《大宇之形》摘录——大啖熟肉：基本无害的弦论宇宙几何科普

朱俊帆 评论 大宇之形

2023-08-10 23:45:33 已编辑 江苏

这篇书评可能有关键情节透露

还记得本科去数学系上低维拓扑学、研究生代数拓扑，参加低维拓扑冬季学校，听梁灿彬的微分几何与代数群论公开课，有时间就去物理系、力学系。怀念那些没有内卷，不用刷分，没人逼迫，纯靠兴趣，海绵般吸收知识的日子，那可真是自己独享的时光。

摘 录

1-3

具有这种特征（卷曲成一个小圆）的空间，正如之前提到过的，术语称之为紧致的。“紧致”一词可以有很直觉的定义，物理学家有时会说“紧致的物体或空间就是可以塞进汽车行李箱里的东西”。但它也有更精确的定义：如果你沿着任一方向走得够久，就一定可以回到出发点或出发点附近。卡鲁札的五维时空同时包括了扩张的（无穷的）和紧致的（有限的）维度。

棘手之处在于弯曲空间中，当我们在流形上逐点移动时，每段切向量的测量方式也会随之改变。为了处理这种情形，黎曼引入了度规张量，借此来计算每一点上切向量的长度。在二维的情况，度规张量是一个2 × 2矩阵，而在n维时，度规张量是一个n×n矩阵。值得一提的是，尽管这种测量的新方法是黎曼的伟大创见，它仍然极为仰赖毕氏定理，只是把它推广到非欧几何的情形而已。具有“黎曼度规”（Riemannian metric）的空间称为“黎曼流形”（Riemannian manifold）。有了黎曼度规，我们就可以测量任意维度的流形上任何曲线的长度。但我们能做的并不仅限于测量曲线长度，我们也可以测量该空间里某一曲面的面积，在此所指的“曲面”并不仅限于一般所指的二维曲面，“面积”也不仅止于一般的二维面积。借由黎曼度规的发明，原先只能模糊界定的空间，就可被赋予明确描述的几何；曲率不再只是个笼统的概念，而是可以给空间中的每一点都标上精确的数字。而且，黎曼证明了这种想法可以应用到所有维度的空间。

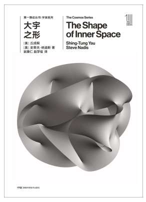
我所考虑的群称为空间的“基本群”（fundamental group），其中包含的元素是空间中的闭圈，就像前述的A和B。如果一个空间存在不平庸的闭圈，该空间就具有不平庸的基本群。（反过来说，如果空间中的每个闭圈都可以缩小成点，这个空间的基本群就是平庸的。）我证明了：如果A、B这两个元素可交换，即A×B=B×A，则在这个空间中，必定存在一个更低维度的“子曲面”，或更明确地说，是一个环面。我们可以把二维环面想成是两个圆的“乘积”。我们先画一个大圆（想成是穿绕甜甜圈的那个圆），接着再以大圆圆周上的每一点当作圆心，画一个小圆，其中每个小圆的半径均相同。把这些全等的小圆汇集起来，就会组成一个环面。另一个想法，是把圈圈饼（Cheerios）串起来，再把两端接起来，扎紧成一个环。在数学上说环面是大圆和小圆这两个圆的乘积，就是这个意思。在我推广普莱斯曼而得的定理中，这个环面的两个圆正好由闭圈A和B所代表。

一个曲面的整体（global）拓扑性质不只可影响曲面的局部几何，也可以影响整体的几何性质。这点之所以能成立，是因为本例中由闭圈所定义的基本群，是整个空间的整体性质，而非局部性质。要证明一个闭圈可以连续地变形成另一个闭圈，你或许得在整个曲面上移来移去才能做到，因此这是空间的整体性质。事实上，这正是当代几何的重要主题之一：去理解一个给定的空间拓扑条件，可以支持什么样的整体几何结构。“曲率支配拓扑”是几何学家拥戴的基本信条，而达成此目的的工具则是微分方程。

最小曲面圆盘既不会自交，也不会与那些对称作用下的任何圆盘相交。大致上可以这样描述：这些对称作用下的镜像圆盘都是彼此“平行”的。唯一的例外是：一旦圆盘有相交，则必定是完全重合等同的。

史密斯当初的断言正确无误，三维空间的确无法绕着一条打结的线旋转。然而，尽管听起来很荒谬，但是如果在更高维的空间，史密断的断言就失败了，在四维以上的空间里，绕着打结的线旋转确实可能存在！

> 大宇之形



作者: [美] 丘成桐 / [美] 史蒂夫·纳迪斯
出版: 湖南科学技术出版社
定价: 79.00元
装帧: 平装
页数: 510
时间: 2018-1

> 侵权投诉通道

这也是我第一次注意到最小曲面论证可以应用于拓扑学的问题。而且它也显示：用几何学来解决拓扑和物理问题的想法是可行的。

我们一开始先假设其中某一特定空间的总质量“不是”正的，接着我们论证，在这样的空间中可以构造出一个“面积极小化”（area-minimizing）的曲面，由于它所在的空间类似我们的宇宙，观测到的物质密度是正的，因此这个最小曲面的曲率平均是正的。但运用拓扑的论证，我们却能证明这个曲面的曲率平均是“零”。从这个矛盾的结果可以知道，原来的前提是错误的。也就是说，如果广义相对论的假设是正确的话，那么正物质密度就蕴含了正总质量。上述说法乍看之下像是循环论证，但其实不然。在某一特定空间（例如我们的宇宙）里，即使总质量不是正的，它的物质密度仍然可能是正的。这是因为总质量的来源有两方面：物质和引力。即使来自于物质的贡献是正的（一如我们论证开始的假设），还是可能因为来自引力的贡献是负的，而使得总质量是负的。让我们换一种说法：从总质量不为正的前提出发，我们证明可以找到一个面积极小化的“肥皂膜”，然而同时我们又证明在类似我们的宇宙里，这种肥皂膜不可能存在，因为它的曲率性质互相抵触。于是从非正总质量的前提，导出了重大的矛盾，因此前提必然不正确，总质量（或总能量）必定是正的。就这样，我们在1979年提出了证明，如物理学家格罗赫所期望的解决了这个问题。孙理察和我把研究过程拆成两部分，前述发现其实只是我们研究的第一阶段。因为格罗赫所提出的问题其实是特例，是物理学家称为“时间对称”（time-symmetric）的情况。孙理察和我先处理这个特例，而前述导出矛盾的论证也是基于这个假设。若要证明更普遍的情形，需要解的是格罗赫的学生张奉舒（Pong Soo Jang，音译）所提出的一个方程式。张相信这个方程没有整体解，因此并未尝试去解它。严格来说，确实如此没错，但是我们觉得只要再加上一个前提，容许方程解在黑洞边缘可以暴增到无穷大，就可以将它解开。结果加上这个简化问题的前提后，我们就能把一般的情况，化约到先前已经证出的特例。威滕解释说：“如果正质量定理不成立，这对理论物理学会有极严重的意义，因为它意味着在广义相对论里，传统时空并不稳定。”

在广义相对论里，质量只能从整体来定义，换句话说，我们只能考虑整个系统的质量，就好像把它封闭在一个箱子里，然后从非常、非常遥远的距离——其实是无穷远——来测量。至于“局部”质量（例如某一物体的质量），则迄今仍没有明确的定义，尽管外行人反而可能以为这是比较简单的课题。

囚陷曲面有着非常巨大的“正均曲率”（positive mean curvature）。即使是向外射出的光线都会因为这个巨大的曲率而又再弯回来，就好像天花板、地板和墙壁都不断压缩着光线，以至于光线最后都汇聚到中心。“如果曲面面积一开始就是渐减的，它会因为聚焦效应而持续减小。”我的同事孙理察解释道：“你也可以想象球面上，以北极为起点的大圆，离开北极后它们会彼此拉开，但因为球面的曲率是正的，最后大圆会开始敛聚，最终聚集在南极上。正曲率就有这种聚焦效应。”彭罗斯和霍金证明了，囚陷曲面一旦形成，就会退化成光线无法从中逃脱的物体，也就是所谓的黑洞。

大约在2005年左右，芬斯特（Felix Finster）、卡兰（Niky Kamran）、史莫勒（Joel Smoller）和我考虑自旋黑洞在面临某种扰动时是否会保持稳定的问题。结果可以这样说，当你用某些方式去“踢”这类黑洞时，它们不会分成两半、转速太快以致失控，或是整个碎裂开来。虽然这项研究结果看来很稳固，但它仍不算完成，因为我们不能排除其他五花八门的“踢法”可能会造成不稳定。

1969年，彭罗斯提出一种借由减少黑洞的角动量，而从旋转中的黑洞取得能量的机制。在他设想的情境里（称为“彭罗斯过程”），一块回旋卷向黑洞的物质可能会被撕裂成两块，一块跨过“事件视界”（event horizon）掉入黑洞，另一块被抛掷出来，带着比原先卷入时更大的能量。我们考虑的不是粒子，而是类似的、朝向黑洞运动的波，然后证明了彭罗斯过程的数学是完全确当的。

杨—米尔斯方程是在四维空间中运作的，它描述了在原子核内结合夸克和胶子的强核力、与放射性衰变有关的弱核力，以及作用于带电粒子的电磁力。一般人通常会试着利用所在空间的几何和拓扑性质去求解杨—米尔斯方程，但多纳森将整个问题反转过来，他认为这些方程的解，应该会透露所在四维空间的讯息。更明确说，杨—米尔斯方程的解应该和数学家称之为“不变量”（invariant）的概念有关，也就是可以判定四维形体是否相同的关键识别特征。

“怪球”（exotic sphere）则不然。（七维）怪球是一个处处光滑的七维流形，虽然它可以连续地变形成正常的（圆球状）的七维球面，但却不能光滑地变形成正常的七维球面。因此怪球和正常球面是同胚，但不是微分同胚。本章一开始提到的数学家米尔诺，他在1962年获得菲尔兹奖，主要就是因为证明了怪球确实存在。

一个光滑的流形如果和平坦的欧氏空间同胚，也一定是微分同胚，这在任何维度都成立，唯独四维除外。在四维的情形，可以有流形与平坦的四维欧氏空间同胚，但却不是微分同胚。事实上，有无穷多种四维流形和四维欧氏空间同胚，但彼此却都不微分同胚。这是四维空间一个奇特又令人困惑的事实。例如多纳森曾说过，在3+1维时空（三维空间加上一维时间），“电场和磁场看起来很相似。但在其他维度，它们在几何上是不同的物件。一个是张量（矩阵的一种），另一个是向量，两者无从比较。但四维是特例，两者同时为向量。任此出现了其他维度看下到的对称性。”

对于大多数的四维流形，威滕证明了赛柏格—威滕方程解的数目仅由该流形的拓扑所决定。接着陶布思证明了这些方程解的数目，与某一类型或“族”（family）可以置入此流形的子空间（或曲线）数目是相同的。知道有

