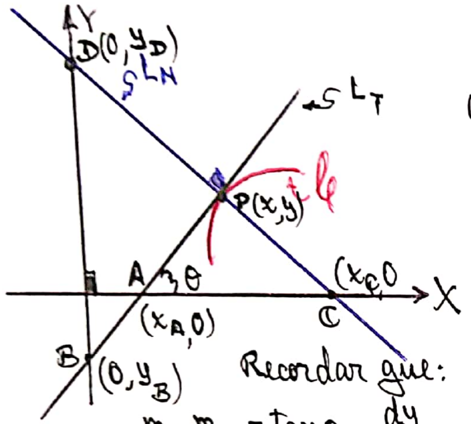
Aplicaciones Geométricas

Rectas Tangente y Normal a una Curva

Se trata de encontrar una curva $\mathscr{C}$, su ecuación, a partir una característica de la recta tangente o normal a la curva en n punto $P(x,y)$, punto de tangencia.

A) Recta Tangente : L_T



$$L_T: \quad Y - y = y'(X - x) \quad \dots(\mathrm{I})$$

$a_1)$ $A = L_T \cap X$: $X = x_A$ y $Y = 0$ $\quad\dots(1)$

(1) en (I): $0 - y = y'(x_A - x)$

$$\Rightarrow -\frac{y}{y'} = x_A - x \Rightarrow \boxed{x_A = x - \frac{y}{y'}} \quad \dots(\alpha)$$

ó $\quad x_A = \dfrac{xy' - y}{y'}$

Recordar que:

$$m = m_{L_T} = \tan\theta = \frac{dy}{dx} = y'$$

$a_2)$ $B = L_T \cap Y$: $X = 0$ y $Y = y_B$ $\quad\dots(2)$

$$\Rightarrow (2) \text{ en } (\mathrm{I}): \quad y_B - y = y'(0 - x) \Rightarrow \boxed{y_B = y - xy'} \quad \dots(\beta)$$

B) Recta Normal : L_N

$$L_N: \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad \dots(\mathrm{II})$$

$b_1)$ $C = (x_C, 0) \in L_N \cap X$: $X = x_A$ y $Y = 0$ $\quad\dots(3)$

$$\Rightarrow (3) \text{ en } (\mathrm{II}): \quad 0 - y = -\frac{1}{y'}(x_C - x) \Rightarrow yy' = x_C - x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_C = x + yy'} \quad \dots(\gamma)$$

$b_2)$ $D = (0, y_D) \in L_N \cap Y$: $X = 0$ y $Y = y_D$ $\quad\dots(4)$

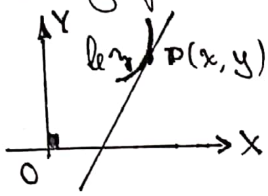
$$\Rightarrow (4) \text{ en } (\mathrm{II}): \quad y_D - y = -\frac{1}{y'}(0 - x) = \frac{x}{y'}$$

$$\Rightarrow \quad y_D = \frac{x}{y'} + y \Rightarrow y_D = \frac{x + yy'}{y'} \quad \dots(\delta)$$

Ejercicios de Aplicación

10. Hallar una curva que pase por el punto $(0,-2)$ de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces.

Solución: Recordemos que el coeficiente angular es la pendiente de la recta, recta que forma un ángulo, de medida θ, con el semie-eje positivo $\overrightarrow{OX}$, es decir que: $m = \tan(\theta) = y' = \dfrac{dy}{dx}$.



Según el enunciado, podemos establecer que:

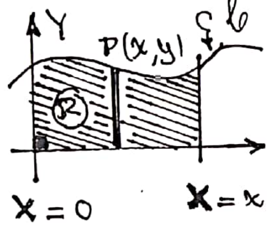
$$\frac{dy}{dx} = 3y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 3\int dx \Rightarrow \ln|y| = 3x + C \ldots (I)$$

$$(0,-2) \in \mathcal{C} : \ \ln|-2| = \ln 2 = 0 + C \Rightarrow C = \ln 2$$

$$\Rightarrow \text{En } (I): \ \ln|y| = 3x + \ln 2 \Rightarrow y = -2e^{3x}$$

11. Hallar una curva para la cual el área Q, limitada por la curva, el eje $\overrightarrow{OX}$ y las dos ordenadas $X = 0$, $X = x$, sea una función dada de y: $\quad Q = a^2 \ln\left(\frac{y}{a}\right)$

