFNM} , которое похоже по виду) упрощается путем отбрасывания членов, относящихся к времени ожидания, а также установления всех K_i равными K , всех C_i равными C ($C=50$ кбит/с) и всех C_{Hj} равными C_H ($C_H=10$ кбит/с). В результате получаем

$$\hat{T}_{SP} = \bar{n} \left(\frac{1}{\mu C} + K \right) + \frac{1}{\mu_H C_H} + \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} P_i \quad ■ (6.5)$$

(аналогичное выражение справедливо для \hat{T}_{RFNM}). Все параметры, кроме последней суммы, легко вычисляются. Для вычисления суммы нужно оценить (или измерить) трафик канала λ_i и скорость передачи сети γ . Времена распространения P_i являются известными постоянными. С этими упрощениями (и в предположении $\beta=1$, так как измеренное значение β равнялось 0,96) получаем следующее приближение:

$$\hat{T}_R = \hat{T}_{SP} + \hat{T}_{RFNM}.$$

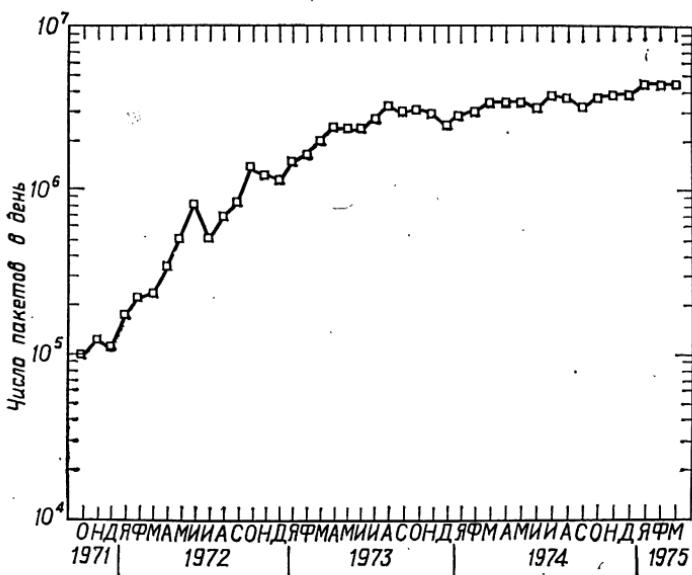
Наши вычисления дают $\hat{T}_R=70$ мс¹⁾, что является отличным приближением к ранее указанным значениям: $T_R=69$ мс (при нулевой нагрузке) и $T_R=73$ мс (при измеренной нагрузке).

Вместе с тем измеренное значение $T_R=93$ мс значительно выше, чем оценка из модели $T_R=73$ мс при учете измеренной нагрузки. Это различие возникает из-за того, что модель не учитывает задержку адресатной машиной HOST принятия сообщения, задержку, связанную с требованием резервирования места в памяти в адресатном процессоре IMP, задержку из-за ошибок, повторных передач и циклов в маршрутах, более тонкие изменения во времени коэффициента ρ , которые не улавливаются используемыми выше часовыми вычислениями, а также из-за того, что модель не использует точные значения P_i и более реальные немарковские предположения. Учет всех перечисленных выше факторов, которыми модель пренебрегает (кроме, возможно, последнего), приведет к увеличению T_R .

Большая часть представленных в этом разделе результатов измерений относится лишь к одной заданной неделе в августе 1973 г. Картина трафика изменяется с изменением сети, так что названия пунктов и их активность не обязательно остаются теми же при рассмотрении сети на более длительном периоде. Тем не менее *феномены*, которые были рассмотрены, присутствуют в сети (и изменяются более медленно).

Для того чтобы показать, как возрастал трафик в сети за последние 3,5 года, на фиг. 6.37 представлена зависимость среднего

¹⁾ При отыскании \hat{T}_R считалось, что $\bar{n}=3,31$, $1/\mu C=8,2$ мс, $K=0,75$ мс, $1/\mu_M C_H=2,75$ мс; сумма, учитывающая времена распространения, равна 11,4 мс и $1/\mu_R C=3,36$ мс.



Фиг. 6.37. Увеличение трафика сети.

числа пакетов, входящих в сеть в день, от времени начиная с октября 1971 г. [22]. Можно заметить, что трафик возрастал с довольно постоянной скоростью в течение первых полутора лет и затем достиг уровня $\sim 4,5$ млн. пакетов в день, который не менялся до марта 1975 г. (Этот трафик не включает внутриузловой трафик; если внутриузловой трафик включить, то для марта 1975 г. получим более 6 млн. пакетов в день.) При приближении к пропускной способности подсети связи (которая в настоящий момент приближенно равна 10 млн. пакетов в день) нужно расширять саму подсеть и вычислительную сеть машин HOST для обеспечения соответственно связи и средств обработки, которые будут затребоваться по сети.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению избыточности в сети ARPANET и ее влиянию на скорость передачи.

6.7. ИЗБЫТОЧНОСТЬ В ЛИНИЯХ СЕТИ ARPANET

Известно, что выбор управляющих знаков, управляющих сообщений и функций управления является одним из наиболее важных моментов проектирования сетей ЭВМ. Более разработанные процедуры управления или протоколы должны приводить к более слаженному и надежному обмену данными в хорошо спроектированной сети. Однако, как в любой сложной операционной системе, существует некоторый предел сложности процедур управления;

этот предел определяется величиной избыточности, вносимой процедурами управления. Выше некоторой границы увеличение избыточности становится слишком большим и не оправдывает введение дополнительной сложности с целью увеличения обслуживания (выше уже были рассмотрены случаи, в которых более сложное управление приводило к ухудшению системы). Следовательно, важно тщательно анализировать характеристики избыточности данной системы. Избыточность в линиях сетей связи критически зависит от характеристик передаваемых сообщений [21]. При передаче некоторого заданного числа бит данных использование большего числа малых сообщений приводит к большей избыточности, чем использование малого числа больших сообщений. Поэтому пропускная способность линий и протокол должны выбираться с учетом характеристик ожидаемого обмена сообщений.

Определим избыточность в линии как множество всех переданных знаков, не являющихся знаками, которыми обмениваются процессы пользователей, происходящие в присоединенных к сети машинах HOST. Процесс пользователя определяется здесь как любой процесс, который использует вызовы в системе, обеспечиваемые управляющей программой сети (NCP). Это определение процесса пользователя позволяет исключить из рассмотрения некоторую избыточность высокого уровня. Например, процесс, управляющий передачей файлов, создает управляющие сообщения, которые входят в полную избыточность. Однако подсеть связи не распознает эти высокоуровневые управляющие сообщения как таковые и поэтому они исключаются из нашего рассмотрения. Ниже описывается избыточность, вносимая лишь протоколами подсети связи и протоколом HOST — HOST. В этом разделе рассматривается вариант 2 системы с модификацией, состоящей в добавлении одного 16-битового процессорного (IMP) слова, которое далее было использовано в варианте 3.

Избыточность в линии сети ARPANET может быть разбита на следующие четыре категории:

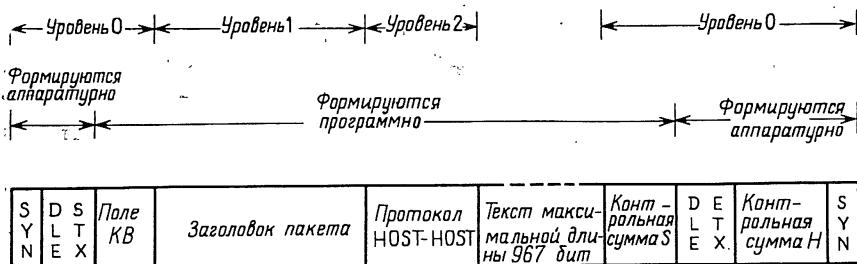
1. Избыточность уровня 0. Управление передачей пакетов между смежными процессорами IMP.
2. Избыточность уровня 1. Управление сообщениями в подсети связи, т. е. управление передачей между источниковым и адресатным процессорами IMP.
3. Избыточность уровня 2. Управление сообщениями между машинами HOST.
4. Избыточность фонового трафика. Маршрутные сообщения, сообщения о состоянии линий, проверки состояний.

В табл. 6.1 дается детальное объяснение избыточности в линии на всех трех уровнях связи и для фонового трафика. На фиг. 6.38 показан формат однопакетного сообщения пользователя. Как вид-

Таблица 6.1

Классификация избыточности в линии

Категория	Название	Число бит	Описание
Уровень 0	SYN	16	Два формируемыми аппаратурами средствами синхронизацией
	DLE/STX DLE/ETX	32	Четыре формируемыми аппаратурами средствами управляющих знака для разграничения сообщений
	Контрольная сумма Н	24	Формируемая аппаратурами средствами контрольная сумма
	Заголовок квитанции	16	Формируемое программными средствами управляющее слово, переносящее биты квитанции
	Контрольная сумма S	16	Формируемая программными средствами контрольная сумма
Уровень 1	Заголовок пакета	80	Пять 16-битовых слов пакетного заголовка в каждом неуправляющем сообщении
	Управление в подсети	64	Четыре слова для каждого подсетевого управляющего сообщения (см. табл. 6.2)
Уровень 2	Протокол HOST—HOST	40	Избыточность на сообщение, определяемая протоколом HOST—HOST
	Управление HOST—HOST	93,5 в среднем	Сообщения различной длины для управления трафика HOST—HOST (см. табл. 6.3)
ФОН	Маршрутные сообщения	1160	Маршрутные сообщения, посылаемые через каждые 640 мс (включают избыточность уровней 0 и 1)
	«Я вас слышу»	152	Сообщения «я вас слышу», посылаемые через каждые 640 мс для определения состояния линии включено/выключено (включают избыточность уровней 0 и 1)
	Проверка состояний	1728 (-336 бит для двух RFNM)	Проверки состояний (2 пакета), посылаемые через каждые 52,4 с в Центр управления сети (NCC) (включают избыточность уровней 0 и 1)



Фиг. 6.38. Формат однопакетного сообщения пользователя.

но, имеется девять формируемых аппаратурными средствами знаков для каждого передаваемого пакета. Кроме того, имеются 16 бит для подтверждения передачи от IMP к IMP и 16 бит для контрольной суммы (используемой программными средствами), которые входят в избыточность уровня 0. Фактически избыточность на один передаваемый пакет данных в варианте 3 равна 184 бит (и на один хранящийся пакет равна 192 бит), а квитанции RFNM имеют 168 бит; эти величины на 16 бит больше, чем аналогичные величины в варианте 2 (см. стр 494).

Избыточность уровня 1 в линии состоит из двух частей: 80 бит для пакетного заголовка каждого сообщения пользователя и 64 бит для каждого управляющего сообщения подсети связи. Эти 80 бит заголовка пакета используются не только для управления сообщениями в подсети. Имеется, например, поле идентификаций сообщения, которое проходит без изменения от источников машины HOST до адресатной машины HOST и поэтому может рассматриваться как входящее в состав избыточности уровня 2 в линии. Однако для простоты все 80 бит заголовка пакета относятся здесь к избыточности уровня 1.

Избыточность уровня 2 в линии также состоит из двух частей: 40 бит для расширенного заголовка протокола HOST—HOST¹⁾ и в среднем 93,5 бит для каждого управляющего HOST—HOST сообщения, наблюдаемого в подсети связи с помощью механизма трассировки пакетов. (Холостыми битами мы пренебрегаем.) Будем предполагать, что все сообщения подчиняются официальному протоколу HOST—HOST (хотя известно, что используются и дру-

¹⁾ Эти 40 бит часто рассматриваются как часть текста (с точки зрения подсети связи); таким образом, максимальная длина текста составляет $967 + 40 = 1007$ бит и избыточность в линии равна 184 (девять формируемых аппаратурными средствами знаков плюс 16 бит квитанции, плюс 16 бит контрольной суммы, используемой программными средствами, плюс 80 бит заголовка пакета); см. фиг. 6.38.

гие частные протоколы; к ним относится лишь очень малая доля полного трафика).

Фоновый трафик состоит главным образом из маршрутных сообщений, которыми обмениваются все смежные пары процессоров IMP не реже чем через 640 мс (для линий 50 кбит/с). Сообщения «я вас слышу», которые посылаются для тестирования состояния телефонных линий и проверки состояний (состояния посылаются каждым процессором IMP через 52,4 с в центр управления сети (NCC)), составляют намного меньшую долю фонового трафика. Так как фоновый трафик предполагается независимым от нагрузки сети, избыточность уровней 0 и 1 фоновых сообщений причисляется к избыточности в линии для фонового трафика. Такое распределение избыточности в линии облегчит проводимые ниже вычисления.

Семидневные измерения в мае 1974 г. показали, что почти 50% всех пакетов, передаваемых по сети ARPANET, были управляющими сообщениями подсети связи. Список всех управляющих сообщений подсети, их частоты появления и функции приведены в табл. 6.2. Относительная частота управляющих сообщений подсети была определена с помощью измерительных средств процессоров IMP, участвующих в трассировке пакетов. С помощью этого механизма трассировки пакетов была произведена выборка около 75 000 подсетевых управляющих сообщений из 35 различных процессоров IMP в различное время суток и в различные дни недели. Данные табл. 6.2 представляют собой средние числа по всем этим выборкам. Хотя это и не показано в таблице, отклонения отдельных выборок от средних значений были очень малыми. Квитанции RFNM для однопакетных сообщений представляют самую большую и далеко отстоящую от других долю подсетевых управляющих сообщений. Это не удивительно, потому что, как было показано, около 96% входящих в сеть сообщений являются однопакетными. Интересно отметить, что мы никогда не наблюдали квитанцию RFNM для мультипакетного сообщения, которая дополнительно не переносила бы извещение ALL. Это значит, что имелось такое доступное компоновочное буферное пространство, что для следующей передачи почти во всех случаях восемь пакетов могли быть зарезервированы в течение односекундного тайм-аута после принятия адресатной машиной HOST первого пакета мультипакетного сообщения.

Если бы наш выборочный метод был совершенным, то доли сообщений REQALL, ALL-M и GVB были бы равными. Это является следствием того, что каждое требование рано или поздно удовлетворяется, а каждое резервирование, возможно, после повторных использований возвращается (см. фиг. 6.11). Величины, на которые эти доли отличаются, дают представление о точности выборочного метода. Из табл. 6.2 видно, что чуть больше 50% всех входящих

Таблица 6.2

Подсетевые управляющие сообщения

Название	Процент от общего числа сообщений	Функция
RENM-S	88,77	Посыпается от адресатного процессора IMP к источниковому процессору IMP для сигнализации о правильном приеме <i>однопакетного</i> сообщения
RFNM-M	0,00	Посыпается от адресатного процессора IMP к источниковому процессору IMP для сигнализации о правильном приеме <i>мультипакетного</i> сообщения
ALL-S	3,98	Посыпается от адресатного процессора IMP к источниковому процессору IMP для сигнализации о <i>резервировании</i> одного буфера для <i>однопакетного</i> сообщения
REQALL	1,09	Посыпается от источникового процессора IMP к адресатному процессору IMP с <i>требованием зарезервировать</i> восемь буферов для <i>мультипакетного</i> сообщения
ALL-M	1,19	Посыпается от адресатного процессора IMP к источниковому процессору IMP для сигнализации о <i>резервировании</i> восьми буферов для <i>мультипакетного</i> сообщения
GVB	1,04	Посыпается от источникового процессора IMP к адресатному процессору IMP, чтобы <i>возвратить</i> неиспользованные зарезервированные буфера, которые были получены с помощью RFNM-ALL
RFNM-ALL	2,35	Объединенный результат действия RFNM-M и ALL-M; резервирование для следующего мультипакетного сообщения, дополнительно навешенное на RFNM для предыдущего сообщения
INCTRANS	1,13	<i>Незаконченная передача</i> сообщения; посыпается от адресатного процессора IMP к источниковому процессору IMP для каждого сообщения, которое нельзя правильно доставить его адресатной машине HOST
DESTDEAD	0,46	Посыпается от адресатного процессора IMP к источниковому процессору IMP для каждого сообщения, которое было послано к <i>отключенной</i> адресатной машине HOST

в сеть ARPANET мультипакетных сообщений не нуждаются в *затребовании* резервирования буферов в адресатном процессоре IMP, так как такое резервирование уже ждет своего использования в источниковом процессоре IMP. Иначе говоря, чуть меньше 50% всех дополнительно навешенных ALL не используются источником процессором IMP и после тайм-аута 250 мс возвращаются в адресатный процессор IMP. Это значит, что доля мультипакетных сообщений, которые должны ждать необходимого резервирования буферов, много больше величины, на которую можно было бы рассчитывать при обеспечении высокой скорости передачи. Имеются два возможных объяснения этого: 1) передача файлов, которая требует длинную последовательность мультипакетных со-

общений, относительно нечаста; 2) интервал тайм-аута 250 мс слишком мал по сравнению с временем реакции машины HOST.

Большое число извещений ALL для однопакетных сообщений согласуется с результатами наблюдений, представленными в работе [29]; так как процессоры IMP, очевидно, не испытывают недостатка в компоновочных буферах, все эти извещения ALL обязаны однопакетным сообщениям, которые прибывают с нарушением порядка к их адресатным процессорам IMP. Доля извещений ALL для однопакетных сообщений в последнее время уменьшилась из-за того, что программа процессора IMP недавно была модифицирована так, что непрерывная повторная передача однопакетных сообщений стала невозможной.

Удивительно большую долю подсетевых управляющих сообщений составляют INCTRANS, которые сигнализируют источниковой машине HOST, что сообщение не могло быть правильно доставлено ее адресатной машине HOST. Из табл. 6.2 видно, что в среднем каждое сотое сообщение, которое входит в сеть ARPANET, не доходит до своего адресата. Причина этого нежелательного поведения состоит в том, что многие адресатные машины HOST не спешат с приемом сообщений. Процессор IMP объявляет машину HOST выключенной, если сообщение стоит более 30 с в выходной очереди к этой машине (от процессора IMP к машине HOST). При этом на каждое сообщение, стоящее в выходной очереди к машине HOST, назад посыпается управляющее сообщение INCTRANS. [Будущие сообщения, которые достигнут этого процессора после объявления, что машина HOST выключена, будут порождать управляющее сообщение DESTDEAD («адресат отключен»).] Частое появление незаконченных передач происходит поэтому не из-за неисправности подсети связи, а из-за неотзывчивости некоторых из присоединенных машин HOST¹⁾.

По сравнению с числом незаконченных передач число управляющих сообщений «адресат отключен» довольно мало. Эти сообщения DESTDEAD, по-видимому, формируются главным образом в случаях, когда какая-то машина HOST хочет выяснить, какие другие машины HOST в данный момент реагируют на трафик сети, и с этой целью посыпает зондирующее сообщение отключенными машинам HOST.

Механизм трассировки пакетов позволяет проводить различие между управляющими пакетами HOST—HOST и пакетами данных (а также подсетевыми управляющими пакетами). На основе наблюдения нескольких тысяч выборок был сделан вывод, что около 41% всех проходящих по сети пакетов HOST—HOST явля-

¹⁾ Например, так называемая программная остановка операционной системы TENEX, которая представляет собой необычное явление и из которой нельзя выйти без вмешательства оператора, обязана главным образом неотзывчивости машины HOST.

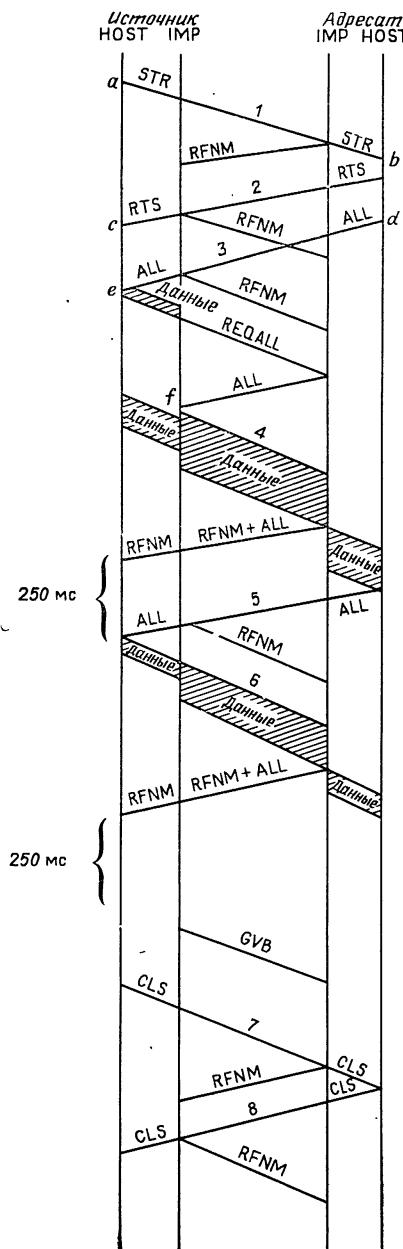
ются управляющими командами NCP (т. е. командами управляющей программы сети). Рассмотрим частоты посылки команд всех типов и определим, что нужно предпринять для снижения соответствующих избыточностей.