多少可以置入流形里的这类曲线，就可以推导出此流形的几何性质，以及其他一些讯息。所以我们可以说，陶布思的定理大幅推进了这类流形的研究。

庞加莱猜想说的是：如果在一个紧致的三维空间上，所能画出的每一个可能的闭圈，都可在不撕裂闭圈或空间的要求下收缩成一个点，那么这个空间与球面是拓扑等价的。“黎奇流”（Ricci flow）基本上，这是一种把凹凸不平和其他不规则修整成光滑的技巧，借此可让弯缠起伏的空间转变得到较均匀的曲率和几何性质，以便更容易地辨识出它们的基本型态。汉米尔顿阐明了当空间在黎奇流的影响下变形时，圆凸状的几何物体总是会演变成球面，这和庞加莱的猜测是一致的。但他了解到，更复杂的物体无可避免会遇到障碍，产生折叠或其他奇点。在汉米尔顿所列出的奇点中，除了一种之外，其余的他都有办法处理，可以用拓扑“手术”（surgery）消除。拓扑手术是汉米尔顿引入并在四维中广泛运用的概念。手术的程序非常复杂，但若能顺利执行，就可以证明所研究的空间，正如庞加莱的猜测确实和球面等价。汉米尔顿始终无法以手术消除的奇点，是雪茄形的突起。所以假如他能论证雪茄型奇点根本不会出现，就能更清楚地理解奇点问题，从而大幅逼近庞加莱和瑟斯顿两大猜想的解决。汉米尔顿的结论是，要这么做的关键，是把李—丘估计推广到曲率不必为正的普遍情形。在帕瑞尔曼的许多研究结果中，他说明如何回避雪茄型奇点，从而化解了汉米尔顿不能解决的问题。事实上，现在普遍认为这项肇始于汉米尔顿、完成于帕瑞尔曼的计划，已经解决了百年难题庞加莱猜想，以及较晚出现的瑟斯顿几何化猜想了。

4

卡拉比猜想的问题形式，是要证明“复空间”（complex space，随后会解释）的拓扑性质以及其几何性质（或曲率）之间的联系。基本想法是以某个单纯的拓扑空间为起点，建立起某种几何结构，以便稍后再以各种方式处理。卡拉比所问的问题虽然在细节上极有原创性，但在形式上则是常见的几何学问题：给定一个一般的拓扑空间，或说粗糙的形体，究竟上面容许哪些几何结构?

卡拉比猜想所讨论的是具有一种特殊曲率（称为“黎奇曲率”，稍后会解释）的空间，而一个空间的黎奇曲率和该空间的物质分布有关，如果我们说一个空间是“黎奇平坦”的，意思是它的黎奇曲率为零，亦即空间中没有物质。从这个角度来看，卡拉比所问的问题其实密切联系到爱因斯坦的广义相对论：假如我们的宇宙全无任何物质，它还会有引力吗？如果卡拉比是对的，曲率可以让空无一物的空间仍然有引力。不过他的表述更普遍，涉及的不仅是广义相对论所设定的四维时空，还包括任何偶数维度的空间。他想要知道的是，某一种紧致（亦即范围有限）的复流形（称为“凯勒”空间），如果满足特定的拓扑条件（关于一种称为“第一陈氏类等于零”的内禀性质，“陈氏”即陈省身），是否同样也能满足具备黎奇平坦度量的几何条件。这样的空间犹如钻石般稀有，而卡拉比猜想提供了找到它们的地图。如果你知道如何在一流形上解出该方程，而且能了解该方程的整体结构，那么你就可以在合乎该条件的“所有”凯勒流形上，使用相同方法来解出此方程。卡拉比猜想提供了普遍的法则，告诉我们“钻石”的确在那儿，我们寻找的特殊度量确实存在。

复流形是一种曲面或空间，但和我们熟悉的二维曲面不同的是，这些“曲面”并不仅限于二维，而可以是任何偶数维度。（只有复流形才有偶数维度的限制，一般的流形可以是任何维度，不论奇偶。）根据定义，流形在小规模或局部的尺度时，和欧氏空间很相像，但在大尺度或所谓的整体尺度时则可能极为不同。所谓复流形是以复数表示的曲面或空间。复数对于理解波动行为，尤其是波的相位时十分重要。在量子力学里，自然界的粒子都可以被描述成波，而量子论本身又是任何量子引力论（一种试图包纳一切的万有理论）的基本构成要素。

当弦论的基本单位，一小圈的弦，在高维时空中移动时，它所扫过的就是黎曼面。黎曼面和一般二维流形一样，也是光滑的，但因为它是能以复数描述的曲面（复数一维），所以还多了一些内在的结构。一个实曲面不见得有、但在黎曼面会自动出现的性质是，曲面的每一个小范围都会以特定方式和它的邻近区域相关。如果你取一小块弯曲的黎曼面把它投影到平坦面上，并且对邻近的小块曲面也做同样的投影，结果就是一幅地图，就如同用二维的世界地图来呈现地球表面一样。当制作出这幅黎曼面的地图时，地图上各点间的距离会被扭曲，但两线之间的夹角却可以维持不变。源自于16世纪的麦卡托投影地图，就是依据相同的想法，把地表看成是一个圆柱面，而非球面。这种维持角度不变的特征称为“保角映射”（conformal mapping），它能帮助船只维持在正确航线上，所以对数世纪前的航海非常重要。保角映射有助于简化黎曼面的计算，使得我们能够证明这些曲面的一些性质，而这是在一般实曲面上无法证明的。最后，黎曼面和一般曲面不同，一定是可赋向的，意思是不管在空间何处，测量方向的方式，亦即选择的参考坐标，都能保持方向的一致性。

流形上的度规。在凯勒流形里，空间在单一点上看来像是欧氏空间，而当你在偏离该点时，空间仍然会很接近欧氏空间，但会以一种特定的方式偏移。更精确一点说，是看起来像“复欧氏空间”，而不是单纯的古典欧氏空间，这意味着空间的维数必须是偶数，而且具有以复数表示的坐标值。这个区分很重要，因为只有在复流形上才能谈凯勒几何的性质，而凯勒几何又让我们可以用复数来计算距离。凯勒条件提示了该空间与欧氏空间相近的程度，而且这个标准和曲率并没有严格的关系。凯勒流形是一组叫作“厄米特流形”（Hermitian manifold）的复流形的子类。在厄米特流形上，你可以把复数坐标的原点放在任何一点上，它在该点上的度规看起来像是标

准的欧氏几何度规。但当你离开该点时，它的度规就愈来愈不像欧氏的。更明确地说，当移动到与原点的距离为ε时，度规系数本身的改变差异大致是ε倍。在凯勒流形上，J变换在经过平行移动后仍维持不变。这对一般的复流形并不一定成立。

陈氏类。高斯—博内定理，它适用于紧致黎曼曲面，以及其他任何无边界的紧致曲面。（“边界”在拓扑中的定义很直观：圆盘是有边界的，亦即有明确界定的边缘，而球面则没有。在球面上，不管你朝哪个方向走，而且不管走多远，都不会碰到或接近任何边缘。）高斯—博内公式是说，上述曲面的总高斯曲率（或高斯曲率的积分）等于2π乘以该曲面的“欧拉示性数”（Euler characteristic）。而欧拉示性数χ（希腊字母chi）则又等于2-2g，其中g是曲面的亏格（也就是曲面的“洞”数或“把手”数）。举例来说，二维球面没有洞，所以它的欧拉示性数是2。如果两个流形的陈氏类不同，它们就不可能相同；反之却不一定成立：两个不同的流形可能具有相同的陈氏类。复一维的黎曼面只有一个陈氏类，即第一陈氏类，而对于这个情况，正好等于欧拉示性数。一个流形的陈氏类数目，视其维数而定，例如复二维的流形具有第一和第二陈氏类。至于弦论所关心的复三维（或实六维）流形，则有三个陈氏类。它的第一陈氏类为六维空间中的实二维子空间（子流形）各对应到一整数，其中所谓子空间是原空间的一部分形体，就像纸张（二维）可以摆在办公室（三维）里一样。类似地，第二陈氏类为空间中的实四维子流形各对应一整数。第二陈氏类则为这个复三维（或实六维）的流形本身指定一个数字，也就是欧拉示性数χ。事实上，对于任何复n维的流形，它的最后一个，亦即第n个陈氏类必定对应到流形的欧拉示性数。在像地球的球面上，我们可以看到两个这样的点。如果流动是从北极往南极流（左上图），在两个极点上，所有表示流动的向量会彼此抵消，因此净流动为零。环面上的风可以往任何方向吹，不管是绕着中间的洞吹，由内环往外环吹，或是更复杂的螺旋模式，都不会碰到气流静止的地方，也就是没有奇点。风可以一直吹、一直吹，不会有所阻碍。像这样的曲面，它的第一陈氏类等于零。复二维（或实四维）的“K3曲面”的第一陈氏类等于零（第6章会进一步讨论K3曲面）。根据卡拉比猜想，这表示K3曲面就像环面一样，可以支持黎奇平坦度规。但是和欧拉示性数为零的二维环面不同，K 3曲面的欧拉示性数是24。这里的重点是，虽然在复一维时，欧拉示性数等于第一陈氏类，但在较高维度时，两者间可能有极大差异。

黎奇曲率。黎奇曲率是一种更细致形式的曲率——“截面曲率”（sectional curvature）——的平均值。想求取流形上某一点的黎奇曲率，得先取该点上的一个切向量，然后找出包含该向量的所有二维切平面。每个切平面都有各自对应的截面曲率（如上所述，就是该平面所产生的曲面的高斯曲率），而黎奇曲率就是这些截面曲率的平均值。如果我们说一个流形是黎奇平坦的，意思是指对于任一点所取的任一个切向量，包含该向量的所有切平面的平均截面曲率都等于零，即使其中某些切平面的截面曲率可能不为零。截面曲率完全决定了黎曼曲率，而黎曼曲率又藏纳了流形的一切重要曲率信息。四维空间的黎曼曲率由20个数构成；若在更高维，则数字更多。“黎曼曲率张量”本身又可分成两项：“黎奇曲率张量”和“外尔张量”（Weyl tensor），在描述四维黎曼曲率所需的20个数或分量中，其中10个用于描述黎奇曲率，另10个描述外尔曲率。黎奇曲率张量是爱因斯坦著名的场方程里的关键项，它显示物质和能量如何影响时空的几何。事实上，场方程式的左边所包含的是所谓的修整后的黎奇张量，而等式右边包含的是“应力能量张量”（stress energy tensor），用于描述时空中物质的密度和流动。换句话说，爱因斯坦场方程是把时空中某一点上的物质密度和动量的流动与黎奇张量等同起来。如上所述，黎奇张量只是整个黎曼曲率张量的一部分，单凭它并无法决定整个曲率。但如果能援引我们关于整体拓扑的知识，或许就能推导出时空的曲率。在质量和能量为零的特例里，方程可化简成：修整后的黎奇张量等于0。这就是真空爱因斯坦方程，虽然它看来似乎很简单，但别忘了这是非线性偏微分方程组，这类方程几乎没有容易解的。非但如此，因为张量本身包含了10个独立项，所以真空爱因斯坦方程是由10条不同的非线性偏微分方程所组成。这个方程其实和将黎奇曲率设为零的卡拉比猜想很相像。

卡拉比猜想。黎奇曲率为零的凯勒流形，它的第一陈氏类必定也是零。卡拉比把这个命题翻转过来，询问是否某些拓扑条件本身即足以决定几何性质，或者更准确地说，足以“允许”某种特定几何性质被决定。像这样的逆命题并不必然成立。例如我们知道，一个光滑且没有边缘的曲面，如果高斯曲率恒大于1，那它必定是有界或紧致的，不可能会跑到无穷远去。但是反过来，一般的紧致光滑曲面并不一定会有高斯曲率大于1的度规。举例来说，环面是完全光滑和紧致的，但它的高斯曲率并不能恒为正，更不消说大于1了。卡拉比猜想（或者该说是这个猜想的一个重要特例）只需要一句话即可概括：第一陈氏类为零的紧致凯勒流形，必存在黎奇平坦的度规。

