Universidad del CEMA
Departamento de Ingeniería

Nombre: **Junghanss Juan Cruz** Profesor: **Perez Lance, Gabriel**
Curso: **Análisis Numérico** Fecha: **Agosto 27, 2021**

Trabajo Práctico Nº1

Errores y Cálculo Numérico

1. Dado el sistema de punto flotante (b, t, L, U) = (10, 4, -2, 3)
   (a) Hallar el mayor número real que puede ser representado.
   (b) Hallar el mínimo número real positivo que puede representarse.
   (c) Indicar la representación del cero.
   (d) Obtener el número de máquina para:
      i. Redondeo simétrico
      ii. Truncamiento
   (e) Representar el número $\mathbf{x} = 57.256$, con redondeo y con truncamiento. Indicar en ambos casos los errores absolutos y relativos.
   (f) Repetir el ítem e para $\mathbf{x} = 10.119$
2. Idem ejercicio anterior para: (b, t, L, U) = (10, 3, -2, 3).
3. Sea $y = F(x) = x^3$ y consideremos $\mathbf{x} = 2.56 \pm 0.01$. Asumiendo aritmética infinita,
   (a) Hallar F(2.56-0.01), F(2.56), F(2.56+0.01)
   (b) Determinar el intervalo de posibles valores de "y".
   (c) A partir de lo obtenido en el punto b, escribir $y = y^* \pm \Delta y$
   (d) Obtener una cota del error absoluto de "y" debido a la propagación de errores, usando el concepto de diferencial de una función.
   (e) Calcular una cota del error relativo de "y".
   (f) Siendo $\mathbf{r_y}$: error relativo de y, $\mathbf{r_x}$: error relativo de x, hallar un valor $\mathbf{f_x}$ tal que $\mathbf{r_y} = \mathbf{f_x} \cdot \mathbf{r_x}$
   (g) Dar un significado de $\mathbf{f_x}$.
4. Repetir el ejercicio anterior con:
   (a) $y = F(x) = 2^x \qquad x = 7 \pm 0.1$
   (b) $y = F(x) = 3^{-x} \qquad x = 4 \pm 0.02$
   (c) $y = F(x) = \sin(x) \qquad x = 1.6 \pm 0.04$
   (d) $w = F(x, y, z) = x^2 \cdot y^3 + z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz + 6 \qquad x = 5.12 \pm 0.03; \quad y = 2.37 \pm 0.01; \quad z = 1.09 \pm 0.02$ (para este ítem sólo hacer d y e del ejercicio 3)
5. Considerando aritmética infinita, determinar fórmulas para los errores absolutos y relativos de **z**, siendo:
   (a) $z = x + y$
   (b) $z = x - y$
   (c) $z = x \cdot y$
   (d) $z = \frac{x}{y}$

   Realizar para cada caso el diagrama correspondiente.
   Escribir también fórmulas para las cotas de los errores absolutos y relativos.
6. Asumiendo aritmética finita, determinar fórmulas para los errores absolutos y relativos de **z**, siendo:
   (a) $z = x + y$
   (b) $z = x - y$
   (c) $z = x \cdot y$

(d) $z = x/y$

Realizar para cada caso el diagrama correspondiente.
Escribir también fórmulas para las cotas de los errores absolutos y relativos.

7. Siendo $z = x \cdot y$ con $x = 6.2 \pm 0.2$; $y = 1.8 \pm 0.1$, precisión de t=3 y redondeo simétrico:

   (a) Hallar una cota del error relativo de z

   (b) Resolver la operación $x \cdot y$ en punto flotante para los valores extremos de x e y (debido al error inherente en cada uno de ellos) y comparar con lo obtenido en el punto a.

   (c) Repetir con $x = 6.2 \pm 0.002$; $y = 1.8 \pm 0.001$

8. Calcular una cota del error relativo de p, siendo $p = (x - y)/z$ con $x = 42.7 \pm 0.01$; $y = 41.4 \pm 0.01$; $z = 3.25 \pm 0.01$. Trabajar en punto flotante con precisión de 3 dígitos y redondeo simétrico. Mostrar las operaciones intermedias y resultados para los casos extremos.

9. Idem ejercicio anterior, considerando $q = x/z - y/z$. Comparar los resultados en ambos ejercicios.

10. Repetir los ejercicios (8) y (9) considerando truncamiento.

11. Sea el polinomio $P(x) = x^3 - x^2$. Calcular $P(2.54)$ trabajando en punto flotante con t=3 y redondeo simétrico. Determinar el error relativo del cálculo. Repetir el cálculo utilizando truncamiento.