В табл. 6.3 представлен список управляющих команд, их длины, краткие описания и граничицы частот их передачи. Частоты управляющих команд HOST—HOST были получены из длин соответствующих управляющих сообщений, наблюдаемых в подсети связи. Так как этот метод не позволяет однозначно определить каждую управляющую команду, можно представить лишь верхнюю и нижнюю границы для частот их появления. Основной протокол HOST—HOST включает установление соединений (выполняемое путем обмена посылками STR и RTS) и снятие соединений (выполняемое путем обмена командами CLS). Кроме того, и это более существенно для данного рассмотрения избыточности, проводится резервирование буферного пространства в адресатной машине HOST; оно не отличается от процедуры резервирования между источниковым и адресатным процессорами IMP и выполняется с применением команд ALL, GVB и RET. На фиг. 6.39 показана последовательность управляющих команд уровней 1 и 2. В момент *a* команда STR формируется в источниковой машине HOST. Она проходит как однопакетное сообщение 1 от источникового процессора IMP к адресатному процессору IMP (который посыпает квитанцию RFNM назад к источниковому процессору IMP) и принимается адресатной машиной HOST в момент *b*. Команда RTS возвращается к источниковой машине HOST в момент *c* в виде сетевого сообщения 2. Между тем в момент *d* адресатная машина HOST резервирует некоторое буферное пространство в своей NCP-памяти (памяти, обеспечивающей действие программы NCP) и сигнализирует об этом с помощью команды HOST—HOST ALL, которая становится сетевым сообщением 3 и прибывает в источниковую машину HOST в момент *e*. Теперь начинается поток данных, который вызывает посылку сообщения REQALL по сети и возвращение в ответ подсетевого извещения ALL в источниковый процессор IMP в момент *f*. Это запускает поток данных (сообщение 4), который представляет собой мультипакетное сообщение с менее чем восьмью пакетами (из-за скучности команды ALL из адресатной машины HOST). К счастью, новая команда HOST—HOST ALL заправит механизм передачи до истечения тайм-аута 250 мс источникового процессора IMP, в течение которого действует подсетевое извещение ALL, и это запустит передачу остатка данных (сообщение 6). После второго управляющего сообщения RFNM+ALL источниковая машина HOST берет тайм-аут и источниковый процессор IMP возвращает последнее подсетевое извещение ALL (т. е. посыпает подсетевое управляющее сообщение GVB). Спустя какое-то время источниковая машина HOST снимает соеди-

Таблица 6.3

Управляющие команды HOST—HOST

Название	Длина, бит	Частота передачи, %	Функция
RTS	80	3,2—7,5	Отправляется от принимающей HOST к посылающей машине HOST для установления соединения
STR	80		Отправляется от посылающей машины HOST к принимающей машине HOST для установления соединения
CLS	72	3,2—7,5	Происходит обмен этой командой между принимающей машиной HOST и посылающей машиной HOST для снятия соединения
ALL	64	63,8—79,0	Отправляется от принимающей машины HOST к посылающей машине HOST для сигнализации о резервировании пространства для сообщений и бит. Посылающая машина HOST не может отправить больше сообщений или бит, чем разрешает зарезервированное для нее пространство в принимающей машине HOST
GVB	32	0—10,0	Отправляется от принимающей машины HOST как требование, чтобы посылающая машина HOST возвратила весь имеющийся в данный момент резерв или часть его
RET	64	0—10,0	Отправляется от посылающей машины HOST к принимающей машине HOST, чтобы возвратить весь резерв или часть его (ответ на GVB)
INR	16		Команда прерывания отправляется от принимающей машины HOST к посылающей машине HOST
INS	16		Команда прерывания отправляется от посылающей машины HOST к принимающей машине HOST
ECO	16		Эхо-команда, определяющая, есть ли в сети какие-либо другие машины HOST, готовые для диалога через сеть
ERP	16	1,2—7,3	Ответ на эхо-команду, возвращающий данные эхо-команды ее отправителю
RST	8		Команда для обновления записей в NCP-таблице
RRT	8		Ответ на команду RST
ERR	Максимум 96		Команда ошибки
NOP	8		Пустая операция



Фиг. 6.39. Управляющие команды уровня 1 и уровня 2.

нение (с помощью команды CLS, которая проходит по сети как сообщение 7), а адресатная машина HOST заканчивает диалог посылкой своей согласующей команды CLS (сообщение 8). На самом деле протокол несколько сложнее рассмотренного. Он включает более полный обмен командами RTS, STR и CLS, который позволяет установленным порядком присвоить номера виртуальной линии связи с помощью некоторой коллективно используемой линии, которая действует как связной посредник. Этот процесс называется протоколом начального соединения (ICP) [30].

Из данных измерений, приведенных в табл. 6.3, наиболее неожиданной представляется высокая частота передачи резервирующей команды ALL. Эта частота относится к характеристикам сети в целом. Рассмотрим значение этого факта. Хотя полнота использования пропускной способности линий сети не играет заметной роли из-за того, что, как было показано выше, в настоящее время на многом можно сэкономить, тем не менее мы покажем, как на доступную пропускную способность влияет размер резервирования в машине HOST. Это влияние явно заметно в случае, когда сообщение пользователя должно ожидать в посылающей машине HOST прибытия команды ALL из принимающей машины HOST. При этом возникает дополнительная задержка, которая ощущается пользователем, но не может быть отнесена только за счет сети связи. Тот факт, что имеются приближенно лишь два сообщения данных на одну команду ALL, показывает, что размер резервирования в сети очень мал. Заметим, что размер резервирования является переменной, которая зависит от программы NCP.

Интересно рассмотреть также (и это, по-видимому, более важно, чем рассмотрение неэкономно растратываемой пропускной способности линий и дополнительного времени ожидания управляющих сообщений ALL) ту долю быстродействия канала ввода—вывода и ЦП машины HOST, которая тратится на посылку этих избыточных сообщений. Чем меньше сообщений принимает и посыпает программа NCP, тем меньше ухудшение суммарной характеристики машины HOST.

Наблюдение влияния размера резервирования было бы невозможным без помощи программы NCP. Для сети ARPANET создатели программы NCP приняли ряд важных решений, например решения о числе буферов, размере буферного пространства на одно соединение, об использовании фиксированного или динамического резервирования буферов, о максимальном доступном числе соединений и др. Эти и подобные решения должны быть проверены на практике для того, чтобы получить представления об их ценности и предложения по дальнейшему усовершенствованию.

Из табл. 6.3 видно, что большинство из посыпаемых управляющих команд программы NCP представляют собой команды типа ALL. Следовательно, если требуется снизить избыточность, свя-

занную с управляющими сообщениями HOST—HOST, то самым эффективным первым шагом (в рамках существующего протокола) является снижение числа сообщений типа ALL. Поэтому для тех машин HOST, которые в состоянии использовать большие буферы (или больше буферов, или и то и другое), ответ прост и состоит в посылке большего размера резервирования.

Получим теперь простую формулу эффективности линии в зависимости от характеристик трафика. Как видно из фиг. 6.39, протокол HOST—HOST сети ARPANET обеспечивает обмен сообщений, использующий соединения и включающий установление и снятие соединений, а также резервирование буферов в адресатной машине HOST.

Пусть N — случайная величина, представляющая собой полное число бит, которые нужно передать, и пусть A (также случайная величина, определяемая на машинах HOST) — число бит, которые резервируются принимающей машиной HOST в расчете на одно управляющее сообщение ALL. При этом число управляющих сообщений ALL, которые должны быть посланы от приемника к отправителю, равно¹⁾

$$a = \left\lceil \frac{N}{A} \right\rceil.$$

Пусть X — случайное число бит данных в сетевом сообщении данных. Заметим, что X должно быть не больше, чем N — полное число переданных бит, A — число резервированных бит, 8023 — максимальное число бит данных на сообщение (мы не считаем 40 бит протокола HOST—HOST за чистые данные). Определим Y как число пакетов на сообщение:

$$Y = \left\lceil \frac{X + 40}{1008} \right\rceil.$$

Определим m как полное число сообщений, которые требуется передать; имеем

$$m = \left\lceil \frac{N}{X} \right\rceil.$$

Обозначим через \bar{N} , \bar{A} , \bar{a} , \bar{X} , \bar{Y} и \bar{m} средние значения этих случайных величин.

Заметим, что мы не учитываем избыточные биты, используемые в качестве холостых для набивки сообщений. Число холостых бит зависит от длины слова машины HOST. Отбрасывание холостых битов оказывает лишь небольшое влияние на проводимые ниже

¹⁾ $[s]$ — потолочная функция, равная наименьшему целому числу, большему или равному s .

вычисления; кроме того, результаты можно рассматривать как несколько более оптимистические.

В табл. 6.4 приведена избыточность в линии, включающая избыточность для установления и снятия одиночного соединения и для посылки управляющих сообщений ALL и сообщений данных.

Избыточность в линии на одно соединение (в битах)

Таблица 6.4

Тип сообщения	Число сообщений	Избыточность на сообщение				Полная избыточность на сообщение
		уровня 0	уровня 1	уровня 2	RFNM	
STR	2	104	80	40+80	168	472
RTS	1	104	80	40+80	168	472
ALL	\bar{a}	104	80	40+64	168	456
Данные	\bar{m}	$104\bar{Y}$	$80\bar{Y}$	40	168	$184\bar{Y}+208$
CLS	2	104	80	40+72	168	464

Предположим, что управляющие сообщения HOST — HOST дополнительно не навешиваются друг на друга, как, например, при посылке первой команды ALL вместе с командой RTS (это делается несколькими машинами HOST). Наши данные измерений показывают, что более 80% всех управляющих сообщений HOST — HOST содержат лишь одну управляющую команду. Если машины HOST максимизируют длины своих сообщений (что здесь и предполагается), то

$$X = \min(N, A, 8023).$$

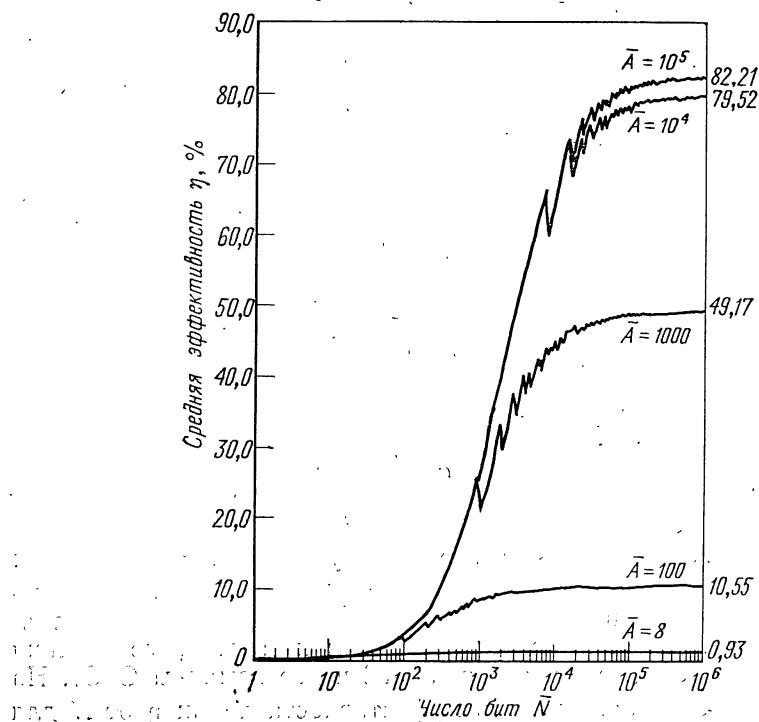
Определим среднюю эффективность линии η как отношение полного среднего числа бит данных к сумме полного среднего числа бит данных и числа избыточных бит. Предполагается, что все соединения в сети ARPANET могут быть описаны с помощью двух величин \bar{N} и \bar{A} ; дадим следующее простое определение средней эффективности линии (см. табл. 6.4):

$$\eta = \frac{\bar{N}}{\bar{N} + 456\bar{a} + (184\bar{Y} + 208)\bar{m} + 1872}. \quad ■ (6.6)$$

Здесь $456\bar{a}$ — избыточность в линии, обусловленная командами ALL; $(184\bar{Y} + 208)\bar{m}$ — избыточность в линии, обусловленная избыточными знаками в сообщениях данных, а 1872 бит — избыточность в линии, связанная с установлением и снятием соединения (одна команда STR, одна команда RTS и две команды CLS). На фиг. 6.40 показана зависимость эффективности линии η от \bar{N} для заданных значений \bar{A} . Разрывы кривых вызваны границами сооб-

щений и пакетов. Для $\bar{A} \geq \bar{N}$ необходимо лишь одно управляющее сообщение ALL. Поэтому эффективность линии не зависит от \bar{A} в этом случае. Отметим низкую эффективность линии при малых значениях \bar{N} . Эффективность линии равна лишь 0,32%, если соединения используются для передачи одиночных знаков ($\bar{N}=8$). Даже для больших значений \bar{N} эффективность линии очень мала, когда мал размер резервирования A . Это показывает, насколько велико влияние управляемого программой NCP параметра A на эффективность подсети связи. Буферная память в машинах HOST может непосредственно приводить к уменьшению показателя использования линии в подсети связи. При передаче больших массивов данных с достаточно большим размером резервирования средняя эффективность линии может подняться выше 82% (действительно, при \bar{A} и \bar{N} , стремящихся к бесконечности, $\eta \rightarrow 0,827$).

Так как рассмотренное определение средней эффективности линии не учитывает фоновый трафик, нужно вычесть среднюю скорость передачи фонового трафика из данной физической пропускной способности, а затем использовать эту разность при вычисле-



Фиг. 6.40. Средняя эффективность линии в зависимости от длины данных.

ниях процентов. В сети ARPANET фоновый трафик равен 2,16 кбит/с. Максимально возможная скорость передачи от процесса к процессу поэтому равна 82,7% от 47,84 кбит/с, т. е. 39,56 кбит/с. (Сравните эту величину с измеренной скоростью, показанной на фиг. 6.14.) Это соответствует показателю использования линий 50 кбит/с, равному 79%.

Рассмотрим теперь случай, когда соединение используется для длительного диалога с машиной HOST. При этом можно пренебречь избыточностью установления и снятия соединений. Эффективность линии определяется не с помощью N , полного числа переданных бит, а средним размером \bar{X} одного диалогового сообщения. Формула для средней эффективности линии при этом упрощается и принимает вид

$$\eta_l = \frac{1}{1 + 456/\bar{A} + (184\bar{Y} + 208)/\bar{X}}.$$

В табл. 6.5 дана средняя эффективность линии η_l для диалогового использования в зависимости от \bar{X} и \bar{A} . Часть этой таблицы пустая, так как средний размер сообщения \bar{X} не может быть больше среднего размера резервирования \bar{A} . Заметим еще раз, что эффективность линии падает при малых значениях \bar{A} . Однако даже при $\bar{A} = \infty$ эффективность линии равна лишь 2,00%, когда в качестве сообщений посылаются одиночные знаки.

Таблица 6.5

Средняя эффективность линии η_l в процентах

\bar{A} , бит	8	100	1000	∞
\bar{X} , бит				
8	0,93	1,83	1,98	2,00
40		6,51	8,88	9,26
100		10,55	18,60	20,33
200			29,27	33,78
500			44,64	56,05
1000			49,21	63,45
2000				72,46
5000				81,59
8023				82,69

Мы ожидаем, что эффективность линии в сети ARPANET при использовании ее в настоящее время будет довольно низкой по следующим двум причинам: 1) познаковый режим связи, предусматриваемый системой TENEX¹⁾ (которая представляет значитель-

¹⁾ Как было указано выше, планируется изменение системы TENEX, чтобы улучшить это.

ную часть полного трафика), уменьшает среднее число бит данных \bar{X} и 2) малое буферное пространство в процессорах TIP уменьшает среднее число резервируемых бит \bar{A} .

Как было показано, эффективность линии в сети ARPANET принимает значения в широком диапазоне: от менее 1% до 79%. Обратимся теперь к результатам измерений, которые позволят найти имеющуюся эффективность линии. Эти результаты относятся к сети ARPANET на май 1974 г., когда в ней были 46 процессоров IMP и 51 полнодуплексный канал. Для упрощения введем следующие дополнительные предположения:

- 1) все линии имеют одну и ту же скорость (50 кбит/с);
- 2) все процессоры IMP и линии включены;
- 3) избыточность, связанная с проверкой состояний, может быть равномерно распределена по всем линиям.

В табл. 6.6 все передаваемые биты в секунду в измеряемой сети ARPANET представлены в соответствии с классификацией избыточности в линии, данной в табл. 6.1. Числа являются средними по всем 102 симплексным линиям. Вклад фонового трафика в полный трафик можно непосредственно получить из табл. 6.1. Для проверки состояний предполагается, что они в среднем пересыпаются по 6,25 участка до центра управления сети (NCC). (Это число было вычислено для топологии сети ARPANET, относящейся к маю 1974 г.) По измерениям среднее число пакетов в секунду и на канал равно 4,27 пакет/с (без включения проверок состояний). Из этих данных легко получить избыточность в линии уровня 0. То, что $\sim 50\%$ всех передаваемых пакетов относится к подсетевым управляющим сообщениям, позволяет найти избыточность в линии уровня 1. Среднее число бит в секунду на канал (исключая избыточность в линиях уровней 0 и 1, а также фоновый трафик) по результатам измерения равно 454,28 бит/с. Кроме того, 87,02% всех пакетов — это первые пакеты сообщений, и, следовательно, они переносят дополнительно 40 бит избыточности, относящейся к протоколу HOST — HOST. Как было сказано ранее, 41% всех пакетов, передаваемых между машинами HOST, представляют собой управляющие сообщения HOST — HOST со средней длиной 93,5 бит (за исключением 40 бит избыточности, относящейся к протоколу HOST — HOST). Эти данные позволяют определить избыточность в линии уровня 2, а по ней можно найти число бит данных, передаваемых между процессорами.

Как видно из табл. 6.6, фоновый трафик составляет $\sim 64\%$ всего трафика, переносимого сейчас сетью ARPANET. Значительную часть фонового трафика составляют маршрутные сообщения. Число бит данных на секунду приближенно равно лишь 0,6% пропускной способности линии. Показатель использования линий, включающий все типы избыточностей, равен 6,73%. (Как было сказано выше, он не включает дополнительные маршрутные со-

Таблица 6.6

Избыточность в линиях ARPANET (май, 1974 г.)

Категория	Название	Скорость в линии, бит/с	Суммарная скорость по уроням, бит/с	Процент пропускной способности линии	Суммарный процент пропускной способности по уровням
					Уровень 0
Уровень 0	SYN	68,32	444,08	0,14	0,89
	STX/ETX	136,44		0,27	
	Контрольная сумма И	102,48		0,20	
	Заголовок квитанции	68,32		0,14	
	Контрольная сумма S	68,32		0,14	
	Заголовок пакета	173,60	308,00	0,35	
Уровень 1	Управление подсети	134,40		0,27	0,32
	Протокол HOST—HOST	75,53	158,72	0,15	
	Управление HOST—HOST	83,19		0,17	
	Маршрутные сообщения	1812,50	2160,96	3,63	
	IHY («Я вас слышу»)	237,50		0,48	
	Проверка состояний (Неизбыточные биты)	110,96		0,22	
Уровень 2	Данные	295,56	295,56	0,59	0,59
	Общая сумма:		3367,32	6,74	

общения, которые посылаются, когда показатель использования линии мал.)

Из-за низкого показателя использования линий некоторые из этих чисел могут привести к заблуждениям. Поэтому попытаемся добиться увеличения нагрузки на подсеть связи. Удерживая фоновый трафик постоянным, предположим, что избыточности в линиях уровней 0, 1 и 2, а также биты данных увеличиваются пропорционально до того, как показатель использования канала достигнет 100%. Таким образом, мы получим оценку для характеристик избыточности в насыщенной сети *при неизменных характеристиках трафика*. Результат такой проекции трафика приведен в табл. 6.7.

