Universidad del CEMA
Departamento de Ingeniería

Nombre: **Junghanss Juan Cruz** Profesor: **Perez Lance, Gabriel**
Curso: **Análisis Numérico** Fecha: October 9, 2021

Trabajo Práctico Nº3

Interpolation

1. Dadas las coordenadas x_i e y_i de los siguientes puntos del plano, hallar para cada caso, el polinomio interpolante de Lagrange.

   a.

i	x_i	y_i
0	-1	4
1	1	8
2	3	4

   b.

i	x_i	y_i
0	-2	2
1	0	-1
2	1	3
3	4	1

   c.

i	x_i	y_i
0	2	3
1	5	6
2	7	4
3	10	-2
4	11	0

2. Para las funciones que se indican a continuación, hallar en cada caso el polinomio interpolante de Lagrange que pasa por los puntos indicados.

   a. $f(x) = \ln(x) \quad ; \quad x_i = 1; e; e^2$

   b. $f(x) = 1/\left(1 + x^2\right) \quad ; \quad x_i = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

   c. $f(x) = 2^{-x} \quad ; \quad x_i = 0; 0.5; 1; 1.5$

   d. $f(x) = 2 + \sin(x) \quad ; \quad x_i = -1; -0.4; 0.7; 1.6; 2.2$

3. Para los ejercicios 1) y 2) hallar todas las diferencias divididas de orden k, y utilizarlas para obtener el polinomio interpolante de Lagrange.

4. Para aquellos casos de los ejercicios 1) y 2) que sea posible, aplicar la fórmula de las diferencias progresivas de Newton para obtener el polinomio interpolante. Repetir, utilizando las diferencias regresivas de Newton.

5. Para cada uno de los siguientes datos, hallar el correspondiente polinomio interpolante de Hermite

   a.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	-1	4	1
1	1	8	0
2	3	4	2

   b.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	-2	2	0
1	0	-1	1
2	3	4	3
3	4	1	-1

   c.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	2	3	1
1	5	6	0
2	7	4	0
3	10	-2	2
4	11	0	1

d.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	-1	-4	-1
1	1	8	1
2	3	4	0

6. Para las funciones que se indican a continuación, hallar en cada caso el polinomio interpolante de Hermite que pasa por los puntos indicados.

   a. $f(x) = \ln(x) \quad ; \quad x_i = 1; e; e^2$

   b. $f(x) = 1/\left(1 + x^2\right) \quad ; \quad x_i = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

   c. $f(x) = 2^{-x} \quad ; \quad x_i = 0; 0.5; 1; 1.5$

   d. $f(x) = 2 + \sin(x) \quad ; \quad x_i = -1; -0.4; 0.7; 1.6; 2.2$

7. Para las funciones del ejercicio 6) y considerando los valores de x especificados, determinar el trazador cúbico natural.

Contents

1 Ejercicio Nº1

1.1 Inciso (a)

Considerando nuestros puntos del plano podemos construir un polinomio de Lagrange. Sea la expresión general del polinomio interpolante de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{n} f(x_h)\mathcal{L}_h(x) \tag{1}$$

donde $\mathcal{L}_h(x)$ es:

$$\mathcal{L}_h(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{x_h - x_i} \tag{2}$$

Para $x_0 = -1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 3)}{(-1 - 1) \cdot (-1 - 3)} \\ \mathcal{L}_0(x) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{8} \end{aligned} \tag{3}$$

Para $x_1 = 1$:

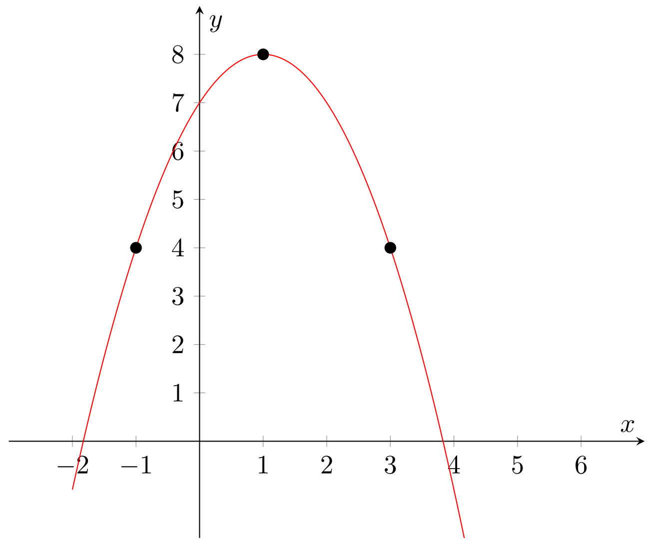
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) &= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{(1 + 1) \cdot (1 - 3)} \\ \mathcal{L}_1(x) &= \frac{x^2 - 2x - 3}{-4} \end{aligned} \tag{4}$$

Para $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(3 + 1) \cdot (3 - 1)} \\ \mathcal{L}_2(x) &= \frac{x^2 - 1}{8} \end{aligned} \tag{5}$$

Por ende, nuestro polinomio interpolante $P(x)$ sería la sumatoria de los términos $\mathcal{L}_h(x)$ multiplicado por $f(x_h)$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{8}\right) + 8\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{-4}\right) + 4\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \\ P(x) &= -x^2 + 2x + 7 \end{aligned} \tag{6}$$



1.2 Inciso (b)

Según nuestra expresión general (2), los términos del polinomio para cada polo en este caso serían:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(-2-0)\cdot(-2-1)\cdot(-2-4)}$$

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{-x^3+5x^2}{36} - \frac{x}{9} \tag{7}$$

Para $x_1 = 0$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} = \frac{(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(2)\cdot(-1)\cdot(-4)}$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x^3-3x^2}{8} - \frac{3x}{4} + 1 \tag{8}$$

Para $x_2 = 1$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} = \frac{(x+2)\cdot(x)\cdot(x-4)}{(1+2)\cdot(1)\cdot(1-4)}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{-x^3+2x^2+8x}{9} \tag{9}$$

Para $x_3 = 4$

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} = \frac{(x+2)\cdot(x)\cdot(x-1)}{(4+2)\cdot(4)\cdot(4-1)}$$

