Universidad del CEMA
Departamento de Ingeniería

Nombre: **Junghanss Juan Cruz**
Profesor: **Perez Lance, Gabriel**
Curso: **Análisis Numérico**
Fecha: September, 2021

Trabajo Práctico Nº2

Métodos Numéricos para Ecuaciones de una Variable

1. Sean las sucesiones definidas por: $x_n = 1/3x_{n-1}$; $x_0 = 1$ y también $y_{n-2} - 10/3y_{n-1} + y_n = 0$; $y_0 = 1; y_1 = 1/3$.
   Utilizando aritmética finita siendo la precisión t=3 y con política de redondeo simétrico:
   a. Obtener los primeros términos de cada una hasta llegar a x_5 e y_5
   b. En cada caso calcular el error relativo "$\mathbf{E_n}$" que se comete.
   c. Indicar si el error "$\mathbf{E_n}$" se puede modelizar como: $\mathbf{E_n} = k \cdot n \cdot \varepsilon$ o como $\mathbf{E_n} = k^n \cdot \varepsilon$ donde en ambos casos k es una constante.
   d. Analizar el error en ambas sucesiones mediante diagramas de proceso.
2. Para las siguientes ecuaciones, encontrar una solución en el intervalo indicado, utilizando el método de la bisección.
   a. $x^2 - 3 = 0 \quad [a; b] = [1; 2]$
   b. $x = \cos(x) \quad [a; b] = [0; 2]$
   c. $x^x = 50 \quad [a; b] = [3; 4]$
   d. $x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0 \quad [a; b] = [0; 4]$
   e. $2^x = 2 - x^2 \quad [a; b] = [0; 2]$

   Para cada caso:
   (a) Hallar x_6.
   (b) Calcular el error absoluto y relativo cometido en x_6.
   (c) Obtener cotas del error absoluto y relativo para x_6.
   (d) Estimar n para que el error absoluto sea menor que 10^{-5}.
3. Mediante el método de la bisección, calcular el valor de π resolviendo las ecuaciones:
   a. $\tan(\frac{x}{4}) = 1$
   b. $\cos(x) = -1$

   Elegir un intervalo adecuado.
4. Resolver utilizando iteración de punto fijo la ecuación $x^2 - 3 = 0$ en el intervalo $[a; b] = [1; 2]$ $x_0 = 1.5$. Tomando $f(x) = x^2 - 3$ y definiendo $g(x) = x - \gamma \cdot f(x)$, asumiendo $\gamma = 0.1$; $\gamma = 0.4$:
   a. Calcular x_6.
   b. Determinar errores absolutos y relativos; y cotas de los mismos.
   c. Estimar n para que el error absoluto sea menor que 10^{-5}.
   d. Discutir qué valor conviene asignarle a γ.
5. Para las siguientes ecuaciones, encontrar una solución en el intervalo indicado, mediante iteración de punto fijo. Asumir x_0 igual al punto medio del intervalo.
   a. $x = \cos(x) \quad [a; b] = [0; 2]$
   b. $x^x = 50 \quad [a; b] = [3; 4]$
   c. $x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0 \quad [a; b] = [0; 4]$
   d. $2^x = 2 - x^2 \quad [a; b] = [0; 2]$

   Para cada caso:
   (a) Hallar x_6.

(b) Calcular el error absoluto y relativo cometido en x_6.

(c) Obtener cotas del error absoluto y relativo para x_6.

(d) Estimar n para que el error absoluto sea menor que 10^{-5}.

6. Si se aplica la iteración de punto fijo a: $g(x) = 2x - p \cdot x^2$, indicar:
   a. A qué valor converge.
   b. En qué intervalo converge.
   c. Utilizando un valor adecuado de p, estimar $1/7$ mediante x_6.
7. Aplicando iteración de punto fijo a: $g(x) = x/2 + p/(2x)$, indicar:
   a. A qué valor converge.
   b. En qué intervalo converge.
   c. Si $p = 20$, hallar x_6.
8. Mediante iteración de punto fijo, buscar un modo de obtener una aproximación para el valor de la raiz cúbica de 45.
9. Resolver las siguientes ecuaciones utilizando el método de Newton-Raphson:
   a. $x^2 - 3 = 0 \quad x_0 = 1.5$
   b. $x = \cos(x) \quad x_0 = 1.5$
   c. $x^x = 50 \quad x_0 = 3.5$
   d. $x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0 \quad x_0 = 2$
   e. $2^x = 2 - x^2 \quad x_0 = 1$
10. Resolver las ecuaciones del ejercicio (9) mediante Newton con el algoritmo de la secante. Considerar el mismo x_0 en cada caso y tomar un $x_1 = x_0 + 0.1$
11. Un proyecto requiere una inversión de 100000 y se espera que tenga flujos de 30000, 50000 y 60000 en los próximos tres meses respectivamente. Calcular la TIR del proyecto. Utilizar el método de Newton.
12. Mediante el método de Newton, hallar las raices de:
   a. $f(x) = e^{4x^2-12x+9} - \cos(15 - 10x)$
   b. $f(x) = 81x^4 + 756x^3 + 2646x^2 + 4116x + 2401$
   c. $f(x) = \cos(x) - \cos(2x)$ en el intervalo $[1; 3]$
   d. $f(x) = x^3 + \sin(4x) - 2 \cdot \tan(x) + e^{2x}$
13. En el ejercicio anterior, resolver aplicando el algoritmo implementando las derivadas en forma numérica.
14. Hallar raíces utilizando de los siguientes polinomios utilizando el método de Horner y el método de Müller:
   a. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 15x - 20$
   b. $P(x) = 81x^4 + 756x^3 + 2646x^2 + 4116x + 2401$
   c. $P(x) = 5x^4 + 10x^3 + 19x^2 + 18x + 18$
   d. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 10$
   e. $P(x) = x^5 - x^4 - 29x^3 + 71x^2 - 30x + 72$

Contents

1 Ejercicio Nº1

Sean las sucesiones $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$ con $x_0 = 1$, e $y_{n-2} - 10/3y_{n-1} + y_n = 0$ con $y_0 = 1; y_1 = \frac{1}{3}$.

a. Calculemos los términos de orden 5. Para el caso de x_n:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{3} \cdot x_{n-1} && (1)\\
x_1 &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\\
x_2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\\
x_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}\\
x_4 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{54}\\
x_5 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{54} = \frac{1}{162} && (2)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para el caso de y_n:

$$
\begin{aligned}
y_n &= \frac{10}{3} \cdot y_{n-1} - y_{n-2} && (3)\\
y_2 &= \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{9}\\
y_3 &= \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{27}\\
y_4 &= \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{1}{81}\\
y_5 &= \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{81} - \frac{1}{27} = \frac{1}{243} && (4)
\end{aligned}
$$

b. Dado que se trata de una sucesión o ecuación recursiva, podemos calcular un error relativo $\mathbf{E_n}$ que se comete en cada iteración.

Para la sucesión $x_n = \frac{1}{3} \cdot x_{n-1}$ consideremos por el Teorema del Diferencial de Lagrange que:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{3} \cdot x_{n-1}\\
\frac{dx_n}{dx_{n-1}} &= \frac{1}{3}\\
dx_n &= \frac{1}{3} \cdot dx_{n-1}\\
\frac{dx_n}{x_n} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{dx_{n-1}}{\frac{1}{3} \cdot x_{n-1}}\\
r_{x_n} &= r_{x_{n-1}} + u && (5)
\end{aligned}
$$

donde u es el número de máquina y con redondeo simétrico implica $u = 0.5 \cdot 10^{1-t} = 0.005$

Para la sucesión $y_n = \frac{10}{3} \cdot y_{n-1} - y_{n-2}$, dado que el diferencial total de una función bivariable es $dz = f'_x dx + f'_y dy$, implica:

$$\begin{aligned} dy_n &= f'_{y_{n-1}} dy_{n-1} + f'_{y_{n-2}} dy_{n-2} \\ dy_n &= \frac{10}{3} dy_{n-1} + (-1) dy_{n-2} \\ \frac{dy_n}{y_n} &= \frac{\frac{10}{3} dy_{n-1}}{y_n} - \frac{dy_{n-2}}{y_n} \\ r_{y_n} &= \frac{y_{n-1}}{\frac{10}{3} \cdot y_{n-1} - y_{n-2}} \cdot r_{y_{n-1}} - \frac{y_{n-2}}{\frac{10}{3} \cdot y_{n-1} - y_{n-2}} \cdot r_{y_{n-2}} + u \end{aligned} \tag{6}$$

En ambos casos se trata del error relativo "n" por cada iteración, es decir, el enésimo.

c.

d. Por último, es posible analizar el error en ambas sucesiones mediante diagramas de flujo.

2 Ejercicio Nº2

2.1 Inciso (a)

Sea la función $x^2 - 3 = 0$ en el intervalo $[a; b] = [1; 2]$ podemos aproximar su raíz utilizando el método numérico de bisección en 6 pasos.

i) Evaluamos el signo de la función en cada extremo del intervalo.

$f(a) = 1^2 - 3 = -2$

$f(b) = 2^2 - 3 = 1$

Fijamos el punto medio $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ y evaluamos la función en este: $f(c_1) = -0.75$.