Solución:



$$A(R) = Q = a^2 \ln\left(\frac{y}{a}\right) \Rightarrow \int_0^x y(\tau)\,d\tau = a^2 \ln\left(\frac{y}{a}\right) \ldots (I)$$

$$\Rightarrow D_x : \ D_x \int_0^x y(\tau)\,d\tau = a^2 \ln\left(\frac{y}{a}\right) = a^2 D_x(\ln y - \ln a)$$

$$\Rightarrow \quad y = y(x) = a^2\left(\frac{y'}{y} - 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = a^2 \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int dx = \int a^2 \frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{a^2}{y} + C \qquad\qquad x = -\frac{a^2}{y} + C \qquad \ldots (II)$$

En (I), si $x = 0$: $\displaystyle\int_0^0 y(\tau)\,d\tau = 0 = a^2 \ln\left(\frac{y}{a}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{a}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{a} = 1$,

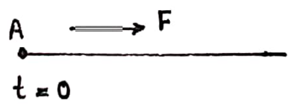
luego, si $x = 0$ entonces, $y = a$ ó $y(0) = a$

$$\Rightarrow \text{En } (II): \quad 0 = -\frac{a^2}{a} + C \Rightarrow 0 = -a + C \Rightarrow C = a, \text{ entonces,}$$

$$x = -\frac{a^2}{y} + a \Rightarrow \frac{a^2}{y} = a - x \Rightarrow y = \frac{a^2}{a - x}$$

12. Un punto material de masa igual a 1 g se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante $t = 0$, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10\,s$ la velocidad era igual a $50\ cm/s$, y la fuerza, igual a 4 dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

Solución: Según el enunciado: $F = \dfrac{Kt}{v}$ $\quad \ldots (I)$



Además, por la ley de Newton: $F = ma = m\dfrac{dv}{dt} \ldots (1)$

Reemplazando (1) en (I): $m\frac{dv}{dt} = \frac{kt}{v} \Rightarrow \int mv\,dv = \int kt\,dt \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{kt^2}{2} + \frac{C}{2}$

$\Rightarrow mv^2 = kt^2 + C$, si $m = 1g \Rightarrow v^2 = kt^2 + C$ ...(II)

$\Rightarrow$ Como : $F = ma \Rightarrow 4$ dinas $= 1g \cdot a \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 4\frac{cm}{s^2}$ ...(2)

De (II), derivando respecto al tiempo: $D_t v^2 = D_t(kt^2 + C) \Rightarrow \cancel{2}v\frac{dv}{dt} = \cancel{2}kt$

si $t = 10s$, $v(10) = 50\frac{cm}{s} \Rightarrow 50(\frac{cm}{s}).4(\frac{cm}{s^2}) = k.10(s) \Rightarrow k = 20(\frac{cm^2}{s^4})$

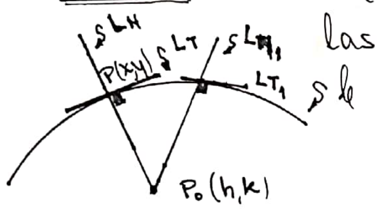
En (II), si $t = 10s$: $(50)^2 = 20(10)^2 + C \Rightarrow C = 500$

En (II) : $v^2 = 20t^2 + 500$

Para $t = 1' = 60s \Rightarrow v^2 = 20(60)^2 + 500 = 100(720+5) \Rightarrow v = 50\sqrt{29}$ cm/s

113. Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante, es una circunferencia.

Solución: Sea $P_0(h,k)$ el punto constante por donde pasan todas las normales a la curva ℓ, en el punto $P(x,y)$ variable



$$m_{L_N} = -\frac{1}{m_{L_T}} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\frac{d}{d}}$$

$$\Rightarrow \frac{y-k}{x-h} = -\frac{dx}{dy} \Rightarrow \int(y-k)dy = -\int(x-h)dx$$

$$\Rightarrow \frac{(y-k)^2}{2} = -\frac{(x-h)^2}{2} + \frac{R^2}{2} \Rightarrow \ell: (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

114. Una bala se introduce en una tabla de $h = 10$ cm de espesor con la velocidad $v_0 = 200$ m/s traspasándola con la velocidad $v_1 = 80$ m/s. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo del movimiento de la bala por la tabla.