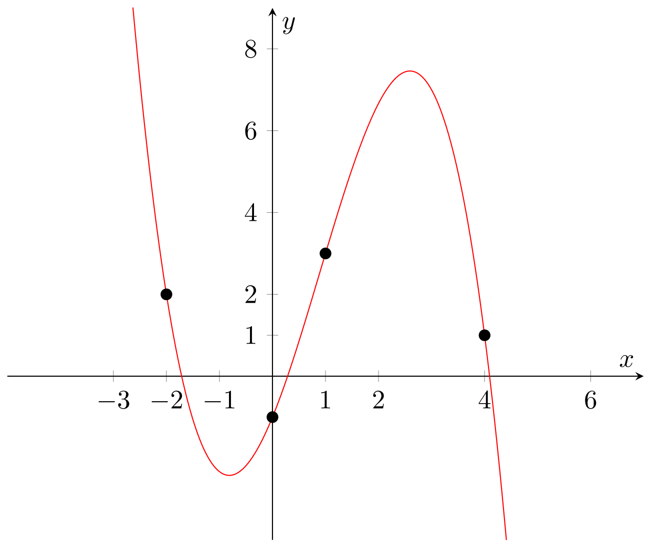
$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{x^3+x^2}{72} - \frac{x}{36} \tag{10}$$

Construyendo el polinomio interpolante a partir de los términos $\mathcal{L}_h(x)$:

$$P(x) = 2\left(\frac{-x^3+5x^2}{36} - \frac{x}{9}\right) - 1\left(\frac{x^3-3x^2}{8} - \frac{3x}{4} + 1\right) + 3\left(\frac{-x^3+2x^2+8x}{9}\right) + 1\left(\frac{x^3+x^2}{72} - \frac{x}{36}\right)$$

$$P(x) = \frac{-x^3}{2} + \frac{4}{3}x^2 + \frac{19}{6}x - 1 \tag{11}$$

Visto en un gráfico, nuestro polinomio de Lagrange es:



1.3 Inciso (c)

Dados los 5 puntos del plano, podemos construir el polinomio interpolante de Lagrange que pase por estos. Construyendo nuestros términos independientes:

Para $x_0 = 2$:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)} = \frac{(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x-10)\cdot(x-11)}{(2-5)\cdot(2-7)\cdot(2-10)\cdot(2-11)}$$

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x^4}{1080} - \frac{11}{360}x^3 + \frac{397}{1080}x^2 - \frac{137}{72}x + \frac{385}{108} \tag{12}$$

Para $x_1 = 5$:

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)} = \frac{(x-2)\cdot(x-7)\cdot(x-10)\cdot(x-11)}{(5-2)\cdot(5-7)\cdot(5-10)\cdot(5-11)}$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{-x^4}{180} + \frac{x^3}{6} - \frac{313x^2}{180} + \frac{107x}{15} - \frac{77}{9} \tag{13}$$

Para $x_2 = 7$:

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)} = \frac{(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-10)\cdot(x-11)}{(7-2)\cdot(7-5)\cdot(7-10)\cdot(7-11)}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{x^4}{120} - \frac{7x^3}{30} + \frac{89x^2}{40} - \frac{49x}{6} + \frac{55}{6} \tag{14}$$

Para $x_3 = 10$:

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)} = \frac{(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x-11)}{(10-2)\cdot(10-5)\cdot(10-7)\cdot(10-11)}$$
$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{-x^4}{120} + \frac{5x^3}{24} - \frac{71x^2}{40} + \frac{719x}{120} - \frac{77}{12} \tag{15}$$

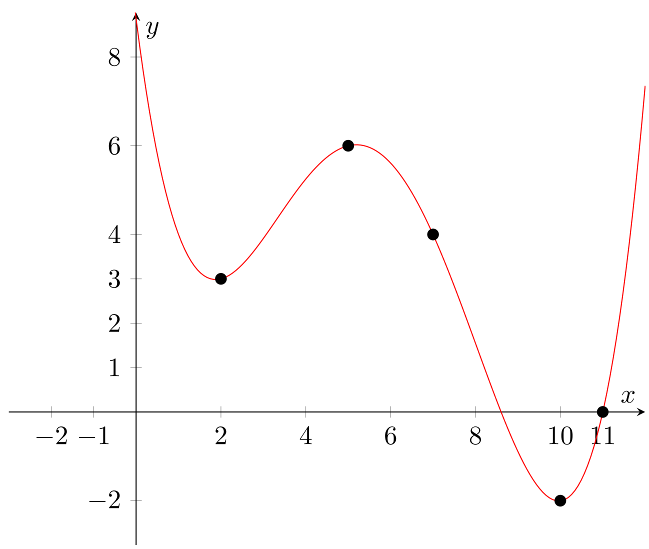
Para $x_4 = 11$:

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)} = \frac{(x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x-10)}{(11-2)\cdot(11-5)\cdot(11-7)\cdot(11-10)}$$
$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{x^4}{216} - \frac{x^3}{9} + \frac{199x^2}{216} - \frac{55x}{18} + \frac{175}{54} \tag{16}$$

Por ende, el polinomio interpolante en cuestión sería:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 3\left(\frac{x^4}{1080} - \frac{11}{360}x^3 + \frac{397}{1080}x^2 - \frac{137}{72}x + \frac{385}{108}\right) + 6\left(\frac{-x^4}{180} + \frac{x^3}{6} - \frac{313x^2}{180} + \frac{107x}{15} - \frac{77}{9}\right) \\ & + 4\left(\frac{x^4}{120} - \frac{7x^3}{30} + \frac{89x^2}{40} - \frac{49x}{6} + \frac{55}{6}\right) - 2\left(\frac{-x^4}{120} + \frac{5x^3}{24} - \frac{71x^2}{40} + \frac{719x}{120} - \frac{77}{12}\right) \\ & + 0\left(\frac{x^4}{216} - \frac{x^3}{9} + \frac{199x^2}{216} - \frac{55x}{18} + \frac{175}{54}\right) \\ P(x) = {} & \frac{7}{360}x^4 - \frac{53}{120}x^3 + \frac{1123}{360}x^2 - \frac{907}{120}x + \frac{319}{36} \end{aligned} \tag{17}$$

Visto en un gráfico, nuestro polinomio de Lagrange de grado 4 es:



2 Ejercicio Nº2

2.1 Inciso (a)

Sea la función $f(x) = \ln(x)$ y los polos $x_i = \{1, e, e^2\}$, podemos calcular el polinomio interpolante de Lagrange.