5

人们怀疑在无边界的紧致流形上，怎么可能容许一个不无聊的黎奇平坦度规（当然要先把平坦环面排除在外）。事实上，我们连一个例子都还没找到呢，而卡拉比居然宣称会有一大类，甚至可能无穷多的流形符合这个条件！卡拉比选择了一个非常宽松的拓扑条件，却用它来找出一个非常特殊的几何结果，让整个空间有某种均匀齐整的性质。这项结果对于不存在复结构的实流形并不成立，但卡拉比却猜测对于复流形它或许成立。卡拉比猜想基本上是说，先以复一维或实二维的情形为例，如果有一个曲面容许曲率平均为零的条件曲面，那就真的可以找到一个度规（因此决定其几何性质），使得其曲率处处为零。而在更高维的情况，卡拉比猜想明确

限定在黎奇曲率（在实二维时等于高斯曲率，但在更高维则两者不同），而且曲率平均等于零的条件，被换成了第一陈氏类等于零。卡拉比断言，如果满足第一陈氏类等于零的拓扑条件，那么就存在有一个黎奇曲率为零的凯勒度规。如此一来，就把一个非常宽松、不特定的叙述，替换成一个强很多且限制明确的叙述。证明卡拉比猜想意味着证明存在黎奇平坦度规，也就意味着要解偏微分方程。这可不是普普通通的偏微分方程，而是某一种高度非线性的偏微分方程：复系数蒙日—安培方程。要了解蒙日—安培方程，卡拉比建议，或许我们能从现实世界中找到最简单的例子，是一片贴在固定钢圈上的平坦塑料布。假定这片塑料布既没有刻意拉紧，也不会太松，那么当我们推挤这片塑料布时，它所形成的曲面会怎么弯曲或变化呢？如果是在中央处拉开，它会造成正曲率的向上隆起，这种蒙日—安培方程的解是"椭圆"（elliptic）型的。反过来说，如果塑料布的中心向内弯扭，曲面会变成曲率处处为负的鞍形，而其解是"双曲"（hyperbolic）型的。最后，如果曲率处处为零，则其解为"抛物"（parabolic）型。

我证明了在第一陈氏类为零的紧致凯勒空间里可以找到黎奇平坦度规，即使我写不出这个度规的实际式子。我可以说的是，度规确实存在，但并不能明确说出它是什么。经由我的证明，确认了存在着许多奇妙、多维的形体（现在称为卡拉比—丘空间），满足没有物质情况下的爱因斯坦方程。我所求出的不只是爱因斯坦方程的"一个"解，而是我们所知最大一类的方程解。我同样也论证了，只要连续地改变拓扑，即可产生无穷多类卡拉比猜想关键方程式的解（此方程是爱因斯坦方程的一个特例，现在称为卡拉比—丘方程）。方程式的解本身是一个拓扑空间，证明的威力在于它是最一般的情况。换句话说，我证明的不只是这种空间的一个或一特殊类的例子，而是非常多类的例子。我还能更进一步论证，如果固定某些拓扑条件，例如确定位于原流形中的某些复子流形，那就只可能有一个解。在我的证明之前，已知能满足爱因斯坦方程所设定条件的紧致空间，只有"局部齐性"（locally homogeneous）的空间，也就是说，任何彼此靠近的两点看起来是一样的。不过我所得到的空间，既非齐性又不具对称性，至少没有整体的整体对称性，尽管它具有前一章讨论过、比较不明显的内部对称性。对我而言，这不啻是跨过了一道巨大的障碍，因为一旦挣脱整体对称的桎梏，便开启了数之不尽的各种可能性，让这个世界变得既有趣又更纷杂。

6

负曲率的解决，则证实了存在着一类涵盖更广的流形，称为凯勒—爱因斯坦流形（Kähler-Einstein manifolds）。事实上一旦你知道存在某个度规，就会顺势得到许多结果。例如你可以反过来导出流形的拓扑性质，并不需要知道度规的确切表式。然后，又可以运用这些性质去指认出流形的唯一特色。这就好像你不需要知道星系中众星体的细节，就能辨识星系；或者，不需要知道整副牌的细节，就能推理出许多手中牌张的性质（牌数、大小、花色等）。卡拉比—丘流形就是爱因斯坦方程的解，就像单位圆是x^2+y^2=1的解一样。

弦论如何解释目前宇宙的外观。弦论必须同时解释为何我们居住的时空是四维的，但是又坚持宇宙实际上是十维的。根据弦论，这个明显差别的理由，在于所谓"紧致化"（compactification）的机制。其实这并不是个新颖的想法，在卡鲁札—克莱因（尤其是克莱因）的五维理论中，已经指出额外的一维必须紧致化，卷曲到人们无法看到的地步。弦论面对的正是类似的处境，只是要解决的额外维度是六维，不是一维。

超对称连接物理和绕异性，而绕异性则是跨越到卡拉比-丘空间的桥梁。超对称是卡拉比-丘流形（凯勒流形的一支）必须具备的内在限制对称性，和大家比较熟悉的更宽广、更整体的对称性不同（例如球的对称性）。在曲面上沿着某条闭圈，将一个切向量平行移动一圈后，测量切向量在开始以及结束时的差异，就是"绕异性"（holonomy）。举例来说，想象你站在北极，手执一根长矛，矛身平行于地面，矛尖指向身前。然后向赤道移动，在移动的过程中，长矛的拿法相对于你自己必须保持不变；到达赤道后，你左转90度沿着赤道而行，但是长矛仍然要保持原来的方向，因此矛尖沿路都指向南方；绕了赤道半圈之后，你又左转90度向北往北极移动，为了保持长矛不动的原则，现在矛尖指向你的身后；于是当你沿着这个闭圈，回到北极时，长矛的方向和出发时正好差了180度。这就是绕异性的效应。要决定地球这个二维球面的绕异性，就得考虑地球上所有的可能闭圈。结果在二维球面上，光靠调整闭圈大小，就能得到任意的绕异旋转角度，从0度到360度皆可，而且只要多绕几圈，旋转角还能超过360度。因此我们就说，二维球面属于或具有绕异群SO（2）（special orthogonal group 2,"二维特殊正交群"）, SO（2）就是二维的旋转群，可以用旋转角来表示。同理，可以推得n维球面属于绕异群SO（n），括号中的n表示维度。知道了所有可能旋转角度所成的集合，你就可以通过这个所谓的"绕异群"来分类曲面。

卡拉比-丘流形则属于更特殊的SU（n）绕异群（special unitary group, "特殊么正群"，其中n表示复数维度n）。弦论主要感兴趣的是复三维的卡拉比—丘流形，它具有SU（3）绕异群。当然，卡拉比—丘流形远比二维球面复杂，而且尽管维持长矛方向不动的原则依旧，但SU（3）绕异性也比先前切向量旋转的情况复杂得多。更麻烦的是，卡拉比—丘流形不像球面具有整体的对称性。（球面具有许多直径轴线，绕轴旋转，球面会保持不变；卡拉比—丘流形则没有像这样的轴线。）不过就像前面说的，卡拉比—丘流形依然具备限制性稍微严格的对称性，并且和绕异群与超对称都有关。流形想拥有超对称性质，必须具备所谓的"共变常旋量"（covariantly constant spinor）。旋量不容易描述，但大致和向量类似。在一般的凯勒流形上，存在一个绕任何闭圈一圈平行移动后仍然不变的旋量。而卡拉比—丘流形因为具有SU（3）绕异群，另外又多了一个平行移动一圈不变的旋量。具有这些不变的旋量，就保证流形符合超对称的条件。具有SU（3）绕异群的紧致凯勒流

形，第一陈氏类必定为零，因此具有黎奇曲率为零的度规。换句话说，具有SU（3）绕异群的流形必定是卡拉比—丘流形。如果你希望同时满足爱因斯坦方程与超对称方程：如果你希望持续隐藏额外维度的空间，让可观察的世界遵守超对称，那么卡拉比—丘流形就是唯一的答案，这些条件是等价的。超对称理论的优点是，它自动让广义相对论的基态（也就是真空）得以稳定，于是宇宙不会持续下落到愈来愈低的能阶。这个想法和第3章讨论的正质量猜想有关，事实上，超对称正是威滕以物理观点证明这个猜想的工具之一。

如果在圆珠笔的两端用力施压，使得笔杆产生弯曲，旋转对称（记得这是超对称的类比）就会遭到破坏。我们愈用力，笔杆弯得愈厉害，对称破缺就愈严重。“在对称破缺之后，我们仍然有两种推移的方式，但是它们彼此不再有旋转对称的关系。”贺布胥说。一种推移是向着弯成弧形的方向推，它仍然很耗能量，而且笔愈弯，需要的能量愈大。但是如果推移的方向既垂直于笔身而且从弧形的侧面推，不需要耗费任何能量，就能轻易让圆珠笔转来转去（假设圆珠笔两头的固定端没有摩擦力）。换句话说，这两种推移方式出现能量差异或落差，一者需要能量，另一者则否。这就相当于超对称破缺时，在无质量粒子与它具质量的超伴子出现了能量或质量落差。物理学家现在正试图在“大型强子对撞机”（LHC, Large Hadron Collider）的高能物理实验中，寻找这个能量落差的信号，希望证明存在着更重的超对称伴子。

如何从卡拉比—丘流形得出粒子及其质量，其中我们得假设流形是“非单连通”（nonsimply connected）的。一个非单连通的流形就像甜甜圈的表面，有着一个或更多的洞，因此在面上的某些闭圈不能收缩到一点。这和球面正好形成对比，球面是单连通的曲面，上面任何闭圈都可以收缩到一点，就像紧绷在赤道的橡皮圈可收缩到北极一样。给定一个复杂的六维流形，上面有一些洞，我们可以找出弦缠绕这个流形的各种方式，这些弦会一次或多次穿绕过多个洞。这是一个很复杂的问题，因为缠绕的可能方式很多，而且每条闭圈的长度不一，依穿绕的洞孔大小而变。从所有这些可能性，你可以列出一张可能的粒子表，其中粒子质量则是弦的长度和张力（或称“线性能量密度”）的乘积，另外还可以讨论振动的动能。可以运用以上方式造出的物件，从零维到六维不等，其中有些是理论容许的，有些则必须排除。如果能列出所有容许的物件及运动方式，就能得到一张粒子与质量的清单。

首先，超对称可以减少变数的数目，并且将二阶微分方程（某些量要做二阶导数）转成一阶的微分方程（只要做一阶导数）；而且，超对称让所有费米子对应到自己的玻色子，如果你能知道所有费米子，就同时掌握了所有玻色子，反之亦然。卡拉比—丘流形几何性质内禀的另一特色，是狄拉克方程的无质量粒子解和另一种数学架构——称为“拉普拉斯方程”（Laplace equation）的解相同，一般认为这是比较容易处理的情形。其中最大的优点是，我们可以直接得到拉普拉斯方程的解（无质量粒子），完全不需要再去解微分方程，甚至不需要知道卡拉比—丘流形上的度规或其确切形状。所有我们该知道的，是卡拉比—丘流形的拓扑“资料”，一切都埋藏在称为“赫吉菱形”（Hodge diamond）的4 × 4矩阵中。由于第7章将讨论这个课题，我暂时不多言，各位只要知道，这个巧妙的拓扑手法，轻易地解决了无质量粒子的情形。