Solución: Por la ley de Newton: $\sum F = ma = m\frac{dv}{dt}$

Por dato: $m\frac{dv}{dt} = kv^2 \Rightarrow m\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v^2} = k\int_0^t dt$

$$\Rightarrow -m.\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v_1} = kt\Big|_0^t \Rightarrow -m\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) = kt$$

$$\Rightarrow -\frac{m(v_0 - v_1)}{v_0 v_1} = kt \Rightarrow t = \frac{m(v_1 - v_0)}{k v_0 v_1} \quad ...(1)$$

Además: $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} = mv\frac{dv}{dx} = kv^2 \Rightarrow m\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v} = k\int_0^{10}dx$

$$\Rightarrow m\ln v\Big|_{v_0}^{v_1} = kx\Big|_0^{10} \Rightarrow m(\ln v_1 - \ln v_0) = k(10-0) \Rightarrow k = \frac{m}{10}\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) ...(2)$$

$$\Rightarrow (2) \text{ en } (1): \ t = \frac{m(v_1 - v_0)}{\frac{m}{10}\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right).v_1 v_0} \Rightarrow t = \frac{10(v_1 - v_0)}{v_1 v_0 \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)} = \frac{3}{40\ln(2{,}5)} \text{ seg.}$$

115. Un barco retrasa su movimiento por acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10m/s, después de 5 s su velocidad será 8 m/s. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad se hará 1 m/s?

Solución: Como: $F = ma = m\frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow m\int_{10}^{8}\frac{dv}{v} = -k\int_{0}^{5}dt$

$\Rightarrow m\ln v\Big|_{10}^{8} = -kt\Big|_{0}^{5} \Rightarrow m(\ln 8 - \ln 10) = -k(5)$

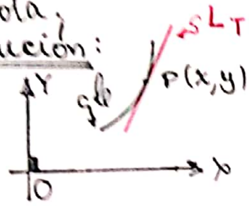
$\Rightarrow m\ln\left(\frac{8}{10}\right) = -5k \Rightarrow k = -\frac{m}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)$ ...(1)

Además: $m\int_{10}^{1}\frac{dv}{v} = -k\int_{0}^{t}dt \Rightarrow m\ln v\Big|_{10}^{1} = -kt \overset{De(1)}{=} \frac{m}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)t$

$\Rightarrow m(\ln 1 - \ln 10) = \frac{\cancel{m}}{5}\ln(0,8).t \Rightarrow -\ln 10 = \frac{t}{5}\ln(0,8) \Rightarrow t = -\frac{5\ln(10)}{\ln(0,8)}$

116. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.

Solución:



Según el enunciado, podemos establecer que: $m = kx$

$\Rightarrow m = y' = \frac{dy}{dx} = kx \Rightarrow \int dy = \int kx\,dx$

$\Rightarrow \wp : \; y = \frac{k}{2}x^2 + C$

117. Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 min desde 100° hasta 60°C, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?

Solución: Según el enunciado, de la ley de Newton de enfriamiento de un cuerpo, en el aire, podemos expresar que:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_0) \quad \text{...(I)}$$

donde: $T(t)$, es la temperatura del cuerpo, luego de transcurridos un tiempo t de iniciado el proceso. ($T(t) > T_0$)

T_0, es la temperatura del aire ($T_0 = 20°C$)

t, es el tiempo transcurrido.

k constante de velocidad de enfriamiento ($k < 0$)

Resolviendo la ecuación diferencial, dada en (I), por variables separables, tenemos:

A) $\int_{100}^{60}\frac{dT}{T-20} = k\int_{0}^{20}dt \Rightarrow \ln(T-20)\Big|_{100}^{60} = kt\Big|_{0}^{20}$

$\Rightarrow \ln(40) - \ln(80) = k(20-0) \Rightarrow -\ln\left(\frac{80}{40}\right) = 20k \Rightarrow k = -\frac{1}{20}\ln 2$ ...(1)