Dado que es negativo, reemplazamos el valor original del extremo a del intervalo por este último c_1, es decir, $[a; b] = [1.5; 2]$

ii) Fijamos un nuevo punto medio $c_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{3.5}{2} = 1.75$ y evaluamos la función en este: $f(c_2) = 0.0625$.

Como es positivo, reemplazamos el valor original del extremo b del intervalo por este último de c_2: $[a; b] = [1.5; 1.75]$.

iii) Buscamos un nuevo punto medio $c_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{3.25}{2} = 1.625$ y evaluamos la función en este:

$f(c_3) = -0.359375$.

Vemos que es negativo, por lo que reemplazamos el valor original del extremo a del intervalo:

$[a; b] = [1.625; 1.75]$.

iv) Repitiendo, $c_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{3.375}{2} = 1.6875$ y la función implica $f(c_4) = -0.15234375$. Al ser negativo, el intervalo quedaría como:

$[a; b] = [1.6875; 1.75]$

v) El nuevo punto medio es $c_5 = \frac{a+b}{2} = \frac{3.4375}{2} = 1.71875$ y la función evaluada en este $f(c_5) = -0.0458984375$. Nuevamente, con signo negativo, ajustamos nuestro intervalo:

$[a; b] = [1.71875; 1.75]$

vi) Por último, el punto medio en el sexto paso $c_6 = \frac{a+b}{2} = \frac{3.46875}{2} = 1.73438$, lo que implica en la función $f(c_6) = 0.008056640625$. Como es positivo, el intervalo quedaría como:

$[a; b] = [1.71875; 1.73438]$

Como podemos observar, la raíz de la función objetivo se encuentra en el intervalo: $x_n^* \in [1.71875; 1.73438]$ y obtuvimos $x_6 = 1.73438$

Podemos calcular los errores relativos y absolutos de x_6 de la siguiente manera. Sea el error absoluto en la sexta iteración:

$$\begin{aligned} \delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ \delta_{x_6} =& |1.73438 - 1.71875| = 0.01563 \end{aligned} \tag{7}$$

por lo que el error relativo cometido en dicha iteración sería:

$$\begin{aligned} r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.01563}{1.73438} = 0.009012 \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, también es posible calcular las cotas de error. Sea la cota como función del orden n:

$$\begin{aligned} C &= \frac{b-a}{2^n} \\ &= \frac{2-1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0.015625 \end{aligned} \tag{9}$$

Finalmente, podemos estimar el orden n de iteración para que el error absoluto sea menor al orden de magnitud 10^{-5}. Considerando nuevamente la función de la cota:

$$\begin{aligned} C =& \frac{b-a}{2^n} < 10^{-5} \\ & \frac{2-1}{2^n} < 10^{-5} \end{aligned}$$

podemos despejar n:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &< 10^{-5} \\ \frac{1}{10^{-5}} &< 2^n \\ 10^5 &< 2^n \\ \ln(10^5) &< \ln(2^n) \\ 5 \cdot \ln(10) &< n \cdot \ln(2) \\ n &> \frac{5 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned} \tag{10}$$

dado que el resultado es ≈ 16.6096, implica estrictamente que el orden debe ser $n > 17$ para alcanzar dicha precisión.

2.2 Inciso (b)

Sea la ecuación $x = \cos(x)$ en el intervalo $[a; b] = [0; 2]$ podemos aproximar su raíz con el método de bisección en 6 pasos.

De manera preliminar, podemos reescribir la función como $f(x) = \cos(x) - x$

i) Evaluamos el signo de la función en cada extremo del intervalo.

$$f(a) = f(0) = \cos(0) - 0 = 1$$

$$f(b) = f(2) = \cos(2) - 2 = -2.41615$$

Nuestro punto medio inicial sería $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Evaluada nuestra ecuación en c_1 obtenemos $f(c_1) = -0.459698$, que por resultar negativo debemos reemplazarlo por el valor del intervalo que genera una imagen negativa en la ecuación, en nuestro ejemplo, b. Este quedaría como: $[a; b] = [0; 1]$

ii) Fijamos un nuevo punto medio $c_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ y evaluamos la función $f(c_2) = 0.377583$. En este paso, como c_2 es positivo, se reemplaza el extremo a del intervalo que devolvía una imagen positiva también: $[a; b] = [0.5; 1]$

iii) Generamos un tercer punto medio $c_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75$, en el que evaluada la función resulta ser $f(c_3) = -0.018311$. Se reemplaza por b, quedando el intervalo como $[a; b] = [0.5; 0.75]$

iv) En un cuarto paso, generamos un nuevo punto medio $c_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625$. Evaluamos la función $f(c_4) = 0.18596$ y reemplazamos el extremo a, quedando el intervalo $[a; b] = [0.625; 0.75]$, que nótese cómo se va acotando.

v) Fijamos un nuevo punto medio $c_5 = \frac{a+b}{2} = \frac{1.375}{2} = 0.6875$. Evaluada la función en este es $f(c_5) = 0.085335$ y reemplazamos el valor extremo a nuevamente: $[a; b] = [0.6875; 0.75]$.

vi) Finalmente, en la sexta iteración sería $c_6 = \frac{a+b}{2} = \frac{1.4375}{2} = 0.71875$. Evaluamos la función $f(c_6) = 0.033879$ y podemos acotar el intervalo reemplazando a: $[a; b] = [0.71875; 0.75]$

Entonces, $x_6 = 0.71875$ y nuestra raíz x_n^* estará en $x_n^* \in [0.71875; 0.75]$

Podemos calcular los errores relativos y absolutos de x_6 de la siguiente manera. Sea el error absoluto en la sexta iteración:

$$\begin{aligned} \delta_{x_n} &= |p_n - p_{n-1}| \\ \delta_{x_6} &= |0.71875 - 0.6875| = 0.03125 \end{aligned} \tag{11}$$

por lo que el error relativo cometido en dicha iteración sería:

$$\begin{aligned} r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.03125}{0.71875} = 0.043478 \end{aligned} \tag{12}$$

Por otro lado, también es posible calcular las cotas de error. Sea la cota como función del orden n:

$$\begin{aligned} C &= \frac{b-a}{2^n} \\ &= \frac{2-0}{2^6} = \frac{1}{32} = 0.03125 \end{aligned} \tag{13}$$

Finalmente, podemos estimar el orden n de iteración para que el error absoluto sea menor al orden de magnitud 10^{-5}. Considerando nuevamente la función de la cota:

$$\begin{aligned} C = & \frac{b-a}{2^n} < 10^{-5} \\ & \frac{2-0}{2^n} < 10^{-5} \end{aligned}$$

podemos despejar n:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2^n} &< 10^{-5} \\ \frac{2}{10^{-5}} &< 2^n \\ 2 \cdot 10^5 &< 2^n \\ \ln(2 \cdot 10^5) &< \ln(2^n) \\ \ln(2) \cdot 5 \cdot \ln(10) &< n \cdot \ln(2) \\ \frac{\ln(2) \cdot 5 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} &< n \\ 5 \cdot \ln(10) &< n \end{aligned} \tag{14}$$

dado que el resultado es ≈ 11.513, implica estrictamente que el orden debe ser $n > 12$ para superar dicha precisión.

2.3 Inciso (c)

Sea la ecuación $x^x = 50 \in [a;b]$ donde el intervalo $[a;b] = [3;4]$, podemos aproximar su raíz por método de bisección en 6 pasos. Reescribimos la función como $f(x) = x^x - 50$.

i) Evaluamos el signo de la función en cada extremo del intervalo.

   $f(a) = f(3) = 3^3 - 50 = -23$

   $f(b) = f(4) = 4^4 - 50 = 206$

   Fijamos el punto medio $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$ y evaluamos la función en este: $f(c_1) = 30.2118$.

   Dado que es positivo, reemplazamos el valor original del extremo b del intervalo por este último c_1, es decir, $[a;b] = [3;3.5]$

ii) Fijamos un nuevo punto medio $c_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25$ y evaluamos la función en este: $f(c_2) = -3.90849$.

   Como es negativo, reemplazamos el valor original del extremo a del intervalo por este último de c_2: $[a;b] = [3.25;3.5]$.

iii) Buscamos un nuevo punto medio $c_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{6.75}{2} = 3.375$ y evaluamos la función en este:

   $f(c_3) = 10.663$.

   Vemos que es positivo, por lo que reemplazamos el valor original del extremo b del intervalo:

   $[a;b] = [3.25;3.375]$.

iv) Repitiendo, $c_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{6.625}{2} = 3.3125$ y la función implica $f(c_4) = 2.84652$. Al ser positivo, el intervalo quedaría como:

   $[a;b] = [3.25;3.3125]$

v) El nuevo punto medio es $c_5 = \frac{a+b}{2} = \frac{6.5625}{2} = 3.28125$ y la función evaluada en este $f(c_5) = -0.653765$. En este caso, con signo negativo, ajustamos nuestro intervalo como:

$[a; b] = [3.28125; 3.3125]$

vi) Por último, el punto medio en el sexto paso $c_6 = \frac{a+b}{2} = \frac{6.59375}{2} = 3.296875$, lo que implica en la función $f(c_6) = 1.0645$. Como es positivo, el intervalo quedaría como:

$[a; b] = [3.28125; 3.296875]$

Así, finalizada nuestra iteración, vemos que $x_6 = 3.296875$ y que $x_n^* \in [3.28125; 3.296875]$.