威滕借由他惊人的天才巧思，证明这五种弦论，其实各自呈现出同一个万有理论的一隅，他称之为“M理论”。威滕证明这五个弦论以更基本的方式彼此相通，表示在解决特殊问题时，可以挑选让问题显得最容易解的弦论版本。

不过也有研究者想从十一维空间，直接紧致化七维空间（称为“G2空间”）以得到四维时空。G2理论的缺点：我们不能从“光滑”七维流形的紧致化，推导出正确的物理性质；另一个问题是七维流形和卡拉比—丘流形不同，它不是复流形，因为复流形的实数维度一定是偶数。侯拉瓦补充说，这或许是最重要的差别，“因为复流形具有更好的性质，更容易理解，也更容易处理。”基于G2流形的这些困难，大部分M理论的研究，都用间接的方式来紧致化七维流形。首先，十一维时空被想成是十维时空和一维圆圈的乘积，接着先紧致化这个圆圈，让它的半径非常微小，变成十维的时空后，再依正常程序，通过紧致化卡拉比—丘流形下降到四维世界。侯拉瓦说：“因此即使在M理论里，卡拉比—丘流形依旧是事物的核心。”这条思路是由威滕、侯拉瓦、欧夫路特（Burt Ovrut）与其他人发展出来的，通称为“杂M理论”（heterotic M-Theory）。它影响了“膜宇宙”概念（我们的宇宙存在于膜上）的引入，也催生了许多早期宇宙的理论。

7

弦论研究中所谓“保角不变性”（conformal invariance）的概念。当弦在时空中移动时，会扫出一个实二维（复一维）的曲面或黎曼面，称为“世界面”（World sheet），其中一个维度是空间，另一个是时间。如果是闭圈状的闭弦，世界面看起来就像是持续延伸的水管面；如果是像一截线段的开弦，世界面则像一条不断延伸的带子。弦论研究的是弦的所有可能振动，而振动则受到“作用量原理”（action principle）的支配，这项物理原理又和世界面上的保角结构有关，这是黎曼面的内禀性质。因此打一开始，弦论就有内建的保角不变性质。想了解保角不变性，可以用较简单的“伸缩不变性”（scale invariant，或称“换标不变性”）为例，这表示系统的距离如果都乘上一个常数，系统性质不会改变。因此将世界面像灌气般放大，或放气般缩小，都不会改变弦论的性质。注意：在放大或缩小时，角度并不会改变，所以事实上，伸缩不变性是保角不变性的一个特例。

但想在量子架构下维持保角不变性时，问题就发生了。就像古典粒子会在测地线上移动一样（记得吗？测地线是距离最短的路径，见第3章讨论最小作用量原理的部分），古典弦也会在极短路径上移动，于是弦移动所造成的世界面是某种面积极小的特殊曲面。二维世界面的面积可以用一组方程，亦即一种二维场论来描述，这个二维场论告诉我们弦移动的精确方式。这是因为在场论里，所有作用力都是遍布于时空各点的场，弦的移动是作用力作用在弦上的结果，因此才会造成世界面会有极小面积的结果。也就是说，在弦的所有可能移动方式所造成的所有可能世界面中，场论会选出极小面积的世界面。不过，这个场论的量子版本不但必须掌握弦在时空中移动的特性以及其世界面的性质，还必须能掌握弦移动时因振动所造成的更多细节，因此世界面也将具备能够反映这些振动的小尺度特性。在量子力学里，粒子或弦会在时空中所有可能的路径上移动，量子场论不是只选择具有极小面积的世界面，而是对所有的世界面采取加权平均，而在方程式中赋予愈小面积的世界面愈大的权数。但是在做完加权平均后（也就是在所有世界面所构成的空间上做完积分后），得到的二维量子场论是不是仍保持保角不变性呢？结果是答案和所有世界面所构成空间的度规选取有关，有些可以得到期望中的保角场论结果，但有些则否。

明确给定流形的形状与大小，他们可以计算所有的关联函数，从这一组数学函数整体来看，就可以完全刻画保角场论。换句话说，这个结果是用完全明确的方式，将一个保角场论对应于所有关联函数，并且能决定卡拉比—丘流形的确切形状和大小。对迄今所知的某类卡拉比—丘流形，都有一个对应的盖普纳模型。两个拓扑形态不同的卡拉比—丘流形（六维的卡拉比—丘流形，不是四维的K3曲面）可以得到相同的保角场论，因此共享相同的物理性质。这项叙述比狄克森—盖普纳的说法更强，因为他们三人谈的是不同拓扑形态的卡拉比—丘流形，而狄克森和盖普纳的发现只用在拓扑形态相同但几何性质不同的曲面（毕竟所有K3曲面的拓扑形态都相同）。问题是，没有人知道如何构造这一对以奇怪方式连结起来的流形。

一个n维流形共有n+1个贝堤数。零维的点有一个贝堤数；一维的圆圈共有两个贝堤数，二维曲面如球面则有三个贝堤数等。我们用bk表示k维贝堤数，代表独立k维“闭链”（cycle，亦称闭圈）的数目，其中闭链是能缠绕流形或被穿越的高维闭圈（想想甜甜圈的例子，本章后面还会谈到闭链。）在二维曲面的情形，一维贝堤数表示你切割曲面，却不会将曲面分成两半的切割方法数。例如球面，我们找不到让球面不分成两半的割法，因此球面的一维贝堤数等于零。现在取一个甜甜圈面（空心的甜甜圈），如果把它的外围“赤道”切开，结果仍然是一块点心（只是没有内馅）；或者换一个方向，向洞直切进去，结果是一个断掉但仍然还是一整块的点心（你可能嫌它不够对称美观）。因此，我们有两种切割甜甜圈却不会分成两块的方法，这表示它的一维贝堤数等于二。接下来考虑两个洞的甜甜圈，我们可以直切两洞之一，也可以从一个洞往另一个洞切，还可以沿着最外围的一圈“赤道”切开，切完后这个甜甜圈仍然是一个点心。于是我们找到四种独立不同的方法切开双洞甜甜圈，每一种都不会将它切成两部分，所以双洞甜甜圈面的一维贝堤数等于四。相同的模式可以用到18洞的甜甜圈，它的一维贝堤数等于36。不过事实上，还有更细致的方法可以区分流形的拓扑形态。苏格兰数学家赫吉（W. V. D. Hodge）发现，每一个贝堤数还可以再写成一些数的和，这些数称为赫吉数（Hodge number）。赫吉数可以让我们以更清晰的方式窥见流形子结构。这些赫吉数的整体信息被包裹成所谓的“赫吉菱形”。

“上同调群”是讨论流形闭链（可以想成高维的闭圈）以及它们彼此相交的理论，闭链与流形之中没有边界的子流形有关。想理解子流形的意思，可以想象一个切成球状的瑞士起司，整个球状的起司块可以想成一个三维空间，而它的内部则可能有上百个洞孔，这些洞的壁面就是子流形，某些可以从外包覆，有些可以用橡皮筋在里面绕一圈。子流形是有精确形状和大小的几何形体，但对物理学家来说，闭链则是一种基于拓扑考虑，不需要那么明确定义的物件，大部分几何学家将闭链视为广义的子流形。虽然如此，我们可以将闭链想成类似绕甜甜圈一圈的闭圈，借以得到流形的拓扑信息。流形通常有无穷多个闭链，物理学家用一种逼近法将闭链数降到有限个、因此也比较容易处理的值。这样的过程称为“量子化”（quantization），将本来有无穷多可能的设定变成只有几个容许值（就好像广播电台的频率）。这个过程必须对原来的方程式做量子修正，又因为这是一组关于闭链的方程，因此是关于上同调群的方程，所以我才为它取名为量子上同调群。不过做量子修正的方法并不是只有一种，幸好有镜对称，对于给定的卡拉比—丘流形，可以得到与它物理性质相同的镜伴流形。这个镜伴流形有两种描述方式，来自两个看起来很不同但基本上等价的弦论版本：IIA理论和IIB理论，它们所描述的量子场论是相同的。在B模型时，做量子修正的计算相对简单，而且量子修正为零；而A模型实质上是不可能计算的，量子修正也不是零。

镜猜想的证明显示坎德拉斯的曲线数预测公式是正确的。不过我们所证明的结果还多很多，结论可以应用到更多类型的卡拉比—丘流形（包括物理学家感兴趣的部分），也可以应用到“向量丛”（vector bundle）的情况（第9章会谈到更多向量丛）。而且在我们的推广里，镜猜想并不只可以计数曲线而已，还可以计数其他类型的几何物件。讽刺的是，镜猜想的证明并没有说明镜对称本身。从很多方面来说，这个由物理学家发现、然后被数学家倾力应用的现象依然神秘难解。然而现在已经有两个主要的理路正积极地寻求镜对称的解释，一个想法称为“同调镜对称”（homological mirror symmetry），另一个则简称为“SYZ”。SYZ的想法提供镜对称的几何解释，而同调镜对称则使用比较代数的取向。SYZ认为卡拉比—丘流形基本上可以分成两个三维的部分，彼此以类似笛卡儿乘积的方式纠缠在一起。其中一个空间是三维环面，如果你将这个空间分离出来，并将它“倒转”后（将半径r变成半径1/r）再重组回去，就又可以得到原来卡拉比—丘流形的镜流形。史聪闵格断言，SYZ “提供了镜对称所对应的简单几何与物理图像”。根据SYZ猜想，理解镜对称的关键在于卡拉比—丘流形中的子流形，以及它们组成的方式。回想一下本章前面曾经讨论过的，将流形想成瑞士起司，那内部的孔洞就是子流形

的例子，这些孔洞可以个别被包覆或者被穿绕。与此类似，卡拉比－丘流形中被SYZ猜想所考虑的子流形，也能被D膜包覆。（这边物理学家和数学家的用词有所不同，物理学家喜欢用D膜来思考，对数学家而言，D膜其实也是一种子流形，希望你不会被搞混。）像这样可以满足超对称的子流形称为“特殊拉格朗日子流形”（special Lagrangian submanifold），这些子流形名符其实地具有特殊的性质：维度是原空间维度的一半，而且依其维度，其长度、面积或体积是极小的。

最简单的卡拉比－丘流形：二维环面（亦即甜甜圈面）。其特殊拉格朗日子流形就是穿进洞再绕出来的闭圈，但是因为这个闭圈的长度要最短，因此必须是真正的圆，而不是其他曲曲折折的闭圈。在SYZ猜想最初提出之后，对此贡献可能比别人都多的马克·格罗斯解释说：“这个二维情况的卡拉比－丘流形，整个就是这些圆的联集。此外，我们可以构造一个辅助性的空间，姑且称之为B, B被定义为这些圆所成的集合，它本身也是一个圆圈。”B是这个圆集合的“参数”, B上每一点会各自对应到一个不同的圆。也就是说，每个绕着甜甜圈洞一圈的圆都会对应到B上的一点。B也称为“模空间”（moduli space），有时我们也说，模空间里面包含了各个子流形的标记。B并不只是一份洋洋洒洒的清单，它还显示了这些子流形组织的方式。如果我们往上增加一个复数维度，从实二维变成实四维，这时卡拉比－丘流形便成为K3曲面。前述的特殊拉格朗日子流形则从圆变成二维环面，也就是说，有一堆环面可以巧妙地构成K3曲面。“我画不出四维的图形，”格罗斯说，“不过我可以描述B，也就是告诉我们所有环面该在哪里的架构空间。”在四维的情形，B是二维球面，在球面B上的每一点都对应一个不同的环面，但B上有24个坏点，它们所对应的是包含奇点的“捏缩的甜甜圈”，这些退化环面的意义等一下将会解释。接着再往上增加一个复数维度，因此流形就是卡拉比－丘流形，其中特殊拉格朗日子流形变成三维环面，而B则是一个三维球面（这下是我们画得出来的），其中对应到退化三维环面的坏点，构成一个由线段构成的网格模式。格罗斯说：“其中线段上每一点都是‘坏点’（即奇点），但是这个网格的顶点，也就是三条线段的交点，则是坏中之尤的坏点。”这些点所对应的，是变形得最厉害的环面。从一个角度看，从蓝图可以造出一种结构（流形）；如果换个角度，又可以造出不同的结构。而这些差异来自B上的那些怪点，在这些点上T对偶性不能正常运作，结果就造成镜对称的差异。