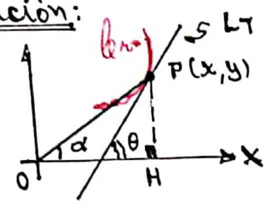
B) $\int_{100}^{30}\frac{dT}{T-20} = k\int_{0}^{t}dt \Rightarrow \ln(T-20)\Big|_{100}^{30} = kt\Big|_{0}^{t}$

$\Rightarrow \ln 10 - \ln 80 = kt \Rightarrow -\ln\left(\frac{80}{10}\right) = kt \Rightarrow -\ln 8 = kt$

$\Rightarrow -\ln 2^3 = kt \Rightarrow$ De (1): $-3\ln 2 = \left(-\frac{1}{20}\ln 2\right)t \Rightarrow \boxed{t = 60\,\text{min}}$

118. Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

Solución:



Según el enunciado, podemos establecer que:

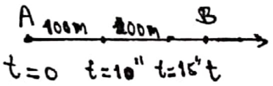
$$\tan\theta = n\tan\alpha \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = n\cdot\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = n\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = n\ln x + C_1$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^n + \ln C = \ln(Cx^n) \Rightarrow y = Cx^n$$

119. Determinar el camino S recorrido por un cuerpo durante el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 s el cuerpo recorre 100 m y en 15 s, 200 m

Solución:



Como : $v = v(t) = kS \Rightarrow \frac{dS}{dt} = kS$ ...(I)

Resolviendo por variables separables, logramos:

A) $$\int_{100}^{200}\frac{dS}{S} = k\int_{10}^{15}dt \Rightarrow \ln S\Big|_{100}^{200} = kt\Big|_{10}^{15}$$

$$\Rightarrow \ln 200 - \ln 100 = k(15-10) \Rightarrow \ln\left(\frac{200}{100}\right) = k(5) \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5} = \ln 2^{\frac{1}{5}}$$

B) $$\int\frac{dS}{S} = k\int dt \Rightarrow \ln S = kt + C \quad \text{...(II)}$$

Si $t = 10'$, $S = 100\text{m}$ $\Rightarrow \ln 100 = \frac{\ln 2}{5}(10) + C = 2\ln 2 + C = \ln 2^2 + C$

$$\Rightarrow \ln 100 - \ln 4 = C \Rightarrow C = \ln\left(\frac{100}{4}\right) \Rightarrow C = \ln 25 \quad \text{...(1)}$$

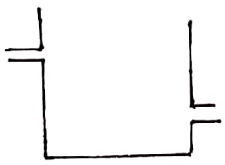
$$\Rightarrow (1) \text{ en (II)}: \ \ln S = kt + \ln 25 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{25}\right) = kt$$

$$\Rightarrow \frac{S}{25} = e^{kt} \Rightarrow S = e^{kt} = 25e^{\frac{t}{5}\ln 2} = 25e^{\ln 2^{t/5}}$$

$$\Rightarrow S = S(t) = 25\left(2^{\frac{t}{5}}\right)$$

120. El fondo de un depósito de 300 litros de capacidad, está cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg de sal para 3 litros de agua) y que la cantidad de agua pura dada disuelve 1/3 de kg de sal por minuto, hallar la cantidad de sal que contendrá la disolución al cabo de una hora.

Solución: Recordemos que : $\text{Concentración} = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}}$



Sea x la cantidad de sal, en kg, que habrá al cabo de transcurridos un tiempo de t minutos, de iniciado el proceso. Según el enunciado:

$$\frac{dx}{dt} = k(C_s - C_i(t)) = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right) = \frac{k(100-x)}{300}$$

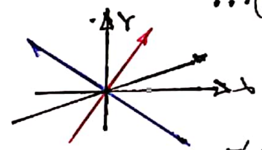
126. Demostrar que la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ condición inicial $y|_{x=0} = 0$ tiene infinitas soluciones de la forma $y = Cx$. Esta misma ecuación con la condición inicial $y|_{x=0} = y_0 \neq 0$ no tiene solución alguna. Trazar las curvas integrales.