Para calcular los errores relativos y absolutos de x_6 consideremos:

$$\begin{aligned} \delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ \delta_{x_6} =& |3.296875 - 3.28125| = 0.015625 \end{aligned} \tag{15}$$

por lo que el error relativo cometido en dicha iteración sería:

$$\begin{aligned} r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.015625}{3.296875} = 0.0047393 \end{aligned} \tag{16}$$

Por otro lado, también es posible calcular las cotas de error. Sea la cota como función del orden n:

$$\begin{aligned} C &= \frac{b-a}{2^n} \\ &= \frac{4-3}{2^6} = \frac{1}{64} = 0.015625 \end{aligned} \tag{17}$$

Finalmente, podemos estimar el orden n de iteración para que el error absoluto sea menor a 0.00001. Considerando nuevamente la función de la cota:

$$\begin{aligned} C =& \frac{b-a}{2^n} < 10^{-5} \\ & \frac{4-3}{2^n} < 10^{-5} \end{aligned}$$

podemos despejar n:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &< 10^{-5} \\ \frac{1}{10^{-5}} &< 2^n \\ 10^5 &< 2^n \\ \ln(10^5) &< \ln(2^n) \\ 5 \cdot \ln(10) &< n \cdot \ln(2) \\ n &> \frac{5 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned} \tag{18}$$

dado que el resultado es ≈ 16.6096, implica estrictamente que el orden debe ser $n > 17$ para alcanzar dicha precisión.

2.4 Inciso (d)

Sea la ecuación $x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0 \in [a; b]$ donde $[a; b] = [0; 4]$, determinemos su raíz en dicho intervalo con el método de bisección en 6 pasos.

i) Considerando

$$f(a) = f(0) = -20$$
$$f(b) = f(4) = 48$$

Y que el punto medio es $c_1 = \frac{4}{2} = 2$, que implica $f(c_1) = f(2) = -26$, por lo tanto:

$c_1 = a \implies [a; b] = [2, 4]$

ii) Iterando:

$c_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

$f(c_2) = f(3) = -2 \implies c_2 = a \implies [a; b] = [3; 4]$

iii) $c_3 = \frac{3+4}{2} = 3.5$

$f(c_3) = f(3.5) = 19.375 \implies c_3 = b \implies [a; b] = [3; 3.5]$

iv) $c_4 = \frac{3+3.5}{2} = 3.25$

$f(c_4) = f(3.25) = 7.828125 \implies c_4 = b \implies [a; b] = [3; 3.25]$

v) $c_5 = \frac{3+3.25}{2} = 3.125$

$f(c_5) = f(3.125) = 2.705078125 \implies c_5 = b \implies [a; b] = [3; 3.125]$

vi) $c_6 = \frac{3+3.125}{2} = 3.0625$

$f(c_6) = f(3.0625) = 0.301025390625 \implies c_6 = b \implies [a; b] = [3; 3.0625]$

Finalizada la iteración, nótese el acotamiento del intervalo, donde $x_n^* \in [3; 3.0625]$ y que $x_6 = 3.0625$

El error absoluto cometido en x_6 es:

$$\delta_{x_6} = |3.0625 - 3.125| = 0.0625 \tag{19}$$

y el relativo:

$$r_{x_6} = \frac{0.0625}{3.0625} = 0.020408 \tag{20}$$

Por otro lado, la cota de error absoluto sería:

$$C = \frac{4 - 0}{2^6} = \frac{1}{16} = 0.0625 \tag{21}$$

Finalmente, podemos estimar el orden n de iteración para que el error absoluto sea menor a 0.00001. Considerando nuevamente la función de la cota podemos despejar n:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2^n} &< 10^{-5} \\
\frac{4}{10^{-5}} &< 2^n \\
4 \cdot 10^5 &< 2^n \\
\ln(4 \cdot 10^5) &< \ln(2^n) \\
\ln(4) \cdot 5 \cdot \ln(10) &< n \cdot \ln(2) \\
\frac{\ln(4) \cdot 5 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} &< n \\
10 \cdot \ln(10) &< n \qquad (22)
\end{aligned}$$

dado que el resultado es ≈ 23.026, implica estrictamente que el orden debe ser $n > 24$ para superar dicha precisión.

2.5 Inciso (e)

Sea la ecuación $2^x = 2 - x^2 \in [a; b]$ donde $[a; b] = [0; 2]$, podemos determinar su raíz con el método de bisección en 6 pasos.

i) Considerando

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(0) = -1 \\
f(b) &= f(2) = 6
\end{aligned}$$

Y que el punto medio es $c_1 = \frac{2}{2} = 1$, que implica $f(c_1) = f(1) = 1$, por lo tanto:

$c_1 = b \implies [a; b] = [0; 1]$

ii) Iterando:

$c_2 = \frac{1}{2} = 0.5$

$f(c_2) = f(0.5) = -0.33578 \implies c_2 = a \implies [a; b] = [0.5; 1]$

iii) $c_3 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$

$f(c_3) = f(0.75) = 0.244293 \implies c_3 = b \implies [a; b] = [0.5; 0.75]$

iv) $c_4 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$

$f(c_4) = f(0.625) = -0.067164 \implies c_4 = a \implies [a; b] = [0.625; 0.75]$

v) $c_5 = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875$

$f(c_5) = f(0.6875) = 0.083147 \implies c_5 = b \implies [a; b] = [0.625; 0.6875]$

vi) $c_6 = \frac{0.625+0.6875}{2} = 0.65625$

$f(c_6) = f(0.65625) = 0.006645 \implies c_6 = b \implies [a; b] = [0.625; 0.65625]$

Finalizada la iteración, podemos observar que $x_6 = 0.65625$ y que $x_n^* \in [0.625; 0.65625]$

El error absoluto cometido en x_6 es:

$$\delta_{x_6} = |0.65625 - 0.6875| = 0.03125 \qquad (23)$$

y el relativo:

$$r_{x_6} = \frac{0.03125}{0.65625} = 0.047619 \tag{24}$$

Por otro lado, la cota de error absoluto sería:

$$C = \frac{2-0}{2^6} = \frac{1}{32} = 0.03125 \tag{25}$$

Finalmente, podemos estimar el orden n de iteración para que el error absoluto sea menor a 0.00001. Considerando nuevamente la función de la cota podemos despejar n:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2^n} &< 10^{-5} \\
\frac{2}{10^{-5}} &< 2^n \\
2 \cdot 10^5 &< 2^n \\
\ln(2 \cdot 10^5) &< \ln(2^n) \\
\ln(2) \cdot 5 \cdot \ln(10) &< n \cdot \ln(2) \\
\frac{\ln(2) \cdot 5 \cdot \ln(10)}{\ln(2)} &< n \\
5 \cdot \ln(10) &< n
\end{aligned} \tag{26}$$

dado que el resultado es ≈ 11.513, implica estrictamente que el orden debe ser $n > 12$ para superar dicha precisión.

3 Ejercicio Nº3

Empleando el método de la bisección, podemos calcular el valor de π resolviendo las ecuaciones:

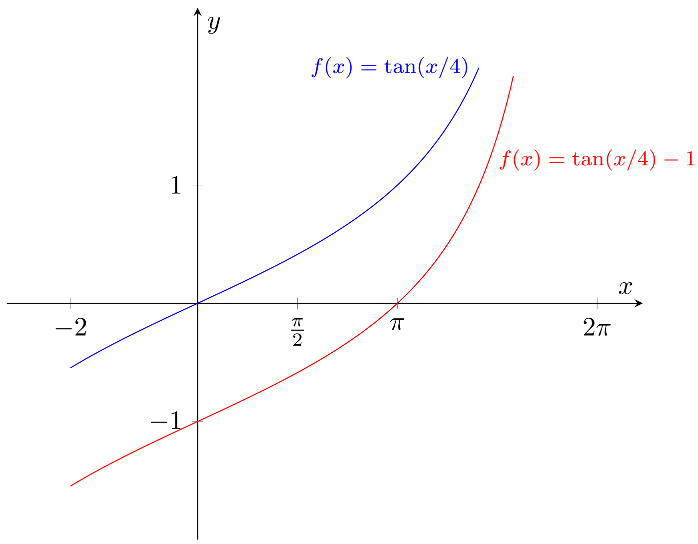
a. $\tan(\frac{x}{4}) = 1$

b. $\cos(x) = -1$

3.1 Ecuación $\tan(x/4) = 1$

Sea la función $\tan(\frac{x}{4}) = 1$, utilizando el método de la bisección podemos aproximar el valor de π. Por trigonometría básica, sabemos que se da $\tan(\frac{x}{4}) = 1$ cuando $x = \pi$, es decir, $\tan(\pi/4) = 1$.

Asimismo, podemos ganar una mayor intuición sobre lo que haremos si graficamos la ecuación $\tan(x/4) - 1 = 0$, para compararla contra $\tan(x/4) = 1$



Con el pasaje de término la función $\tan(x/4) - 1$ tiene una raíz en, ni más ni menos, que el númeor π. Entendiendo esto, a priori deberíamos estar seguros que la bisección convergerá a π para resolver la raíz en un intervalo adecuado.