Интересно заметить, что около 35% всех передаваемых знаков обусловлено теперь управлением передачей IMP—IMP (уровень 0). Наилучшая эффективность линии (т. е. процент бит данных), которую только можно достичь, равна $\sim 20\%$ (в таблице указана более консервативная оценка 23,44%; мы должны поддерживать ρ меньшим единицы). Это, конечно, среднее число. В частных случаях можно получить много больший показатель использования линий. Однако если суммарные характеристики трафика остаются постоянными, то не больше чем примерно 10 из 50 кбит/с в среднем будет доступно для связи процесс—процесс. Заметим также, что фоновый трафик, который сейчас составляет более 64% всего трафика, становится почти пренебрежимо малым с приближением сети к насыщению.

Иногда говорят [27], что не должно существовать различия между процессом связи внутри машины HOST и процессом связи по сети. С точки зрения логики этот подход может быть верен. Но если интересоваться эффективным использованием ресурсов, то такой подход может привести к плачевным результатам. В этом смысле сеть не прозрачна к связи между процессами. При таком подходе машины HOST должны знать, что распределение ресурсов сети требует такого же внимания, как и распределение любых других ресурсов. Оказывается, что в некоторых случаях свобода, которую дают протоколы сети ARPANET тем, кто их реализует, была использована неверно. Для того, чтобы снизить избыточность, нужно потратить гораздо больше времени на обдумывание *эффективного* воплощения и использования протоколов сети, чем на их осуществимость.

Хотя избыточность можно снизить, проектировщики сетей ЭВМ должны представлять себе, что значительный процент использования линий всегда будет нужен для передачи управляющей информации. Точные числа, характеризующие избыточность, критически зависят от типа трафика (или смеси трафика), предназначенного для передачи по сети. Лишь тщательное изучение сможет показать, какая часть физической пропускной способности на самом деле доступна для связи между процессами пользователей.

Таблица 6.7

Спроектированная избыточность в линии

Категория	Название	Скорость в линии, бит/с	Суммарная скорость по уровням, бит/с	Процент пропускной способности	Суммарный процент пропускной способности по уровням
Уровень 0	SYN	2709,28	17610,30	5,42	35,22
	STX/ETX	5418,55		10,84	
	Контрольная сумма Н	4063,92		8,13	
	Заголовок квитанции	2709,28		5,42	
	Контрольная сумма S	2709,28		5,42	
Уровень 1	Заголовок пакета	6884,23	12213,95	13,77	24,43
	Управление подсети	5329,72		10,66	
Уровень 2	Протокол HOST—HOST	2995,19	6294,15	5,99	12,59
	Управление HOST—HOST	3298,96		6,60	
	Маршрутные сообщения	1812,50	2160,96	3,63	
	IHY	237,50		0,48	
	Проверка состояний	110,96		0,22	
	(Неизбыточные биты)	11720,64		23,44	
Общая сумма:					50000,00
					100,00

6.8. НЕДАВНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ПРОЦЕДУРЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКАМИ

Некоторые описанные выше трудности, которые возникли при работе с процедурами управления потоками до декабря 1974 г. (т. е. при работе с вариантом 2), привели к пересмотру методов обработки сообщений в подсети связи и к созданию варианта 3. В частности, упорядочение сообщений и ограничение теперь выполняются на уровне пар HOST — HOST. Число сообщений, которые одновременно параллельно могут передаваться между двумя машинами HOST, равно восьми. Это существенный отход как от варианта 1 (в котором действовало ограничение на связь процесс — процесс, разрешающее одно сообщение на одну виртуальную линию), так и от варианта 2 (в котором действовало ограничение на связь между источниковым процессором IMP и адресатным процессором IMP, разрешающее четыре сообщения на каждую пару IMP — IMP). Опишем теперь более подробно эту новую схему.

До того как источниковой машине HOST A, присоединенной к источниковому процессору IMP S, разрешается послать сообщение к некоторой адресатной машине HOST B, присоединенной к адресатному процессору IMP D, процессоры IMP S и IMP D должны получить блок управления сообщениями. Этот блок используется для управления передачей сообщений. Он называется блоком *передачи* в процессоре IMP S и блоком *приема* в процессоре IMP D. Создание пары {блок передачи, блок приема} аналогично установлению (симплексного) соединения в протоколе HOST — HOST (начального соединения). Это требует обмена подсетевыми управляющими сообщениями, который всегда начинается источниковым процессором IMP. Блоки управления сообщениями содержат также множество уже используемых номеров сообщений и множество еще доступных номеров сообщений; управление потоками проводится на уровне пары HOST — HOST путем использования максимум восьми последовательных номеров сообщений.

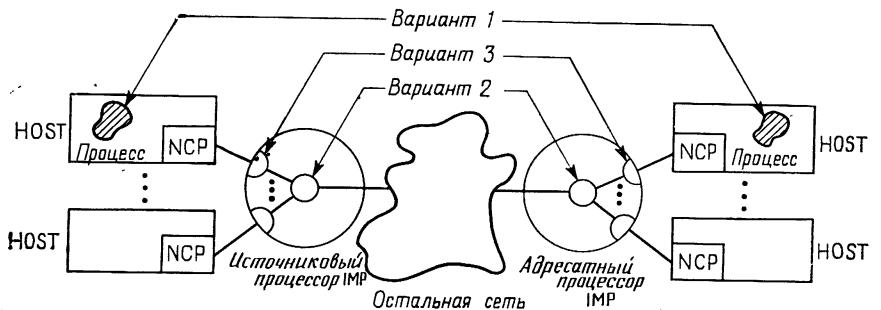
После приема первого пакета из машины HOST процессор IMP проверяет, имеется ли пара {блок передачи, блок приема} для передачи сообщений от машины HOST A к машине HOST B. Если машина HOST A не посыпает никаких сообщений к машине HOST B в течение какого-то времени, то, вероятно, такой пары блоков управления сообщениями нет. Поэтому источниковый процессор IMP S формирует блок передачи и посыпает подсетевое управляющее сообщение к адресатному процессору IMP D с требованием формирования блока приема. Получив это управляющее сообщение, процессор IMP D формирует согласующий блок приема и посыпает в обратном направлении к процессору IMP S подсетевое управляющее сообщение, извещающее об этом событии. Когда процессор IMP S получит это управляющее сообщение, будет создана пара блоков управления сообщениями.

Отсутствие блоков передачи и приема обычно будет приводить лишь к начальной задержке установления связи. Сейчас в каждом процессоре IMP имеются 64 доступных блока передачи и 64 доступных блока приема. Это значит, например, что одна машина HOST может передавать данные одновременно 64 различным машинам HOST или две машины HOST, присоединенные к одному и тому же адресатному процессору IMP, могут действовать так, что каждая из них может связываться одновременно с 32 различными машинами HOST, и т. д. Так как 64 это довольно большое число блоков сообщений, то маловероятно, что возникнет начальная задержка установления связи.

Остальные ресурсы, как и ранее, получаются в следующей последовательности: номер сообщения, компоновочные буферы, место в таблице PLT. Так как имеется восемь номеров для упорядочения сообщений, которые распределяются на уровне пары {посылающая машина HOST, принимающая машина HOST}, то машине HOST разрешается посылка к некоторой принимающей машине HOST до восьми сообщений без приема квитанции на первое сообщение. Для мультипакетного трафика этого более чем достаточно, так как сейчас имеются лишь шесть мест в таблице PLT. Поэтому таблица PLT вдруг стала более важным узким местом по сравнению с тем, каким она была в старой процедуре обработки сообщений, когда могли существовать лишь четыре сообщения на пару процессоров IMP.

Заметим, что мультипакетное сообщение делает попытку получить компоновочные буферы до того, как оно запрашивает место в таблице PLT. (Такая последовательность распределения ресурсов приводит к трудностям, которые описываются ниже.) Когда в источниковом процессоре IMP нет ожидающего использования резерва компоновочных буферов, номер сообщения (и место в таблице PLT), как и ранее, забирается сообщением REQALL (см. фиг. 6.11).

Подытожим теперь некоторые главные свойства трех вариантов управления потоками, которые были описаны выше. Главное внимание будем уделять месту расположения управления и деталям распределаемых ресурсов, к которым относятся номер сообщения, места в таблице PLT, емкость компоновочной памяти, подсетевые извещения ALL, команды ALL уровня HOST—HOST и схема передачи квитанций (KB) между процессорами IMP. На фиг. 6.41 показаны места, к которым прилагается управление потоками; они также указаны в первых двух строках табл. 6.8. В частности, показано, как вариант 1 ограничивает линию связи между двумя процессорами машин HOST, разрешая передачу лишь одного сообщения. Вариант 2 ограничивает передачу между парой процессоров IMP четырьмя сообщениями; это ограничение накладывается на слившиеся потоки данных машин HOST в паре процессоров IMP. Вариант 3 ограничивает пары машин HOST восемью сооб-



Фиг. 6.41. Места приложения управления для различных процедур управления потоками.

шениями. Табл. 6.8 построена так, что ширина столбцов пропорциональна периодам времени, на которых действовали варианты управления. В третьей строке этой таблицы приведены максимальные числа мест в таблице PLT. Вариант 1 использует не таблицу PLT, а таблицу виртуальных линий в каждом процессоре IMP, которая допускает в общем 63 линии от всех машин HOST данного процессора IMP к множеству всех других машин HOST в сети (при ограничении каждой линии одним номером сообщения). Максимальное число компоновочных буферов есть величина не постоянная, и, поскольку нам известно, она менялась в зависимости от времени; и приближенные значения этой величины даны в четвертой строке таблицы; все эти числа указаны для процессоров IMP, не имеющих так называемых VDH — очень удаленных машин HOST (при наличии таких машин система ограничена одним мультипакетным сообщением, находящимся в процессе компоновки). Мы видим влияние увеличения оперативной памяти процессора IMP от 12 до 16 К в конце 1972 г. Последние три строки таблицы понятны без объяснений.

Скорость передачи для этой новой процедуры управления (варианта 3) была измерена в феврале 1975 г.; она оказалась значительно меньше скорости, показанной на фиг. 6.14 [20]. Одна из причин этого состоит в том, что процессоры IMP 316 достигают своего предела обработки потоков и близки к насыщению. Вторая (и более тонкая) причина снижения скорости передачи, которая называется *фазировкой*, состоит в посылке излишних управляющих сообщений REQALL. Сообщение REQALL называется излишним, если оно посылается, когда предыдущее управляющее сообщение REQALL еще остается невыполненным. Такая ситуация может возникнуть, если сообщение *i* посылает управляющее сообщение REQALL, но не использует извещение ALL, которое посылается назад этим сообщением REQALL из-за того, что оно получило компоновочное буферное

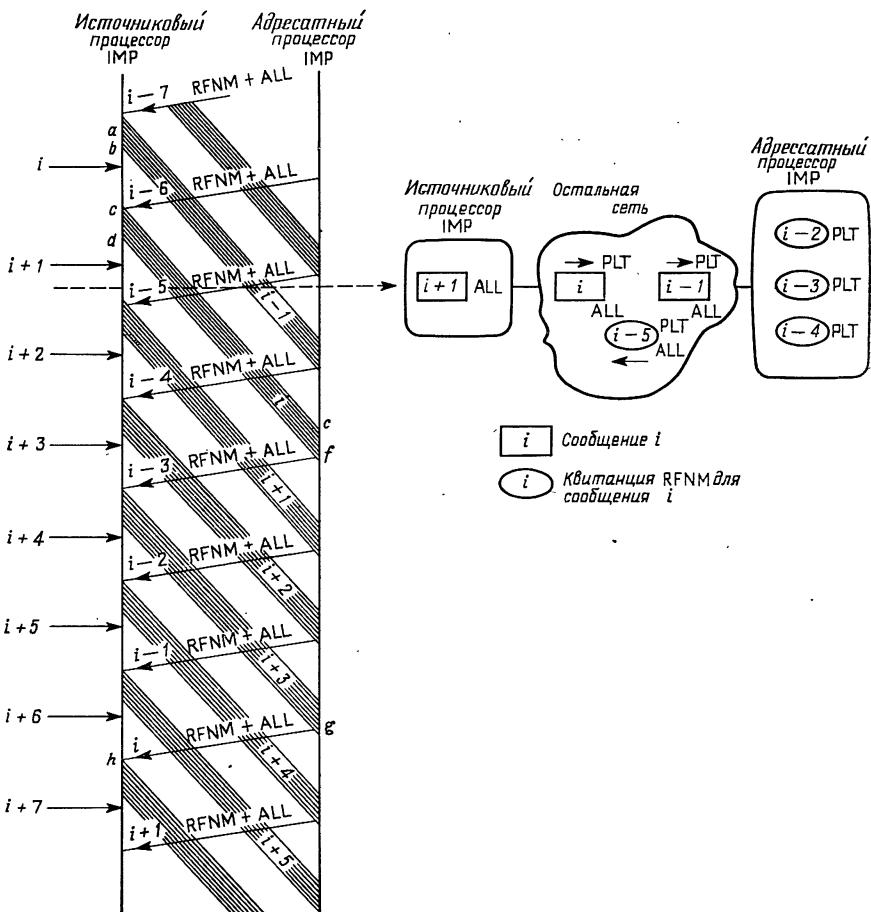
Таблица 6.8

Различные процедуры управления потоками

		Год				
		1971	1972	1973	1974	1975
		Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3
Управление числом сообщений	где	процесс—процесс	источниковый процессор IMP—адресатный процессор IMP		уровень HOST	HOST—
Максимальное число сообщений	максимальное число	1		4		
Максимальное число мест в таблице РЛТ		—		6		8
Максимальное число мультиплексных сообщений, находящихся в компоновке		3	3	10	8	4
Требуется ли подсетевое резервирование?	Нет	Да (дополнительно навешиваемые)			Да (дополнительно навешиваемые)	
Требуется ли резервирование на уровне HOST—HOST?	Да		Да		Да	
Навешиваются ли дополнительно квитанции на уровне IMP—IMP?	Нет		Да		Да	

резервирование, дополнительно навешенное на квитанцию RFNM для более раннего сообщения (которое достигло источникового процессора IMP до того, как он запросил извещение ALL). Посылка излишних управляющих сообщений REQALL не желательна, так как при этом напрасно используются ресурсы. В частности, каждое сообщение REQALL извещает об одном месте в таблице PLT. Интуитивно представляется невозможным, чтобы более чем четыре восьмипакетных сообщения могли быть высланы, но не выполнены в любой момент, так как имеется компоновочное буферное пространство лишь для четырех таких сообщений (34 компоновочных буфера). Однако если буферное пространство, которое освобождается после завершения компоновки сообщения i , вызывает посылку извещения ALL, дополнительно навешиваемого на квитанцию RFNM для сообщения $i-j$ ($j \geq 1$), то квитанция RFNM для сообщения i может встать в очередь в адресатном процессоре IMP за $j-1$ другими квитанциями RFNM. Таким образом, на самом деле лишь четыре сообщения имеют зарезервированное буферное пространство. Сообщения, которые, помимо этих четырех, являются невыполнеными, уже достигли адресатного процессора IMP, и их квитанции RFNM ожидают буферное пространство (т. е. дополнительно навешиваемые извещения ALL). Посылка более четырех восьмипакетных сообщений первоначально вызывается посылкой излишних управляющих сообщений REQALL. Места в таблице PLT, которые получены этими управляющими сообщениями REQALL, позже используются обычными сообщениями, когда таблица PLT заполнена; дальнейший ввод от источникововой машины HOST прекращается до того момента, когда появится доступное место в таблице PLT (это приводит, как будет показано, к неэффективному использованию средств связи). Таким образом, возникает ситуация, в которой машина HOST может использовать все шесть мест в таблице PLT для передачи к адресатной машине HOST.

На фиг. 6.42 показан характер фазировки, которая наблюдается почти для всех передач по более чем четырем участкам. Кратко поясним передачу сообщения i . В момент a последний пакет сообщения $i-1$ окончательно принимается и начинается ввод первого пакета сообщения i . Этот первый пакет принимается источниковым процессором IMP в момент b . Так как имеется доступное буферное пространство (которое было дополнительно навешено на квитанцию RFNM, пришедшую на сообщение $i-7$), то управляющее сообщение REQALL не посыпается. Однако предположим, что в момент b таблица PLT заполнена. Вследствие этого сообщение i должно ожидать до момента c , в который квитанция RFNM для сообщения $i-6$ освободит место в таблице PLT; после этого сообщение i может приступить к передаче. В момент d все восемь пакетов были приняты источниковым процессором IMP. Первый и

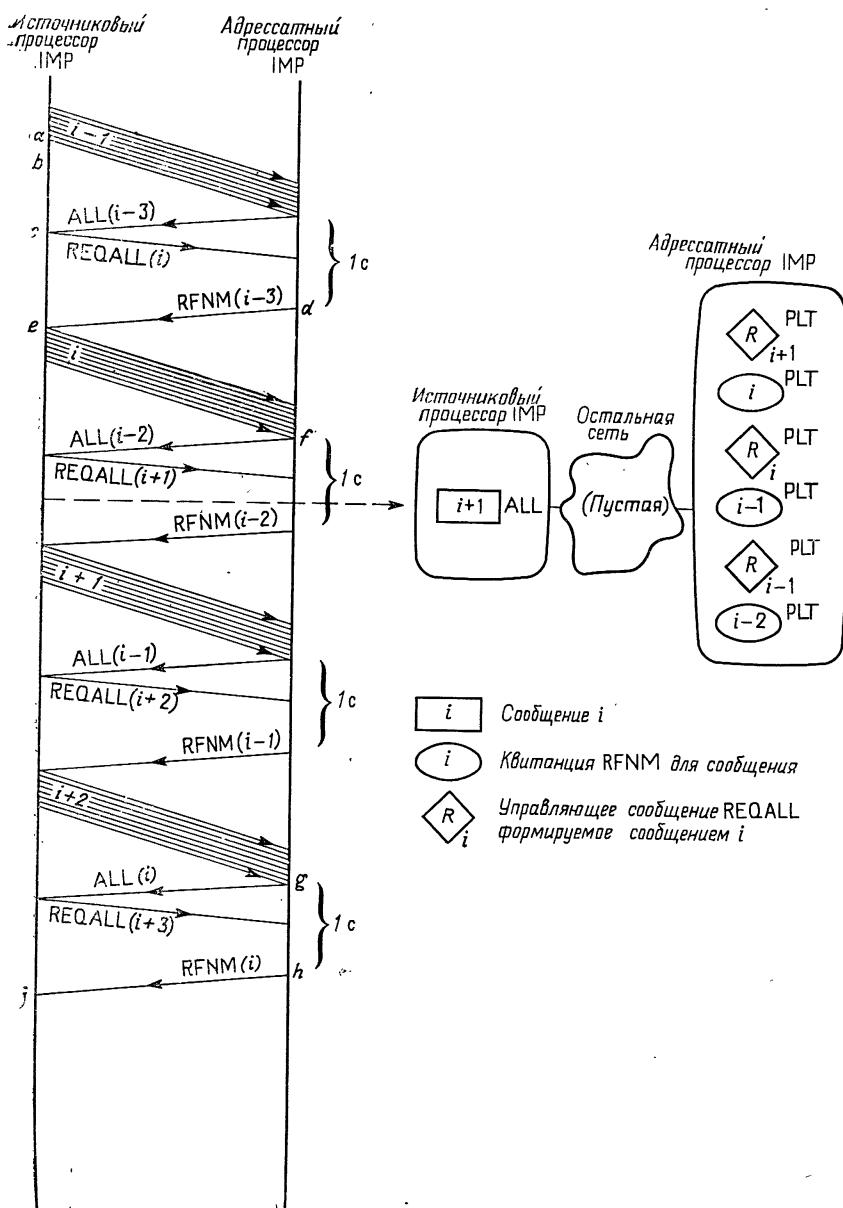


Фиг. 6.42. Фазировка и связанное с ней уменьшение скорости передачи.

восьмой пакеты поступают в адресатный процессор IMP в моменты e и f соответственно. Посылка квитанции RFNM для сообщения i задерживается до передачи квитанций RFNM на сообщения $i-3$, $i-2$ и $i-1$. Буферное пространство, которое освобождается, когда сообщение $i+3$ достигает адресата в момент g , дополнительно навешивается на квитанцию RFNM для сообщения i , которое достигает источникового процессора IMP в момент h . Это показано на фиг. 6.42 в виде временного разреза соответствующего времени передвижения сообщения i . Здесь сообщения изображены прямоугольниками, а квитанции RFNM — овалами. К квитаниям RFNM и сообщениям присоединены ресурсы в виде ALL- и

PLT-мест, которыми они обладают. Видно, что четыре ALL принадлежат сообщениям $i - 1$, i , $i + 1$ и квитанции RFNM на сообщение $i - 5$; показаны также шесть PLT-мест, принадлежащих сообщениям $i - 1$, i и квитанциям RFNM на сообщения $i - 5$, $i - 4$, $i - 3$ и $i - 2$. Сообщение $i + 1$ не может покинуть источниковый процессор IMP, так как оно не имеет PLT-места; большинство PLT-мест принадлежит квитанциям RFNM, неразумно ожидающим дополнительно навешиваемых извещений ALL, которые *не являются* критическими ресурсами источникового процессора IMP (сообщение $i + 1$ уже имеет свое ALL!). Неприятность, очевидно, возникает из-за слабой фазировки между PLT-местами и извещениями ALL.