Solución: Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $y(0) = 0$ ...(I)

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + C_1 = \ln x + \ln C \rightarrow \ln y = \ln(Cx) \quad \text{...(II)}$$

$$\Rightarrow \quad y = Cx$$

Son familias de rectas , con pendiente C, que pasan por el origen de coordenadas



Si $x_0 = 0$ y $y_0 \neq 0 \Rightarrow$ En (II): $y_0 = C.0 = 0$, pero $y_0 \neq 0 \Rightarrow \nexists\, C \in \mathbb{R}$.

127. Demostrar que el problema $\frac{dy}{dx} = y^{\alpha}$, $y|_{x=0} = 0$ tiene al menos dos soluciones para $0 < \alpha < 1$ y una para $\alpha = 1$. Trazar las curvas integrales para $\alpha = 1/2$, 1.

Solución: Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^{\alpha}$, $y(0) = 0$ ...(I)

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^{\alpha}} = dx \rightarrow \int y^{-\alpha} dy = \int dx \Rightarrow \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x + C, \ \alpha \neq 1 \ \text{...(II)}$$

Si $x = 0$, $y = 0$, entonces, en (II): $\frac{0}{1-\alpha} = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \text{En (II):} \quad y^{1-\alpha} = (1-\alpha)x \quad \text{...(III)}$$

a) Si $\alpha = \frac{1}{2}$: $y^{1/2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$

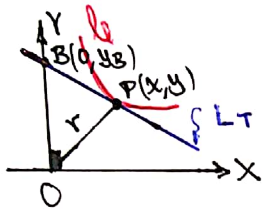
b) Si $\alpha = 1 \Rightarrow$ De (I): $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln y = x + C_1$

171. Hallar una curva que posea la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la distancia del punto de contacto.

(Problema resuelto en las páginas 128 - 129, problema N° 02)

172. Hallar la curva para la cual la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY al radio - vector es una cantidad constante.

Solución:



Por dato: $OB/OP = k \implies OB = kOP$ ... (I)

a) La recta tangente, a la curva $\mathcal{C}$, en el punto $P(x,y)$ es: ... (II)

$L_T: \quad Y - y = y'(X - x)$

donde: $B = L_T \cap Y$, $X = 0$, $Y = y_B$, luego, en (II):

$y_B - y = y'(0 - x) \implies y_B = y - xy'$ ... (1)

b) Radio vector: $r = OP = \sqrt{x^2+y^2}$ y $OB = y_B$ ... (2)

$\implies$ (1) y (2) en (I): $y_B = y - xy' = k\sqrt{x^2+y^2}$ (Ecuación Homogénea) ... (I) ... (4)

sea $y = vx$ ... (3) $\implies D_x$: $y' = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$\implies$ (3) y (4) en (I): $vx - x\left(v + x\dfrac{dv}{dx}\right) = k\sqrt{x^2+(vx)^2}$

$\implies vx - vx - x^2 \cdot \dfrac{dv}{dx} = kx\sqrt{1+v^2} \xRightarrow{\div x} -x\dfrac{dv}{dx} = k\sqrt{1+v^2}$

$\implies \displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\int \frac{k\,dx}{x} \implies \ln(v+\sqrt{1+v^2}) = -k\ln x + C_1 = -\ln x^k + C_1$

$\implies \ln x^k + \ln(v+\sqrt{1+v^2}) = C_1 = \ln C \implies \ln(x^k(v+\sqrt{1+v^2})) = \ln C \cdot \cancel{x}$

$\implies x^{k-1} \cdot x(v+\sqrt{1+v^2}) = C \implies x^{k-1}(\underbrace{vx}_{y} + \sqrt{x^2+(vx)^2}) = C$

$\implies$ De (3): $y + \sqrt{x^2+y^2} = C^{1-k} \implies \sqrt{x^2+y^2} = Cx^{1-k} - y$

$\xRightarrow{()^2} x^2+y^2 = (Cx^{1-k} - y)^2 \implies x^2 + \cancel{y^2} = C^2x^{2-2k} - 2Cx^{1-k}y + \cancel{y^2}$

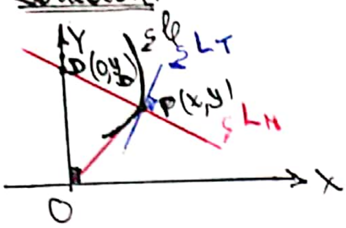
$\implies 2Cx^{1-k}y = C^2x^{2-2k} - x^2 \implies y = \dfrac{1}{2}\left(Cx^{1-k} - \dfrac{1}{C}x^{1+k}\right)$

173. Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada.