Para elegir un intervalo haremos una suposición de $[a; b] = [2; 5]$

i) Considerando

$$f(a) = f(2) = \tan(2/4) - 1 = -0.453698$$
$$f(b) = f(5) = \tan(5/4) - 1 = 2.00957$$

Y que el punto medio es $c_1 = \frac{2+5}{2} = 3.5$, que implica $f(c_1) = f(3.5) = 0.197422$, por lo tanto:

$c_1 = b \quad \Longrightarrow \quad [a; b] = [2, 3.5]$

ii) Iterando:

$c_2 = \frac{2+3.5}{2} = 2.75$

$f(c_2) = f(2.75) = -0.178858 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = a \quad \Longrightarrow \quad [a; b] = [2.75; 3.5]$

iii) $c_3 = \frac{2.75+3.5}{2} = 3.125$

$f(c_3) = f(3.125) = -0.008262 \quad \Longrightarrow \quad c_3 = a \quad \Longrightarrow \quad [a; b] = [3.125; 3.5]$

iv) $c_4 = \frac{3.125+3.5}{2} = 3.3125$

$f(c_4) = f(3.3125) = 0.089325 \implies c_4 = b \implies [a;b] = [3.125; 3.3125]$

v) $c_5 = \frac{3.125+3.3125}{2} = 3.21875$

$f(c_5) = f(3.21875) = 0.039342 \implies c_5 = b \implies [a;b] = [3.125; 3.21875]$

vi) $c_6 = \frac{3.125+3.21875}{2} = 3.17188$

$f(c_6) = f(3.17188) = 0.01526 \implies c_6 = b \implies [a;b] = [3.125; 3.17188]$

vii) $c_7 = \frac{3.125+3.17188}{2} = 3.1519$

$f(c_7) = f(3.1519) = 0.005167 \implies c_7 = b \implies [a;b] = [3.125; 3.1519]$

viii) $c_8 = \frac{3.125+3.1519}{2} = 3.13845$

$f(c_8) = f(3.13845) = -0.00157 \implies c_8 = a \implies [a;b] = [3.13845; 3.1519]$

ix) $c_9 = \frac{3.13845+3.1519}{2} = 3.145175$

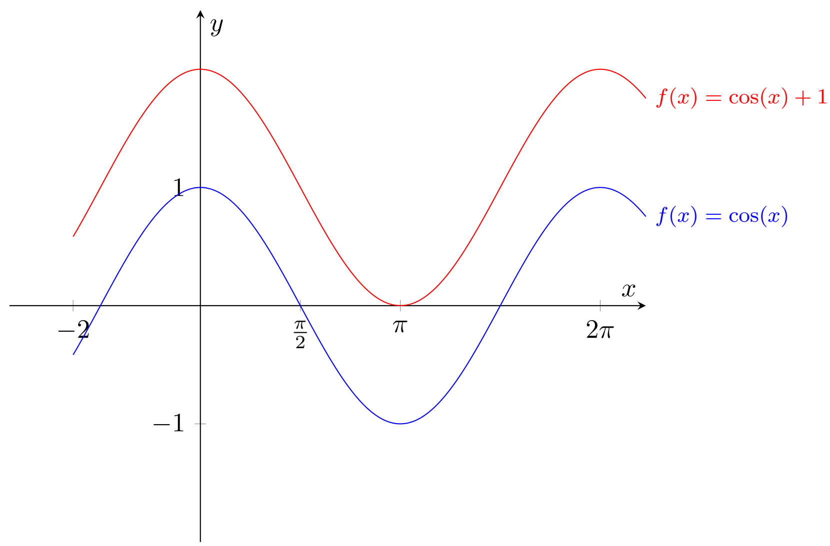
$f(c_9) = f(3.145175) = 0.001793 \implies c_9 = b \implies [a;b] = [3.13845; 3.145175]$

Finalizada la iteración, podemos observar que $x_9 = 3.145175$ y que $x_n^* \in [3.13845; 3.145175] \approx \pi$. Podemos afirmar que el algoritmo converge a $\pi = 3.1415926535898$

3.2 Ecuación $\cos(x) = -1$

Sea la función $\cos(x) = -1$, utilizando el método de la bisección podemos aproximar el valor de π. Por trigonometría básica, sabemos que se da $\cos(x) = -1$ cuando $x = \pi$, es decir, $\cos(\pi) = -1$.

Por otro lado, para ganar una mayor intuición al respecto, veamos lo que sucede cuando despejamos la ecuación como $\cos(x) + 1 = 0$



Nuevamente vemos que, al estar modificando la fase ("phase shift") incorporando +1, vemos que ahora la raíz de la función se encuentra justamente en π, es decir, $\cos(\pi) + 1 = 0$, por lo que dado un intervalo adecuado, la bisección nos ayudará a resolver la función, o sea, encontrar el valor de π.

Para elegir un intervalo haremos una suposición inicial de $[a;b] = [2;5]$

i) Considerando

$$f(a) = f(2) = \cos(2) + 1 = 0.58385$$
$$f(b) = f(5) = \cos(5) + 1 = 1.2836$$

Y que el punto medio es $c_1 = \frac{2+5}{2} = 3.5$, que implica $f(c_1) = f(3.5) = 0.06354$, por lo tanto:

$c_1 = b \implies [a; b] = [2, 3.5]$

ii) Iterando:

$c_2 = \frac{2+3.5}{2} = 2.75$

$f(c_2) = f(2.75) = 0.0757 \implies c_2 = a \implies [a; b] = [2.75; 3.5]$

iii) $c_3 = \frac{2.75+3.5}{2} = 3.125$

$f(c_3) = f(3.125) = 0.000138 \implies c_3 = a \implies [a; b] = [3.125; 3.5]$

iv) $c_4 = \frac{3.125+3.5}{2} = 3.3125$

$f(c_4) = f(3.3125) = 0.01457 \implies c_4 = b \implies [a; b] = [3.125; 3.3125]$

v) $c_5 = \frac{3.125+3.3125}{2} = 3.21875$

$f(c_5) = f(3.21875) = 0.002975 \implies c_5 = b \implies [a; b] = [3.125; 3.21875]$

vi) $c_6 = \frac{3.125+3.21875}{2} = 3.17188$

$f(c_6) = f(3.17188) = 0.000459 \implies c_6 = b \implies [a; b] = [3.125; 3.17188]$

vii) $c_7 = \frac{3.125+3.17188}{2} = 3.1519$

$f(c_7) = f(3.1519) = 0.000053 \implies c_7 = b \implies [a; b] = [3.125; 3.1519]$

viii) $c_8 = \frac{3.125+3.1519}{2} = 3.13845$

$f(c_8) = f(3.13845) = 0.000005 \implies c_8 = a \implies [a; b] = [3.13845; 3.1519]$

ix) $c_9 = \frac{3.13845+3.1519}{2} = 3.145175$

$f(c_9) = f(3.145175) = 0.000006 \implies c_9 = b \implies [a; b] = [3.13845; 3.145175]$

Finalizada la iteración, nótese el acotamiento del intervalo, que $x_9 = 3.145175$ y que $x_n^* \in [3.13845; 3.145175] \approx \pi$. Podemos afirmar que el algoritmo converge a $\pi = 3.1415926535898$

4 Ejercicio Nº4

Sea la ecuación $x^2 - 3 = 0 \in [1; 2]$ y sea nuestra mejor suposición inicial el valor $x_0 = 1.5$, podemos resolvela con el método numérico de "fixed point iteration".

Sea la función de recurrencia $x_{n+1} = x_n - \gamma\left(x_n^2 - 3\right)$, asumiremos un parámetro de convergencia $\gamma = 0.1$, para luego compararlo con $\gamma = 0.4$.

i) Dada nuestra suposición inicial $x_0 = 1.5$, implica:

$x_1 = 1.5 - (0.1)\left[(1.5)^2 - 3\right] = 1.575$

ii) Iterando:

$x_2 = 1.575 - (0.1)\left[(1.575)^2 - 3\right] = 1.6269375$

iii) $x_3 = 1.627 - (0.1)\left[(1.627)^2 - 3\right] = 1.6622871$

iv) $x_4 = 1.662 - (0.1)\left[(1.662)^2 - 3\right] = 1.6857756$

v) $x_5 = 1.685 - (0.1)\left[(1.685)^2 - 3\right] = 1.7010775$

vi) $x_6 = 1.701 - (0.1)\left[(1.701)^2 - 3\right] = 1.7116599$

Dado nuestro step $\gamma = 0.1$, obtuvimos $x_6 = 1.71166$.

Los errores absolutos y relativos pueden calcularse de la siguiente forma. Sea el error absoluto de la sexta iteración la diferencia entre el resultado de esta y de la iteración anterior:

$$\begin{aligned}\delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ =& |1.7116599 - 1.7010775| \\ =& 0.0105824\end{aligned} \tag{27}$$

Y por ende, el error relativo:

$$\begin{aligned}r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.0105824}{1.7116599} = 0.006183\end{aligned} \tag{28}$$

Asimismo, una cota del error absoluto puede ser:

$$\begin{aligned}C &= \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{(0.8)^6}{1-0.8} \cdot |1.6269375 - 1.575| \\ &= (1.31072) \cdot (0.051938) \\ &= 0.068076\end{aligned} \tag{29}$$

donde $k = 0.8$ sale de que dado nuestro parámetro $\gamma = 0.1$, el valor más alto que puede tomar nuestra derivada $g'(x)$ en el intervalo es cuando $x = 1$. Esto implica $g'(1) = |1 - 2(0.1)(1)| = 0.8$.