物理学家将D膜想成是开弦端点所在的子流形，在二次弦论革命之后，D膜已经变成弦论与M理论的最基本的要素之一。同调镜对称背后的主要想法，是将这些现象里所涉及的D膜分成两类，用威滕发明的用语就是A膜和B膜。假如X和X′互为镜对称流形，那么X上的A膜会等于X′上的B膜。想象我们有两盒形状不同的积木，“但是把它们堆起来后，却可以造出完全相同的结构”。这就像同调镜对称中A膜和B膜的对应一样。A膜是通过“辛几何”（symplectic geometry）来定义的，而B膜则属于“代数几何”。我们多少已经触及代数几何的内容，知道它是以代数方法来描述几何的曲线，或以代数方程来解决几何问题。辛几何则涵盖了对卡拉比－丘流形很重要的凯勒几何，但范围更宽广。微分几何讨论的空间，通常上面会有沿着对角线左右对称的度规，但是辛几何的度规是反对称的，对角线两边的正负号相反。“这两门几何学分支，通常被认为是完全不相干的。所以当有人说一个空间上的代数几何会等于另一空间的辛几何，这真是太令人惊讶了。将两门分开的领域结合在一起，发现它们基本上是通过镜对称而发生关联，这真是数学上最美好的事，因为你可以运用一个领域的方法到另一个领域上。

8

我们可以用D膜与弦（将弦视为一维的D膜）构造出黑洞的可能性，源自D膜具有“对偶”的描述方式。当作用在D膜与弦的力很微弱时（称为“弱耦合”）, D膜就像一张很薄的膜状物，与周围的时空不起作用，因此和黑洞毫无相似之处。但是在强耦合，也就是相互作用很强的情况时，D膜会变成十分稠密而沉重的物体，具有事件视界以及很强的引力效应。换句话说，此时的D膜根本和黑洞没有分别。光靠一张或一堆很重的膜还不足以构造出黑洞，因为另外还需要可以让膜稳定的机制。其中最简单的方法（至少理论上）是将膜包覆在一个稳定、不会收缩消失的物体之外。超对称可以保证真空态不会降到愈来愈低的能级。而在弦论中只要一谈到超对称，经常就会牵涉卡拉比－丘流形，因为这类流形内建有满足超对称的机制。因此问题就转变成：在卡拉比－丘空间中寻找D膜要包覆的稳定子曲面。我们不妨把闭链看成流形中不能收缩到一点的闭圈，只是闭圈的维度是一维的，然而闭链的维度可能比较大，可以想象成不能收缩到一点的高维“闭圈”。闭链包绕着流形中的“洞”，这些洞的几何性质并不相干，重点是它的拓扑类型，所以闭链是一个拓扑的概念。尹希解释说：“如果你改变流形的形状，虽然子曲面的形状大小会跟着改变了，但闭链并没有改变。”卡拉比－丘流形就像一个充满凹槽的甜甜圈，宽窄不一，而最小闭链出现在最窄的地方。许多各自包覆的膜纠合在一起形成更大物体的样子，很像沾黏了很多头发的湿浴帘，每根头发是独立的膜，然后再黏附在本身也很像膜的浴帘上。虽然每根头发可以想成是各自分开的黑洞，但是它们却纠缠在一起，全部黏附在同一张膜上，因此变成这个大黑洞的一部分。

计算黑洞熵，也就是计算黑洞微观态的问题，转换成一个几何问题：有多少种将D膜配置在卡拉比－丘流形中，而且还具有指定质量和电荷的方法？而这个问题，又可以改用闭链的语言来描述：在卡拉比－丘流形中，有多少可以被膜包覆的球或其他最小体积的子流形？尹希解释说：“你可能会怀疑，D膜也许还可以再拆成更小的组成物体。但是我们现在知道膜上不可能再有其他结构了，因为他们光计数D膜就已经算出正确的熵，而熵

依照定义就是要计数'所有'可能的状态。"一旦D膜还有不同的组成要素，就会增添新的自由度，使得计算熵时还需要考虑更多的组合可能，但是1996年的这篇论文告诉我们情况并非如此，基本要素就只有膜而已。虽然不同维度的膜看起来不一样，但它们任何一种都不能再分割成更小的部分。相同的，弦论也认为弦（用M理论的措辞就是一维膜）就是一切，不可能再分割下去。

只由事件视界的表面积来计算熵的想法，只有在事件视界很大而且曲率很小时才正确。当事件视界缩小，因此表面积也跟着变小时，广义相对论的逼近就会变差，这时就需要对爱因斯坦的理论做"量子引力的修正"。1996年的论文只考虑相对于微小普朗克尺度的"大"黑洞，此时广义相对论的计算（所谓一阶项）就足够了。而在1997年的论文里，除了原来的首项之外，它们还计算出第一量子修正项。换句话说，由这两种不同理路所计算出的黑洞熵，其符合程度甚至比1996年的论文更佳。2004年，大栗博司、史聪闵格和瓦法又将1996年的想法，推广到从卡拉比－丘空间经由膜包覆闭链所能造出的任何黑洞，他们的计算并没有特别考虑到黑洞的大小，因此和量子效应影响系统的程度无关。结果他们的文章，展示了如何计算广义相对论的整体量子修正，其中不单只有前面几项而已，而是包含了无穷项的整个级数。

"反德西特空间/保角场论对应"（Anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory correspondence，简写成"AdS/CFT对应"）。在某些情况下，一个引力理论（例如弦论）可以和一个标准的量子场论（更精确地说是保角场论）相互等价。这个对应令人十分讶异，因为它将量子引力理论联系到完全没有引力的理论。AdS/CFT对应的想法源自前述D膜的对偶描述。在十分微弱的耦合时，卡拉比－丘空间中一堆包覆闭链的D膜无法产生可感受到的引力，因此可以用量子场论来描述，在这种理论中没有引力存在。但是在强耦合时，这一团D膜则最好描述成黑洞，而这只能用包含引力的理论来描述。尽管卡拉比－丘流形在AdS/CFT对应的基础中扮演了不可或缺的角色，但一开头马尔达西纳的想法并不包含这类流形。直到日后为了替这个对应建立理论架构，进而厘清更详细的细节时，卡拉比－丘流形就很自然现身了，尤其是卡拉比－丘奇点。如果黑洞可以完全用粒子的量子理论来描述，由于量子理论的架构本身就保证了信息不会遗失，因此我们就可以确定黑洞本身也不会漏失信息。那么当黑洞蒸发时，其中的信息到底发生什么事呢？这就和黑洞蒸发时所渗漏出来的霍金辐射有关。马尔达西纳指出："霍金辐射并非随机，其中包含了坠入黑洞中物质的微妙信息。"如果真的有这种等价的关联，那么就可以拿大家比较理解的粒子量子论，去定义令人束手无策的量子引力论。AdS/CFT对应容许我们运用不涉引力的粒子理论的详细知识，去改善我们对量子引力论的理解。这个对偶原理也可以倒过来使用，当量子场论中的粒子因为强相互作用而难以计算时，这个方程的引力端对应的曲率却会很小，因此使得计算比较容易处理。

9

"规范理论"（gauge theory）的场论，通过物理学家杨振宁与米尔斯的研究，规范场论在20世纪50年代获得长足的进展。这个理论的根本想法是，标准模型将上述的对称群结合成一个混合式的对称群，即SU（3）×SU（2）×U（1）。比较特别的是这个群的作用方式和一般对称群不同，它需要被"规范"，举例来说，取一个熟悉的对称群如平面上的旋转群，然后容许它在时空上各点有不同的作用方式，譬如在某一点转45度，在另一点转60度，又在某一点转90度等。虽然它在各点的作用不相同，但是规范理论要求动力方程式（控制作用场变化的方程式）在这种作用下必须不变，实质的物理现象也不改变，所有一切看起来都没有不同。如果所关注的是规范对称，杨振宁和米尔斯的研究结果是：理论还得加入额外的机制，这个新的机制称为"规范场"。在标准模型中，规范场对应到规范对称SU（3）×SU（2）×U（1），意思是说经过某种组合，规范场会对应到标准模型中的三种力：强力、弱力和电磁力。杨振宁和米尔斯并非最先以U（1）规范理论描述电磁力的研究者，这些研究在他们之前数十年就出现了；但他们是最先研究SU（2）规范理论的人，并且成功演示了SU（n）理论的一般构造方式（n是大于1的整数），其中包含了SU（3）。

为了能"降落"到四维时空与具十二维对称群的标准模型，就必须找到某种破坏E8规范群对称性的方法。我们可以特别选择E8中某个特别的结构方式，使得那248个分量有的打开，有的关掉，我们尤其希望只关掉其中12个分量，就好像固定球上的北极一样。不过这12个分量不能任意选取，它们必须能刚好与SU（3）×SU（2）×U（1）对称群一致。也就是说，破坏了这个庞大的E8群后，在四维时空中剩下的应该就是标准模型的规范场。对称被破坏的其他规范场并没有消失，被打开的特征表示它们存在于高能的状态，普通人完全无法接触到。你可以说E8多出来的对称性，隐藏在卡拉比－丘流形中。

给定一个流形，丛的定义是在该流形的每一点上系附一组向量[更专业一点的名称是"向量丛"（vector bundle）]。最简单的一类丛是切丛（tangent bundle），任何卡拉比－丘流形都有自己的切丛。

DUY定理背后的主要想法是，厄米特－杨－米尔斯方程所决定的场可以用向量丛来表示。我们证明了下述结果：如果可以在卡拉比－丘流形上，构造满足某拓扑条件的向量丛，这个向量丛上就自动容许唯一一组满足上述方程的规范场，这个拓扑条件称为稳定（stable）或斜率稳定（slope-stable）。"如果你只是将一个无穷难的问题换成另一个无穷难的问题，就帮不上什么忙。"欧夫路特说，"但是构造一个稳定的向量丛要简单多了，