En primer lugar, consideremos que los valores de $f(x_i)$ según los polos, serían:

x_i	1	e	e^2
$f(x_i)$	0	1	2

Por lo que calculando los términos $\mathcal{L}_h(x)$, para $x_0 = 1$ tenemos:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - e) \cdot (x - e^2)}{(1 - e) \cdot (1 - e^2)} \tag{18}$$

Para $x_1 = e$:

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - e^2)}{(e - 1) \cdot (e - e^2)} = \frac{-e^{-1} \cdot (x - 1) \cdot (x - e^2)}{(e - 1)^2} \tag{19}$$

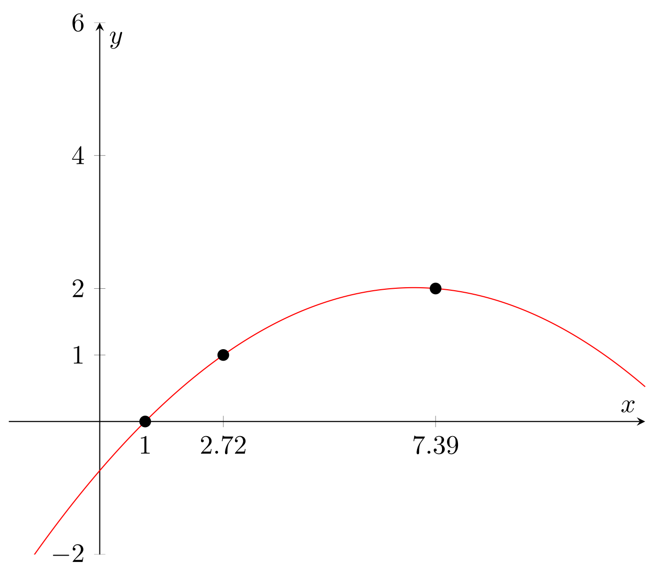
Para $x_2 = e^2$:

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - e)}{(e^2 - 1) \cdot (e^2 - e)} \tag{20}$$

A partir de los resultados, podemos construir el polinomio $P(x)$ como:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 0 \left[\frac{(x - e) \cdot (x - e^2)}{(1 - e) \cdot (1 - e^2)}\right] + 1 \left[\frac{-e^{-1} \cdot (x - 1) \cdot (x - e^2)}{(e - 1)^2}\right] + 2 \left[\frac{(x - 1) \cdot (x - e)}{(e^2 - 1) \cdot (e^2 - e)}\right] \\
P(x) &= \frac{-e^{-1} \cdot (x - 1) \cdot (x - e^2)}{(e - 1)^2} + 2 \left[\frac{(x - 1) \cdot (x - e)}{(e^2 - 1) \cdot (e^2 - e)}\right] \\
P(x) &= \frac{-e^{-1}(x - 1) \cdot (x - e(e + 2))}{(e - 1) \cdot (e + 1)}
\end{aligned} \tag{21}$$

A pesar del incómodo manejo algebráico, visto en un gráfico, nuestro polinomio de Lagrange de grado 2 es:



Por otro lado, la cota de error del polinomio interpolante es:

$$Cota(x) = |\frac{f(\theta)^{n+1)}}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)| \tag{22}$$

La enésima derivada de $f(x) = \ln(x)$ es $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$, lo que implica que:

$$\begin{aligned} Cota(x) &= \frac{(-1)^{n-1+1} \cdot (n+1-1)! \cdot \theta^{-n+1}}{(n+1)!} \cdot (x-1)(x-e)(x-e^2) \\ &= \frac{(-1)^n \cdot \theta^{1-n}}{n+1} \cdot (x-1)(x-e)(x-e^2) \end{aligned} \tag{23}$$

donde $\theta \in [1, e^2]$ y $n = 2$.

2.2 Inciso (b)

Sea la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ y los polos $x_i = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, podemos calcular el polinomio interpolante de Lagrange.

En primer lugar, consideremos que los valores de $f(x_i)$ según los polos, serían:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/10	1/5	1/2	1	1/2	1/5	1/10

calculando los términos $\mathcal{L}_h(x)$, para $x_0 = -3$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= \frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot (x) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(-3+2) \cdot (-3+1) \cdot (-3) \cdot (-3-1) \cdot (-3-2) \cdot (-3-3)} \\ \mathcal{L}_0(x) &= \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^4}{144} + \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{180} - \frac{x}{60} \end{aligned} \tag{24}$$

Para $x_1 = -2$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) &= \frac{(x+3) \cdot (x+1) \cdot (x) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(-2+3) \cdot (-2+1) \cdot (-2) \cdot (-2-1) \cdot (-2-2) \cdot (-2-3)} \\ \mathcal{L}_1(x) &= \frac{-x^6}{120} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{40} + \frac{3x}{20} \end{aligned} \tag{25}$$

Para $x_2 = -1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x+3) \cdot (x+2) \cdot (x) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(-1+3) \cdot (-1+2) \cdot (-1) \cdot (-1-1) \cdot (-1-2) \cdot (-1-3)} \\ \mathcal{L}_2(x) &= \frac{x^6}{48} - \frac{x^5}{48} - \frac{13x^4}{48} + \frac{13x^3}{48} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4} \end{aligned} \tag{26}$$

Para $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(x) &= \frac{(x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(3) \cdot (2) \cdot (1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} \\ \mathcal{L}_3(x) &= \frac{-x^6}{36} + \frac{7x^4}{18} - \frac{49x^2}{36} + 1 \end{aligned} \tag{27}$$

Para $x_4 = 1$

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(1+3)\cdot(1+2)\cdot(1+1)\cdot(1)\cdot(1-2)\cdot(1-3)}$$
$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{x^6}{48} + \frac{x^5}{48} - \frac{13x^4}{48} - \frac{13x^3}{48} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} \tag{28}$$

Para $x_5 = 2$

$$\mathcal{L}_5(x) = \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x)\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{(2+3)\cdot(2+2)\cdot(2+1)\cdot(2)\cdot(2-1)\cdot(2-3)}$$
$$\mathcal{L}_5(x) = \frac{-x^6}{120} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{40} - \frac{3x}{20} \tag{29}$$

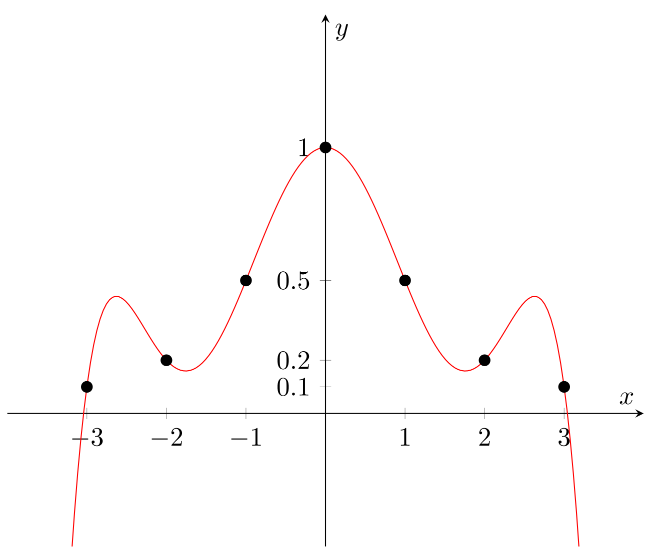
Para $x_6 = 3$

$$\mathcal{L}_6(x) = \frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(3+3)\cdot(3+2)\cdot(3+1)\cdot(3)\cdot(3-1)\cdot(3-2)}$$
$$\mathcal{L}_6(x) = \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{240} - \frac{x^4}{144} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{180} + \frac{x}{60} \tag{30}$$