Del mismo modo, la cota del error relativo sería:

$$R_x = \frac{0.068076}{1.71166} = 0.039772 \tag{30}$$

Y, si quisieramos encontrar el orden n para el cual el error absoluto sea menor que 10^{-5}, debemos despejarla de la ecuación de nuestra cota:

$$\begin{aligned} \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| &< 10^{-5} \\ n &> 45.5521 \end{aligned} \tag{31}$$

Dado que el resultado es ≈ 45.5521, implica que $n > 46$ para alcanzar la precisión mayor a 10^{-5}

Por otro lado, si consideramos $\gamma = 0.4$:

i) Dada nuestra suposición inicial $x_0 = 1.5$, implica:

   $x_1 = 1.5 - (0.4)\left[(1.5)^2 - 3\right] = 1.8$

ii) Iterando:

   $x_2 = 1.8 - (0.4)\left[(1.8)^2 - 3\right] = 1.704$

iii) $x_3 = 1.704 - (0.4)\left[(1.704)^2 - 3\right] = 1.7425536$

iv) $x_4 = 1.742 - (0.4)\left[(1.742)^2 - 3\right] = 1.7281744$

v) $x_5 = 1.728 - (0.4)\left[(1.728)^2 - 3\right] = 1.7336064$

vi) $x_6 = 1.733 - (0.4)\left[(1.733)^2 - 3\right] = 1.731452416$

El error absoluto es:

$$\begin{aligned} \delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ =& |1.731452416 - 1.7336064| \\ =& 0.002154 \end{aligned} \tag{32}$$

Y por ende, el error relativo:

$$\begin{aligned} r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.002154}{1.731452416} = 0.001244 \end{aligned} \tag{33}$$

Asimismo, una cota del error absoluto puede ser:

$$\begin{aligned} C &= \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{(0.6)^6}{1-0.6} \cdot |1.704 - 1.8| \\ &= (0.11664) \cdot (0.096) \\ &= 0.011197 \end{aligned} \tag{34}$$

donde $k = 0.6$ sale de que dado nuestro parámetro $\gamma = 0.4$, el valor más alto que puede tomar nuestra derivada $g'(x)$ en el intervalo es cuando $x = 2$. Esto implica $g'(1) = |1 - 2(0.4)(2)| = 0.6$.

Del mismo modo, la cota del error relativo sería:

$$R_x = \frac{0.011197}{1.731452416} = 0.006467 \tag{35}$$

Y, si quisieramos encontrar el orden n para el cual el error absoluto sea menor que 10^{-5}, nuevamente consideraremos la ecuación de nuestra cota:

$$\begin{aligned} \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| &< 10^{-5} \\ n &> 19.7441 \end{aligned} \tag{36}$$

Dado que el resultado es ≈ 19.7441, implica que $n > 20$ para alcanzar la precisión mayor a 10^{-5}

Por último, si desearamos calibrar el parámetro γ de manera óptima, uno debe tener en cuenta el costo de convergencia dispuesto a resignar. Hay un tradeoff entre el valor de γ y el costo de convergencia, que se explica por un crecimiento del costo ante valores cada vez más pequeños del parámetro.

Idealmente, debe ser lo suficientemente pequeño para que se cumpla el Teorema del Punto Fijo, específicamente la condición de unicidad, pero que no nos afecte demasiado la convergencia del algoritmo.

Sin embargo, puede surgir la pregunta de cuán alto puede ser γ, sin que deje de cumplir que $|g'(x)| < 1$. Esto dependerá principalmente del intervalo de evaluación $[a; b]$ y puede considerarse como regla general que el parámetro γ tal que genere un módulo $|g'(x)|$ que tenga el centro en la mitad de b (el valor máximo del intervalo).

En nuestro ejemplo, podemos encontrar eso de la siguiente forma: si $b = 2 \implies c = 1$. Entonces:

$$g'(x) = |1 - 2\gamma x| \implies 2\gamma x = 1 \implies x = \frac{1}{2\gamma} \tag{37}$$

si $c = x = 1$

$$1 = \frac{1}{2\gamma} \implies \gamma = 0.5 \tag{38}$$

Esto implica que por lo máximo $\gamma \leq 0.5$, sería una cota para este. En nuestros ejemplos utilizamos 0.4 y 0.1, lo que se encuentra por debajo del límite recién obtenido.

5 Ejercicio Nº5

5.1 Inciso (a)

Sea la función $x = \cos(x)$ en el intervalo $[a; b] = [0; 2]$ podemos aproximar su raíz utilizando el método numérico de iteración de punto fijo.

De forma preliminar, consideremos que x_0 será el punto medio de nuestro intervalo, es decir, $x_0 = 1$, y que nuestra ecuación recursiva $g(x)$ es $x_{n+1} = \cos(x_n)$

i) Dada nuestra suposición inicial $x_0 = 1$, implica:

   $x_1 = \cos(1) = 0.5403$

ii) Iterando:

   $x_2 = \cos(0.5403) = 0.857553$

iii) $x_3 = \cos(0.857553) = 0.65429$

iv) $x_4 = \cos(0.65429) = 0.79348$

v) $x_5 = \cos(0.79348) = 0.701369$

vi) $x_6 = \cos(0.701369) = 0.76396$

Luego de n iteraciones la secuencia converge al valor 0.739085

El error absoluto es:

$$\begin{aligned}\delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ =& |0.76396 - 0.701369| \\ =& 0.062591 \end{aligned} \tag{39}$$

Y por ende, el error relativo:

$$\begin{aligned} r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.062591}{0.76396} = 0.08193 \end{aligned} \tag{40}$$

Asimismo, una cota del error absoluto puede ser:

$$\begin{aligned} C &= \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{(0.909297)^6}{1 - 0.909297} \cdot |0.5403 - 0.857553| \\ &= (6.2317912613055) \cdot (0.31725) \\ &= 1.97705 \end{aligned} \tag{41}$$

donde $k = 0.903$ sale de que el valor más alto que puede tomar nuestra derivada $g'(x)$ en el intervalo es cuando $x = 2$. Esto implica $g'(2) = |-\sin(2)| = 0.909297$.

Del mismo modo, la cota del error relativo sería:

$$R_x = \frac{1.97705}{0.76396} = 2.5879 \tag{42}$$

Por último, el orden n de la secuencia requerido para obtener un error menor a 10^{-5} debe ser despejado de la ecuación de cota:

$$\begin{aligned}\frac{k^n}{1-k}\cdot|x_2-x_1| &< 10^{-5}\\ n &> 134.251\end{aligned} \tag{43}$$

Dado que el resultado obtenido es ≈ 134.251 debemos considerar un valor estricto para $n > 135$ como orden necesario. Cabe destacar que este número es muy elevado, pero puede relacionarse con el punto inicial elegido x_0, que fue elegido arbitrariamente como la mitad del intervalo. Para un valor diferente, como puede ser $x_0 = 0.5$, entonces el algoritmo convergería al resultado exacto en $n = 30$.

5.2 Inciso (b)

Sea la función $x^x = 50$ en el intervalo $[a;b] = [3;4]$ podemos aproximar su raíz utilizando el método numérico de iteración de punto fijo.

De forma preliminar, consideremos que x_0 será el punto medio de nuestro intervalo, es decir, $x_0 = 3.5$, y que nuestra ecuación recursiva $g(x)$ es $x_{n+1} = \sqrt[x_n]{50}$

i) Dada nuestra suposición inicial $x_0 = 3.5$, implica:

   $x_1 = \sqrt[3.5]{50} = 3.05788$

ii) Iterando:

   $x_2 = \sqrt[3.05788]{50} = 3.59422$

iii) $x_3 = \sqrt[3.59422]{50} = 2.96958$

iv) $x_4 = \sqrt[2.96958]{50} = 3.73357$

v) $x_5 = \sqrt[3.73357]{50} = 2.85136$

vi) $x_6 = \sqrt[2.85136]{50} = 3.94317$

Luego de n iteraciones la secuencia converge al valor 3.28726

El error absoluto es:

$$\begin{aligned}\delta_{x_n} =&|p_n - p_{n-1}|\\ =&|3.94317 - 2.85136|\\ =&1.09181\end{aligned} \tag{44}$$

Y por ende, el error relativo:

$$\begin{aligned}r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n}\\ r_{x_6} &= \frac{1.09181}{3.94317} = 0.276886\end{aligned} \tag{45}$$

5.3 Inciso (c)

Sea la función $x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0$ en el intervalo $[a;b] = [0;4]$ podemos aproximar su raíz en dicho intervalo utilizando el método numérico de iteración de punto fijo.