结果就是你完全不用去解那些恐怖的微分方程。什么是斜率稳定的向量丛呢？先前曾经讨论过，曲线的斜率是与曲率有关的数，而在现在讨论的情况里，斜率稳定则与向量丛的曲率有关。“斜率所表示的是一种平衡感，”宾州大学的数学家多拿吉（Ron Donagi）粗略地解释，“某方向上的曲率不能比另一方向的曲率大太多，因此相对来说，不管你面对的是哪个方向，曲率都不会变得太极端。”如果向量丛被分解为更小的子丛，那么所谓稳定的意思就是任何子丛的斜率不能比整个向量丛的斜率还大。只要满足这个条件，这个向量丛就是斜率稳定的，它具有满足厄米特—杨—米尔斯方程的规范场，因此也满足超对称。就某种意义而言，位于DUY定理核心的斜率稳定性正是卡拉比—丘定理的结果。因为这个定理让卡拉比—丘流形的曲率满足特定的条件，使得卡拉比—丘流形的切丛本身就是斜率稳定的。而卡拉比猜想与证明的另一项结论是，卡拉比—丘流形切丛上的卡拉比—丘方程与厄米特—杨—米尔斯方程其实是相同的。就是这些事实，激发我去思考斜率稳定性和厄米特—杨—米尔斯方程之间的关系。结果冒出来的想法就是，向量丛是否满足这些方程以及向量丛的稳定性，这两件事其实是等价的。从表面上来看，向量丛的结构与待解的微分方程似乎毫不相干。不过我并不惊讶，因为这就好比卡拉比猜想的自然推广一样。只是卡拉比猜想谈的是流形，也就是卡拉比—丘流形，而DUY定理谈的则是向量丛。在这个问题里，我们寻找的是向量丛的度规，至于流形的度规则已经是先给定的起始条件的一部分。你可以任意选择“背景”空间的度规，包括卡拉比—丘度规。卡拉比猜想和DUY定理的交汇之处是切丛。由于任何流形都具有切丛，因此一旦证明了卡拉比—丘流形的存在性，也就同时得到它的切丛。因为切丛是由卡拉比—丘流形所决定的，因此自然继承了卡拉比—丘流形的度规。换句话说，这个切丛的度规必须满足卡拉比—丘方程。但是我们也已经知道，如果背景度规是卡拉比—丘度规，那么这个情况的厄米特—杨—米尔斯方程和卡拉比—丘方程其实是一样的。总而言之，由于卡拉比—丘流形的切丛满足了卡拉比—丘方程，所以它也自动满足厄米特—杨—米尔斯方程，重点是，卡拉比—丘流形的切丛的确是DUY定理的第一个特例，是它的第一个解，这个事实来自卡拉比猜想的证明，虽然这比我们察觉到DUY定理的时间要早了十年。不过这并不是DUY定理最有趣的地方，这个定理的真正威力来自于它所提出的稳定性条件，如果希望一般向量丛（不只是切丛）上的厄米特—杨—米尔斯方程的解存在，就必须满足这个条件。

如何运用几何学和拓扑学，从弦论推导出粒子物理学。首先要选定一个卡拉比—丘流形，不过不能乱选，如果想运用已知的有效方法，就得先选一个非单连通的流形，也就是基本群不无聊的流形。希望你还记得，这表示在这个流形上，有一些闭圈不能收缩成一点。也就是说，这种流形比较像是环面而不是球面，中间至少要有一个洞。这些洞或闭圈的存在，将会影响向量丛本身的几何或拓扑性质，进而影响到它所要决定的物理性质。下一步，是构筑流形上的向量丛，使其不但能得到标准模型的规范场，而且还要能消除各种反常，包括负概率、不该有的无穷大或其他恼人的性质，这些问题曾经困扰过弦论最早期的版本。但在1984年的重要论文里，麦克·葛林和史瓦兹以规范场的架构，找到了消除反常的方法。如果用几何或拓扑的语言来说，向量丛无反常的条件就是该向量丛的第二陈氏类等于切丛的第二陈氏类。我们曾经在第4章讨论过陈氏类，这是一种分类流形、粗略检视流形差异的技术。如果流形上的切向量可以被同向排列（有点像梳头发时不会打结的样子），那么它的第一陈氏类就等于零。在二维球面上想要避免打结是不可能的，但是在甜甜圈面上就做得到。因此，环面的第一陈氏类等于零，球面的则非零。类似的方法也可以用来描述第二陈氏类，在六维流形的情形需要讨论的是双向量场（技术上来说此处谈的是复数向量，即向量的分量是复数）。我们希望在每一点上的两个向量能尽量独立，也就是各自朝向不同的方向。但是不论怎么安排，仍然可能有一些点上的两个向量会同向，甚至退化成零向量。事实是，如果在六维（复三维）流形中，把这些双向量不独立的点集合起来，就会构成一个闭二维曲面。这个曲面的整体可以用来表示第二陈氏类。不论这些反常有多么复杂，只要它们彼此之间可以对消到全部都消失，最后就能够得到可行的理论。清除这些麻烦反常的方法之一，就是确定选定向量丛的第二陈氏类和切丛的相等。为什么呢？我们得谨记，就某种意义来说，这些向量丛是背景作用场的替代品，而从背景的引力场和规范场可以推导出大自然的作用力。例如卡拉比—丘流形的切丛可以被想成引力场的影本，因为卡拉比—丘流形的特殊度规正是爱因斯坦引力方程的解，换句话说，引力已经被编码写入到度规之内。然而另一方面，流形度规又和切丛息息相关。前面谈过，度规提供了计算流形上A、B两点间距离的函数，A到B的各种可能路径，每一条都可以分割成一连串微小的向量，这些向量其实都是切向量；而切向量的整体正好构成了切丛。这就是想要消除反常时，可以用卡拉比—丘流形的切丛来表示引力端的部分原因。另外我们还得选择一个额外的向量丛，来产生标准模型中的规范场。于是，我们手边有两个向量丛，一个产生引力场，另一个产生规范场。不幸的是这两种作用场各有各的反常，无法各自排除。引力场的反常和规范场的反常正好差一个负号，因此只要我们能够处理到两者的大小相等，反常就会彼此抵消。

同调是稍微复杂的数学概念，因此最好用例子来说明。最简单的例子是看起来像长水管的圆柱面，如果沿着两条截曲线切下一小段“水管”，这两条曲线正好构成切下的“水管”曲面的边界，两条一维曲线构成一个二维曲面的边界，这时这两条曲线就是同调的。再推广来看，如果有两个同样维度的（超）曲面，构成某个高一维（超）空间的边界，就说这两个曲面是同调的。而所谓陈氏类指的就是有同调关系的一类（超）曲面。引入同调的概念，是因为卡拉比—丘流形的切丛与规范丛各自的第二陈氏类曲面正好是同调的，因此这两个向量丛的第二陈氏类就相等。结果就这样神奇地消除了弦论的反常，这正是我们引颈期盼的结果。

M理论，由于多了一个维度，因此有更充裕的自由度来纳入对应到膜的作用场，这是M理论引入的根本新元素。根据这个基于膜的新观点，规范丛的第二陈氏类不需要再等于切丛的第二陈氏类，只要小于或等于即可。这是因为膜（或它所包覆的流形）具有本身的第二陈氏类，可以加到规范丛的第二陈氏类里，让总和等于切丛的第二陈氏类，然后消除反常。所以，现在物理学家有更多种类的规范丛可以运用。

物质粒子就像溜冰的人，而作用力粒子则像排球，在物质粒子之间交换着光子、胶子和W+、W-、Z玻色子。

规范丛的“上同调类”（cohomology class）。上同调和同调很类似，都是探讨两个物件可否相互形变的关系。一旦找到了规范丛的上同调类，就可以用来找出狄拉克方程的解，进而得到物质粒子。

在量子场论中，质量来自于粒子与希格斯场的作用，因此我们将下夸克的两种形式与希格斯场相乘，这个乘法操作对应到粒子的相互作用，而这“三元乘积”的大小则表示下夸克与希格斯场作用的强度。第一个麻烦来自于上述三元乘积的大小在卡拉比－丘流形上逐点并不相等，但是汤川耦合常数和质量一样却是个定数，一个整体的测量值，和流形上各点局部的位置并没有关系。因此计算汤川耦合常数的方法，是将下夸克与希格斯场的乘积在整个流形上做积分。积分其实是一种求平均的程序。假设有一个函数（例如前述的三元乘积），在流形上各点的函数值可能不同，如果想求该函数的平均，要怎么做呢？想象将流形分成许多微小区域，在每个区域取定该函数的值后，加总起来再除以区域的数量，就可以得到平均值。不过在现在的情况，这样计算并不能得到正确的答案，因为卡拉比－丘流形是弯曲的形体，因此每一个微小区域的大小（以二维为例，就是每一个小“矩形”区域的大小）会因弯曲的程度而变化。所以正确的方法是做加权平均，在每个区域中除了取定一点的函数值外，还要再乘上该区域的大小。但是这么一来，就得知道计算区域大小的方法。这表示我们必须先知道流形的度规，因为度规决定了流形真正的几何形状。

将流形放到（术语称为“嵌入”, embedding）更高维背景空间中，找出逼近黎奇平坦度量的算法。这个背景空间称为“射影空间”（projective space），它有点像一般欧氏空间的复数版本，不过却是紧致的。当你将流形摆到更大的背景空间时，可以自动从背景空间继承背景空间的度规（称为“导出度规”,induced metric）。这就像将球面放在普通欧氏空间时一样，我们可以在球面上使用空间中的度规。或者你也可以想象起司中的洞是嵌入到起司中一样，如果我们能在起司上测量长度，当然也就知道如何测量洞的大小。这时嵌入的流形或洞就从起司般的背景空间中继承了它的度规。如果将黎曼流形放入足够高维度的空间，就可以得到任意想要的导出度规。纳什嵌入定理是这位杰出数学家最重要的成果之一，不过这个定理只能运用在将实流形嵌入实空间的情况。一般的纳什嵌入定理在复数时并不正确，不过我曾经指出，如果再加上一些限制，这个定理的复数形式仍然是正确的。例如有一大类凯勒流形可以嵌入足够高维的射影空间中，使得其导出度规乘上某常数后，可以任意逼近原来的度规。而黎奇平坦的卡拉比－丘流形正是这种特殊的凯勒流形，可以满足上述定理的拓扑条件，因此黎奇平坦度规就可以借由嵌入高维度的射影空间，用导出度规来逼近。

平衡位置（balanced position），这是在所有摆法中导出度规最逼近黎奇平坦度规的摆法。如果卡拉比－丘流形可以嵌入足够高维的空间，那么它总是可以摆在平衡位置上。

当桃乐丝在奥兹国的大冒险将要结束时，她才知道原来打从一开始她就具有可以回家的能力。然而，弦论学家与他们的数学同行们（即使是具备几何分析高度洞识能力的数学家）花了几十年在卡拉比－丘国度探险后，却发现自己回不了家，回不到现实物理学的领域（也就是标准模型），因此也无法再往前探讨后续的主题。有些人或许会感叹：如果能像电影中葛琳达教桃乐丝回家的法术，“闭上眼，轻敲鞋后跟三次，然后说：‘没有地方比得上家’”就成了，那该有多好！但是，这样也就错过了沿途的一切乐趣。

10

任何有洞流形的大小与形状是由称为“模”的参数所决定的。例如二维环面（即甜甜圈面）的大小形状，是由两个互相独立的闭圈或闭链所决定，一条闭圈绕洞而行，另一条则穿绕进洞中再绕出来。依照定义，环面的模要量度的是这两个闭圈的大小，两者合起来决定环面的大小形状。如果绕洞而行的闭圈比较长，环面就显得比较瘦；反过来如果比较短，则环面会变胖，使得洞看起来相对比较小。另外，其实还有一个模数描述环面扭转的程度。二维环面有这三个模数就够了。至于卡拉比－丘流形则可以多达五百个洞，以及许多各种维度的闭链，因此就需要有更多的模数，从几十个到几百个都有可能。观察模数的一种方式，是将它想成四维时空上的场。因为与卡拉比－丘流形紧致化息息相关的弦论，现在却碰到了模问题，出现这些理论上相应而生、但现实中却似乎不存在的无质量标量场与粒子，难道这会是弦论的末日吗？其实并不尽然，因为还有解决之道。原来在弦论中还有一些要素，过去为了简化计算，我们暂时忽略了。如果将这些要素囊括进来，整个情况就会大大不同。这些多出来的材料，包括了所谓的“通量场”（flux），这种场类似电场或磁场，当然弦论中这种崭新的场和电子或光子都没有关系。