Finalmente, podemos construir el polinomio interpolante $P(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P(x) = {} & \frac{1}{10}\left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^4}{144} + \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{180} - \frac{x}{60}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{-x^6}{120} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{40} + \frac{3x}{20}\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{48} - \frac{x^5}{48} - \frac{13x^4}{48} + \frac{13x^3}{48} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4}\right) \\
& + 1\left(\frac{-x^6}{36} + \frac{7x^4}{18} - \frac{49x^2}{36} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{48} + \frac{x^5}{48} - \frac{13x^4}{48} - \frac{13x^3}{48} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4}\right) \\
& + \frac{1}{5}\left(\frac{-x^6}{120} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{40} - \frac{3x}{20}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{240} - \frac{x^4}{144} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{180} + \frac{x}{60}\right) \\
P(x) = {} & \frac{-x^6}{100} + \frac{3}{20}x^4 - \frac{16}{25}x^2 + 1 \qquad (31)
\end{aligned}$$

Si graficamos nuestro resultado (31) para controlar que pase por los polos, vemos que cumple todas las condiciones:



2.3 Inciso (c)

Sea la función $f(x) = 2^{-x}$ y los polos $x_i = \{0, 0.5, 1, 1.5\}$, podemos calcular el polinomio interpolante de Lagrange.

En primer lugar, consideremos que los valores de $f(x_i)$ según los polos, serían:

x_i	0	0.5	1	1.5
$f(x_i)$	1	(2744210)/(3880899)	1/2	(1372105)/(3880899)

Por lo que calculando los términos $\mathcal{L}_h(x)$, para $x_0 = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(x) &= \frac{(x-0.5)\cdot(x-1)\cdot(x-1.5)}{(-0.5)\cdot(-1)\cdot(-1.5)} \\ \mathcal{L}_0(x) &= -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1\end{aligned} \tag{32}$$

Para $x_1 = 0.5$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(x) &= \frac{(x)\cdot(x-1)\cdot(x-1.5)}{(0.5)\cdot(0.5-1)\cdot(0.5-1.5)} \\ \mathcal{L}_1(x) &= 4x^3 - 10x^2 + 6x\end{aligned} \tag{33}$$

Para $x_2 = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x)\cdot(x-0.5)\cdot(x-1.5)}{(1)\cdot(1-0.5)\cdot(1-1.5)} \\ \mathcal{L}_2(x) &= -4x^3 + 8x^2 - 3x\end{aligned} \tag{34}$$

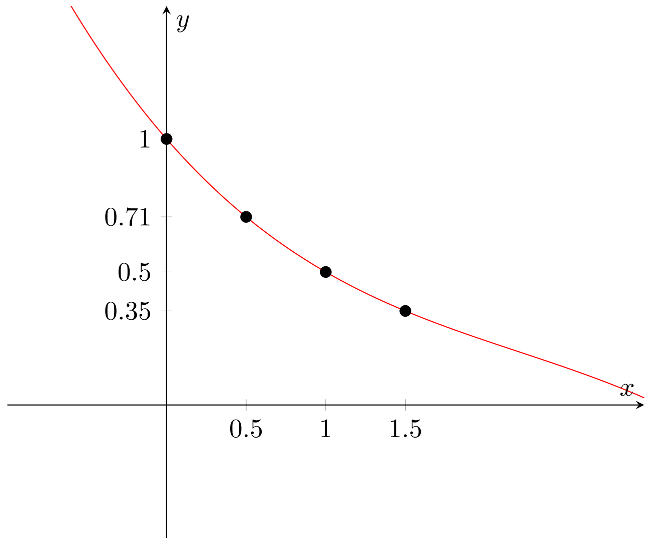
Para $x_3 = 1.5$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3(x) &= \frac{(x)\cdot(x-0.5)\cdot(x-1)}{(1.5)\cdot(1.5-0.5)\cdot(1.5-1)} \\ \mathcal{L}_3(x) &= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x\end{aligned} \tag{35}$$

Sea $P(x)$ nuestro polinomio interpolante de Lagrange:

$$\begin{aligned}P(x) &= 1\left(-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) + \frac{2744210}{3880899}\left(4x^3 - 10x^2 + 6x\right) + \frac{1}{2}\left(-4x^3 + 8x^2 - 3x\right) + \frac{1372105}{3880899}\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x\right) \\ P(x) &= -\left(\frac{1445957}{43160721}\right)x^3 + \left(\frac{3721855}{16778308}\right)x^2 - \left(\frac{3250754}{4722711}\right)x + 1\end{aligned} \tag{36}$$

Y el gráfico resultante es:



2.4 Inciso (d)

Sea la función $f(x) = 2 + \sin(x)$ y los polos $x_i = \{-1, -0.4, 0.7, 1.6, 2.2\}$, podemos calcular el polinomio interpolante de Lagrange.

Considerando que los valores de $f(x_i)$ según los polos son:

x_i	-1	-0.4	0.7	1.6	2.2
$f(x_i)$	$\frac{2971189}{2564622}$	$\frac{15338798}{9523763}$	$\frac{11041161}{4175587}$	$\frac{4720282}{1573651}$	$\frac{7186844}{2558965}$

El primer término para $x_0 = -1$ sería:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x+0.4)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1.6)\cdot(x-2.2)}{(-1+0.4)\cdot(-1-0.7)\cdot(-1-1.6)\cdot(-1-2.2)}$$
$$\mathcal{L}_0(x) = \left(\frac{625}{5304}\right)x^4 - \left(\frac{1701709853}{3522290365}\right)x^3 + \left(\frac{1825}{3536}\right)x^2 + \left(\frac{30303029}{32145453163}\right)x - \left(\frac{26516758594}{228319622699}\right) \tag{37}$$

Para $x_1 = -0.4$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1.6)\cdot(x-2.2)}{(-0.4+1)\cdot(-0.4-0.7)\cdot(-0.4-1.6)\cdot(-0.4-2.2)}$$
$$\mathcal{L}_1(x) = -\frac{125}{429}x^4 + \frac{875}{858}x^3 - \frac{70}{143}x^2 - \frac{929}{858}x + \frac{28}{39} \tag{38}$$