Описанный выше тип фазировки был рассмотрен для адресатных процессоров IMP без программного обеспечения VDH, предназначенного для обслуживания очень удаленных машин HOST. Для процессоров IMP с VDH, которые могут в любой момент компоновать лишь *одно* сообщение (10 компоновочных буферов), наблюдался другой тип фазировки, который приводил к еще большим снижениям скорости передачи. В этом случае возникает ситуация, в которой управляющее сообщение REQALL посыпается для каждого сообщения данных. Шесть мест в таблице PLT присваиваются трем управляющим сообщениям REQALL и трем сообщениям данных. На фиг. 6.43 эта ситуация показана графически. Первый пакет сообщения i передается от источниковой машины HOST к источниковому процессору IMP между моментами a и b . Так как доступного буферного пространства нет, то источниковый процессор IMP решает сначала послать управляющее сообщение REQALL. Однако все места в таблице PLT уже заняты и поэтому посылка управляющего сообщения REQALL задерживается до момента c , когда ответ на старое управляющее сообщение REQALL (для сообщения $i - 3$) доставляет извещение ALL и место в таблице PLT. В этот момент место в таблице PLT немедленно забирается задержанным управляющим сообщением REQALL (формируемым сообщением i). Заметим, что при этом сообщение i получает необходимое буферное резервирование, но его нельзя послать к адресату из-за того, что таблица PLT опять заполнена. Только когда пройдет тайм-аут в 1 с (момент d) и квитанция RFNM для сообщения $i - 3$ будет получена источниковым процессором IMP (момент e) без навешенного извещения ALL, освободится, наконец, место в таблице PLT для сообщения i . В момент f все восемь пакетов будут получены адресатным процессором IMP. Посылка квитанции RFNM для сообщения i теперь задерживается на несколько секунд из-за ответов на сообщения $i - 2$, $i - 1$ и два предыдущих управляющих сообщения REQALL, которые нужно послать раньше (см. временной разрез на фиг. 6.43). В момент g управляющее сообщение ALL, соответствующее управляющему



Фиг. 6.43. Фазировка, когда может компоноваться только одно мультипакетное сообщение.

сообщению REQALL (*i*), посыпается к источниковому процессору IMP, а через одну секунду после этого в момент *h* истекает тайм-аут квитанции RFNM для сообщения *i*. Эта квитанция RFNM для сообщения *i*, наконец, принимается источниковым процессором IMP в момент *j*.

Фазировка в случае адресатных процессоров IMP с программным обеспечением VDH приводит к снижению скорости передачи в три раза. Это большое снижение происходит из-за того, что система в течение почти 1 с находится в состоянии, когда источниковый процессор IMP имеет буферное резервирование, но не имеет места в таблице PLT. В течение этой задержки адресатный процессор IMP, который может освободить место в таблице PLT путем немедленной посылки квитанции RFNM, ожидает буферное резервирование (которое не может прибыть), чтобы его дополнительно навесить. Нежелательной фазировки сообщений можно избежать двумя очевидными путями: во-первых, избегая посылки излишних управляющих сообщений REQALL, которые приводят к фазировке, и, во-вторых, избегая дополнительного навешивания резервирований на квитанции RFNM, если имеются другие ответы, которые ждут передачи. Здесь, так же как и при всех других тупиках и ухудшениях, довольно легко получить решения, если ошибка обнаружена; задача состоит в том, чтобы находить и устранять эти ошибки на стадии проектирования.

6.9. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

В введении к предыдущей главе были указаны некоторые трудности, связанные с «бракосочетанием» ЭВМ и систем связь. Эти предвидения основывались на определенной несовместимости техники связи и вычислительной техники, а также на несовместимости в поведении терминалов и ЭВМ. Теперь мы рассмотрели один пример успешной работы сети ЭВМ, который наряду с другими вселяет большую уверенность в таких сетях. Из проведенных аналитических рассмотрений, а также из результатов моделирования на ЭВМ и измерений можно прийти к заключению, что аналитическое моделирование и проектирование сетей ЭВМ были довольно успешными.

Главным в технике сети ARPANET было введение коммутации пакетов как нового способа связи. Этот вопрос обсуждается Робертсон в работе [33], где он разрабатывает свою оригинальную концепцию работы сети. До появления такой сети, как ARPANET, связь между двумя точками осуществлялась классическими методами, т. е. между двумя сторонами, требующими связи, устанавливался канал (путем набора номера, аренды, покупки и т. п.). Этот канал становился затем доступным исключительно для них до тех пор, пока он добровольно не освобождался. Как обсужда-

лось выше, такое использование канала крайне неэффективно и при коммутации пакетов положение исправляется. Коммутация пакетов делает очень высокоскоростной канал доступным одновременно для многих пользователей (здесь в основе лежит та же идея, что и при асинхронном временном уплотнении). Для пользователей характерна группирующаяся нагрузка в том смысле, что каждому из них обслуживание данным каналом требуется в редкие случайные периоды времени («редкие случайные» означает, что средняя скорость пользователей мала по сравнению с полной пропускной способностью канала). Такое множество пользователей получает при этом высокоскоростной канал, доступный в течение всего времени (но этот канал по отношению к каждому из них имеет очень низкий показатель использования). Одновременно возникающие требования на использование канала либо приводят к редким случайным задержкам передачи, либо к редкой случайной необходимости повторить передачи. Сеть ARPANET является примером такой системы коллективного пользования. Кроме того, рассмотрение спутниковых каналов в подобных сетях дает большое число интересных задач коммутации пакетов.

В настоящее время существует ряд нерешенных проблем, связанных с анализом и проектированием сетей. Например, имеется ряд явлений, для которых не созданы модели (в частности, к ним относятся явления, которые связаны с процедурами выбора маршрутов и управления потоками), а для большого числа явлений получены лишь частные результаты. Главная трудность состоит в сильной взаимозависимости поведения различных очередей в сети массового обслуживания, которая проявляется, как только рассматривается какая-либо реальная модель сети. Например, пусть требуется описать поведение пакетов мультипакетного сообщения при их прохождении по сети и оценить стоимость посылки таких сообщений (через стоимости требуемого буферного пространства и избыточности). Конечно, все еще плохо поняты блокировки и тупики; хотелось бы уметь проектировать сети, в которых такие явления отсутствовали (такой подход несомненно годится при проектировании) [32]. Однако с теоретической точки зрения нехорошо отбрасывать эти проблемы только потому, что они трудные, а нужно исследовать их в надежде найти приемлемые решения для таких неприятных явлений. В данной главе было показано, что компоновка сообщений, их упорядочение и фазировка содержат ловушки для неискушенных проектировщиков систем и они могут очень легко привести к тупикам и ухудшениям. Эти и связанные с ними вопросы обсуждаются также в работе [4]. Кроме того, нужно иметь в виду и другие вопросы проектирования сетей. Например, какую структуру должен иметь быстродействующий процессор IMP? Как эффективно использовать различные высокоскоростные цепи? При рассмотрении в целом большой сети (с ты-

сячами узлов) возникает много интересных проблем, например как разбивать эти большие сети при их эффективном проектировании и каким операционным системам они должны подчиняться [18].

Сети общего пользования с коммутацией пакетов появились не только в Соединенных Штатах (ARPANET, сеть TELENET с ЭВМ), но и в Канаде (DATAPAC), Англии (EPSS), Европе (EIN), Франции (TRANSPAC), Японии, Испании, Швеции и в других местах. Это вплотную подводит нас к необычным, интересным и очень важным задачам сопряжения различных сетей [2, 32, 35]. Эти задачи в основном относятся к управлению потоками и протоколам. Создание сети ARPANET стимулировало значительные исследования вопроса передачи информации между программами и операционными системами; этот вопрос интересен сам по себе независимо от функционирования сети. Интересно заметить, что современная сеть ARPANET довольно быстро расширяется как в смысле размера, так и в смысле трафика. По мере разрешения доступа к сети пользователям, не входящим в группу ARPA, нужно решать неприятные вопросы, относящиеся к оплате услуг, обеспечению конфиденциальности и безопасности, гарантированного доступа и обслуживания и т. п. За сеть ARPANET с июля 1975 г. несет ответственность Отдел войск связи (DCA); все эти неприятные вопросы теперь стоят перед этим отделом. Были разрешены специализированные средства связи для создания коммерческих сетей с коммутацией пакетов [12]. Это лишь некоторые из новых и интересных проблем сетей ЭВМ [5, 8, 16]. Теоретический анализ, проведенный в начальных разделах гл. 5, может служить отправной точкой некоторых недавно открытых направлений исследований.

По-видимому, следует сказать, что, несмотря на ряд разнообразных и важных технических проблем, с которыми мы сталкиваемся при удовлетворении растущих потребностей в связи и дистанционной обработке данных, ясно, что не они будут главными и будущем. Очевидно, что основные проблемы будут по своей сущности социальными, экономическими, политическими и даже экологическими. Более того, нужно тщательно рассмотреть действительные цели и взвесить с точки зрения пользователя дистанционной обработки данных все аргументы против. Например, развивающиеся страны земного шара не так быстро согласятся с тем, что чем больше дистанционной обработки, тем лучше; скорее их точка зрения должна быть такой: «Как лучше использовать наши конечные ресурсы, чтобы добиться наибольшего и самого необходимого выигрыша?» Тот факт, что обслуживание хорошее, не означает, что оно непременно получает наивысший приоритет. Заметим также, что по мере того, как системы телеобработки все глубже проникают в хозяйствственные применения, они подвергаются тщательной проверке их эффективности, надежности и робастности в условиях большой и требовательной нагрузки. Если эти системы не выдер-

жат такую проверку, они будут отброшены (бизнес не славится стойким терпением). Многие из нас уже испытывают удовольствие (и издержки) от пользования дистанционным доступом к системам обработки данных с помощью портативных пультов, расположенных дома. Наблюдается расширение этих простых систем до сетей, которые дают доступ к индивидуальным файлам и Библиотеке конгресса, оказывают помощь при расчете подоходных налогов и покупках (вспомните смертельную и нестабильную войну цен), в учете и т. д. Кажется очевидным, что влияние этих систем не ограничится лишь воздействием на технику, а распространится на социальные, политические, экономические, деловые и экологические факторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bobrow D. G., Burchfiel J. D., Murphy D. L., Tomlinson R. S., TENEX, A Paged Time-Sharing System for the PDP-10, paper presented at the Third ACM Symposium on Operating System Principles, October 18—20, 1971, published in *Communications of the Association for Computing Machinery*, 15, 135—143 (1972).
2. Cerf V. G., Kahn R. E., A Protocol for Packet Network Communication, *IEEE Transactions on Communication*, COM-22, 637—648 (1974).
3. Cole G. G., Computer Network Measurements: Techniques and Experiments, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, Engineering Report UCLA-ENG-7165, October 1971.
4. Crowther W. R., Heart F. E., McQuillan J. M., Walden D. C., Issues in Packet Switching Network Design, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 161—175.
5. Data Networks: Analysis and Design, Proceedings of the Third IEEE Data Communications Symposium, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973.
6. Davies D. W., The Control of Congestion in Packet Switching Networks, Proceedings of the Second ACM IEEE Symposium in the Optimization of Data Communications Systems, Palo Alto, California, October 1971, p. 46—49.
7. Forgie J. W., Speech Transmission in Packet-Switched Store-and-Forward Networks, *AFIPS Conference Proceedings*, 1975 National Computer Conference, 44, p. 137—142.
8. Fox J., ed., Proceedings of the International Symposium on Computer-Communication Networks and Teletraffic, Polytechnic Press, Brooklyn, New York, April 1972.
9. Frank H., Chou W., Topological Optimization of Computer Networks, *Proceedings of the IEEE*, 60, 1385—1397 (1972).
10. Fultz G. L., Kleinrock L., Adaptive Routing Techniques for Store-and-Forward Computer-Communication Networks, Proceedings of the International Conference on Communications, June 14—16, 1971, p. 39-1—39-8.
11. Fultz G. L., Adaptive Routing Techniques for Message Switching Computer-Communication Networks, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, Engineering Report UCLA-ENG-7252, July 1972.
12. Gaines E. C., Specialized Common Carriers-Completion and Alternative, *Telecommunications*, 7, No. 9, 15—26 (1973).
13. Gerla M., The Design of Store-and-Forward (S/F) Networks for Computer Communications, Computer Science Department, University of California, Los Angeles, Engineering Report UCLA-ENG-7319, 1973.
14. Хэйт Ф. Математическая теория транспортных потоков. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
15. Heart F. W., Kahn R. E., Ornstein S. M., Crowther W. R., Walden D. C., The

- Interface Message Processor for the ARPA Computer Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Spring Joint Computer Conference, 36, p. 551—567.
16. *Proceedings of the IEEE* (Special Issue on Computer Communications), 60, No. 11, 1243—1466 (1972).
 17. Kahn R. E., Crowther W. R., Flow Control in a Resource Sharing Computer Network, Proceedings of the Second IEEE Symposium on Problems in the Optimization of Data Communications Systems, Palo Alto, California, October 1971, p. 108—116.
 18. Kamoun F., Design Considerations for Large Computer-Communication Networks, Ph. D. Dissertation, Computer Science Department, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, 1976.
 19. Kleinrock L., Naylor W. E., On Measured Behaviour of the ARPA Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1974 National Computer Conference, 43, p. 767—780.
 20. Kleinrock L., Opderbeck H., Throughput in the ARPANET—Protocols and Measurement, Proceedings of the Fourth Data Communications Symposium, Quebec, Canada, October 1975, p. 6-1—6-11.
 21. Kleinrock L., Naylor W. E., Opderbeck H., A Study of Line Overhead in the ARPANET, Communications of the Association for Computing Machinery, 1976.
 22. McKenzie A. A., Letter to S. Walker, April 8, 1975.
 23. McQuillan J. M., Growther W. R., Cossell B. P., Walden D. C., Heart F. E., Improvements in the Design and Performance of the ARPA Network, *AFIPS Conference Proceedings*, 1972 Fall Joint Computer Conf., 41, p. 741—754.
 24. McQuillan J. M., Throughput in the ARPA Network—Analysis and Measurement, Bolt Beranek and Newman, Inc., Cambridge, Mass., Report No. 2491.
 25. McQuillan J. M., Design Considerations for Routing Algorithms in Computer Networks, Proceedings of the Seventh Hawaii Intern. Conference on System Sciences, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii, January 8—10, 1974.
 26. McQuillan J. M., Adaptive Routing Algorithms for Distributed Computer Networks, Bolt Beranek and Newman, Inc., Cambridge, Mass., Report No. 2831, May 1974 (available from the National Technical Information Service, AD 781467).
 27. Metcalfe R. M., Strategies for Operating Systems in Computer Networks, Proceedings of the ACM Annual Conference, August 1972, p. 278—281.
 28. Naylor W. E., A Loop-Free Adaptive Routing Algorithm for Packet Switched Networks, Proceedings of the Fourth Data Communications Symposium, Quebec, Canada, October 1975, p. 7-9—7-14.
 29. Opderbeck H., Kleinrock L., The Influence of Control Procedures on the Performance of Packet-Switched Networks, Proceedings of the National Telecommunications Conference, San Diego, California, December 1974.
 30. Postel J., Official Initial Connection Protocol (NIC 7101), ARPA Network Information Center, Stanford Research Institute, California, June 11, 1971.
 31. Pouzin L., Interconnection of Packet Switching Networks, INWG 42 (NIC 20792), ARPA Network Information Center, Stanford Research Institute, Menlo Park, California, October 1973 (also IFIP/TC6.1/42).
 32. Price W. L., Simulation of Packet-Switching Networks Controlled on Isarithmic Principles, Proceedings of the Third IEEE Symposium on Data Networks Analysis and Design, St. Petersburg, Florida, November 13—15, 1973, p. 44—49.
 33. Roberts L. G., Wessler B. D., Computer Network Development to Achieve Resource Sharing, *AFIPS Conference Proceedings*, 1970 Spring Joint Computer Conference, 36, p. 543—549.
 34. Zeigler J. F., Nodal Blocking in Large Networks, School of Engineering and Applied Science, University of California Los Angeles, Engineering Report UCLA-ENG-7167, 1971.
 35. Zimmermann H., Elie M., Proposed Standard HOST-HOST Protocol for Heterogeneous Computer Networks: Transport Protocol, INWG 43 (NIC 20856) ARPA Network Information Center, Stanford Research Institute, Menlo Park, California, December 1973.

Задачи

- 6.1.** Предполагается, что каждый процессор IMP наряду с обновляющим маршрутным сообщением посыпает также таблицу номеров участков (HNT), которая содержит по одному месту для каждого процессора IMP сети (включая сам процессор). Все соседи некоторого процессора IMP (например, n -го) посыпают ему одно обновление в интервалах между последовательными обновлениями, формируемыми этим процессором IMP. Пусть k -е место h_k в следующей таблице HNT, которое формируется n -м процессором IMP, имеет вид

$$h_k = \begin{cases} \min h_k^{(i)} + 1, & k \neq n, \\ (\text{по соседям}) & \\ 0, & k = n, \end{cases}$$

где $h_k^{(i)}$ — k -е место в самой последней таблице HNT, полученной n -м процессором IMP от его i -го соседа.

- a) Для сети с N процессорами IMP, имеющей произвольную, но связанную топологию, в которой не происходят откazy процессоров IMP и линий, определите, сколько обновлений требуется, чтобы все таблицы HNT перестали изменяться, если все таблицы HNT начинались с нулей.
 - б) Какой смысл имеет содержание каждого места после достижения равновесного состояния?
 - в) Пусть после достижения равновесия сломался некоторый процессор IMP. Сколько требуется обновлений в сети с N процессорами IMP для того, чтобы все процессоры IMP вынесли решение о том, что произошла поломка (и какой именно процессор IMP сломался)?
 - г) Пусть для сети, показанной на фиг. 5.20, б (за исключением пунктов LINC и HARV), все таблицы HNT содержат сначала лишь нули. Приведите таблицу HNT в пункте UCLA при каждом обновлении до момента, когда она перестанет меняться.
 - д) Используя равновесное состояние таблицы HNT в пункте UCLA, полученное в п. г, приведите последовательность изменяющихся таблиц HNT (до момента достижения нового равновесия или его функционального «эквивалента»), если ломается процессор IMP пункта RAND.
 - е) Пусть спустя длительное время процессор IMP в пункте RAND восстанавливается. Приведите теперь последовательность (до достижения равновесного состояния) таблицы HNT пункта UCLA.
- 6.2.** Измеренная полная скорость передачи, показанная на фиг. 6.9, была названа оптимистической. Опишите некоторое

рые верхние границы для этой скорости передачи, которым не удовлетворяют кривые фиг. 6.9.

6.3. Рассмотрите фиг. 6.3.

a) Предполагая, что каждое показанное сообщение является полным мультиплексным сообщением, найдите скорость передачи от источникового процессора IMP к адресатному процессору IMP. Пусть отсутствует какой-либо мешающий трафик и время между поступлениями показанных сообщений равно 500 мс.

б) Повторите п. а, считая, что каналы имеют 1) вдвое большую скорость, 2) вдвое меньшую скорость.

в) Найдите время, когда прямые каналы пусты, для всех трех указанных выше случаев.

6.4. Сравните кривые, показанные на фиг. 6.14 и 6.15, и сопоставьте указанные там числа с теоретической шлейфовой задержкой, учитывющей длину сообщения, скорость линии, избыточность и расстояние в числе участков.

6.5. [4]. Рассмотрите сообщения, длины которых \bar{b} имеют показательное распределение со средним значением длины, равным \bar{b} бит. Предполагается, что любое сообщение разбивается на пакеты длиной L бит (максимум), к которым добавляется заголовок (т. е. программная избыточность) в H бит; это дает размер требуемой буферной памяти, равный $L+H$ бит. Пусть $\bar{b}_p = E$ [длина пакета], а $\eta = \bar{b}_p/(L+H)$ — эффективность использования буфера.

a) Покажите, что

$$\bar{b}_p = \bar{b}[1 + e^{-L/\bar{b}}]$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{\bar{b}[1 - e^{-L/\bar{b}}]}{L + H}.$$

б) Найдите уравнение, определяющее оптимальную длину пакета L_0 .