六维的卡拉比－丘流形远比二维环面复杂，其中有更多的洞，而且这些洞具有至多六维的各种维度，因此通量场可以指向更多的内在方向，以至于通量场线有更多可能的方式来穿绕这些洞。但是既然用这些通量场来包覆流形，你也许想知道这样伴随的场里储存了多少能量。依照斯坦福大学卡屈卢的解释，能量相当于场强度平方在卡拉比－丘流形上的积分，也就是说我们将流形分割成无穷小的区域，在每个区域计算场强度的平方，再全部加起来就可以得到积分值。“由于变更流形的形状会变动通量场的总能量，”卡屈卢说，“我们要的正是让通量

场能量最小的形状。”这就是为什么引入通量场，就可以稳定控制住流形的形状模数，进而确定流形形状的原因。

对于以卡拉比—丘流形为基础发展的弦论，稳定控制流形大小的问题十分紧要，不然这六维内空间就不会卷曲，而会跟着其他四维空间一样变成无穷大。一旦这个微小不可见的维度，突然脱离束缚而膨胀，我们的生存时空就会变成十维，有十个独立的方向可以移动，想找失踪的钥匙时，也多了很多方向要找。不过我们的世界并不是十维（所以找钥匙会简单一点），因此一定要有东西把这六维的空间拉住，根据KKLT的说法，这个东西就是D膜。用膜来固定六维卡拉比—丘流形的形状，有点像用辐射层轮胎来固定内胎；就像向内胎打气时，辐射层外胎可以限制内胎的大小一样，膜可以遏止微小流形膨胀的倾向。物体形状和大小稳定的意思是，挤压它时会有东西撑住，扩张时又会有东西将它拉回去。

在弦论中，我们假设正能量来自某个十维的能量源，它具有紧致卡拉比—丘流形愈胀大，能量就会愈小的特性。因此只要有机会，所有的场都会试图扩张，因而被稀释掉。“也就是说，当内空间变大而能量跟着变低时，整个系统就会愈‘高兴’。”麦卡利斯特继续解释说：“于是系统膨胀时，能量就跟着减低，而当系统膨胀到无穷大时，能量就缩减为零。”[5]所以如果没有任何东西可以约束内空间，它就会持续膨胀。但是如果真的发生这种事，那么本来可以导致暴胀的能量就会耗散得非常快，快到暴胀的过程根本还来不及开始就已经结束了。

“反膜”（antibrane，就像反物质一样），这些反膜位于卡拉比—丘流形的某个弯扭的区域中，像是锥形奇点（conifold singularity）的尖点，而所谓锥形奇点又是从流形“表面”延伸出的非紧致锥状凸出物。无论如何，确切的细节在此并不重要，毕竟他们的研究也不是为了替这些问题提出确定的答案，卡屈卢就这样说：“KKLT的本意只是提出一个玩具模型，在研究各种现象时，理论学者经常把玩这样的模型，当然还会有许多其他可能的构造方式。”

KKLT的结论之一，是在解释如何去稳定模数的同时，也得到卡拉比—丘流形本身只能有某些稳定或准稳定（quasi-stable）形状的限制。也就是说，我们可以先选择某个特定拓扑类型的卡拉比—丘流形，找出在流形上穿戴各种D膜与通量场的方法，然后再计数所有可能配置方式的数目。问题出在一旦你真的数出来，别人可能对结果很不以为然，因为所有的配置数大得荒唐，可高达10500种。这个估算绝非精确，只是要让你稍微体会，一个具有很多洞的卡拉比—丘流形大概可以有多少种不同的配置数。举例来说，环面需要一个通量场穿绕它的洞才能稳定，因为通量场要量子化，不妨假设它可以取从0到9的10个整数值，这相当于环面具有10种稳定的形状。然后再考虑两个洞的环面，因为每个洞都需要穿绕的通量场才会稳定，所以就有102，亦即100种可能的稳定形状。至于六维的卡拉比—丘流形，选择的可能性当然多得多。“10的500次方是这样算的，数学家估计流形的最大洞数大概是500个，再假设穿过每个洞的场或通量都具有10种可能态。这个数字的意义何在？首先，这表示由于卡拉比—丘流形的拓扑复杂性，所以弦论方程有许多可能的解，而每个解对应到不同卡拉比—丘流形的几何性质，因此也就意味着有不同的粒子、不同的物理常数等。不仅如此，由于卡拉比—丘流形是真空爱因斯坦方程的解，每种解以不同的方式承载着通量场和D膜，结果对应到不同真空态的宇宙，因此各有不同的真空能量。出人意料的是，不少理论学家还真的相信所有这些宇宙可能都存在。

地景的概念和所谓的人存原理（anthropic argument）息息相关。人存原理是用来解释宇宙为什么会是我们现在所见这个样子的一类论点，它的一个说法如下：根据最近天文学测量的计算结果，我们宇宙的宇宙常数非常非常小，比目前最佳理论的预测值还小上10120倍。还没有人能够解释这个差异或宇宙常数如此之小的缘由。但是如果景观上这10500种可能真空态都真的存在于某处，每个真空态各自呈现一个宇宙或次宇宙，分别具有不同的内在卡拉比—丘几何与宇宙常数。那么在这些选择中，至少必定有一个次宇宙的宇宙常数会非常小，就像我们的一样。而因为我们总是要居住在某个宇宙里，所以或许就这么巧，那就是我们的宇宙了。

莱德的奇想是所有卡拉比—丘流形也许可以通过所谓的锥形转换（conifold transition）来互相关联。六维卡拉比—丘流形的情况没有这么简单。按照柯列门斯的想法，此时的锥形转换不是捏缩一个圆圈，而是要捏缩一个特殊的二维球。这里我们必须假设，所有紧致凯勒流形，因此包括卡拉比—丘流形在内，里面至少都有一个这样的特别二维球。（日本数学家森重文证明具正黎奇曲率的凯勒流形里一定有这样的二维曲面，我们希望平坦黎奇流形也有这个性质，至少目前已知的卡拉比—丘流形都有这样的二维球，因此直觉上这个猜测是正确的，不过还没有证明出来。）将这个二维球捏缩成一点后，可以换成一个捏缩的三维球，然后再放大恢复。如果前述假设是正确的，这个动完手术的流形因为没有特殊二维球，就不会是凯勒流形，当然也不再是卡拉比—丘流形，而变成了一个非凯勒流形。如果继续锥形转换的过程，我们可以在刚刚这个非凯勒流形先前装入三维球的地方，再换装入一个二维球，结果就转换成另一个卡拉比—丘流形。从一个卡拉比—丘流形转换成另一个卡拉比—丘流形时，必须通过某个非凯勒流形为中介。那么有没有可能，其实所有的凯勒流形都可以通过这些压缩或伸展的操作来互相转换呢？这正是莱德奇想的核心想法。除了到处散布的小泡孔之外，绝大部分的空间基本上都是起司块。这些小泡孔就像少部分的凯勒流形，散布于远远大得多的非凯勒背景空间中。这大致上就是我们的想法：非凯勒流形的数目非常多，其中掺杂着零零星星的凯勒流形。

在非凯勒流形的情况，四维和六维的两个空间彼此并不是独立的，因此十维的时空并不是笛卡儿乘积，而是“弯扭乘积”（warped product），这表示两个子空间会彼此作用。其中比较特别的是，四维时空中的距离会持

续被六维空间影响或弯扭，而且四维时空被放大或缩小的程度，可以由一个弯扭系数来控制。在某些模型里，弯扭的效应甚至可以达到指数级。

只要给定一个卡拉比—丘流形，就可以在它“附近”找到一系列与它结构很相近的非凯勒流形，这是第一次在数学上确立非凯勒流形的存在性。我们是从一个卡拉比—丘流形开始，然后将几何或度规变形，直到它变成非凯勒的情况。流形本身的拓扑形态没有变，仍然可以具有卡拉比—丘度规，但是新的度规却是非凯勒度规，因此提供了史聪闵格方程的解。在锥形转换的脉络里谈史聪闵格方程似乎很适当，因为它不仅涵盖了非凯勒流形，还包含卡拉比—丘流形作为特例。而莱德猜想正好也是处理在卡拉比—丘流形和非凯勒流形之间来回变换的过程。因此如果我们希望有一组方程可以同时适用于这两类几何空间，那么史聪闵格方程或许就是答案了。到目前为止，我们已经证明柯列门斯的流形真的满足四个方程中的三个，只剩下其中最困难的部分，也就是消除反常的方程。我很有信心这样的流形解存在。

11

宇宙更倾向于十个大维度的理由如下：在现在大部分已充分发展的模型里，真空能量的来源都肇因于余维的紧致化，也就是说，大家经常听说的所谓暗能量，并不仅只是发神经似地将宇宙加速拉开，其中有一部分（如果不是全部的话）是用来将余维空间卷曲成比瑞士钟表内的弹簧更紧的状态，只是宇宙和劳力士表不同，用来旋紧的是通量和膜。换句话说，系统储存了正的位能。余维空间愈小，弹簧就愈紧，储存的能量就愈大。相反的，如果余维空间的半径变大，位能就会减少，当半径变成无穷大时，位能就变成零。这是最低的能态，也是真正的稳定真空，此时暗能量掉到零，而所有十维空间都变成无穷大。也就是说，曾经很小的内维空间这时就被去紧致化（decompactification）了。去紧致化是紧致化的反面，而前面讨论过，紧致化是弦论最大的挑战之一，因为如果理论预测宇宙是十维的，为什么我们见到的只有四维？为了解释多余维度为什么藏得那么隐秘，弦论学者可是伤透了脑筋。如果其他条件都相同，那么维度应该倾向于变大。这就像筑墙围成的人工储水槽，如果注入槽中的水量不断增加，那么在结构体的任何方向与角落，所有的水都想尽量往外冲，不达目的绝不终止。到了再也挡不住的那一刻，被束缚在储水槽紧致范围内的水会突然暴冲而出，泛滥得到处都是。根据目前对弦论的理解，紧致空间也会发生类似的过程，不论它是卷曲的卡拉比—丘空间或更复杂的几何空间都一样。换句话说，不管内维空间所选定的空间为何，最终都会展开来，不再受到拘束。如果你的脚踏车内胎灌了太多气，在外胎强度较弱的点就会挤出泡泡，最后造成爆胎。我们可以在轮胎的弱点位置贴上补片，这有点像膜一样，或者将整个轮胎用橡皮圈缠牢，控制它的形状，这就像在卡拉比—丘流形加上通量场一样。因此重点是系统有两股互相对峙的力量，顺势想要扩张的空间，却被膜、通量或其他结构给缠绕束缚住，结果就是目前两股对立力量正处于完美的均势，达到某种平衡态。不过这是动荡中的和平。如果量子起伏将余维空间的半径推大点，膜和通量就会施加恢复力，很快将半径恢复正常。但是如果半径拉得太大，膜或通量就有可能被拉断。正如基汀斯所解释的：“一次终究很罕见的起伏，会将系统推到足以去紧致化的半径门槛，然后”，请注意图11.1右侧曲线的斜坡，“从那儿开始，就一路直奔下山”。于是我们就踏上了通往无穷大的欢快旅程。