Para $x_2 = 0.7$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x+1)\cdot(x+0.4)\cdot(x-1.6)\cdot(x-2.2)}{(0.7+1)\cdot(0.7+0.4)\cdot(0.7-1.6)\cdot(0.7-2.2)}$$
$$\mathcal{L}_2(x) = \left(\frac{2000}{5049}\right)x^4 - \left(\frac{6250061147}{6574283069}\right)x^3 - \left(\frac{2800}{5049}\right)x^2 + \left(\frac{2272}{1683}\right)x + \frac{256}{459} \tag{39}$$

Para $x_3 = 1.6$

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x+1)\cdot(x+0.4)\cdot(x-0.7)\cdot(x-2.2)}{(1.6+1)\cdot(1.6+0.4)\cdot(1.6-0.7)\cdot(1.6-2.2)}$$
$$\mathcal{L}_3(x) = -\left(\frac{125}{351}\right)x^4 + \left(\frac{79662485961}{149128173719}\right)x^3 + \left(\frac{35085062014}{46471157611}\right)x^2 - \frac{83}{234}x - \frac{77}{351} \tag{40}$$

Para $x_4 = 2.2$

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{(x+1)\cdot(x+0.4)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1.6)}{(2.2+1)\cdot(2.2+0.4)\cdot(2.2-0.7)\cdot(2.2-1.6)}$$
$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{125}{936}x^4 - \left(\frac{44444760497}{369780407335}\right)x^3 - \left(\frac{6897905933}{30383246839}\right)x^2 + \frac{9}{104}x + \frac{7}{117} \tag{41}$$

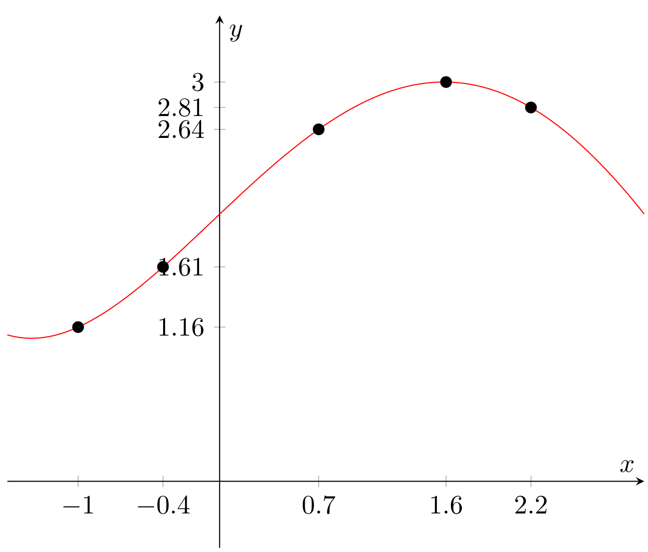
Sea $P(x)$ el polinomio inteprolante de Lagrange, a partir de nuestros términos $\mathcal{L}_h(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
P(x) = &\left(\frac{2971189}{2564622}\right)\cdot\left[\left(\frac{625}{5304}\right)x^4 - \left(\frac{1701709853}{3522290365}\right)x^3 + \left(\frac{1825}{3536}\right)x^2 + \left(\frac{30303029}{32145453163}\right)x - \left(\frac{26516758594}{228319622699}\right)\right]\\
&+\left(\frac{15338798}{9523763}\right)\cdot\left(-\frac{125}{429}x^4 + \frac{875}{858}x^3 - \frac{70}{143}x^2 - \frac{929}{858}x + \frac{28}{39}\right)\\
&+\left(\frac{11041161}{4175587}\right)\cdot\left[\left(\frac{2000}{5049}\right)x^4 - \left(\frac{6250061147}{6574283069}\right)x^3 - \left(\frac{2800}{5049}\right)x^2 + \left(\frac{2272}{1683}\right)x + \frac{256}{459}\right]\\
&+\left(\frac{4720282}{1573651}\right)\cdot\left[-\left(\frac{125}{351}\right)x^4 + \left(\frac{79662485961}{149128173719}\right)x^3 + \left(\frac{35085062014}{46471157611}\right)x^2 - \frac{83}{234}x - \frac{77}{351}\right]\\
&+\left(\frac{7186844}{2558965}\right)\cdot\left[\frac{125}{936}x^4 - \left(\frac{44444760497}{369780407335}\right)x^3 - \left(\frac{6897905933}{30383246839}\right)x^2 + \frac{9}{104}x + \frac{7}{117}\right]
\end{aligned}$$

Por necesidad representaremos al polinomio con números decimales utilizando truncamiento:

$$P(x) = (0.021497)x^4 - (0.166259)x^3 - (0.029825)x^2 + (1.00594)x + 2.00654 \tag{42}$$

Y, visto en un gráfico quedaría como:



3 Ejercicio Nº3

4 Ejercicio Nº4

5 Ejercicio Nº5

6 Ejercicio Nº6

7 Ejercicio Nº7

7.1 Inciso (a)

Sea la función $f(x) = \ln(x)$ y los polos $x_i = \{1, e, e^2\}$, podemos calcular el trazador cúbico natural.

x_i	1	e	e^2
$f(x_i)$	0	1	2

La cantidad de tramos a construir son $n = 2$, que tendrán la forma:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3 \tag{43}$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-e) + c_1(x-e)^2 + d_1(x-e)^3 \tag{44}$$

Cada tramo (43) y (44) evaluado en un polo deberá cumplir las siguientes condiciones:

$$S_0(1) = a_0 = 0 \tag{45}$$
$$S_0(e) = a_0 + b_0(e-1) + c_0(e-1)^2 + d_0(e-1)^3 = 1 \tag{46}$$
$$S_1(e) = a_1 = 1 \tag{47}$$
$$S_1(e^2) = a_1 + b_1(e^2-e) + c_1(e^2-e)^2 + d_1(e^2-e)^3 = 2 \tag{48}$$

Asimismo, la unión entre tramos debe ser continua, lo que implica:

$$S_0'(e) = S_1'(e) \quad \Longrightarrow \quad b_0 + 2c_0(e-1) + 3d_0(e-1)^2 = b_1 \tag{49}$$
$$S_0''(e) = S_1''(e) \quad \Longrightarrow \quad 2c_0 + 6d_0(e-1) = 2c_1 \tag{50}$$

Como no se especifica el tipo de frontera, se asume que esta es libre o natural, es decir, en ambos extremos las derivadas segundas se anulan:

$$S''(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S''(1) = 2c_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_0 = 0 \tag{51}$$
$$S''(x_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S''(e^2) = 2c_1 + 6d_1(e^2-e) = 0 \tag{52}$$

Así, con nuestras 8 condiciones desde (45) hasta (52), podemos despejar del sistema el valor de los coeficientes del polinomio de cada tramo.