в) Покажите, что оптимальная эффективность η_0 при любых данных \bar{b} и H равна

$$\eta_0 = e^{-L_0/\bar{b}}$$

6.6. Найдите уравнение, описывающее оптимальную огибающую для показанной на фиг. 6.40 эффективности линии. Выразите этот оптимум лишь через \bar{N} .

6.7. Рассмотрите фиг. 6.42.

а) Изобразите временной разрез, соответствующий моменту времени, вплотную следующему за моментом e .

б) То же самое проведите для момента h .

6.8. Рассмотрите фиг. 6.43. Изобразите временной разрез, соответствующий моменту времени, следующему за моментом f .

Список обозначений¹⁾

(Приводятся только обозначения, которые часто используются в этой книге)

Обозначение ²⁾	Смысл обозначения	Ссылка на страницу
АВУ	Асинхронное временное уплотнение	282
ВМУР	Вогнутый метод устранения ребер	397
ВПД	Время первого достижения	426
ВПС	Выбор пропускных способностей	359
ВПС и РП	Выбор пропускных способностей и распределение потоков	359
ВТПС и РП	Выбор топологии, пропускных способностей и распределение потоков	360
Кбит/с	Килобит в секунду	344
КВ	Квитанция, управляющее сообщение	488
КО	Круговой опрос	195
МУ	Многоуровневый алгоритм	208
МДВР	Множественный доступ с временным разделением	433
МДСЗ	Множественный доступ с сигналом «занято»	452
МДПН	Множественный доступ с проверкой несущей	442
МДЧР	Множественный доступ с частотным разделением	436
ОП	Отклонение потока	385
ООП	Обслуживание в обратном порядке	142
ОПП	Обслуживание в порядке поступления	130
ПЗП	Обобщенный алгоритм с передним и задним парами	202
ПК	Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью обслуживания	173
ПКД	Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью дообслуживания	173
ПКС	Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью обслуживания	173
ПКСД	Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью дообслуживания	173
РП	Распределение потоков	359
СВУ	Синхронное временное уплотнение	283
СМО	Система массового обслуживания	7
ЦП	Центральный процессор	187
ALL	Управляющее сообщение о резервировании	493
ARPA	Управление перспективных исследований министерства обороны США	343
ARPANET	Экспериментальная сеть ЭВМ Управления ARPA	343
$A(t)$	$P[\bar{t} \leq t]$	16
$A/B/m$	Система массового обслуживания с m обслуживающими приборами и распределениями $A(t)$ и $B(x)$	
$A^*(s)$	Преобразование Лапласа функции $a(t)$	17
a	Время распределения в одном направлении (нормированное)	446
$a(t)$	$dA(t)/dt$	16

¹⁾ В тех (редких) случаях, когда символ имеет несколько значений, неопределенность разъясняется в контексте (или в специальном замечании).

²⁾ Запись $y_n \rightarrow y$ означает, что $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, а $y(t) \rightarrow y$ означает $y = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

$B(x)$	$P[\tilde{x} \leq x]$	16
$B^*(s)$	Преобразование Лапласа функции $b(x)$	17
\tilde{b}	Длина сообщения (в битах)	362
$b(x)$	$dB(x)/dx$	16
C_i	Пропускная способность i -го канала	355
C_n	n -е требование, поступающее в систему	16
$C(u)$	$P[\tilde{u} \leq u]$	39
$C^*(s)$	Преобразование Лапласа функции $c(u)$	39
C_a^2	Коэффициент изменчивости времени между по- ступлениями соседних требований	325
C_b^2	Коэффициент изменчивости времени обслуживания	325
C_p^2	Коэффициент изменчивости числа операций	325
$c(u)$	$dC(u)/du$	39
D	Детерминированное распределение	18
D	Стоимость сети в долларах	357
D_e	Добавочная стоимость в долларах	372
d_i	Стоимость единицы пропускной способности i -го канала	371
$d_i(C_i)$	Стоимостная функция i -го канала	375
d_k	$P[\tilde{q}=k]$	21
$E[X]=\bar{X}$	Математическое ожидание случайной величины X	17
E_k	k -е состояние системы	21
E_r	Распределение Эрланга порядка r	18
$F(w, t)$	$P[U(t) \leq w]$	35
G	Распределение общего вида	18
G	Трафик в канале при спутниковой и наземной радиосвязи	409
$G(K)$	Нормирующий множитель для замкнутой сети	30
$G(y)$	Распределение периода занятости	136
$G^*(s)$	Преобразование Лапласа функции $g(y)$	34
$G_b^*(s)$	Преобразование Лапласа плотности распределения для Y_b	136
$G_c^*(s)$	Преобразование Лапласа плотности распределения для Y_c	136
$G_0^*(s)$	Преобразование Лапласа плотности распределения для Y_0	136
$g(y)$	$dG(y)/dy$	27
h	Масштабный коэффициент для скорости передачи сети	387
HOST	Вычислительное устройство, присоединенное к сети	343
H_R	Гиперпоказательное распределение порядка R	18
I	Продолжительность свободного периода	26
IMP	Сопрягающий процессор сообщений	344
L	Максимальная длина пакета	509
l_i	Длина i -го канала	356
M	Показательное распределение	18
M	Число источников нагрузки	28
M^*	Число каналов в сети	355
m	Мера насыщения	243
m	Число обслуживающих приборов	18
$m(x, t)$	Стационарное инфинитезимальное среднее значе- ние	94
\tilde{m}	Инфинитезимальное среднее значение	87
\tilde{n}	Средняя длина пути	325

$n(x)$	Плотность распределения достигнутого обслуживания	197
NCC	Центр управления сети	344
NCP	Программа управления сети	349
NIC	Информационный центр сети	344
NMC	Центр измерений на сети	476
N_q	Число требований в очереди	20
$N(t) \rightarrow N$	Число требований в системе в момент времени t	17
N	Число узлов сети	355
$o(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$	46
p		
P	Номер приоритетного класса ($p=1, 2, \dots, P$)	130
PLT	Матрица переходных вероятностей	22
$P[A]$	Таблица ожидающих лидеров	491
$P[A B]$	Вероятность события A	16
	Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B	21
p_k	P [в системе находится k требований]	24
p_{ij}	P [следующее состояние E_j текущее состояние E_i]	22
$p_{ij}(t)$	$P[X(s+t)=j X(s)=i]$	23
$Q(z)$	z -преобразование вероятности $P[N=k]$	18
$q_n \rightarrow \tilde{q}$	Число требований, остающихся в СМО после ухода требования C_n	31
$q'_n \rightarrow \tilde{q}'$	Число требований, которое застает в СМО поступающее требование C_n	36
q_{ij}	Инфинитезимальные переходные вероятности цепи Маркова	23
R	Шлейфовое время распространения (нормированное)	476
REQALL	Требование резервирования буферов	492
RFNM	Требование следующего сообщения	477
r_{ij}	P [следующий узел j текущий узел i]	29
r_k	$P[\tilde{q}'=k]$	21
S	Скорость передачи при спутниковой и наземной радиосвязи с коммутацией пакетов	409
$S(y)$	$P[\tilde{s} \leq y]$	18
$S(y x)$	$P[\tilde{s} \leq y \tilde{x}=x]$	190
$S^*(s)$	Преобразование Лапласа функции $s(y)$	18
$S^*(s x)$	Преобразование Лапласа функции $dS(y x)/dy$	195
s	Переменная преобразования Лапласа	18
$s_n \rightarrow \tilde{s}$	Время пребывания требования C_n в системе	17
$s(y)$	$dS(y)/dy$	18
$\bar{s}_n \rightarrow \bar{s} = T$	Среднее время пребывания требования C_n в системе	17
T	Среднее время пребывания в системе	18
T_0	Задержка отсутствие нагрузки	367
$T(x)$	Среднее время ответа на требование, для обработки которого нужно x секунд	190
TELNET	Телефонная сетевая программа	349
TENEX	Операционная система коллективного пользования машинами PDP-10.	344
TIP	Терминальный процессор IMP	352
T_p	Среднее время пребывания в системе требования из приоритетного класса	132

T_i	Среднее время ожидания и использования i -го канала	361
$\tilde{t}_n \rightarrow \tilde{t}$	Промежуток времени между моментами поступления требований C_{n-1} и C_n	16
$\bar{t} = 1/\lambda$	Среднее время между моментами поступлений соседних требований	16
\tilde{t}_k	k -й момент распределения	16
t_0	Естественная единица времени	113
U_n	$U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$	40
$U(t)$	Незаконченная работа СМО в момент времени t	35
\overline{U}	Средняя незаконченная работа	141
\overline{U}_0	Естественная единица задолженности (виртуальное время ожидания)	114
$u_0(t)$	Единичная импульсная функция	26
$u_n \rightarrow \tilde{u}$	$u_n = x_n - t_{n+1} \rightarrow \tilde{u} = x - t$	39
VDH	Программное обеспечение для связи с очень удаленной машиной HOST	501
$v_n \rightarrow \tilde{v}$	Число требований, поступающих в течение времени обслуживания (требования C_n)	31
$v'_n \rightarrow \tilde{v}'$	Число требований, обслуженных в течение времени $(\tau_n, \tau_n + t_n)$	36
W	Среднее время пребывания в очереди	18
W_p	Среднее время ожидания для требования из приоритетного класса p	132
W_0	Среднее остаточное время обслуживания	133
$W(x)$	Среднее время ожидания (потерянное время) для требования, которому необходимо x секунд обслуживания	190
$W(y)$	$P[\tilde{w} \leqslant y]$	18
$W^*(s x)$	Преобразование Лапласа функции $dW(y x)/dy$	226
$W^*(s)$	Преобразование Лапласа функции $w(y)$	18
$w_n \rightarrow \tilde{w}$	Время ожидания требования C_n	17
$w(y)$	$dW(y)/dy$	18
$w_n \rightarrow \bar{w} = W$	Среднее время ожидания (для требования C_n)	17
$X(t)$	Случайный процесс	22
$\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$	Время обслуживания требования C_n	16
$x = 1/\mu$	Среднее время обслуживания	17
\tilde{x}_k	k -й момент распределения $b(x)$	17
\tilde{x}_p	Среднее время обслуживания для требований из приоритетного класса p	131
\tilde{x}_p^2	Второй момент распределения времени обслуживания требования из приоритетного класса p	133
Y	Длина периода занятости	135
Y_b	Задержка периода занятости в цикле задержки	135
Y_c	Длина цикла задержки	135
Y_0	Начальная задержка в цикле задержки	135
z	Переменная z -преобразования	34
γ_i	(Внешняя) интенсивность поступления требований в узел i	30
γ_{jk}	(Внешняя) интенсивность поступления сообщений для j -го источника и k -го адресата	355
Ψ	$\sum_k \sum_j \gamma_{jk}$	250

λ	Интенсивность поступления требований	16
λ_i	Интенсивность поступлений на i -й канал сети	357
λ_k	Интенсивность размножения (поступления) при $N=k$	24
λ_p	Интенсивность поступления требований из приоритетного класса p	131
μ	Интенсивность обслуживания	17
μ_i	Интенсивность обслуживания в узле i	30
μ_k	Интенсивность гибели (обслуживания) при $N=k$	24
$\pi^{(n)} \rightarrow \pi$	Вектор вероятностей состояний $\pi_k^{(n)}$	22
$\pi_k^{(n)} \rightarrow \pi_k$	P [система на n -м шаге находится в состоянии E_k]	22
$\prod_{i=1}^k a_i$	$a_1, a_2 \dots a_k$ (знак произведения)	24
ρ	Коэффициент использования	19
ρ_p	Коэффициент использования для требований из приоритетного класса p	131
σ	Корень уравнения для системы G/M/m	36
σ^2	Стационарная инфинитезимальная дисперсия	94
σ_a^2	Дисперсия промежутков времени между поступлениями требований	42
σ_b^2	Дисперсия времени обслуживания	42
$\sigma^2(x, t)$	Инфинитезимальная дисперсия	87
σ_p	$\sum_{i=p} \rho_i$	146
τ_n	Момент поступления требования C_n	16
$\Phi_+(s)$	Преобразование Лапласа функции $W(y)$	41
\triangleq	Равенство по определению	49
\approx	Приближенное равенство	48
$(0, t)$	Промежуток времени от 0 до t	76
$(y)^+$	$\max [0, y]$	40
$(y)^-$	$-\min [0, y]$	40
$f^{(k)}(t_0)$	$d^k f(t)/dt^k _{t=t_0}$	17
*	Оператор свертки	40

Сводка важнейших результатов

Ниже приводится сводка важнейших результатов книги в виде списка формул. Справа от каждого результата указан номер страницы, где он впервые появляется; это поможет читателю найти пояснительный текст и теоретическое обоснование соответствующей формулы.

Общая часть

$$\rho = \lambda \bar{x} \text{ (G/G/1)} \quad 19$$

$$\rho = \lambda \bar{x}/m \text{ (G/G/m)} \quad 19$$

$$T = \bar{x} + W \quad 20$$

$$\bar{N} = \lambda T \text{ (формула Литтла)} \quad 20$$

$$\bar{N}_q = \bar{N} - \lambda W \quad 20$$

$$\bar{N}_q = \bar{N} - m \rho \text{ (G/G/m)} \quad 20$$

$$dP_k(t)/dt = [\text{скорость потока в состоянии } E_k] - [\text{скорость потока из состояния } E_k] \quad 21$$

$$p_k = r_k \text{ (при пуассоновском потоке поступающих требований)} \quad 21$$

$$r_k = d_k [N(t) \text{ совершает единичные переходы}] \quad 21$$

Пуассоновские процессы

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad 24$$

$$\bar{N}(t) = \lambda t \quad 24$$

$$\sigma_N^2(t) = \lambda t \quad 24$$

$$E[z^N(t)] = e^{\lambda t(z-1)} \quad 24$$

Процессы размножения и гибели

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \text{ (стационарное решение для системы с процессами размножения и гибели)} \quad 24$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} (\lambda_i/\mu_{i+1})} \quad 25$$

M/M/1

$$p_k = (1 - \rho) \rho^k \quad 25$$

$$\bar{N} = \rho/(1 - \rho) \quad 25$$

$$\sigma_N^2 = \rho/(1 - \rho)^2 \quad 25$$

$$W = \frac{\rho/\mu}{1 - \rho} \quad 25$$

$$T = \frac{1/\mu}{1 - \rho} \quad 25$$

$$s(y) = \mu(1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0 \quad 26$$

$$S(y) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0 \quad 26$$

$$w(y) = (1 - \rho) u_0(y) + \lambda(1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0 \quad 26$$

$$W(y) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)y}, \quad y \geq 0 \quad 26$$

$$P[\text{время между уходами} \leq t] = P[\text{продолжительность свободного периода} \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \quad 27$$

$$g(y) = \frac{I}{y\sqrt{\rho}} e^{-(\lambda+\mu)y} I_1(2y\sqrt{\lambda\mu}) \quad 27$$

$$f_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \rho^{n-1} (1 + \rho)^{1-2n} \quad 27$$

$$p_k = \frac{[M! (M-k)!] (\lambda/\mu)^k}{\sum_{i=0}^M [M!/(M-i)!] (\lambda/\mu)^i} \quad (\text{M/M/1—конечное число источников нагрузки}) \quad 28$$

$$Q(z) = \frac{\mu(1 - \rho)(1 - z)}{\mu(1 - z) - \lambda z [1 - G(z)]} \quad (\text{M/M/1—групповое поступление}) \quad 27$$

$$p_k = \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \left(\frac{1}{z_0}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{M/M/1—групповое обслуживание}) \quad 27$$

M/M/m

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^k}{k!}, & k \leq m \\ p_0 \frac{(\rho)^k m^m}{m!}, & k \geq m \end{cases} \quad 28$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1} \quad 28$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k/k!}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i/i!} \quad (M/M/m - \text{система с потерями}) \quad 29$$

$$T = \frac{m}{\mu C} + \frac{P_m}{\mu C (1-\rho)} \quad 318$$

$$P_m = \frac{p_0 (m\rho)^m}{(1-\rho) m!} \quad 318$$

$$T(1, \lambda, C) \leq T(m, \lambda, C) \quad 320$$

$$T(m, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} T(m, \lambda, C) \quad 320$$

$$W(1, \lambda, C) \geq W(m, \lambda, C) \quad 322$$

$$W(m, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} W(m, \lambda, C) \quad 321$$

$$\bar{N}(m, a\lambda, aC) = \bar{N}(m, \lambda, C) \quad 322$$

$$\bar{N}_q(m, a\lambda, aC) = \bar{N}_q(m, \lambda, C) \quad 322$$

Время жизни и остаточное время

$$f_X(x) = \frac{x f(x)}{m_1} \quad (\text{плотность распределения времени жизни отобранного интервала}) \quad 32$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1 - F(y)}{m_1} \quad (\text{плотность распределения остаточного времени}) \quad 33$$

$$\hat{F}^*(s) = \frac{1 - F^*(s)}{sm_1} \quad (\text{преобразование Лапласа плотности распределения остаточного времени}) \quad 32$$

$$r_1 = \frac{m_2}{2m_1} \quad (\text{среднее остаточное время}) \quad 32$$

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad (\text{интенсивность отказов}) \quad 32$$

M/G/1

$$r_k = p_k + d_k \quad 31$$

$$\bar{N} = \rho + \frac{\lambda \overline{x^2}/2}{1-\rho} \quad (\text{формула Поллячека--Хинчина для среднего значения}) \quad 32$$

$$\bar{W} = \frac{W_0}{1-\rho} \quad (\text{формула Поллячека--Хинчина для среднего значения}) \quad 32$$

$$W_0 = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2} \quad 32$$

$$Q(z) = B^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1-\rho)(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \text{ (преобразованное равенство Поллячека—Хинчина)} \quad 33$$

$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)} \text{ (преобразованное равенство Поллячека—Хинчина)} \quad 33$$

$$S^*(s) = B^*(s) \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)} \quad 33$$

$$\sigma_w^2 = W^2 + \frac{\lambda \bar{x}^3}{3(1-\rho)} \quad 33$$

$$P[I \leq y] = 1 - e^{-\lambda y} \quad 33$$

$$G^*(s) = B^*(s + \lambda - \lambda G^*(s)) \quad 34$$

$$g_1 = \frac{\bar{x}}{1-\rho} \quad 34$$

$$\sigma_g^2 = \frac{\sigma_0^2 + \rho(\bar{x})^2}{(1-\rho)^3} \quad 34$$

$$F(z) = zB^*[\lambda - \lambda F(z)] \quad 34$$

$$h_1 = \frac{1}{1-\rho} \quad 34$$

$$\sigma_h^2 = \frac{\rho(1-\rho) + \lambda^2 \bar{x}^2}{(1-\rho)^3} \quad 34$$

$$\frac{\partial F(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(w, t)}{\partial w} - \lambda F(w, t) +$$

$$+ \lambda \int_{x=0}^w B(w-x) d_x F(x, t) \text{ (интегродифференциальное уравнение Такача)} \quad 35$$

$$F^{**}(r, s) = \frac{(r/\eta) e^{-\eta w_0} - e^{-rw_0}}{\lambda B^*(r) - \lambda + r - s} \quad 35$$

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z) B^*(\lambda - \lambda G(z))}{B^*(\lambda - \lambda G(z)) - z} \text{ (групповое поступление)} \quad 33$$

$$W^*(s) = 1 - \rho + \frac{\lambda(1 - G^*(s))}{s + \lambda - \lambda G^*(s)} \text{ (обслуживание в обратном порядке)} \quad 144$$

$$\sigma_{OPI}^2 = (1-\rho) \sigma_{OOP}^2 - \rho W^2 \quad 179$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^P \frac{\lambda_i \bar{x}_i^2}{2} \text{ (P приоритетов)} \quad 133$$

$$G_b^*(s) = G_0^*(\lambda - \lambda G^*(s)) \quad 136$$

$$G_c^*(s) = G_0^*(s + \lambda - \lambda G^*(s)) \quad 137$$

$$\sum_{p=1}^P \rho_p W_p = \begin{cases} \frac{\rho W_0}{1-\rho}, & \rho < 1 \text{ (приоритетный закон сохранения для системы M/G/1)} \\ \infty, & \rho \geq 1 \end{cases} \quad 138$$

$$W_p = \frac{W_0}{(1-\sigma_p)(1-\sigma_{p+1})}, \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{обслуживание в порядке приоритета; относительные приоритеты}) \quad 146$$

$$T_p = \frac{\bar{x}_p (1-\sigma_p) + \sum_{i=p}^P \lambda_i \bar{x}_i^2 / 2}{(1-\sigma_p)(1-\sigma_{p+1})} \quad (\text{обслуживание в порядке приоритета; абсолютные приоритеты}) \quad 150$$

$$W(x) = \frac{W_0}{\left[1 - \lambda \int_0^{x^-} y b(y) dy \right] \left[1 - \lambda \int_0^{x^+} y b(y) dy \right]} \quad (\text{первоочередное обслуживание кратчайших требований}) \quad 149$$

$$W_p = \frac{[W_0/(1-\rho)] - \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i W_i [1 - (b_i/b_p)]}{1 - \sum_{i=p+1}^P \rho_i [1 - (b_p/b_i)]}, \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{приоритеты, зависящие от времени}) \quad 158$$

$$W(y) = \frac{W_0}{[1 - \rho + \rho \beta(y^+)] [1 - \rho + \rho \beta(y^-)]} \quad (\text{плата за место в очереди}) \quad 166$$