Solución:

174. Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal a cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Solución:



Según enunciado: $OD = OP \Rightarrow y_D = \sqrt{x^2+y^2}$ ...(1)

Sea $P(x,y)$ un punto de la curva ℓ donde se traza la recta normal L_N: $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ ...(I)

donde $D(0,y_D) = L_N \cap Y$, luego: $X = 0$ y $Y = y_D$ ...(2)

$\Rightarrow$ (2) en (I): $y_D - y = -\frac{1}{y'}(0 - x) \Longrightarrow y_D = y + \frac{x}{y'}$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1): $y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x = (\sqrt{x^2+y^2} - y)y'$ ...(II)

$\Rightarrow x\,dx + (y - \sqrt{x^2+y^2})\,dy = 0$ (Ecuación Homogénea) ...(II)

Hagamos el cambio: $x = vy$ ...(4) $\Rightarrow dx = y\,dv + v\,dy$ ...(5)

$\Rightarrow$ (4) y (5) en (II): $vy(y\,dv + v\,dy) + (y - \sqrt{(vy)^2+y^2})\,dy = 0$

$\overset{\div y}{\Longrightarrow} \quad yv\,dv + v^2dy + (1 - \sqrt{v^2+1})\,dy = 0$

$\Rightarrow \quad yv\,dv + (v^2+1-\sqrt{v^2+1})\,dy = 0 \overset{\int}{\Longrightarrow} \underbrace{\int \frac{v\,dv}{v^2+1-\sqrt{v^2+1}}}_{I_1} + \int \frac{dy}{y} = \int 0$ ...(III)

Sea: $v^2+1 = t^2$ ...(α) $\Rightarrow v\,dv = t\,dt$ ...(β)

De (α) y (β), si: $I_1 = \int \frac{v\,dv}{v^2+1-\sqrt{v^2+1}} = \int \frac{t\,dt}{t^2-t} = \int \frac{dt}{t-1} = Ln(t-1)$

$\Rightarrow$ De (α): $I_1 = \int \frac{v\,dv}{v^2+1-\sqrt{v^2+1}} = Ln(\sqrt{v^2+1} - 1)$ ...(γ)

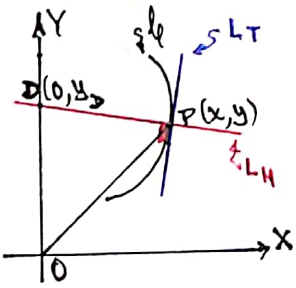
$\Rightarrow$ (γ) en (III): $Ln(\sqrt{v^2+1} - 1) + Ln\,y = C_1 = Ln\,C$

$\Rightarrow Ln[y(\sqrt{v^2+1}-1)] = Ln\,C \Rightarrow \sqrt{(vy)^2+y^2} - y = C \rightarrow$ De (4): $\sqrt{x^2+y^2} - y =$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = C + y \overset{()^2}{\Longrightarrow} x^2 + y^2 = C^2 + 2Cy + y^2 \Longrightarrow x^2 = 2Cy + C^2$

175. Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje OY por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Solución:



según el enunciado: $x.OD = 2OP^2$ ...(1), siendo el punto $P(x,y)$, perteneciente a la curva ℓ, por se traza la recta normal L_N. Entonces:

$L_N: \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$

$D(0,y_D) \in L_N \cap Y$: $X = 0$, $Y = y_D = OD$,

luego: $y_D - y = -\frac{1}{y'}(0 - x) \Rightarrow y_D = y + \frac{x}{y'} = OD$

$\Rightarrow$ En (1): $x(y + \frac{x}{y'}) = 2(\sqrt{x^2+y^2})^2 \Longrightarrow xy + \frac{x^2}{y'} = 2(x^2+y^2)$

$\Rightarrow [2(x^2+y^2) - xy]\,dy - x^2dx = 0$ (Ecuación Homogénea) ...(I)