Si planteamos nuestro sistema de ecuaciones de 8x8 sería:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + b_0(e-1) + c_0(e-1)^2 + d_0(e-1)^3 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_1 + b_1(e^2-e) + c_1(e^2-e)^2 + d_1(e^2-e)^3 = 2 \\ b_0 + 2c_0(e-1) + 3d_0(e-1)^2 = b_1 \\ 2c_0 + 6d_0(e-1) = 2c_1 \\ c_0 = 0 \\ 2c_1 + 6d_1(e^2-e) = 0 \end{cases}$$

Reemplazando a_0, a_1 y c_0, podemos reducirlo a 5x5:

$$\begin{cases} b_0(e-1) + d_0(e-1)^3 = 1 \\ b_1(e^2-e) + c_1(e^2-e)^2 + d_1(e^2-e)^3 = 1 \\ b_0 + 3d_0(e-1)^2 = b_1 \\ 3d_0(e-1) = c_1 \\ 2c_1 + 6d_1(e^2-e) = 0 \end{cases}$$

Podemos considerar despejar nuestros coeficientes con índice 1 en función de coeficientes con índice 0. Por empezar tenemos que $c_1 = 3d_0(e-1)$ y que $b_1 = b_0 + 3d_0(e-1)^2$, por lo que ya podemos reducirlo a 3x3 el sistema:

$$\begin{cases} b_0(e-1) + d_0(e-1)^3 = 1 \\ \left[b_0 + 3d_0(e-1)^2\right](e^2-e) + \left[3d_0(e-1)\right](e^2-e)^2 + d_1(e^2-e)^3 = 1 \\ 6d_0(e-1) + 6d_1(e^2-e) = 0 \end{cases}$$

Además, de la tercer ecuación podemos despejar d_1 como $d_1 = -d_0/e$, lo que implica:

$$\begin{cases} b_0(e-1) + d_0(e-1)^3 = 1 \\ \left[b_0 + 3d_0(e-1)^2\right](e^2-e) + \left[3d_0(e-1)\right](e^2-e)^2 - \left(\frac{d_0}{e}\right)(e^2-e)^3 = 1 \end{cases}$$

Finalmente, si empleamos un método de solución del sistema, obtendremos los siguientes resultados:

$$b_0 = \frac{\left(2e^2+3e-1\right)e^{-1}}{2\left(e^2-1\right)} = 0.631446 \tag{53}$$

$$d_0 = \frac{-e^{-1}}{2\left(e^3-e^2-e+1\right)} = -0.016755 \tag{54}$$

Esto último implica:

$$b_1 = b_0 + 3d_0(e-1)^2 = (0.631446) + 3(-0.016755)(e-1)^2 = 0.483039 \tag{55}$$

$$c_1 = 3d_0(e-1) = 3(-0.016755)(e-1) = -0.08636 \tag{56}$$

$$d_1 = -\frac{d_0}{e} = \frac{0.016755}{e} = 0.006164 \tag{57}$$

Habiendo calculado la totalidad de coeficientes incógnitas, podemos plantear nuestros trazador cúbico natural:

$$S_0(x) = (0.6314)(x-1) - (0.0167)(x-1)^3 \tag{58}$$

$$S_1(x) = 1 + (0.483)(x-e) - (0.0863)(x-e)^2 + (0.0061)(x-e)^3 \tag{59}$$

7.2 Inciso (b)

Sea la función $f(x) = 1/(1+x^2)$ y los polos $x_i = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, podemos calcular el trazador cúbico natural.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/10	1/5	1/2	1	1/2	1/5	1/10

La cantidad de tramos a construir son $n = 6$, que tendrán la forma:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x+3) + c_0(x+3)^2 + d_0(x+3)^3 \tag{60}$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x+2) + c_1(x+2)^2 + d_1(x+2)^3 \tag{61}$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x+1) + c_2(x+1)^2 + d_2(x+1)^3 \tag{62}$$
$$S_3(x) = a_3 + b_3(x) + c_3(x)^2 + d_3(x)^3 \tag{63}$$
$$S_4(x) = a_4 + b_4(x-1) + c_4(x-1)^2 + d_4(x-1)^3 \tag{64}$$
$$S_5(x) = a_5 + b_5(x-2) + c_5(x-2)^2 + d_5(x-2)^3 \tag{65}$$

Dada la extensión posible del ejercicio por la cantidad de polos, no resolveremos algebraicamente semejante sistema de 24 incognitas, sino que solamente plantearemos a continuación las 24 condiciones $(4n = 4(6) = 24)$:

Si cada subintervalo debe cumplir que $S_j(x_j) = f(x_j)$ y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1} \quad \forall j = 0, 1, ..., n-1$ entonces:

$$S_0(-3) = f(x_0) \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{10} \tag{66}$$
$$S_0(-2) = f(x_1) \quad \Longrightarrow \quad a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = \frac{1}{5} \tag{67}$$
$$S_1(-2) = f(x_1) \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{1}{5} \tag{68}$$
$$S_1(-1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = \frac{1}{2} \tag{69}$$
$$S_2(-1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} \tag{70}$$
$$S_2(0) = f(x_3) \quad \Longrightarrow \quad a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1 \tag{71}$$
$$S_3(0) = f(x_3) \quad \Longrightarrow \quad a_3 = 1 \tag{72}$$
$$S_3(1) = f(x_4) \quad \Longrightarrow \quad a_3 + b_3 + c_3 + d_3 = \frac{1}{2} \tag{73}$$
$$S_4(1) = f(x_4) \quad \Longrightarrow \quad a_4 = \frac{1}{2} \tag{74}$$
$$S_4(2) = f(x_5) \quad \Longrightarrow \quad a_4 + b_4 + c_4 + d_4 = \frac{1}{5} \tag{75}$$
$$S_5(2) = f(x_5) \quad \Longrightarrow \quad a_5 = \frac{1}{5} \tag{76}$$
$$S_5(3) = f(x_6) \quad \Longrightarrow \quad a_5 + b_5 + c_5 + d_5 = \frac{1}{10} \tag{77}$$