M/G/∞

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \quad 35$$

$$T = \bar{x} \quad 35$$

$$s(y) = b(y) \quad 35$$

G/M/1

$$r_k = (1-\sigma) \sigma^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad 36$$

$$\sigma = A^* (\mu - \mu \sigma) \quad 36$$

$$W(y) = 1 - \sigma e^{-\mu(1-\sigma)y}, \quad y \geq 0 \quad 36$$

$$W = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)} \quad 37$$

G/M/m

$$\sigma = A^* (m\mu - m\mu \sigma) \quad 37$$

$$P [\text{длина очереди} = n \mid \text{поступающее требование становится в очередь}] = (1-\sigma) \sigma^n, \quad n \geq 0 \quad 37$$

$$R_k = \sum_{i=k}^{n-2} R_i p_{ik} = \sum_{i=m-1}^{\infty} \sigma^{i+1-m} p_{ik}$$

$$R_{k-1} = \frac{R_k - \sum_{i=k}^{n-2} R_i p_{ik}}{p_{k-1,k}}$$
37

$$p_{ij} = 0 \text{ при } j > i + 1$$
38

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \binom{i+1}{j} [1 - e^{-\mu t}]^{i+1-j} e^{-\mu t j} dA(t), \quad j \leq i + 1 \leq m$$
38

$$p_n = p_{i,i+1-n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(m\mu t)^n}{n!} e^{-m\mu t} dA(t), \quad 0 \leq n \leq i + 1 - m, \quad m \leq i$$
38

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \binom{m}{j} e^{-j\mu t} \left[\int_0^t \frac{(m\mu y)^{i-m}}{(i-m)!} (e^{-\mu y} - e^{-\mu t})^{m-j} m\mu dy \right] dA(t),$$

$$j < m < i + 1$$
38

$$J = \frac{1}{[1/(1-\sigma)] + \sum_{k=0}^{m-2} R_k}$$
37

$$W = \frac{J\sigma}{m\mu(1-\sigma^2)}$$
38

$$w(y | \text{поступающее требование становится в очередь}) = \\ = (1-\sigma) m\mu e^{-m\mu(1-\sigma)y}, \quad y \geq 0$$
38

$$W(y) = 1 - \frac{\sigma e^{-m\mu(1-\sigma)y}}{1 + (1-\sigma) \sum_{k=0}^{m-2} R_k}, \quad y \geq 0$$
38

$$W \approx \frac{\sigma_a^2 + (1/m^2) \sigma_b^2}{2t(1-\rho)} \text{ (приближение при большой нагрузке)}$$
65

$$W \leq \hat{W} \leq \frac{\sigma_a^2 + (1/m^2) \sigma_b^2}{2\bar{t}(1-\rho)}$$
68

$$\hat{W} = \left(\frac{m-1}{m} \right) \bar{x} \leq W \leq \hat{W}$$
69

$$\bar{N} - \rho(m-1) \leq \bar{N} \leq \hat{N}$$
69

G/G/1

$$w_{n+1} = (w_n + u_n)^+$$
40

$$c(u) = a(-u) * b(u)$$
39

$$\bar{u} = \bar{t}(\rho - 1)$$
39

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0 \text{ (интегральное уравнение Линдли)} \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad 41$$

$$A^*(-s) B^*(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} \quad 41$$

$$\Phi_+(s) = \frac{1}{\Psi_+(s)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \frac{W(0^+)}{\Psi_+(s)} \quad 41$$

$$W = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + (\bar{t})^2 (1-\rho)^2}{2\bar{t}(1-\rho)} - \frac{\bar{t}^2}{2\bar{t}} \quad 42$$

$$\tilde{\omega} = \sup_{n \geq 0} U_n \quad 40$$

$$w(y) = \pi(w(y)*c(y)) \quad 40$$

$$W(y) \approx 1 - \exp \left[- \frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} y \right] \text{ (приближение при большой нагрузке)} \quad 48$$

$$W \approx \frac{(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)}{2\bar{t}(1-\rho)} \text{ (приближение при большой нагрузке)} \quad 49$$

$$W \leq W_U = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2\bar{t}(1-\rho)} \text{ (верхняя граница)} \quad 51$$

$$\frac{[(\tilde{u})^+]^2}{2\bar{t}(1-\rho)} = W_K \leq W \text{ (нижняя граница)} \quad 53$$

$$W_M \leq W, \text{ где } W_M \text{ находится из уравнения } W_M =$$

$$= \int_{-W_M}^{\infty} [1 - C(u)] du \text{ (нижняя граница)} \quad 58$$

$$\frac{\rho^2 C_b^2 - \rho(2-\rho)}{2\lambda(1-\rho)} = W_U - \frac{\rho(2-\rho) + C_a^2}{2\lambda(1-\rho)} \leq W \text{ (нижняя граница)} \quad 60$$

$$W_U - \frac{1+\rho}{2} \bar{t}(1+\rho) \leq W \leq W_U \quad (\bar{t} - \text{ВГСОВ/G/1}) \quad 59$$

$$\lambda W_U - \frac{1+\rho}{2} \leq \bar{N}_q \leq \lambda W_U \quad (\bar{t} - \text{ВГСОВ/G/1}) \quad 60$$

$$W_U - \frac{1}{2} \bar{t}(C_a^2 + \rho) \leq W \leq W_U \quad (\text{ВИО/G/1}) \quad 60$$

$$\lambda W_U - \frac{C_a^2 + \rho}{2} \leq \bar{N}_q \leq \lambda W_U \quad (\text{ВИО/G/1}) \quad 60$$

$T_U(1, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} T_U(1, \lambda, C)$	326
$\gamma e^{-s_0 y} \leqslant 1 - W(y) \leqslant e^{-s_0 y}$	64
$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w} [m(w, t) f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} [\sigma^2(w, t) f]$ (диффузионное уравнение)	92
$\frac{\partial F(w, t)}{\partial t} = (1 - \rho) \frac{\partial F(w, t)}{\partial w}$ (непрерывное приближение)	93
$\frac{\partial F}{\partial t} = -m \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}$ (диффузионное приближение: ДП)	94
$F(w) = 1 - e^{2mw/\sigma^2}, \quad w > 0$ (стационарное решение для ДП)	95
$F(w, t) = \Phi\left(\frac{w - w_0 - mt}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{2mw/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-w - w_0 - mt}{\sigma \sqrt{t}}\right)$ (нестационарное решение для ДП)	99
$\frac{\partial F}{\partial t'} = \frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial w'^2}$ (безразмерное уравнение для ДП)	98
Время релаксации $\approx \frac{\sigma^2}{m^2} = \frac{\lambda \bar{x}^2}{(1 - \rho)^2}$ (ДП)	98
$E[U_d(t) U_d(0) = w_0] \longrightarrow (\rho - 1)t + w_0 + \frac{\lambda \bar{x}^2 \exp[-2(\rho - 1)w_0/\lambda \bar{x}^2]}{2(\rho - 1)}$ (асимптотическое решение при ДП для зависящего от времени среднего времени ожидания в случае $\rho > 1$)	107
$E[U'_d(t') U'_d(0)] = 0(1 + t'/2)[2\Phi(\sqrt{t'}) - 1] - \frac{t'}{2} - \frac{1}{2} P\left(\frac{3}{2}, \frac{t'}{2}\right)$	109
$\bar{U} = \rho W + \frac{\bar{x}^2}{2t}$	142
$\sum_{p=1}^P \rho_p W_p = \bar{U} - W_0$ (приоритетный закон сохранения для системы G/G/1)	141
G/G/m	
$W(y) \approx 1 - \exp\left(-\frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + (\sigma_b^2/m^2)}y\right)$ (приближение при большой нагрузке)	66
$W \approx \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2/m^2}{2\bar{t}(1-\rho)}$ (приближение при большой нагрузке)	65
$\hat{W} - \frac{[(m-1)/m]\bar{x}^2}{2\bar{x}} \leqslant W \leqslant \frac{\sigma_a^2 + (1/m)\sigma_b^2 + [(m-1)/m^2](\bar{x})^2}{2\bar{t}(1-\rho)}$	68
$\frac{\rho^2 C_b^2 - \rho(2-\rho)}{2\lambda(1-\rho)} - \frac{[(m-1)/m]\bar{x}^2}{2\bar{x}} \leqslant W$ (нижняя граница)	69

$T_U(m, a\lambda, aC) = \frac{1}{a} T_U(m, \lambda, C)$	326
$T(1, \lambda, C) \leq T(m, \lambda, C)$ при $C_p^2 \leq 1$	326
Коллективное использование одной системы M/G/1	
$T(x) = x + W(x)$	190
$n_q(x) = \lambda [1 - B(x)] \frac{dW(x)}{dx}$	193
$n(x) = \lambda [1 - B(x)] \frac{dT(x)}{dx}$	193
$S^*(s x) = \frac{s(1-\rho)e^{-sx}}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}$ (пакетная обработка)	195
$T(x) = \frac{W_0}{1-\rho} + x$ (пакетная обработка)	195
$T(x) = \frac{x}{1-\rho}$ (КО и ОПП)	198
$T(x) = \frac{W_x+x}{1-\rho_x}$ (ПЭП)	205
$S^*(s x) = W_x^*(s + \lambda - \lambda G_x^*(s)) \exp[-x(s + \lambda - \lambda G_x^*(s))]$ (ПЭП, многоуровневый алгоритм с ПЭП)	206
$T(x) = \frac{W_{a_i}+x}{1-\rho_{a_{i-1}}}$ (многоуровневый алгоритм с ОПП)	212
$W^*(s x) = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho'}\right) \left(\frac{s-\lambda' + \lambda' B^*(s)}{s-\lambda + \lambda B^*(s)}\right) \hat{W}_{\lambda'}^*(s x)$ (эгоистичный алгоритм распределения)	227
$T(x) = \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} - \frac{\lambda' \bar{x}^2}{2(1-\rho')} + \hat{T}_{\lambda'}(x)$ (эгоистичный алгоритм распределения)	227
$\int_0^\infty T(x) [1 - B(x)] dx = \frac{\bar{x}^2}{2(1-\rho)}$ (закон сохранения)	232
$\int_0^\infty W(x) [1 - B(x)] dx = \frac{\rho \bar{x}^2}{2(1-\rho)}$ (закон сохранения)	232
$\frac{dW(x)}{dx} \geq 0$	235
$\frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho_x)} \leq W(x) \leq \frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho_x)(1-\rho)} + \frac{x\rho_x}{1-\rho_x}$ (точные границы)	238

$$\frac{\partial}{\partial W} [C(W, x) W] = k [1 - B(x)] \text{ (оптимальный алгоритм)} \quad 298$$

Коллективное использование многих ресурсов (сети массового обслуживания)

$$T = \frac{M/\mu}{1-p_0} - \frac{1}{\lambda} \quad 242$$

$$M^* = \frac{1/\mu + 1/\lambda}{1/\mu} \text{ (число насыщающих требований)} \quad 243$$

$$T(x) \approx \mu T x \quad 244$$

$$T = T_a \approx \frac{Mx_s}{m_s \mu_N x_N} - \frac{1}{\lambda} \text{ (замкнутая сеть, } M \gg M^*) \quad 257$$

$$M^* = \frac{m_s}{x_s} \sum_{i=1}^N x_i \text{ (замкнутая сеть)} \quad 258$$

$$f_i(1) = \frac{x_i/m_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_N} \text{ (замкнутая сеть)} \quad 260$$

$$f_i(M) \leq \begin{cases} M f_i(1), & M \leq M^* \\ M^* f_i(1) = \frac{x_i/m_i}{x_s/m_s}, & M \geq M^* \end{cases} \text{ (замкнутая сеть)} \quad 261$$

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j r_{ji} \text{ (открытая или замкнутая сеть)} \quad 250$$

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_1(k_1) p_2(k_2) \dots p_N(k_N) \text{ (открытая сеть), где } p_i(k_i) \text{ является решением для изолированной системы } (M/M/m_i) \quad 251$$

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N \frac{x_i^{k_i}}{\beta_i(k_i)} \text{ (замкнутая сеть)} \quad 30$$

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N x_i^{k_i} \text{ (замкнутая сеть, } m_i = 1) \quad 252$$

$$\mu_i x_i = \sum_{j=1}^N \mu_j x_j r_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad 30$$

$$G(K) = \sum_{k \in A} \prod_{i=1}^N \frac{x_i^{k_i}}{\beta_i(k_i)} \quad 30$$

$$P[\tilde{k}_i = k_i] = \frac{x_i^{k_i}}{G(K)} [G(K - k_i) - x_i G(K - k_i - 1)] \quad 252$$

$$E[\tilde{k}_i] = \sum_{k_i=1}^K x_i^{k_i} \frac{G(K - k_i)}{G(K)} \quad 252$$

$$\beta_i(k_i) = \begin{cases} k_i!, & k \leq m_i \\ m_i! m_i^{k_i - m_i}, & k \geq m_i \end{cases} \quad 31$$

$$e_i(l) = \gamma_i(l) + \sum_{j=1}^N e_j(l) r_{ji}(l) \text{ (открытая и замкнутая сети)} \quad 264$$

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_1(k_1) p_2(k_2) \dots p_N(k_N), \quad (\text{открытая сеть}),$$

где

$$p_i(k_i) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{k_i}, & \text{если узел типа ОПП } (\cdot/M/1), \\ & \text{КО } (\cdot/G/1) \text{ или ОПП } (\cdot/G/1) \\ \frac{\rho_i^{k_i}}{k_i!} e^{-\rho_i}, & \text{если узел типа } \cdot/G/\infty \end{cases} \quad 266$$

и где

$$\rho_i = \begin{cases} \sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_i}, & \text{если узел типа ОПП } (\cdot/M/1) \text{ и } \mu_{ik_i} = \mu_i \\ \sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}}, & \text{если узел типа КО } (\cdot/G/1), (\cdot/G/\infty) \text{ или} \\ & \text{ООП } (\cdot/G/1) \end{cases} \quad 266$$

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = C g_1(\alpha_1) g_2(\alpha_2) \dots g_N(\alpha_N) \quad 265$$

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = C h_1(k_1) h_2(k_2) \dots h_N(k_N) \text{ (замкнутая сеть)},$$

где

$$h_i(k_i) = \begin{cases} \left(\sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{ik_i}} \right)^{k_i}, & \text{если узел типа ОПП } (\cdot/M/1) \\ \left(\sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}} \right)^{k_i}, & \text{если узел типа КО } (\cdot/G/1) \text{ или ООП } (\cdot/G/1) \\ \frac{1}{k_i!} \left(\sum_l \frac{e_i(l)}{\mu_{il}} \right)^{k_i}, & \text{если узел типа } (\cdot/G/\infty) \end{cases} \quad 265$$

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=2}^N \left(\frac{\mu_1 \rho_i}{\mu_i} \right)^{k_i} \text{ (сеть с центральным обслуживающим прибором)} \quad 270$$

Сети ЭВМ

$$T = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} T_i \quad 361$$

$$p(b) = \mu e^{-\mu b}, \quad b \geq 0 \text{ (предположение о независимости)} \quad 362$$

$$T = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \left(\frac{1}{\mu C_i - \lambda_i} \right) \quad 363$$

$$T = K + \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\gamma} \left[\frac{\lambda_i/\mu' C_i}{\mu' C_i - \lambda_i} + \frac{1}{\mu C_i} + P_i + K \right] \quad 364$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\gamma} \text{ (средняя длина пути)} \quad 368$$

$$T_0 = \bar{n} \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i/\lambda}{\mu C_i} \text{ (задержка при отсутствии нагрузки)} \quad 362$$

$$\hat{T}_{SP} = \bar{n} \left(\frac{1}{\mu C} + K \right) + K + \frac{1}{\mu H C_H} + \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i \text{ (приближение в предположении отсутствия нагрузки)} \quad 532$$

$$\eta = \frac{\bar{N}}{\bar{N} + 456\bar{a} + (184\bar{Y} + 208)\bar{m} + 1872} \text{ (эффективность линий в сети ARPANET)} \quad 545$$

$$C_i = \frac{\lambda_i}{\mu} + \left(\frac{D_e}{d_i} \right) \frac{\sqrt{\lambda_i d_i}}{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j}}, \quad i = 1, 2, \dots, M \text{ (оптимальный выбор при линейных стоимостях)} \quad 373$$

$$T = \frac{\bar{n}}{\mu D_e} \left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\lambda_i d_i}{\lambda}} \right)^2 \text{ (минимальная задержка при линейных стоимостях)} \quad 373$$

$$C_i = \frac{\lambda_i}{\mu} + \mu C (1 - \bar{n}\rho) \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j}}, \quad i = 1, 2, \dots, M \text{ (оптимальный выбор при } d_i = 1) \quad 374$$

$$T = \frac{\bar{n} \left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i / \lambda} \right)^2}{\mu C (1 - \bar{n}\rho)} \text{ (минимальная задержка при } d_i = 1) \quad 374$$

$$l_i \triangleq \frac{\partial T}{\partial (\lambda_i / \mu)} = \frac{C_i}{\gamma \left(C_i - \frac{\lambda_i}{\mu} \right)^2} \text{ (определение длины для алгоритма отклонения потока)} \quad 386$$

$$l_i \triangleq \frac{\partial T}{\partial (\lambda_i / \mu)} = \frac{\bar{n} \sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j / \lambda}}{D_e} \left[\sqrt{\frac{d_i}{\lambda \lambda_i}} + \frac{d_i}{\mu D_e} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{\lambda_j d_j}{\lambda}} \right] \text{ (длина при оптимальных линейных стоимостях)} \quad 393$$

$$C_i = \frac{\lambda_i}{\mu} + \left(\frac{\lambda_i}{\mu \gamma T_{\max}} \right) \frac{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j}}{\sqrt{\lambda_i d_i}} \text{ (оптимальный выбор в двойственном случае)} \quad 394$$

$$D = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i d_i}{\mu} + \frac{1}{\gamma T_{\max}} \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i d_i}{\mu} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (\text{минимальная стоимость в двойственном случае}) \quad 394$$

$$l_i \triangleq \frac{\partial D}{\partial (\lambda_i/\mu)} = d_i \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j d_j}}{\gamma T_{\max} \sqrt{\lambda_i d_i}} \right) \quad (\text{длина при оптимальных линейных стоимостях в дуальной задаче}) \quad 395$$

$$\gamma_0 \approx mD + b \quad 404$$

Коммутация пакетов при спутниковой связи

$$S = G p_0 \quad 409$$

$$S = Ge^{-2G} \quad (\text{чистая система ALOHA}) \quad 409$$

$$S = Ge^{-G} \quad (\text{синхронная система ALOHA}) \quad 410$$

$$S = G \left(1 - \frac{G}{M} \right)^{M-1} \quad (\text{конечное число пользователей с равными интенсивностями}) \quad 412$$

$$G = 1 \quad (\text{оптимальная скорость передачи}) \quad 413$$

$$T = R + 1 + \frac{1-q}{q_t} \left[R + 1 + \frac{K-1}{2} \right] \quad (\text{синхронная система ALOHA}) \quad 419$$

