Exercise 1.5

(1) $2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0$

$-2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$

$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & -5 & 8 & 0 \\ 0 & \textcircled{-12} & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2$$

x_3 is free and having many solutions in it. So, the system does not have trivial solution.

(2) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$

$-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$

$2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_2 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 - 2R_1$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \longrightarrow (1)$$

$$-7x_2 + 2x_3 = 0 \longrightarrow (2)$$

$$3x_3 = 0 \longrightarrow (3)$$

(3) $\Rightarrow$ $\boxed{x_3 = 0} \longrightarrow (4)$

put equ (4) in equ (2)

$$-7x_2 + 2(0) = 0$$

$$-7x_2 + 0 = 0$$

$$-7x_2 = 0$$

$$\boxed{x_2 = 0} \longrightarrow (5)$$

put equ (4) & (5) in (1)

$$x_1 - 2(0) + 3(0) = 0$$

$$x_1 - 0 + 0 = 0$$

$$\boxed{x_1 = 0}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ So the system is a trivial solution.

(3) $-3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0$

$-2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 7 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad 3R_2 - 2R_1$$

$$-3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0$$
$$7x_2 + 28x_3 = 0$$
x_3 is free.

x_3 is free so the system is non-trivial.

(5) $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$
$-4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0$
$-3x_2 - 3x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \text{ divide with } 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \text{ divide with } -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 - R_3$$

Basic x_1 & x_3

$$x_1 + x_3 = 0 \longrightarrow (1)$$

$$x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow (2)$$

(1) $\Rightarrow$ $x_1 = -x_3$

(2) $\Rightarrow$ $x_2 = -x_3$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(7) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

So,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 - 3R_2$$

$$x_1 + 9x_3 - 8x_4 = 0 \longrightarrow (1)$$

$$x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \longrightarrow (2)$$

(1) $\Rightarrow$ $x_1 = -9x_3 + 8x_4$

(2) $\Rightarrow$ $x_2 = 4x_3 - 5x_4$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x_3 + 8x_4 \\ 4x_3 - 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -9x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8x_4 \\ -5x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$X = x_3 \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(9) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$Ax = 0$ so,

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad 3R_2 + 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \text{ divide with } 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \text{ divide with } 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$-4x_2 + 3x_3 = 0$

x_2 is free.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + x_3 \\ -3x_3/4 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \downarrow \end{matrix} \quad X = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ -3x_3/4 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(13) $x_1 = 5 + 4x_3$

$x_2 = -2 - 7x_3$

x_3 is free

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 4x_3 \\ -2 - 7x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -7x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(15) $x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \rightarrow (1)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_2 + 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2\begin{bmatrix}-5\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2 \longrightarrow (2)$

$$X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5x_2 + 3x_3 - 2\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5x_2\\x_2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}$$

(17) $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$

$-4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -16$

$-3x_2 - 3x_3 = 12$

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 4 & 8\\-4 & -4 & -8 & -16\\0 & -3 & -3 & 12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\-4 & -4 & -8 & -16\\0 & -3 & -3 & 12\end{bmatrix} \quad R_1 \div 2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 4\\0 & -3 & -3 & 12\end{bmatrix} \quad R_2 \text{ divide with } -4$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 4\\0 & 1 & 1 & -4\end{bmatrix} \quad R_3 \text{ divide with } 3$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & -4\end{bmatrix} \quad R_2 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ R_2 intersect with R_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $R_1 - R_2$

$$x_1 + x_3 = 8$$

$$x_2 + x_3 = -4$$

x_3 is free

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - x_3 \\ -4 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(19) $a = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

a is parallel to b

So,

$$x = a + tb$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2 - 5t$$
$$x_2 = 3t$$

(21) $P = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$; $q = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

P & q is parallel

$q - P$

$$q - P = \begin{bmatrix} 4 - 3 \\ 1 - (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \therefore$$

$$X = P + t(q - P)$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$