Las uniones de intervalos deben coincidir de forma tal que $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, ..., n-1$, lo que implica que debe haber continuidad, es decir, las derivadas primeras y segundas deben coincidir:

$$S_0'(-2) = S_1'(-2) \implies b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \tag{78}$$
$$S_0''(-2) = S_1''(-2) \implies 2c_0 + 6d_0 = 2c_1 \tag{79}$$
$$S_1'(-1) = S_2'(-1) \implies b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2 \tag{80}$$
$$S_1''(-1) = S_2''(-1) \implies 2c_1 + 6d_1 = 2c_2 \tag{81}$$
$$S_2'(0) = S_3'(0) \implies b_2 + 2c_2 + 3d_2 = b_3 \tag{82}$$
$$S_2''(0) = S_3''(0) \implies 2c_2 + 6d_2 = 2c_3 \tag{83}$$
$$S_3'(1) = S_4'(1) \implies b_3 + 2c_3 + 3d_3 = b_4 \tag{84}$$
$$S_3''(1) = S_4''(1) \implies 2c_3 + 6d_3 = 2c_4 \tag{85}$$
$$S_4'(2) = S_5'(2) \implies b_4 + 2c_4 + 3d_4 = b_5 \tag{86}$$
$$S_4''(2) = S_5''(2) \implies 2c_4 + 6d_4 = 2c_5 \tag{87}$$

Resta agregar las dos condiciones adicionales de las fronteras libres:

$$S_0''(-3) = 0 \implies 2c_0 = 0 \implies c_0 = 0 \tag{88}$$
$$S_5''(3) = 0 \implies 2c_5 + 6d_5 = 0 \tag{89}$$

Así, con las 24 condiciones desde (66) hasta (89) tenemos un sistema de ecuaciones para resolver y hallar el trazador cúbico natural correspondiente.

7.3 Inciso (c)

Sea la función $f(x) = 2^{-x}$ y los polos $x_i = \{0; 0.5; 1; 1.5\}$, podemos calcular el trazador cúbico natural.

x_i	0	0.5	1	1.5
$f(x_i)$	1	0.7071	1/2	0.3535

La cantidad de tramos a construir son $n = 3$, que tendrán la forma:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x) + c_0(x)^2 + d_0(x)^3 \tag{90}$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-0.5) + c_1(x-0.5)^2 + d_1(x-0.5)^3 \tag{91}$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3 \tag{92}$$

A su vez, los tramos deben cumplir con $4n$ condiciones. En primer lugar, debe cumplirse que $S_j(x_j) = f(x_j)$ y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$.

$$S_0(0) = f(0) \implies a_0 = 1 \tag{93}$$
$$S_0(0.5) = f(0.5) \implies a_0 + b_0(0.5) + c_0(0.5)^2 + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \tag{94}$$
$$S_1(0.5) = f(0.5) \implies a_1 = 0.7071 \tag{95}$$
$$S_1(1) = f(1) \implies a_1 + b_1(0.5) + c_1(0.5)^2 + d_1(0.5)^3 = 0.5 \tag{96}$$
$$S_2(1) = f(1) \implies a_2 = 0.5 \tag{97}$$
$$S_2(1.5) = f(1.5) \implies a_2 + b_2(0.5) + c_2(0.5)^2 + d_2(0.5)^3 = 0.3535 \tag{98}$$

Por otro lado, debe haber continuidad $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$, que implica lo siguiente:

$$S_0'(0.5) = S_1'(0.5) \implies b_0 + c_0 + \frac{3}{4}d_0 = b_1 \tag{99}$$
$$S_0''(0.5) = S_1''(0.5) \implies 2c_0 + 6d_0(0.5) = 2c_1 \implies c_0 + \frac{3}{2}d_0 = c_1 \tag{100}$$
$$S_1'(1) = S_2'(1) \implies b_1 + 2c_1(0.5) + 3d_1(0.5)^2 = b_2 \implies b_1 + c_1 + \frac{3}{4}d_1 = b_2 \tag{101}$$
$$S_1''(1) = S_2''(1) \implies 2c_1 + 6d_1(0.5) = 2c_2 \implies c_1 + \frac{3}{2}d_1 = c_2 \tag{102}$$

Y, finalmente, como son de frontera libre, las últimas condiciones implican:

$$S_0''(0) = 0 \implies 2c_0 = 0 \implies c_0 = 0 \tag{103}$$
$$S_2''(1.5) = 0 \implies 2c_2 + 3d_2 = 0 \tag{104}$$

Si reemplazamos las condiciones (93), (95), (97) y (103) podemos simplificar nuestro sistema de ecuaciones de 12x12 a uno de 8x8:

$$\begin{cases} 1 + b_0(0.5) + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \\ 0.7071 + b_1(0.5) + c_1(0.5)^2 + d_1(0.5)^3 = 0.5 \\ 0.5 + b_2(0.5) + c_2(0.5)^2 + d_2(0.5)^3 = 0.3535 \\ b_0 + \frac{3}{4}d_0 = b_1 \\ \frac{3}{2}d_0 = c_1 \\ b_1 + c_1 + \frac{3}{4}d_1 = b_2 \\ c_1 + \frac{3}{2}d_1 = c_2 \\ 2c_2 + 3d_2 = 0 \end{cases}$$

Reemplazando todas las ecuaciones con coeficientes subindice 2 en función de los coeficientes subindice 1, como por ejemplo $b_2 = b_1 + c_1 + \frac{3}{4}d_1$ y $c_2 = c_1 + \frac{3}{2}d_1$:

$$\begin{cases} 1 + b_0(0.5) + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \\ 0.7071 + b_1(0.5) + c_1(0.5)^2 + d_1(0.5)^3 = 0.5 \\ 0.5 + \left(b_1 + c_1 + \frac{3}{4}d_1\right)(0.5) + \left(c_1 + \frac{3}{2}d_1\right)(0.5)^2 + d_2(0.5)^3 = 0.3535 \\ b_0 + \frac{3}{4}d_0 = b_1 \\ \frac{3}{2}d_0 = c_1 \\ 2\left(c_1 + \frac{3}{2}d_1\right) = -3d_2 \end{cases}$$