最后一刻的变化是真空的相变，不是爬出洞或钻过墙的球。最开始的变化不大，像个小空泡，但是它会以指数速度增大。在空泡中的紧致维度会开始自我解放，不再只是普朗克尺度大小的六维空间。随着空泡变大，原先四个大维度、六个卷曲小维度的“种族隔离”将会被废除，一度分成紧致与伸展两种形式的维度，将会变成再也无法区分的十个大维度。“我们谈的是以光速膨胀的空泡，”卡屈卢说：“它开始于时空某处，有点像沸腾的水中集结的气泡。不同的是，这个空泡不只是上升逸离，而是膨胀到将所有的水都清光。“但是空泡为什么会膨胀得这么快？一个理由是空泡内部去紧致状态的位能比外部的位能低，由于系统会朝低能量的方向前进，也就是往维度空间撑大的状态前进，于是位能差产生的梯度会在空泡的边缘产生力，使得空泡加速往外撑大。这个加速度既快又持续，于是将空泡的膨胀速度在很短的时间内推进到光速。林德将这个现象形容得更生动。“这个空泡想要尽快胀大，如果你能以更低的真空能量来过更棒的人生，那还等什么？”林德问道，“所以空泡愈胀愈快，只是不能比光速更快罢了。”由于这个空泡以光速膨胀，因此到时根本不可能知道击中我们的是什么，唯一的预警是前导的震波（shock wave），将在几分之一秒前到达，然后空泡就会迎面撞来，泡壁带着极大的动能。这是双重诅咒的第一波。因为泡壁会有点厚度，通过得要一点儿时间，也许只有几分之一秒后，更悲惨的降临了。我们的家园本来具有四维的物理律，但是空泡的里面却遵从十维的法则，当空泡内部渗透到我们世界的一刹那，十维法则就会开始管控一切。正如剧作兼编剧家马密（David Mamet）所言：“一切都变了。”事实上，一切你能想象的，小至粒子，大至任何繁复的结构，如超星系团，一瞬间都烟飞云散，炸出六个扩张的维度，不论是行星还是人都回归到组成的要素，事实上这些要素也将全部被消灭。所有的粒子如夸克、电子、光子当下都不再存在，或是以完全不同的质量与性质重新出现。时空仍然存在，只是变迁到全新的状态，物理定律也将剧烈改变。

德西特空间也有一个视界（horizon），类似黑洞的事件视界。如果你很靠近黑洞，跨越了致命界线，你就会被吸进黑洞，再也不能回家吃晚饭。一旦跨过了事件视界，即使是光也无法逃离黑洞。类似情形也发生在德西

特空间的视界，如果你在正在加速膨胀的空间走太远，你就再也回不到出发点的附近。而且和黑洞的情况一样，连光也回不来。

12

空泡现象学（bubble phenomenology）这门冷僻领域的支持者所期望的，并不是检视我们置身的空泡，而是其他空泡的踪迹。因为这些具备全然不同真空态的空泡，有些可能在过去曾与我们擦身而过，而昔日擦撞的证据则可能潜藏在宇宙微波背景（cosmic microwave background, CMB）之中。所谓宇宙微波背景就是宇宙沐浴其中的背景辐射，这些大爆炸的余烬分布得非常均匀，强度起伏只有十万分之一的差异。从我们的视点，宇宙微波背景是各向同性的（isotropic），也就是说，从任何角度看去景色都一样。但是如果我们的宇宙曾经受到另一个空泡的剧烈撞击，就有可能在某处注入巨大能量，并且在局部上造成违反上述均匀特性的情况（称为各向异性，anisotropy）。结果就会在我们的宇宙中留下特殊的方向，指向撞击时另一个空泡的中心。尽管我们自己宇宙的去紧致化会造成末日灾难，但是和另一宇宙的碰撞并不必然致命（信不信由你，我们的空泡壁会提供一定程度的保护）。这样的撞击可能会在宇宙微波背景中留下足以辨识的痕迹，而不只是随机起伏的结果。

宇宙弦是纤细且密度极大的细线，诞生于宇宙史第一微秒之内的“相变”过程中。就像水冻成冰时出现的裂痕一样，在宇宙最早期的相变也很可能产生各式各样的瑕疵。相变可能同时在不同区域中发生，这些区域相遇时在接合处会产生线性瑕疵，留下一直保持在原始状态，且材质并未随宇宙演化而改变的束状细线。在这段相变时期中，会演变出许多像意大利面般扭缠的宇宙弦，各自以近乎光速的速率移动，它们又长又弯，具有复杂且多样的摆动样态，有些甚至瓦解成小一点的闭圈，就像绷紧的橡皮圈一样。由于宇宙弦远比次原子粒子的大小还细，学者认为宇宙弦的纤细程度几乎无法测量，但长度又近乎无穷，并且随着宇宙扩张的膨胀而一直拉长。

“弯扭颈域”（warped throat）是卡拉比—丘空间上最常见的瑕疵部位，长得像是表面上的锥状突起（或锥形），而空间其余的部分则通称为“躯域”（bulk）。借用康奈尔大学物理学家麦卡利斯特的比喻，躯域就像一大球冰淇淋放在一个细长又非常尖的锥体上，当通量场打开时，弯扭颈域就会膨胀起来。康奈尔大学的天文学家宾恩（Rachel Bean）则认为，由于卡拉比—丘流形可能有不只一处弯扭颈域，因此用橡皮手套做类比更合适。她说：“我们的三维空间宇宙，就好像在手套指部往尖点移动的点。”而由于尖点聚集了一些反膜，因此暴胀在这个点（膜）到达手套尖端时结束。更因为点的移动受限于指部（颈部）的形状，宾恩说：“所以颈部的形状决定了暴胀的特性。”不同的弯扭颈域模型会得出不同的宇宙弦谱（spectrum），也就是暴胀时可能出现的所有张力不同的宇宙弦。反过来，如果有了这份宇宙弦谱，就能够提示我们，哪一种卡拉比—丘空间是我们宇宙的基底空间。

暴胀源自膜的运动，而我们的宇宙则位于一个三维膜中。依照这套剧本，膜和反膜会在余维空间中向对方慢慢接近，而根据更详细的版本，这一切是发生在余维空间的弯扭颈域中。基于彼此的吸引力，分离正反膜所需的位能成为导致暴胀的动力，我们四维时空指数性暴胀的瞬间过程持续到正反膜对撞并湮灭时，届时会释放出大爆炸的热能，并在宇宙微波背景上留下不可磨灭的印记。膜会移动而不是静坐在角落的事实，让我们得知更多关于该空间的知识。戴自海加以解释说：“这就好像去参加鸡尾酒会，呆坐在角落什么也得不到，但是如果到处闲晃，肯定可以学到更多。”

如果在暴胀时期，膜在卡拉比—丘空间中只移动很短距离的模型，引力波信号就无法察觉得到。但是如果膜在余维空间中走的距离够远，戴自海说：“而且轨迹像唱片沟纹般的一圈圈，所产生的引力波信号就会很强大。”他还补充说，若要膜在这么严格限制的状态下移动，“必需要有某种特殊形式的紧致化与特殊的卡拉比—丘空间，结果当你见到那些信号，就会知道是哪种流形。”这里所谈的紧致化指的是模空间稳定的情形，这尤其意味着会出现弯扭几何空间与弯扭颈域。

大型强子对撞机还可以为弦论预测的余维空间提供更直接明确的证据。在已经计划的实验里，研究者将寻找来自余维空间，因此带有余维空间信号的卡鲁札—克莱因粒子（Kaluza-Klein particlc）。这是因为高维空间的振动，将会在我们居住的四维时空里以粒子的形式来呈现。我们或许可以见到卡鲁札一克莱因粒子衰变的残迹，甚至可能看到这些粒子及其能量从我们的世界消失，然后穿越到更高维的线索。余维空间形状的微小变化，就足以大幅改变卡鲁札—克莱因引力子的质量与交互作用，其程度大约在50% ～100 %。安迪伍德说：“我们只改变一点点几何形状，数字就产生戏剧性的变化。”由大型强子对撞机所得到的粒子质量数据，也能提供余维空间大小的线索。因为对于在高维空间中冒险前进的粒子来说，余维空间愈窄小，粒子的质量就愈重。你不妨想象自己在矮小的廊道中缓步前行，这要花多少能量？你大概觉得还好。但是如果廊道很窄呢？在这样的隧道里前进举步维艰，让人咒骂不已，也需要耗费更多的能量。这就是大致上的解释。不过实际的理由则和海森堡测不准原理有关：动量的测量精确度和位置的测量精确度成反比。换句话说，如果一道波或一颗粒子被拘禁在很小很小的空间中，位置受到很大的限制，它的动量就会很大，于是质量也很重。相反的，如果余维空间大一点，这个波或粒子有较大的空间活动，动量就会比较小，因此也轻一点。大型强子对撞机可以侦测到卡鲁札—克莱因引力子的前提是，它们的质量必须比传统认定者要轻得多，也就是说，余维空间如果不是弯扭得很厉害，就是比传统弦论认定的普朗克尺度大得多。以兰德尔—桑德仑弯扭模型为例，余维空间被两片膜所包围，

时空在两者之间到处弯曲。其中一片膜属于高能尺度，引力很强；另一片则是我们居住的膜，它的能量低而且引力微弱。这样的架构导致质量与能量的变化很大，完全依所在位置与两片膜的相对位置而定。

ADD的理论并不只是放大余维空间而已，它同时降低了统一引力与其他作用力的能量尺度，并在过程中也减少了普朗克尺度。如果阿卡尼哈默德和他的同僚是对的，大型强子对撞机中粒子撞击产生的能量可能会渗漏到高维空间中，让结果看起来像是违反能量守恒原理。在他们的看法里，连弦这个弦论的基本单位也会大到看得见，这是以前无法想象的事。ADD团队的部分研究动机，是为了解释引力明显比其他作用力弱的事实，对于这项不对等，目前仍然缺乏令人信服的解释。而ADD提出一个很特别的答案：引力并没有比其他作用力弱，它看起来弱，是因为引力“流失”到其他维度，以至于我们只感受到引力真正强度的一小部分，这是引力和其他作用力的差异之处。这情况就像在撞球桌上打撞球一样，球虽然受限于二维的球台，但是有些动能会转化为声波逸入第三维空间，这就是我们听到的撞击声。如果在很近的范围内，引力的行为抵触古典物理的平方反比定律，就可能是弦论余维空间存在的信号。

14

“拂落转换”（flop transition）的技巧，可以造出许多虽然紧密相关但拓扑形态却不同的卡拉比—丘流形。（第10章讨论的锥形转换则是另一种牵涉到卡拉比—丘流形，而且会造成拓扑形态强烈变化的例子。）想象在卡拉比—丘空间中有一个二维曲面，看起来像竖起来的橄榄球，然后将它沿着横向收缩，变成腰围愈来愈细的绳状曲面，最后消失只留下时空织理中的一道垂直裂缝。接着，我们推挤“织线”，从裂缝的上下往中间推，垂直裂缝慢慢变成水平裂缝，然后再倒转前面的过程，先放进水平的绳状曲面，再吹胖成一个水平橄榄球状的二维曲面。原来的橄榄球就这样“拂落”成另一个橄榄球。如果用精确的数学方法进行整个过程：将时空特定点撕开，打开裂缝并重新赋向，再塞回一个重新赋向的二维曲面到六维空间中，就可以造出一个拓扑形态不同的新卡拉比—丘空间，和起初的卡拉比—丘空间形状完全不同。