Коммутация пакетов при наземной радиосвязи

$$S = \frac{Ge^{-aG}}{G(1+2a) + e^{-aG}} \quad (\text{ненастойчивый МДПН}) \quad 447$$

$$S = \frac{aGe^{-aG}}{(1-e^{-aG}+a)} \quad (\text{синхронный ненастойчивый МДПН}) \quad 447$$

$$S = \frac{G [1+G+aG(1+G+aG/2)] e^{-G(1+2a)}}{G(1+2a)-(1-e^{-aG})+(1+aG)e^{-G(1+a)}} \quad (1-\text{настойчивый МДПН}) \quad 447$$

$$S = \frac{Ge^{-G(1+a)} [1+a-e^{-aG}]}{1-e^{-aG}+ae^{-G(1+a)}} \quad (\text{синхронный 1-настойчивый МДПН}) \quad 447$$

$$S(G, p, a) = \frac{(1-e^{-aG}) [P'_s \pi_0 + P_s (1-\pi_0)]}{(1-e^{-aG}) [a\bar{t}' \pi_0 + a\bar{t} (1-\pi_0) + 1+a] + a\pi_0} \quad (p-\text{настойчивый МДПН}) \quad 447$$

$$T = \left(\frac{G}{S} - 1 \right) [2a + 1 + \beta + \bar{X}] + 1 + a \quad (\text{ненастойчивый МДПН}) \quad 448$$

Предметный указатель

Адаптивный выбор маршрутов 338, 376, 469, 470, 474

Адресованные сообщения 336

Алгоритм кратчайшей очереди, кратчайшего пути и периодического обновления 473

— надписывания 369, 370

— правило надписывания 369

— правило приращения 370

— наибольшей дискриминации 202

— наименьшей дискриминации 195

— обновления асинхронный 473

— пакетной обработки 194, 195

— периодического обновления 471

Асимптотические характеристики 255—263

Асинхронное временное уплотнение 282, 341, 342

Белый шум 82

Блокировка дополнительного навешивания 495

— компоновочная 484, 488, 494

Блокировки 484—488, 494—496

Большие сети 561

— системы коллективного пользования 312, 313, 327, 328, 404, 433

Больших чисел закон 312, 327

Брак по принуждению 327

Вектор потоков 386

Вероятности переходные 22

Верхняя граница среднего остаточного времени (ВГСОВ) 58

Внутриузловой трафик 513, 514

Вогнутый метод устранения ребер (ВМУР) 397

Возрастающая интенсивность отказов (ВИО) 59

Возрастающее среднее остаточное время (ВСОВ) 58

— ВПС задача 359, 371—382

ВПС и РП подоптимальный алгоритм 393

Временное уплотнение 283, 433

Время замены 191

— между моментами поступления пакетов 461

— между моментами поступления требований 16

— обслуживания 16

— ответа 190, 315

— ожидания 17

— виртуальное 34

— пребывания в системе 17

— размышления 241

— распространения 332, 356

— релаксации 98

— цикла 258

ВТПС и РП задача 360, 395—405

Выпуклые функции 54

Вычислительная техника 327

Гауссовский процесс 82, 84

Гиперпоказательное распределение 18

Глобальная информация о маршрутах 473

Глобальный алгоритм распределения 223

Гордона и Ньюэлла модель 251

Двойственная сетевая задача 360

Двусвязность 399

Детерминированное распределение 18

Джексона теорема 215

Диалоговый терминал 275

Дистанционная обработка данных 308

Дистанционный доступ 274—285, 339

— асинхронное временное уплотнение 282

— — вероятность перегрузки 285

— — задолженность 279

— — колыцевая система 281

— — петлевая система 281

— — процесс восстановления на входе 279

— — — групповых поступлений 276

— — размер накопителя 285

— — синхронное временное уплотнение 282

- — среднее время ожидания 285
 — — — цикла 282
 — — — длина очереди 282
 — — задержка 283
 — — стационарное решение 280
 — — требования, зависящие от времени 279
Дисциплина обслуживания 129, 339
Диффузионное приближение 81, 101
 — — граничные условия 97
 — — инфинитезимальная дисперсия 87
 — — инфинитезимальное среднее значение 87
 — — непрерывность 86
 — — нормированное преобразование 97, 98
 — — решение, зависящее от времени 99
 — — система $M/G/1$ 101
 — — — дисперсия 105
 — — — нестационарное решение 105
 — — — нормированное среднее значение 109
 — — — стационарное решение 105
 — — — среднее время ожидания 105
 — — — универсальная кривая 109
 — — условная дисперсия 87
 — — третьего порядка 127
 — — условное среднее значение 87
 — — установившееся решение 95
 — — часа наибольшей нагрузки 110—120
 — — число требований в системе 97
 — — уравнение 92
Дифференциальные уравнения в частных производных. 89
Длина пути 367, 375
Допускающий альтернативы выбора маршрутов 336, 338, 375, 481, 504
- Единичный импульс** 18
Естественная единица времени 114
 — — задолженности 114
 — — незаконченной работы 98
- Зависимость характеристики сети от стоимости** 404
Задание заднего плана 206
Задача ВПС и РП 359, 392—395
 — — — вогнутые стоимости 395
- — — глобальный минимум 394
 — — — двойственная форма 394
 — — — длина 393—395
 — — — линеаризованные стоимости 393, 395
 — — — линейная функция стоимости 392
 — — — локальные минимумы 392, 395
 — — — минимальная стоимость 394
 — — — отрицательные циклы 393, 395
 — — — подоптимальный алгоритм ВПС и РП 393
 — — — потоки по кратчайшим маршрутам 393, 395
 — — — реализуемый начальный поток 394
 — — — поток 393
 — — — фиксированный выбор маршрутов 392
Задержка периода занятости 135
Задолженность 34, 279
Законы сохранения 137—142, 146, 168, 232
 — — для системы $M/G/1$ 138
 — — $G/G/1$ 141
 — — интегральное ограничение 232
 — — непрерывная форма 168
 — — распределение времени ожидания 137
 — — среднее время ожидания 137
Замены ребер метод 398
Звездообразная сеть 340, 375
- Избыточность** 484—501, 494, 533—551
Измерения в сети ARPANET 476—485, 505—533
Интегральное ограничение 232
Интенсивность обслуживания 206
 — стказов 59
Инфинитезимальная дисперсия 87
 — производящая матрица 23
Инфинитезимальное среднее значение 87
Информационный центр сети (NIC)
- Йенсена неравенство** 55
- Канала длина** 356, 386, 393—395
Квазистационарное распределение 110

- Квант 188
Кингмана — Кёллерстрёма приближение 66
Кингмана предположение 65
Коллективное использование процессора 192—195
Коллективных меток метод 35
Коммутатор хороший 313, 330
Коммутация каналов 331, 332
— задержка соединения 332
— сигнальное сообщение 331
— установление пути 331
— пакетов адаптивная 334. *См. также Сети ЭВМ*
— адресование сообщения 336
— анализ 337
— аналогия с передачей по трубе 332, 336
— время обслуживания 335
— ответа 335—336
— вышедшее из порядка сообщение 337
— диалоговый трафик 336
— заголовок 332
— задержка сети 332, 336, 339, 361, 362, 469, 506—508, 525—532
— каналы связи 337
— коммутационные ЭВМ 337
— контроль ошибок 337
— малые сообщения 334
— начальная задержка 324
— нумерация 337
— операционные правила 337
— пакет 332
— память в узле 334
— передача с промежуточным хранением 336
— файлов 336
— потерянные сообщения 337
— преобразование кодов 334
— при передаче через спутник 405—441
— — — — — абсолютно оптимальный контур 422
— — — — — автоматическая передача квитанции 406
— — — — — влияние 440, 441
— — — — — время распространения 405
— — — — — высокая скорость передачи 405
— — — — — динамическая система с резервированием 432—434
— — — — — модель с конечным числом пользователей 410, 419, 423, 428
— — — — — наложения 407, 408
— — — — — свойства 405, 406
— — — — — система с резервированием 408, 432—435
— — — — — временное уплотнение 432
— — — — — динамическая 432—435
— — — — — наложения 434
— — — — — перезервированные окна 434
— — — — — окна системы ALOHA 434
— — — — — очередь на спутнике 434
— — — — — резервированные окна 434
— — — — — скорость передачи 434
— — — — — частотное уплотнение 433
— — — — — случайное время передачи 408
— — — — — случайный доступ 407
— — — — — трафик канала 409
— — — — — широковещание 405
— — — — — ALOHA синхронная 408—434
— — — — — вектор состояния канала 423
— — — — — вероятность успешной передачи 416
— — — — — время первого достижения (ВПД) 426
— — — — — распределения 416
— — — — — допустимые скорости источников 411
— — — — — достижимая скорость передачи 413
— — — — — задержка передачи 417
— — — — — контур равновесия 424—426
— — — — — контуры задержка — скорость 418—422
— — — — — скорости передачи 414, 428
— — — — — критическая задолженность 426, 431
— — — — — линейная модель с обратной связью 423, 430
— — — — — линия нагрузки канала 425
— — — — — моделирова-

- ние на ЭВМ 431
 — модель задержки 415—423
 — с бесконечным числом пользователей 424, 427
 — конечным числом пользователей 419, 423, 428
 — нагрузка канала 423
 — надежный участок 426
 — непрерывная аппроксимация 379
 — неустойчивость 380, 425
 — одновременная оптимизация 431
 — окно 410
 — оптимальная характеристика 419
 — оптимальное правило решения 431
 — оптимальные контуры скорости передачи 428
 — оценки по наихудшему случаю 427
 — парализованный канал 425
 — период пиковая процедура управления 430
 — пуассоновский трафик в канале 416
 — рабочая точка 426
 — сильный пользователь 419
 — скорость передачи 410—411, 413—415, 418, 423
 — среднее число пакетов 419
 — средняя задержка пакета 419
 — стационарный вход 425
 — стоимость вычислений 431
 — управление с предельной точкой 431
 — устойчивость 423—434
- канала 425
 фоновые пользователи 419
 Ховарда метод 431
 численные расчеты 427
 эффективность 418—419
 АЛОНА чистая 408, 409
 период уязвимости 409
 скорость передачи 409
 процедура выбора маршрутов 338
 пути 334
 разбиение 332, 334
 сообщений 336
 синтез 338
 скорость передачи 335, 336
 сети 336
 трафик в реальном времени 336
 уплотнение сообщений 336
 упорядочение 337
 управление потоками 334, 338, 481, 484, 495, 552—560
 управляющие сигналы 333
 хранение в буферах 337
 Континуум 223
 Контрасти 327—329
 Концентратор 341
 Кратчайшее дерево 340
 Кратчайший путь 385
 Кругового опроса алгоритм 195—201
 дисперсия времени ответа 200
 распределение времени ответа 200
 среднее время ответа 198
 характеристики 198—200
 Коэффициент использования 19
 нетерпения 167
- Лагранжиан (функция Лагранжа)**
 372
Лапласа преобразование 17
Линдли интегральное уравнение 41
Линейная модель с обратной связью
 423
Литтла формула 20
Ловушки 494
Локальное равновесие 264, 315

- Максимальный поток** 369
 —— **минимальное сечение, теорема** 369, 383
Маркова цепь 21
Марковские свойства 264
 — **системы** 18
Марковский процесс 21, 22
Масштабное преобразование, влияние 315—327
Матрица кратчайших путей 385
Меченое требование 132, 145, 153, 203, 224
Минимальная задержка, оценка 471
Минимальное покрывающее дерево 340
Мичиганская терминальная система 253
Многоточечная линия 340
Множественный доступ с сигналом занятого 452
Модели с многими ресурсами 247—267
 —— **асимптотическая характеристика** 255—261
 —— **вероятности переходные** 250
 —— **время цикла** 258
 —— **Гордона и Ньюэла модель** 251
 —— **использование** 273
 —— **классы требований** 261, 265
 —— **с центральным обслуживающим прибором** 268—271
 —— **вероятности переходные** 269
 —— **стационарные** 270
 —— **узкое место** 271
 —— **насыщение** 258, 261
 —— **относительное использование** 252
 —— **решение в виде произведения** 267
 —— **сети массового обслуживания** 248—270
 —— **стационарные вероятности** 265
 —— **терминальные узлы** 256, 259
 —— **типы узлов** 263, 264
 —— **узкое место** 253
 —— **характеристики сети** 252
 —— **эффективные алгоритмы** 266
Модель пороговая 368
 —— **с конечным числом источников нагрузки** 241—247
 —— **асимптотическое значение времени ответа** 244
 —— **время ответа** 242
 —— **размышления** 241
 —— **насыщение** 243
 —— **обобщение** 244
 —— **приближение** 241
 —— **стационарное распределение** 247
 —— **терминалы** 242
 — **центральным обслуживающим прибором** 268—272
Модем 329
Момент поступления 16
Моменты 16, 17
Мультипакетное сообщение 349, 469, 481
Мультипрограммирование 268—274

Насыщение 243, 257, 261, 370, 382
 — **преждевременное** 370
Насыщения сечения метод 399
Начальная задержка 135
Независимость от закона распределения 199, 247, 265
Независимые приращения 82
Незаконченная работа 34, 92, 462
Нелинейная стоимостная функция 465
Непрерывное приближение 75, 91—93, 107, 424
Нижняя граница среднего остаточного времени (НГСОВ) 58
Нормальное распределение 101
Нормированная случайная величина 83
Нормированное диффузионное приближение 109

Обменные соотношения 315
Обозначения 16—18
Обратные уравнения 89
Обслуживание в порядке приоритета 114—152
 —— **абсолютный приоритет** 151
 —— **безразмерная форма** 146
 —— **закон сохранения** 146
 —— **оптимизация** 151
 —— **относительный приоритет** 145

- — — — распределение времени ожидания 146
 — — — — среднее время ожидания 146
 Обслуживание с фиксированными приоритетами 144
 Один ресурс 188—247
 ·Оператор выбора максимума 40
 ·Оптимальные распределительные алгоритмы, зависящие от времени 176, 240
 ·Оптовая скидка 312, 313, 341, 378
 ·Остаточное время 32
 Отклонения потоков метод 343—345, 386—388
 Отобранный интервал 32
 Отражающий экран 85, 96
 Очень удаленная машина HOST 501
 ·Очередь единица 278
- Первоочередное обслуживание кратчайших требований** 150, 173
 Передача, как по трубе 332, 336
 Передачи с промежуточным хранением, блокировка 486—488
 Период субзанятости 135
 Петлевая сеть 375
 Пинг-понг 473
 Плата за место в очереди 164—172
 — — — глобальная стратегия оптимизации 172
 — — — коэффициент нетерпения 167
 — — — нулевая плата 167
 — — — ограничение на среднюю плату 168
 — — — оптимизация 168
 — — — показательное распределение размера платы 171
 — — — постоянная 166
 — — — решение 171
 — — — среднее время ожидания 165
 Поглощающий экран 97
 Показательная граница 63
 Поллячека — Хинчина равенство 33
 Полносвязная сеть 374
 Поток требований, сообщений 315, 337
 Потоки различных грузов 383
 Потолочная функция 544
 Предположение о независимости 362
 Приближения при большой нагрузке 46—49, 95
 — — — показательная форма 49
- — — — распределение времени ожидания 49
 — — — — среднее время ожидания 49
 — — — — центральные результаты 49
 Приоритета функция 130
 Приоритеты, зависящие от времени 152—163
 — — — системы r -го порядка 159
 — — — среднее время ожидания 158
 — — — степени свободы 158
 Проверка несущей при множественном доступе 444, 455
 Программа управления сети (NCP) 349, 534
 Промежуточное непрерывное приближение 119
 Пропускная способность 315
 — — сечения 368
 Пропускных способностей задача выбора (ВПС) 359, 371—382
 — — — избыточная пропускная способность 371
 — — — линейные стоимости 371—378
 — — — — добавочная стоимость в долларах 372
 — — — — квадратного корня закон выбора 373
 — — — — коэффициент стоимостный 371
 — — — — — минимаксное решение 377
 — — — — оптимальное решение 373, 377
 — — — — постоянные стоимости коэффициенты 373, 376
 — — — — — выбор пропускных способностей 373
 — — — — концентрация трафика 374
 — — — — — средняя длина пути 374, 375
 — — — — — средняя задержка минимальная 373, 376
 — — — — — наименее необходимый канал 380
 — — — — — насыщение 382
 — — — — — непрерывные пропускные способности 371
 — — — — — оптимальный выбор 371

- пороговые характеристики 381, 382
- пропорциональный выбор пропускных способностей 378
- стоимостная функция 330—339, 371—381
- дискретизация 380
- линейная 371—378
- логарифмическая 378
- степенная 378, 379
- Простейшая дискrimинация 199
- Процедура выбора маршрутов 338, 358, 375, 382, 389, 469—474, 481—504
 - аддитивная 338, 375, 471, 474
 - детерминированная допускающая альтернативы 338
 - допускающая альтернативы 338, 375, 469—474
 - случайная 338
 - требования 469
 - фиксированная 338, 375, 389
- Процесс поступлений 76, 356
- уходов 76
- Прямые уравнения 88
- Пуассоновский исходящий процесс 229
- процесс 21
- Путь 360

- Работа** 310
- Работы скорость выполнения 314
- Радиосвязь наземная с коммутацией пакетов 441—455
 - бесконечное число пользователей 445
 - время обнаружения 452
 - распространения 442
 - готовый терминал 443
 - доступ 441
 - задержка повторной передачи 448
 - интервал уязвимости 446
 - использование канала 445
 - местных пользователей терминалы 441
- множественный доступ с проверкой несущей (МДПН) 442, 443
- незахват 443
- ненастойчивый МДПН 442, 443, 446, 447
- повторная передача 443
- предел видимости 445
- пропускная способность 445, 447, 455
- протокол 442
- режим множественного доступа с сигналом занятости 452
- синхронный МДПН 443, 447
- ненастойчивый 447
- 1-настойчивый 444, 447
- скорость передачи 445—447, 453
- скрытые терминалы 450
- случайный доступ 442
- сравнение протоколов: 448—455
- средняя задержка 448
- характеристика задержка — скорость 448
- центральная станция 443
- широковещательный канал 442
- Разделение времени 185—285
 - дистанционный доступ 274
 - законы сохранения 231—233
 - коллективное использование процессора 192—195
 - модели с конечным числом источников нагрузки 241—247
 - многими ресурсами 247
 - одним ресурсом 188—247,
 - модель циклическая 271, 272
 - мультипрограммирование 268—274
 - точные границы для среднего времени ответа 233—241
- Распределение без памяти 22
- достигнутого времени обслуживания 192—194
- общего вида 18
- потоков 359, 382—392
- большие сбалансированные сети 389

- глобальный минимум 384
- длина пути 385
- инкрементальный стоимостный коэффициент 387
- метод отклонения потоков 386—388
- ограничение по пропускной способности 384
- оптимальный алгоритм выбора маршрутов 386—388
- поток по кратчайшему пути 385
- реализуемость 384
- реализуемый алгоритм начального потока 387, 388
- сохранение потоков 383
- требования к потокам 383, 384
- фиксированная процедура выбора маршрутов для потоков 389, 390
- целевая функция 383
- ARPANET 390
- Распределенное управление 350
- Распределенный алгоритм управления 471
- Распределительный алгоритм 194, 195
 - круговой опрос 195—201
 - многоуровневый алгоритм 208—223
 - дисциплина КО 213—218
 - ОПП 213
 - ПЗП 213
 - интегральное уравнение 216, 217
 - период занятости нижнего уровня 213
 - примеры 217—223
 - размер группы 217
 - ООП 201, 202
 - распределение времени ответа 202
 - среднее время ответа 201
 - пакетная обработка 194, 195
 - ПЗП 202—208
 - конечный квант 205
 - минимальное среднее время ответа 206
 - преобразование времени ответа 206
 - среднее время ответа 205
 - усеченное распределение 204
 - эгоистичный алгоритм 223—231
 - грубый алгоритм распределения 223
 - ограничения 227
- плотности распределения времени ожидания 227
- — — примеры 229—231
- — — среднее время ответа 227
- — — эгоистичный круговой опрос 229
- Ресурс 309—317
 - большой 314
 - единый 317
 - закрепленный 310, 311
 - использование 315
 - пропускная способность 315
 - пул 312
 - свободный 313
- Ресурса коллективное использование 309—327, 436—441
 - большое число пользователей 436
 - быстродействие 436—438
 - контуры задержки 438, 439
 - МДЧР 436
 - плохое использование 436
 - полный трафик 437
 - пользователи с группирующейся нагрузкой 438
 - синхронная ALOHA 436
 - среднее время пребывания в системе 436
 - характеристика задержки 436
 - число пользователей 437
- Решения о выборе маршрутов, местные 471
- Рождественская блокировка 495

- Свертка дискретная 71
- Свободного состояния продолжительность 59
- Свойство производить моменты 17
- Связанности ограничение 389
- Связной процессор 186
- Сети анализ 360—371
 - время обработки в узле 363
 - — — распространения 363
 - детерминированная модель 367
 - длина пути 367
 - задержка в отсутствие нагрузки 367
 - интенсивность потоков сообщений 360, 361
 - масштабный коэффициент 328
 - моделирование на ЭВМ 364—367
 - насыщение 368
 - — — сети 367
 - пороговое поведение 364, 367