Reemplazando $d_2 = -1/3 \cdot 2\left(c_1 + \frac{3}{2}d_1\right)$ y todas las ecuaciones con coeficientes subindice 1 en funcion de los coeficientes subindice 0:

$$\begin{cases} 1 + b_0(0.5) + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \\ 0.7071 + b_1(0.5) + \left(\frac{3}{2}d_0\right)(0.5)^2 + d_1(0.5)^3 = 0.5 \\ 0.5 + \left[b_1 + \left(\frac{3}{2}d_0\right) + \frac{3}{4}d_1\right](0.5) + \left[\left(\frac{3}{2}d_0\right) + \frac{3}{2}d_1\right](0.5)^2 + \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}d_0 + \frac{3}{2}d_1\right)\right](0.5)^3 = 0.3535 \\ b_0 + \frac{3}{4}d_0 = b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + b_0(0.5) + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \\ 0.7071 + b_1(0.5) + \left(\frac{3}{2}d_0\right)(0.5)^2 + d_1(0.5)^3 = 0.5 \\ 0.5b_1 + d_0 + 0.625d_1 + 0.1465 = 0 \\ b_0 + \frac{3}{4}d_0 = b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + b_0(0.5) + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \\ 0.7071 + \left(b_0 + \frac{3}{4}d_0\right)(0.5) + \left(\frac{3}{2}d_0\right)(0.5)^2 + d_1(0.5)^3 = 0.5 \\ 0.5\left(b_0 + \frac{3}{4}d_0\right) + d_0 + 0.625d_1 + 0.1465 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + b_0(0.5) + d_0(0.5)^3 = 0.7071 \\ 0.7071 + \left(b_0 + \frac{3}{4}d_0\right)(0.5) + \left(\frac{3}{2}d_0\right)(0.5)^2 + \left(-0.8b_0 - 2.2d_0 - 0.2344\right)(0.5)^3 = 0.5 \end{cases}$$

Finalmente, resolviendo para b_0 y d_0 obtendremos:

$$b_0 = -0.62348 \tag{105}$$
$$d_0 = 0.15072 \tag{106}$$

Reemplazando en el resto de coeficientes quedaría:

$$b_1 = -0.51044 \tag{107}$$
$$c_1 = 0.22608 \tag{108}$$
$$d_1 = -0.0672 \tag{109}$$
$$b_2 = -0.33476 \tag{110}$$
$$c_2 = 0.17568 \tag{111}$$
$$d_2 = -0.08352 \tag{112}$$
$$\tag{113}$$

7.4 Inciso (d)

Sea la función $f(x) = 2 + \sin(x)$ y los polos $x_i = \{-1; -0.4; 0.7; 1.6; 2.2\}$;

x_i	-1	-0.4	0.7	1.6	2.2
$f(x_i)$	1.15853	1.61058	2.64422	2.99957	2.8085

Los n tramos serán los siguientes 4:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x+1) + c_0(x+1)^2 + d_0(x+1)^3 \tag{114}$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x+0.4) + c_1(x+0.4)^2 + d_1(x+0.4)^3 \tag{115}$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x-0.7) + c_2(x-0.7)^2 + d_2(x-0.7)^3 \tag{116}$$
$$S_3(x) = a_3 + b_3(x-1.6) + c_3(x-1.6)^2 + d_3(x-1.6)^3 \tag{117}$$

Las $4n$ condiciones serán 16 en total que presentaremos a continuación:

$$S_0(-1) = f(-1) \quad \Longrightarrow \quad a_0 = 1.15853 \tag{118}$$
$$S_0(-0.4) = f(-0.4) \quad \Longrightarrow \quad a_0 + b_0(0.6) + c_0(0.6)^2 + d_0(0.6)^3 = 1.61058 \tag{119}$$
$$S_1(-0.4) = f(-0.4) \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 1.61058 \tag{120}$$
$$S_1(0.7) = f(0.7) \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1(1.1) + c_1(1.1)^2 + d_1(1.1)^3 = 2.64422 \tag{121}$$
$$S_2(0.7) = f(0.7) \quad \Longrightarrow \quad a_2 = 2.64422 \tag{122}$$
$$S_2(1.6) = f(1.6) \quad \Longrightarrow \quad a_2 + b_2(0.9) + c_2(0.9)^2 + d_2(0.9)^3 = 2.99957 \tag{123}$$
$$S_3(1.6) = f(1.6) \quad \Longrightarrow \quad a_3 = 2.99957 \tag{124}$$
$$S_3(2.2) = f(2.2) \quad \Longrightarrow \quad a_3 + b_3(0.6) + c_3(0.6)^2 + d_3(0.6)^3 = 2.8085 \tag{125}$$

Para la continuidad:

$$S_0'(-0.4) = S_1'(-0.4) \quad \Longrightarrow \quad b_0 + 2c_0(0.6) + 3d_0(0.6)^2 = b_1 \tag{126}$$
$$S_0''(-0.4) = S_1''(-0.4) \quad \Longrightarrow \quad 2c_0 + 6d_0(0.6) = 2c_1 \tag{127}$$
$$S_1'(0.7) = S_2'(0.7) \quad \Longrightarrow \quad b_1 + 2c_1(1.1) + 3d_1(1.1)^2 = b_2 \tag{128}$$
$$S_1''(0.7) = S_2''(0.7) \quad \Longrightarrow \quad 2c_1 + 6d_1(1.1) = 2c_2 \tag{129}$$
$$S_2'(1.6) = S_3'(1.6) \quad \Longrightarrow \quad b_2 + 2c_2(0.9) + 3d_2(0.9)^2 = b_3 \tag{130}$$
$$S_2''(1.6) = S_3''(1.6) \quad \Longrightarrow \quad 2c_2 + 6d_2(0.9) = 2c_3 \tag{131}$$

Para las fronteras:

$$S_0''(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2c_0 = 0 \tag{132}$$
$$S_3''(2.2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2c_2 + 6d_2(0.6) = 0 \tag{133}$$

Así, desde la condición (118) hasta (133) tenemos las 16 que se requieren para construir el trazador cúbico natural.

Appendices

Lagrange Interpolation

Sea la expresión general del polinomio interpolante de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{n} f(x_h)\mathcal{L}_h(x) \tag{134}$$

donde $\mathcal{L}_h(x)$ es:

$$\mathcal{L}_h(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{x_h - x_i} \tag{135}$$

Sea la cota de error del polinomio interpolante evaluada en un punto x:

$$Cota(x) = |\frac{f(\theta)^{n+1)}}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)| \tag{136}$$

donde $\theta \in [x_{min}, x_{max}]$ y n es el orden del polinomio.

Newton Interpolation

Sea la expresión general del polinomio interpolante de Newton:

$$P_n(x) = \underbrace{a_0}_{P_0} + \underbrace{a_1(x - x_0)}_{P_1} + \underbrace{a_2(x - x_0)(x - x_1)}_{P_2} + \ldots + \underbrace{a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}_{P_n} \tag{137}$$

donde los coeficientes $a_i \in [0, n]$ son:

$$a_0 = f(x_0) = P_n(x_0) \tag{138}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} \Longrightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{139}$$

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{140}$$