De forma preliminar, consideremos que x_0 será el punto medio de nuestro intervalo, es decir, $x_0 = 2$, y que nuestra ecuación recursiva $g(x)$ es:

$$\begin{aligned}x^3 + 4x^2 - 15x - 20 &= 0\\ x^3 &= 20 + 15x - 4x^2\\ x_{n+1} &= \sqrt[3]{20 + 15x_n - 4x_n^2}\end{aligned} \tag{46}$$

i) Dada nuestra suposición inicial $x_0 = 2$, implica:

$x_1 = \sqrt[3]{20 + 15(2) - 4(2)^2} = 3.23961$

ii) Iterando:

$x_2 = \sqrt[3]{20 + 15(3.23961) - 4(3.23961)^2} = 2.98563$

iii) $x_3 = \sqrt[3]{20 + 15(2.98563) - 4(2.98563)^2} = 3.07685$

iv) $x_4 = \sqrt[3]{20 + 15(3.07685) - 4(3.07685)^2} = 3.04685$

v) $x_5 = \sqrt[3]{20 + 15(3.04685) - 4(3.04685)^2} = 3.05704$

vi) $x_6 = \sqrt[3]{20 + 15(3.05704) - 4(3.05704)^2} = 3.05361$

Podemos observar que converge rápidamente al valor de la raíz del polinomio en dicho intervalo.

El error absoluto es:

$$\begin{aligned} \delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ =& |3.05361 - 3.05704| \\ =& 0.00343 \end{aligned} \tag{47}$$

Y por ende, el error relativo:

$$\begin{aligned} r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.00343}{3.05361} = 0.001123 \end{aligned} \tag{48}$$

Asimismo, una cota del error absoluto puede ser:

$$\begin{aligned} C &= \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{(0.892444)^6}{1 - 0.892444} \cdot |2.98563 - 3.23961| \\ &= (4.697334) \cdot (0.25398) \\ &= 1.19302889 \end{aligned} \tag{49}$$

donde $k = 0.892444$ sale de que el valor más alto que puede tomar nuestra derivada $g'(x)$ en el intervalo es cuando $x = 4$. Esto implica $g'(4) = 0.892444$.

Del mismo modo, la cota del error relativo sería:

$$R_x = \frac{1.19302889}{3.05361} = 0.390695 \tag{50}$$

Por último, el orden n de la secuencia requerido para obtener un error menor a 10^{-5} debe ser despejado de la ecuación de cota:

$$\begin{aligned} \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| < 10^{-5} \\ n > 108.727 \end{aligned} \tag{51}$$

Dado que el resultado obtenido es ≈ 108.727 debemos considerar un valor estricto para $n > 109$ como orden necesario.

5.4 Inciso (d)

Sea la función $2^x = 2 - x^2$ en el intervalo $[a; b] = [0; 2]$ podemos aproximar su raíz en dicho intervalo utilizando el método numérico de iteración de punto fijo.

De forma preliminar, consideremos que x_0 será el punto medio de nuestro intervalo, es decir, $x_0 = 1$, y que nuestra ecuación recursiva $g(x)$ es:

$$g(x) = x_{n+1} = x_n - \gamma \left(2^{x_n} - 2 + x_n^2\right) \tag{52}$$

i) Dada nuestra suposición inicial $x_0 = 1$, consideraremos $\gamma = 0.2$ como parámetro de la ecuación, lo que implica:

   $x_1 = 1 - (0.2)\left(2^1 - 2 + 1^2\right) = 0.8$

ii) Iterando:

   $x_2 = 0.8 - (0.2)\left(2^{0.8} - 2 + 0.8^2\right) = 0.72378$

iii) $x_3 = 0.72378 - (0.2)\left(2^{0.72378} - 2 + 0.72378^2\right) = 0.688708$

iv) $x_4 = 0.688708 - (0.2)\left(2^{0.688708} - 2 + 0.688708^2\right) = 0.671476$

v) $x_5 = 0.671476 - (0.2)\left(2^{0.671476} - 2 + 0.671476^2\right) = 0.66276$

vi) $x_6 = 0.66276 - (0.2)\left(2^{0.66276} - 2 + 0.66276^2\right) = 0.658288$

Podemos observar que converge al valor de la raíz 0.653483.

El error absoluto es:

$$\begin{aligned}\delta_{x_n} =& |p_n - p_{n-1}| \\ =& |0.658288 - 0.66276| \\ =& 0.004472\end{aligned} \tag{53}$$

Y por ende, el error relativo:

$$\begin{aligned}r_{x_n} &= \frac{\delta_{x_n}}{x_n} \\ r_{x_6} &= \frac{0.004472}{0.658288} = 0.00679338\end{aligned} \tag{54}$$

Asimismo, una cota del error absoluto puede ser:

$$\begin{aligned}C &= \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{(0.861371)^6}{1 - 0.861371} \cdot |0.72378 - 0.8| \\ &= (2.94635) \cdot (0.07622) \\ &= 0.224571\end{aligned} \tag{55}$$

donde $k = 0.861371$ sale de que el valor más alto que puede tomar nuestra derivada $g'(x)$ en el intervalo es cuando $x = 0$, ya que $g'(0) > g'(2)$. Esto implica $g'(0) = 0.861371$.

Del mismo modo, la cota del error relativo sería:

$$R_x = \frac{0.224571}{0.658288} = 0.341144 \tag{56}$$

Por último, el orden n de la secuencia requerido para obtener un error menor a 10^{-5} debe ser despejado de la ecuación de cota:

$$\frac{k^n}{1-k} \cdot |x_2 - x_1| < 10^{-5}$$
$$n > 73.1405 \tag{57}$$

Dado que el resultado obtenido es ≈ 73.1405 debemos considerar un valor estricto para $n > 74$ como orden necesario.

6 Ejercicio Nº6

Sea la función de iteración $g(x) = 2x - p \cdot x^2$, si consideramos un parámetro de $p = 0.5$ y como valor inicial de la iteración a $x_0 = 1$, podemos observar que:

i) $x_1 = 2(1) - (0.5) \cdot (1)^2 = 1.5$

ii) Iterando:

$x_2 = 2(1.5) - (0.5) \cdot (1.5)^2 = 1.875$

iii) $x_3 = 2(1.875) - (0.5) \cdot (1.875)^2 = 1.9921875$

iv) $x_4 = 2(1.9922) - (0.5) \cdot (1.9922)^2 = 1.9999694824218$

v) $x_5 = 2(1.99997) - (0.5) \cdot (1.99997)^2 = 1.9999999995343$

vi) $x_6 = 2(2) - (0.5) \cdot (2)^2 = 2$

Podemos notar que, en tan solo 6 pasos de iteración, el algoritmo converge a $x_n = 2$, la raíz del polinomio $P(x) = 2x - x^2$. El intervalo en el que converge, a priori, es $[a; b] = [0; 4]$

7 Ejercicio Nº7

Sea la función de iteración $g(x) = \frac{x}{2} + (p) \cdot \frac{1}{2x}$, consideramos un parámetro de $p =$ y como valor inicial de la iteración a $x_0 =$.

Si el limite $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ existe, entonces $x_{n+1} \approx x_n$. Eso implica, considerando el límite, que es igual a:

$$l = \frac{l}{2} + \frac{p}{2l} \tag{58}$$
$$\frac{l}{2} = \frac{p}{2l} \implies l^2 = p \implies \sqrt{l^2} = \sqrt{p} \tag{59}$$
$$l = \sqrt{p} \tag{60}$$

Por lo tanto, $x_n \implies \sqrt{p}$

8 Ejercicio Nº8

Para poder hallar una aproximación numérica de la raíz cubica de 45 con el método de Newton

9 Ejercicio Nº9

9.1 Inciso (a)

Sea la ecuación $x^2 - 3 = 0$ y el punto inicial $x_0 = 1.5$, podemos resolver su raíz con el método de Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.5 - \frac{1.5^2 - 3}{2 \cdot 1.5} = 1.75 \\
x_2 &= 1.75 - \frac{1.75^2 - 3}{2 \cdot 1.75} = 1.7321428571429 \\
x_3 &= 1.73214 - \frac{1.73214^2 - 3}{2 \cdot 1.73214} = 1.7320508100147
\end{aligned}
$$

Vemos que ya converge a un resultado con un bajo error absoluto en la tercer iteración.

9.2 Inciso (b)

Sea la ecuación $x = \cos(x)$ y el punto inicial $x_0 = 1.5$, podemos resolver su raíz con el método de Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.5 - \frac{1.5 - \cos(1.5)}{1 + \sin(1.5)} = 0.784472 \\
x_2 &= 0.784472 - \frac{0.78447 - \cos(0.78447)}{1 + \sin(0.78447)} = 0.739519 \\
x_3 &= 0.739519 - \frac{0.739519 - \cos(0.739519)}{1 + \sin(0.739519)} = 0.739085
\end{aligned}
$$

Nuevamente, vemos que con un bajo error absoluto y relativo, el algoritmo convergió al resultado deseado en la tercer iteración.

9.3 Inciso (c)

Sea la ecuación $x^x = 50$ y el punto inicial $x_0 = 3.5$, podemos resolver su raíz con el método de Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^x - 50}{(\ln(x) + 1)\, x^x} \tag{61}$$

donde la derivada de nuestra función es $f(x) \implies f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3.5 - \frac{3.5^{3.5}}{(\ln(3.5) + 1)\, 3.5^{3.5}} = 3.3328 \\
x_2 &= 3.3328 - \frac{3.3328^{3.3328}}{(\ln(3.3328) + 1)\, 3.3328^{3.3328}} = 3.2896 \\
x_3 &= 3.2896 - \frac{3.2896^{3.2896}}{(\ln(3.2896) + 1)\, 3.2896^{3.2896}} = 3.2872685571126 \\
x_4 &= 3.28727 - \frac{3.28727^{3.28727}}{(\ln(3.28727) + 1)\, 3.28727^{3.28727}} = 3.2872621954027
\end{aligned} \tag{62}$$

Podemos observar que el método de Newton-Raphson converge rápidamente al resultado $x_n = 3.28726$, es decir, la raíz de $f(x) = x^x - 50$

9.4 Inciso (d)

Sea el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0$ y el punto inicial $x_0 = 2$, podemos resolver su raíz cerca de dicho punto con el método de Newton-Raphson.