- предположение о независимости 362
- разложение 357
- решение 363
- средняя задержка сообщений 362
- трафик сообщений 362
- управления 363
- узкое место 364, 368
- феноменологическое поведение 364
- ARPANET 363—365
- динамика 364, 365
- задержка 339, 357, 362, 470, 482, 506—508, 525—532
- модель 354—358
- разложение 357
- распределение 344
- скорость передачи 480, 482, 489, 500—508, 558
- стоимость 357
- структура 330—343
- теория потоков 382
- Сети массового обслуживания 29—31, 248—270
- общего пользования с коммутацией пакетов 562
- Сети ЭВМ 307—567
 - анализ 337
 - выбора маршрута процедура 338, 358, 375, 382, 389, 469—474, 481—504
 - вычислительные средства 330
 - дистанционная терминальная сеть 331
 - задачи 330
 - задержка сообщений 339, 357, 362, 470, 508, 525—532
 - каналы 330
 - связи 337
 - коммутационная ЭВМ 330, 337
 - коммутация каналов 331, 332
 - сообщений 331
 - цепей 331, 332
 - сообщений 331
 - цепей 331, 332
 - линии передачи 330
 - операционные правила 337
 - пакет 332
 - пакетная коммутация 330—343.
 См. также Коммутация пакетов
 - передача с промежуточным хранением 336
 - подсеть ресурсов и пользователей 330
 - связи 330
 - поток сообщений 299
- режимы 330
- синтез 338
- средняя задержка сообщений 339, 357, 362, 470, 508, 525—532
- терминалы 331
- течение данных, как по трубе 332, 336
- топологическая конфигурация 339
- функции 330, 331
- Сеть без петель 248
- Сечение 369
- критическое 399
- Синхронное временное уплотнение 283
- Система очередей 188
- КО с групповыми поступлениями 214
- сохраняющая работу 137
- с резервированием 408, 432—435
- Случайный доступ 407
- СМО (система массового обслуживания) 16
 - с обратной связью 188
- Сокращенные обозначения 18
- Сообщение 356
- Сообщений коммутация 331—333
 - время обработки 331
 - выбор маршрута 331
 - заголовок сообщения 331
 - задержка 333
 - передача с промежуточным хранением. *См. также* Сети ЭВМ 331
 - уплотнение 336
- Сообщения задержка 339, 357, 362, 470, 482, 506—508, 525—532
- Сопрягающий процессор сообщений 344, 351, 352
- Спектральная факторизация 41
- Спутник 344, 373
- Спутники для связи внутри страны 440, 441
- Спутниковая связь 439
- Спутниковый процессор IMP 435, 436
 - буферы 435
 - случайная задержка повторной передачи 435
 - формирование окон 435
 - характеристика 436
 - экспериментальная сеть 436
- Среднее время ответа 190
- растроченное время 191
- Средняя длина пути 368
- Срок службы 32
- Стоимостная функция 339, 371—380
- Стоимостное ограничение 358

- Стоимость обработки 440, 441
 — связи 440, 441
 Строгое приоритетное обслуживание 144
 Структура системы 316
- Таблица номеров участков 565
 — ожидающих лидеров (PLT) 491
 Тайм-аут 350, 488
Такача интегродифференциальное уравнение 35
 Тандемные каналы 461, 462
 Телефонная сеть 329
 Терминалы 242, 328, 340
 Техника обработки информации 308
 — связи 327
- Топологии, пропускных способностей и распределения потоков задача выбора 360, 395—405
 — ВМУР подоптимальный алгоритм 397
 — двойственная форма 395
 — двусвязанность 399, 400
 — дискретизованное решение 402
 — зависимость характеристики сети от стоимости 404
 — линейное приближение 398
 — локальный минимум 399
 — метод замены ребер 398
 — насыщения сечения 399
 — нижняя граница 404
 — предельная стоимость 405
 — степенная аппроксимация 398, 399
 — устранение ребер 397
 — эвристическое решение 397
 — экономия от изменения масштаба 399
 — эффективность по стоимости 404
 — ARPANET 397—405
- Топологическая конфигурация 339
 Топологические рассмотрения 360, 395—405
- Точные границы среднего времени ответа 233—241
 Трафик в реальном времени 497
 Трафика связной процессор 341
 — — — внешнего 355
 — — — внутреннего 356
 — — — в реальном времени 336
 — — — данных 329
 — — — диалогового 335
 — — — ограничения 358
 — — — речи 329
 Требование следующего сообщения (RENМ) 477
 Требования 188, 310
 — заднего плана 203
 Тейлора ряд, разложение 46, 83, 89, 90, 113
- Убывающая интенсивность отказов 59
 Убывающее среднее остаточное время 58
 Узел 355
 Узкое место 253, 256, 259, 270, 364, 368
 Уплотнение по требованию 341
 Уплотнения устройство 341
 Управление перспективных исследований 343
 — потоками 334, 338, 481, 484—495, 552—560
 — блокировка 484—488, 495
 — — передачи с промежуточным хранением 487, 488
 — — глобальное управление потоками 487
 — — дополнительное навешивание 488
 — — допуск пакетов 486
 — — задержка допуска 486
 — — изаритмическое управление потоками 487
 — — компоновочная блокировка 440, 446, 484, 488, 494, 495
 — — компоновочные буферы 487
 — — локальное управление потоками 486
 — — ограниченное буферное пространство 485
 — — оценка задержки 504
 — — передача одиночных пакетов 488
 — — связные протоколы 487
 — — сравнение вариантов 553—556
 — — тайм-аут 350, 488
 — — упорядочение 488
 — — ARPANET, вариант 1 490, 496, 497

- — — вариант 2 490—494, 500
- — — билеты 490
- — — возвратное управляющее сообщение 493
- — — дополнительно навешенное сообщение ALL 493
- — — избыточность 494, 533—551
- — — максимальное число сообщений 490
- — — место для номера сообщения 491
- — — мультипакетное сообщение 490, 491
- — — память для компоновки 490, 491
- — — последовательность событий 491
- — — таблица ожидающих лидеров 491
- — — упорядочение сообщений 490
 - — — ALL 493
 - — — GVB 493
 - — — PLT 491
 - — — REQALL 492
- — — вариант 3 490, 552—560
- — — блок управления сообщениями 552
- — — компоновочные буфера 553
- — — мультипакетный трафик 553
- — — номер сообщения 553
- — — скорость передачи 554
- — — упорядочение сообщений 552
 - — — фазировка 505, 508, 554, 556, 560
 - — — PLT 553
 - — — REQALL 553
 - — — RENM 488
- Усеченные времена обслуживания 204
- Условная дисперсия 87
- Условное среднее значение 87
- Ухудшения 494

- Фиксированный алгоритм выбора маршрутов** 390
- Флойда** алгоритм 385
- Фоккера — Планка** уравнение 89, 92
- Функция штрафа** 199, 239, 384

- Ховарда** итерационный метод 431
- Хороший коммутатор** 313, 330

- Центр измерений сети (NMC)** 344, 476
- — — управления сети (NCC) 344, 351, 476
- Централизованная сеть** 339
- Центральная предельная теорема** 84
- Цикл задержки** 134—137
- Циклическая модель СМО** 271—274
- — — блок передачи данных 271
- — — диффузионное приближение 271
- — — использование центрального процессора 273
- — — полумарковские процессы 271
- — — стационарное решение 272
- Циклы** 473

- Часа наибольшей нагрузки** приближение 110—117
- — — безразмерное уравнение 114
- — — диффузионное приближение 114, 115
- — — естественная единица времени 114
- — — единица задолженности 114
- — — квазистационарное среднее время ожидания 115
- — — непрерывное приближение 115
- — — нормальное распределение 116
- — — нормированное уравнение 114
- — — переход через насыщение 112
- — — показательная форма 116
- — — универсальное уравнение 114
- — — явление «длинного хвоста» 116
- Частота ошибочных пакетов** 522
- Четырьмя — Колмогорова** уравнение 23, 86
- Чернова граница** 62
- Число пользователей большое 314
- требований в системе 17

- Эгоистичный алгоритм ПЗП** 230
- круговой опрос 229
- Экономия, связанная с изменением масштаба** 378, 399

- ALL 493
 ALOHA синхронная 408—434
 ALOHA чистая 408, 409
 ANTS 353
 ARPA 343
 ARPANET 343—354, 398—405, 435,
 468—567
 — блокировка 484
 — дополнительного навешивания
 495
 — вариант 1 490, 496, 497
 — вариант 2 490—494, 500
 — вариант 3 490, 552—560
 — виртуальная линия 480
 — влияние интерференции 483
 — время между поступлениями па-
 кетов 528
 — — ответа 350
 — выбор маршрута 350
 — выход линий из строя 351
 — допускающий альтернативы выбор
 маршрутов 338, 375, 481—504
 — задержка однопакетного сообще-
 ния 526
 — — мультипакетного сообщения
 529
 — — сообщения 361, 470, 508, 525—
 533
 — избыточность в линии 533—500
 — — — классификация 535
 — — — на соединение 545
 — — — определение 534
 — — — подсетевые управляющие
 сообщения 538
 — — — — управляющие команды
 HOST—HOST 541
 — — — — уровень 0 534
 — — — — уровень 1 534
 — — — — уровень 2 534
 — — — — фоновый трафик 534
 — — — — эффективность линий
 544, 545, 546
 — измерения 476—485, 505—533
 — внутренний трафик 520
 — — внутриузловой трафик 513, 515
 — — глобальные измерения на сети
 519
 — — длина пути 512
 — — — сообщения машины HOST
 510
 — — зависимость трафика от рас-
 стояния 514
 — — интенсивность ошибочных па-
 кетов 522
 — — — поступления сообщений от
 машин HOST 520
 — — — искусственное порождение на-
 кетов 476, 478
 — — — использование канала 520
 — — — памяти 509
 — — — мгновенные замеры 476, 478
 — — — наиболее загруженная линия
 521
 — — — — популярный пункт 518
 — — — накопленная статистика 477
 — — — проверки состояния 476, 478
 — — — размер пакета 510
 — — — расстояние в числе участков
 512
 — — — скорость передачи 480, 505
 — — — средняя задержка сообщения
 525—533
 — — — трассировка 476
 — — — — пакета 476
 — — — трафик 509
 — — — управление, сбор и анализ 476,
 477
 — — фаворитные пункты 515
 — — частота повреждений процессо-
 ра IMP 525
 — — число пакетов на сообщение
 511
 — — шлейфовая задержка 506, 507,
 512
 — информационный центр сети
 (NIC) 344
 — история 343, 344
 — карта географическая 348
 — — логическая 307, 308
 — коды, обнаруживающие ошибки
 489
 — компоновка 481, 484, 487, 495, 502
 — — блокировка 484, 487, 494
 — — критические ресурсы 481
 — — ловушки 494
 — — максимальный размер пакета 350
 — — — сообщения 349
 — — моделирование на ЭВМ 469—476
 — — модель 469
 — — задержки в отсутствие нагру-
 зки 531
 — — мультипакетное сообщение 349,
 469, 481
 — — недельные измерения 508—533
 — — очень удаленная машина HOST
 (VDH) 501
 — — ошибки 351, 522
 — — пакет 349
 — — поврежденная аппаратура 488
 — — подсетевые управляющие сообще-
 ния 537
 — — присвоение номера сообщения 501
 — — программная контрольная сумма
 490

- процедура пользователей 354
- рождественская блокировка 495
- сводка процедур управления потоками 555
- скорость передачи 480, 484, 498, 500—508, 557
- измерения 433, 505
- среднее время между пакетами 529
- таблица маршрутов 472
- номеров участков 565
- тайм-аут 350
- терминальный процессор IMP 352, 353
- топология 344
- трассировка пакетов 536, 539
- трафик в реальном времени 497
- сети, рост 533
- требование следующего сообщения (RFNM) 477
- упорядочение 494
- управление потоками 338, 481, 484—495, 552—560
- управляющая программа сети (NCP) 349, 534
- управляющие команды 541
- — процедуры (подсетевые) 501
- управляющий трафик 525
- феномены 532
- формат одиночного пакета 536
- функции 349
- цель эксперимента 344
- центр измерений сети (NMC) 344, 376
- — управления сети (NCC) 344, 351, 476
- ширина полосы 350
- шлейфовая задержка 482, 483, 506, 507, 525—533
- — гистограмма 507
- — измерения 506, 507, 512, 525—533
- эволюция 345
- HNT 565
- HOST 343
- IMP 344, 351, 352
- MLC 353
- PLT 501
- RFNM 477
- TIP 352, 353
- — быстродействие 353
- — многолинейный контроллер 353
- — память 353
- — скорости передачи данных 353
- — стоимость 353
- — терминалы 353
- VDH 501, 558
- AUA 473
- BBN 343
- D/D/1 318
- G/D/1 422
- G/D/m 284
- G/G/1 19, 38—40, 49—64, 69—75, 141, 316, 325
- верхняя граница 49—51
- время ожидания 40
- границы распределения для времени ожидания 62—64
- дискретное приближение 69—75
- закон сохранения 141
- Линдли интегральное уравнение
- нижняя граница 52—62
- приближение 48
- среднее время ожидания 42
- численный анализ 75
- G/G/m 12, 42, 64—69, 117, 316, 325—327
- влияние изменения масштаба 325—327
- границы 66—67, 325—327
- коэффициент изменчивости 325
- использования 64
- обзор 530, 531
- оптимальное m 326
- приближение большой нагрузки 65
- пропускная способность 325
- распределение времени ожидания 65
- среднее время ожидания 68
- условие стабильности 64
- G/G/ ∞ 117
- G/M/1 36
- G/M/m 37, 38, 64, 65, 69, 461
- GVB 493
- HNT 565
- M/D/1 416, 422, 436, 462
- M/G/1 31—36, 101—110, 138
- время ожидания 32
- — пребывания в системе 33
- дисперсия времени ожидания 33
- диффузионное приближение 101—110
- — дисперсия 104, 105
- — — зависимость от времени 105—107
- — — нормированное среднее ожидание 109
- — — стационарное решение 104
- — — среднее время ожидания 104
- — — универсальная кривая 109
- закон сохранения 138
- моменты распределения периода занятости 34

- переходные характеристики 31
- период занятости 34
- свободное время 33
- среднее время ожидания 32
- число требований в системе 32
- число требований в системе 33
- M/G/∞* 35
- M/M/1* 25—27
 - время между уходами 27
 - групповое (неординарное) обслуживание 27
 - групповые (неординарные) поступления 27
 - дисперсия числа требований в системе 25
 - конечное число требований (источников нагрузки) 28
 - период занятости 27
 - плотность распределения вероятности времени ожидания 26
 - — — — — пребывания в системе 26
 - распределение числа требований в системе 25
 - свободный период 26
 - среднее время ожидания 25
 - — — пребывания в системе 25
 - число требований в системе 25
- M/M/m* 28, 182, 248, 317—325
 - большие системы 318
 - влияние изменения масштаба 317—324
 - время ответа 319
 - доля занятых ресурсов 322
 - использование ресурсов 324
 - обменные соотношения 318
 - оптимальное *m* 318
 - распределение числа требований в системе 28
 - среднее время ожидания 321
 - — — ответа 318
 - — — число заданий 322
 - стационарные вероятности 317
 - эффективность 324
- NCC 344, 351, 476
- NCP 439, 534
- NIC 344
- NMC 344, 476
- PLT 491
- PUA 471
- REQALL 492
- RENM 477
- TELNET 349
- TENEX 344, 511, 547
- UNIX 354
- VDH 501
- z*-преобразование (производящая функция) 27, 33

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Основы теории массового обслуживания	15
1.1. Обозначения	16
1.2. Общие результаты	19
1.3. Марковский процесс. Процессы размножения и гибели. Пуассоновский процесс	21
1.4. Система $M/M/1$	25
1.5. Система $M/M/m$	28
1.6. Марковские сети массового обслуживания	29
1.7. Система $M/G/1$	31
1.8. Система $G/M/1$	36
1.9. Система $G/M/m$	37
1.10. Система $G/G/1$	38
Литература	43
Глава 2. Границы, неравенства и приближения	44
2.1. Приближения при большой нагрузке	46
2.2. Верхняя граница для среднего времени ожидания	49
2.3. Нижние границы для среднего времени ожидания	52
2.4. Границы для хвоста распределения времени ожидания	62
2.5. Некоторые замечания о системе $G/G/m$	64
2.6. Дискретное приближение	69
2.7. Непрерывное приближение для систем массового обслуживания	75
2.8. Диффузионные процессы	81
2.9. Диффузионное приближение для системы $M/G/1$ [13]	101
2.10. Приближение для часа наибольшей нагрузки [40, 41]	110
Литература	120
Задачи	122
Глава 3. Системы массового обслуживания с приоритетами	129
3.1. Модель	130
3.2. Подход к расчету среднего времени ожидания	132
3.3. Цикл задержки, обобщенный период занятости и распределение времени ожидания	134
3.4. Законы сохранения	137
3.5. Обратный порядок обслуживания	142
3.6. Обслуживание в порядке приоритета	144
3.7. Приоритеты, зависящие от времени	152
3.8. Оптимальная плата за место в очереди	164
3.9. Дисциплины, зависящие от времени обслуживания	172
Литература	177
Задачи	178
Глава 4. Вычислительные системы коллективного пользования с множественным доступом	185
4.1. Определения и модели	188
4.2. Распределение достигнутого обслуживания [45]	192
4.3. Алгоритм пакетной обработки	194
4.4. Распределительный алгоритм кругового опроса	195
4.5. Распределительный алгоритм обслуживания в обратном порядке	201
4.6. Распределительный алгоритм с передним и задним планами	202
4.7. Многоуровневый алгоритм разделения процессора [51, 53, 56]	208
4.8. Эгоистичные распределительные алгоритмы [49, 35, 58]	223
4.9. Закон сохранения для систем коллективного пользования [52]	231

4.10. Точные границы для среднего времени ответа [52]	233
4.11. Модели с конечным числом источников нагрузки	241
4.12. Модели с многими ресурсами	247
4.13. Модели мультипрограммирования	268
4.14. Дистанционный доступ терминалов к вычислительным машинам	274
Литература	286
Задачи	290
Глава 5. Сети ЭВМ; анализ и проектирование	307
5.1. Коллективное использование ресурсов	309
5.2. Некоторые контрасты и компромиссы	327
5.3. Структура сети и коммутация пакетов	330
5.4. Сеть ARPANET; описание существующей сети	343
5.5. Определения, модель и формулировки задач	354
5.6. Анализ задержки	360
5.7. Задача выбора пропускных способностей	371
5.8. Задача распределения потоков	382
5.9. Задача выбора пропускных способностей и распределения потоков	392
5.10. Некоторые топологические рассмотрения; применения к сети ARPANET	395
5.11. Коммутация пакетов при передаче через спутник	405
5.12. Коммутация пакетов при наземной радиосвязи	441
Литература	455
Задачи	461
Глава 6. Сети ЭВМ; измерения, управление потоками и недостатки сети ARPANET	468
6.1. Моделирование на ЭВМ и выбор маршрутов	469
6.2. Первые измерения на сети ARPANET	476
6.3. Управление потоками	486
6.4. Блокировки, ухудшения и ловушки	494
6.5. Скорость передачи по сети	500
6.6. Данные о сети ARPANET, полученные в течение одной недели	508
6.7. Избыточность в линиях сети ARPANET	533
6.8. Недавние изменения в процедуре управления потоками	552
6.9. Нерешенные проблемы	560
Литература	563
Задачи	565
Список обозначений	568
Сводка важнейших результатов	573
Предметный указатель	586

Л. Клейнрок

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОЧЕРЕДЯМИ

Старший научный редактор Л. П. Якименко

Младший научный редактор Н. Н. Титова

Художник В. А. Чернецов

Художественный редактор Л. Е. Безрученков

Технический редактор Т. А. Максимова

Корректор Т. П. Пашковская

ИБ № 2003

Сдано в набор 24.10.78. Подписано к печати 15.03.79. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага кн.-журн.
Гарнитура латинская. Печать высокая. 18,75 бум., л., 37,50 печ. л. Уч.-изд. л. 38,11.

Тираж 10 700 экз. Изд. № 20/9690. Зак. 1007. Цена 2 р. 90 к.

Издательство «Мир». Москва, 1-й Рижский пер., д. 2

Московская типография № 11 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

Москва, 113105. Нагатинская ул., д. 1

ՀՅԱ
ՊԵՏ
ՀԱՅ