La derivada primera del polinomio es $P'(x) = 3x^2 + 8x - 15$. Asimismo, sea la ecuación iterativa del algoritmo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^3 + 4x^2 - 15x - 20}{3x^2 + 8x - 15} \tag{63}$$

Iterando a partir de $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - \frac{2^3 + 4(2)^2 - 15(2) - 20}{3(2)^2 + 8(2) - 15} = 4 \\
x_2 &= 4 - \frac{4^3 + 4(4)^2 - 15(4) - 20}{3(4)^2 + 8(4) - 15} = 3.261538 \\
x_3 &= 3.261538 - \frac{3.261538^3 + 4(3.261538)^2 - 15(3.261538) - 20}{3(3.261538)^2 + 8(3.261538) - 15} = 3.06802 \\
x_4 &= 3.06802 - \frac{3.06802^3 + 4(3.06802)^2 - 15(3.06802) - 20}{3(3.06802)^2 + 8(3.06802) - 15} = 3.05454 \\
x_5 &= 3.05454 - \frac{3.05454^3 + 4(3.05454)^2 - 15(3.05454) - 20}{3(3.05454)^2 + 8(3.05454) - 15} = 3.05448
\end{aligned} \tag{64}$$

Vemos que la ecuación iterativa converge rapidamente a una aproximación de la raíz cerca del punto inicial $x_0 = 2$ que es $x_n = 3.05448$

9.5 Inciso (e)

Sea la ecuación $2^x = 2 - x^2$ y el punto inicial $x_0 = 1$, podemos resolver su raíz con el método de Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2^x - 2 + x^2}{\ln(2) \cdot 2^x + 2x} \tag{65}$$

donde la derivada de nuestra función es $f(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + 2x$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 - \frac{2 - 2 + 1}{\ln(2) \cdot 2 + 2} = 0.70469 \\
x_2 &= 0.70469 - \frac{2^0.70469 - 2 + (0.70469)^2}{\ln(2) \cdot 2^0.70469 + 2(0.70469)} = 0.654915 \\
x_3 &= 0.654915 - \frac{2^0.654915 - 2 + (0.654915)^2}{\ln(2) \cdot 2^0.654915 + 2(0.654915)} = 0.653484 \\
x_4 &= 0.653484 - \frac{2^0.653484 - 2 + (0.653484)^2}{\ln(2) \cdot 2^0.653484 + 2(0.653484)} = 0.653483
\end{aligned} \tag{66}$$

Podemos observar que el método de Newton-Raphson converge rápidamente al resultado $x_n = 0.653483$, es decir, la raíz de $f(x) = 2^x - 2 + x^2$

10 Ejercicio Nº10

10.1 Inciso (a)

Sea la ecuación $x^2 - 3 = 0$, el punto inicial $x_0 = 1.5$ y el consiguiente $x_1 = x_0 + 0.1 = 1.6$, podemos resolver su raíz con el método de la secante del algoritmo de Newton.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 1.6 - \frac{\left(1.6^2-3\right)\cdot(1.6-1.5)}{(1.6^2-3)-(1.5^2-3)} = 1.741935483871\\
x_3 &= 1.7419 - \frac{\left(1.7419^2-3\right)\cdot(1.7419-1.6)}{(1.7419^2-3)-(1.6^2-3)} = 1.7316602316602\\
x_4 &= 1.73166 - \frac{\left(1.73166^2-3\right)\cdot(1.73166-1.7419)}{(1.73166^2-3)-(1.7419^2-3)} = 1.7320497001007
\end{aligned} \tag{67}
$$

Vemos que ya converge a un resultado con un bajo error absoluto en la tercer iteración (resultado de cuarto orden x_4).

10.2 Inciso (b)

Sea la ecuación $x = \cos(x)$, el punto inicial $x_0 = 1.5$ y el siguiente $x_1 = x_0 + 0.1 = 1.6$, podemos resolver su raíz con el método de la secante del algoritmo Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 1.6 - \frac{(1.6-\cos(1.6))\cdot(1.6-1.5)}{(1.6-\cos(1.6))-(1.5-\cos(1.5))} = 0.78514243408634\\
x_3 &= 0.78514 - \frac{(0.78514-\cos(0.78514))\cdot(0.78514-1.6)}{(0.78514-\cos(0.78514))-(1.6-\cos(1.6))} = 0.74424848378209\\
x_4 &= 0.74424 - \frac{(0.74424-0.78514\cos(0.74424))\cdot(0.74424-1.5)}{(0.74424-\cos(0.74424))-(0.78514-\cos(0.78514))} = 0.73913624306146
\end{aligned} \tag{68}
$$

Nuevamente, vemos que con un bajo error absoluto y relativo del orden 10^{-4}, el algoritmo convergió al resultado aproximado $x_4 = 0.739085$ en la tercer iteración.

10.3 Inciso (c)

Sea la ecuación $x^x = 50$, el punto inicial $x_0 = 3.5$ y el punto siguiente $x_1 = x_0 + 0.1 = 3.6$, podemos resolver su raíz con el método de la secante del algoritmo Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 3.6 - \frac{\left((3.6)^{3.6} - 50\right) \cdot (3.6 - 3.5)}{((3.6)^{3.6} - 50) - ((3.5)^{3.5} - 50)} = 3.3519705680467 \\
x_3 &= 3.35197 - \frac{\left((3.35197)^{3.35197} - 50\right) \cdot (3.35197 - 3.6)}{((3.35197)^{3.35197} - 50) - ((3.6)^{3.6} - 50)} = 3.3078223946543 \\
x_4 &= 3.30782 - \frac{\left((3.30782)^{3.30782} - 50\right) \cdot (3.30782 - 3.35197)}{((3.30782)^{3.30782} - 50) - ((3.35197)^{3.35197} - 50)} = 3.2887653809373
\end{aligned} \tag{69}
$$

Podemos observar que el método de la secante del algoritmo de Newton-Raphson converge relativamente rápido al resultado $x_{n+1} = 3.28726$, es decir, la raíz de $f(x) = x^x - 50$

10.4 Inciso (d)

Sea el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 15x - 20 = 0$, el punto inicial $x_0 = 2$ y el siguiente $x_1 = x_0 + 0.1 = 2.1$, podemos resolver su raíz cerca de dicho punto con el método de la secante del algoritmo de Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= x_n - \frac{\left(x_n^3 + 4x_n^2 - 15x_n - 20\right) \cdot (x_n - x_{n-1})}{(x_n^3 + 4x_n^2 - 15x_n - 20) - \left(x_{n-1}^3 + 4x_{n-1}^2 - 15x_{n-1} - 20\right)}
\end{aligned} \tag{70}
$$

Iterando a partir de $x_0 = 2$ y $x_1 = 2.1$:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2.1 - \frac{\left(2.1^3 + 4(2.1)^2 - 15(2.1) - 20\right) \cdot (2.1 - 2)}{(2.1^3 + 4(2.1)^2 - 15(2.1) - 20) - (2^3 + 4(2)^2 - 15(2) - 20)} = 3.8558 \\
x_3 &= 3.8558 - \frac{\left(3.8558^3 + 4(3.8558)^2 - 15(3.8558) - 20\right) \cdot (3.8558 - 2.1)}{(3.8558^3 + 4(3.8558)^2 - 15(3.8558) - 20) - (2.1^3 + 4(2.1)^2 - 15(2.1) - 20)} = 2.7795 \\
x_4 &= 2.7795 - \frac{\left(2.7795^3 + 4(2.7795)^2 - 15(2.7795) - 20\right) \cdot (2.7795 - 3.8558)}{(2.7795^3 + 4(2.7795)^2 - 15(2.7795) - 20) - (3.8558^3 + 4(3.8558)^2 - 15(3.8558) - 20)} = 2.9872 \\
x_5 &= 2.9872 - \frac{\left(2.9872^3 + 4(2.9872)^2 - 15(2.9872) - 20\right) \cdot (2.9872 - 2.7795)}{(2.9872^3 + 4(2.9872)^2 - 15(2.9872) - 20) - (2.7795^3 + 4(2.7795)^2 - 15(2.7795) - 20)} = 3.06165 \\
x_6 &= 3.06165 - \frac{\left(3.06165^3 + 4(3.06165)^2 - 15(3.06165) - 20\right) \cdot (3.06165 - 2.9872)}{(3.06165^3 + 4(3.06165)^2 - 15(3.06165) - 20) - (2.9872^3 + 4(2.9872)^2 - 15(2.9872) - 20)} = 3.05431
\end{aligned}
$$

Vemos que la ecuación iterativa converge en la quinta iteración (x_6) a una aproximación de la raíz cerca del punto inicial $x_0 = 2$ que es $x_n = 3.05448$. Nótese, sin embargo, que a diferencia del método de Newton que alcanza el resultado de forma decreciente (de una aproximación mayor hasta una menor con las iteraciones), con el método de la Secante se obtiene el resultado de forma ascendente, ya que hay una primera iteración que incrementa el valor de x_2, pero rápidamente decrecen y se incrementan hasta el resultado final.

10.5 Inciso (e)

Sea la ecuación $2^x = 2 - x^2$, el punto inicial $x_0 = 1$ y el siguiente $x_1 = 1.1$, podemos resolver su raíz con el método de la secante del algoritmo de Newton-Raphson.

Sea la ecuación iterativa del algoritmo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= x_n - \frac{\left(2^{x_n} - 2 + x_n^2\right)\cdot(x_n - x_{n-1})}{\left(2^{x_n} - 2 + x_n^2\right) - \left(2^{(x_{n-1})} - 2 + x_{n-1}^2\right)} \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 1.1 - \frac{\left(2^{1.1} - 2 + (1.1)^2\right)\cdot(1.1 - 1)}{\left(2^{1.1} - 2 + (1.1)^2\right) - \left(2^{1} - 2 + (1)^2\right)} = 0.71715211501425 \\ x_3 &= 0.7171 - \frac{\left(2^{0.7171} - 2 + (0.7171)^2\right)\cdot(0.7171 - 1.1)}{\left(2^{0.7171} - 2 + (0.7171)^2\right) - \left(2^{1.1} - 2 + (1.1)^2\right)} = 0.66646871428018 \\ x_4 &= 0.6664 - \frac{\left(2^{0.6664} - 2 + (0.6664)^2\right)\cdot(0.6664 - 0.7171)}{\left(2^{0.6664} - 2 + (0.6664)^2\right) - \left(2^{0.7171} - 2 + (0.7171)^2\right)} = 0.65393949479188 \end{aligned} \tag{72}$$

Podemos observar que el método de la secante converge rápidamente a una aproximación del resultado $x_n = 0.653483$, es decir, la raíz de $f(x) = 2^x - 2 + x^2$

11 Ejercicio Nº11

Dados los datos del proyecto de inversión, se consta que la erogación inicial de caja es de \$100000 y que en un lapso de 3 períodos (meses), se percibirá un flujo compuesto por \$30000, \$50000 y \$60000.

Recordemos que la TIR o Tasa Interna de Retorno es el valor que genera que el Valor Actual Neto de la inversión sea igual a cero. De este dato podemos entender, intuitivamente, que la TIR es la raíz x de la función del Valor Actual Neto.

$$\mathbf{VAN} = -I_0 + \sum_{t=1}^{T=3} \frac{F_t}{(1+\mathbf{TIR})^t} = 0 \tag{73}$$

donde $I_0 = 100000$, F_t es el flujo de caja en cada período t y **TIR** podemos reexpresarla como x.

Reemplazando:

$$\begin{aligned} P(x) &= -100000 + \sum_{t=1}^{T=3} \frac{F_t}{(1+x)^t} = 0 \\ &= -100000 + \frac{30000}{(1+x)} + \frac{50000}{(1+x)^2} + \frac{60000}{(1+x)^3} = 0 \\ &= -100000 + \frac{10000\cdot\left(3x^2 + 11x + 14\right)}{(1+x)^3} \end{aligned} \tag{74}$$

Así, ya tenemos nuestro polinomio $P(x)$ en (74) y podemos calcular la ecuación iterativa del método de Newton-Raphson para resolver su raíz.

Sea $P'(x)$ la derivada del polinomio:

$$P'(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{-30000}{(1+x)^2} - \frac{100000}{(1+x)^3} - \frac{180000}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{-10000 \cdot \left(3x^2 + 16x + 31\right)}{(1+x)^4} \tag{75}$$

Lo que implica que la ecuación iterativa será:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{-100000 + \frac{10000 \cdot \left(3x_n^2 + 11x_n + 14\right)}{(1+x_n)^3}}{\frac{-10000 \cdot (3x_n^2 + 16x_n + 31)}{(1+x_n)^4}}$$

simplificando y factorizando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(1+x_n) \cdot \left(10x_n^3 + 27x_n^2 + 19x_n - 4\right)}{3x_n^2 + 16x_n + 31} \tag{76}$$

Ya con nuestra ecuación iterativa, podemos fijar un punto inicial. Nótese que la función es convexa, ya que $f'(x) < 0$, y si calculamos su segunda derivada, comprobaremos que $f''(x) < 0$. Esto último implica que podemos suponer un primer punto que sea tanto del lado izquierdo de la raíz, como el derecho. Sin embargo y para hacer didáctico el ejercicio, tomaremos un primer punto inicial $x_0 = 0$, algo que no suele ser usual. Iterando:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 - \frac{(1) \cdot \left(10(0)^3 + 27(0)^2 + 19(0) - 4\right)}{3(0)^2 + 16(0) + 31} = \frac{4}{31} \approx 0.12903 \\
x_2 &= 0.129 - \frac{(1+0.129) \cdot \left(10(0.129)^3 + 27(0.129)^2 + 19(0.129) - 4\right)}{3(0.129)^2 + 16(0.129) + 31} = 0.165765 \\
x_3 &= 0.165765 - \frac{(1+0.165765) \cdot \left(10(0.165765)^3 + 27(0.165765)^2 + 19(0.165765) - 4\right)}{3(0.165765)^2 + 16(0.165765) + 31} = 0.1679424
\end{aligned} \tag{77}$$

Vemos que el algoritmo converge en la tercer iteración a un resultado aproximado con un bajo error absoluto y relativo, ya que si calcularamos de forma exacta la TIR de este problema obtendríamos **TIR** = 16.794936144623.

Así, según nuestro resultado (77), la tasa interna de retorno es $16,794\%$

12 Ejercicio Nº12

12.1 Inciso (a)

Sea el polinomio $f(x) = e^{4x^2-12x+9} - \cos(15-10x)$, podemos hallar sus raices mediante el método de Newton modificado. Recordemos que la función iterativa, del método "modificado" es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$$

donde $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ y por ende $\mu'(x) = \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$

Dadas las siguientes derivaciones:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \left(8e^9x - 12e^9\right) e^{4x^2-12x} + 10\sin(10x-15) \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} &= 8\cdot\left(8x^2 - 24x + 19\right) e^{4x^2-12x+9} + 100\cos(10x-15) \end{aligned} \tag{78}$$

12.2 Inciso (b)

Sea el polinomio $f(x) = 81x^4 + 756x^3 + 2646x^2 + 4116x + 2401$, podemos hallar sus raices mediante el método de Newton modificado.

Dadas las siguientes derivaciones:

$$\frac{df(x)}{dx} = 324x^3 + 2268x^2 + 5292x + 4116$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 972x^2 + 4536x + 5292$$

podemos construir nuestra función iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n) \cdot f''(x_n)}$$

reemplazando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(81x^4 + 756x^3 + 2646x^2 + 4116x + 2401\right) \cdot \left(324x^3 + 2268x^2 + 5292x + 4116\right)}{\left(324x^3 + 2268x^2 + 5292x + 4116\right)^2 - \left(81x^4 + 756x^3 + 2646x^2 + 4116x + 2401\right) \cdot \left(972x^2 + 4536x + 5292\right)}$$

que si operamos algebraicamente veremos que se simplifica a la siguiente expresión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n + 7}{3} \tag{79}$$

Si tomamos un punto inicial $x_0 = 1$:

$$x_1 = 1 - \frac{3 + 7}{3} = -2.3333333333333 \tag{80}$$

Si calcularamos la solución exacta, podríamos comprobar que el resultado (80) es la raíz múltiple (y mínimo global) del polinomio.

12.3 Inciso (c)

Sea el polinomio $f(x) = \cos(x) - \cos(2x)$ en el intervalo $[1; 3]$, podemos hallar sus raices mediante el método de Newton modificado.

Dadas las siguientes derivaciones:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2\sin(2x) - \sin(x)$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4\cos(2x) - \cos(x)$$

podemos construir nuestra función iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n) \cdot f''(x_n)}$$

reemplazando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(\cos(x) - \cos(2x)) \cdot (2\sin(2x) - \sin(x))}{(2\sin(2x) - \sin(x))^2 - (4\cos(2x) - \cos(x))} \tag{81}$$

Si iteramos iniciando en $x_0 = 2.5$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2.5 - \frac{(\cos(2.5) - \cos(2 \cdot 2.5)) \cdot (2\sin(2 \cdot 2.5) - \sin(2.5))}{(2\sin(2 \cdot 2.5) - \sin(2.5))^2 - (4\cos(2 \cdot 2.5) - \cos(2.5))} = 1.87906 \\
x_2 &= 2.02495 \\
x_3 &= 2.07853 \\
x_4 &= 2.09133 \\
x_5 &= 2.09383
\end{aligned} \tag{82}$$

12.4 Inciso (d)

Sea el polinomio $f(x) = x^3 + \sin(4x) - 2 \cdot \tan(x) + e^{2x}$, podemos hallar sus raices mediante el método de Newton modificado.

13 Ejercicio Nº13

14 Ejercicio Nº14

Appendices

Iteración de Punto Fijo

$$x_{n+1} = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) \implies x_{n+1} - \alpha = g'(\alpha)(x_n - \alpha) \tag{83}$$

Código algoritmo de Horner-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 2 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$