12. Sea el polinomio $Q(x) = x^2 \cdot (x-1)$. Calcular $Q(2.54)$ trabajando en punto flotante con t=3 y redondeo simétrico. Determinar el error relativo del cálculo. Repetir el cálculo utilizando truncamiento.

13. Calcular el número de términos del desarrollo en serie de Taylor (alrededor de cero) necesarios para obtener el sin(0.5) con 6 cifras significativas exactas. Indicar qué tipo de error o errores se cometen en este cálculo.

14. Idem ejercicio anterior para exp(1.8) y ln(1.2).

15. Explicar cuántos términos (justificando) tomaría de la serie de Taylor del desarrollo de $\ln(x)$ alrededor de $x_0 = 1$, para lograr la máxima precisión si tiene aritmética finita con precisión t=4 y truncamiento.

16. Calcular $1.0000001^{10000000}$, utilizando:

   (a) Matlab.

   (b) Maple.

   (c) Calculadora científica personal.

   (d) Calculadora científica de Windows.

   (e) Excel.

   En caso que dieran diferente, indicar cuál cree que es el resultado correcto. Justificar.

Contents

1 Ejercicio Nº1

Considerando el sistema de punto flotante (floating point) dado por la cuaterna (b, t, L, U) = (10, 4, -2, 3) donde:

- Base "b": 10
- Precisión "t": 4
- Rango exponente "[L,U]=[-2,3]"

podemos determinar lo siguiente:

a. El mayor número real que puede ser representado es $(1 - 10^{-t}) \cdot 10^{U} = 0.9999 \cdot 10^{3} \Longrightarrow 999.9$

b. El mínimo número real **positivo** que puede representarse, recordando que la mantisa no puede ser menor que $\frac{1}{b} < m < 1$, es $0.1000 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow 0.001$

c. El cero se representa como $0.0000 \cdot 10^{0}$. Según la norma IEEE 754, los valores ceros son valores finitos con significando 0. Estos son ceros con signo, dado que el bit de signo especifica si un cero es $+0$ (cero positivo) o -0 (cero negativo).

d. El número de maquina sería:

   - con redondeo simétrico: $\mathbf{EPS} = u = 0.5 \cdot 10^{1-t} \Longrightarrow 0.5 \cdot 10^{1-4} = 0.5 \cdot 10^{-3} = 0.0005$

   - con truncamiento: $\mathbf{EPS} = u = 10^{1-t} \Longrightarrow 10^{1-4} = 10^{-3} = 0.001$

e. Si desearamos representar el número $\mathbf{x} = 57.256$ con política de redondeo y truncamiento, primero debemos representarlo en nuestro sistema de punto flotante:

   - El entero 57 se puede expresar como $0.5700 \cdot 10^{2}$

   - En el mismo orden de magnitud, los decimales .256 corresponden a $0.00256 \cdot 10^{2}$.

   Sumando sería $.57256 \cdot 10^{2}$, pero vemos que excede la precisión de nuestro sistema ($t = 4$), por lo que teniendo en cuenta las políticas de aproximación, tendremos:

   ∗ Truncamiento: $0.57256 \cdot 10^{2} \Longrightarrow 0.5725 \cdot 10^{2}$
   El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.57256 \cdot 10^{2} - 0.5725 \cdot 10^{2}| = 0.006 \tag{1}$$

   El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \frac{0.006}{57.256} = 0.000105 \tag{2}$$

   ∗ Redondeo simétrico: $0.57256 \cdot 10^{2} \Longrightarrow 0.5726 \cdot 10^{2}$
   El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.57256 \cdot 10^{2} - 0.5726 \cdot 10^{2}| = |-0.004| = 0.004 \tag{3}$$

   El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \frac{0.004}{57.256} = 0.00006986 \tag{4}$$

   Comparando los resultados (1) con (3) podemos notar que en este caso al representar el número $\mathbf{x} = 57.2560$ la política de truncamiento genera un error mayor que la de redondeo simétrico. La misma relación se da con los errores relativos.

f. De igual forma, si quisieramos representar el número $\mathbf{x} = 10.119$, que en nuestro sistema de punto flotante equivale a $\mathbf{x} = 10.119 = 0.10119 \cdot 10^{2}$, podemos hacerlo de la siguiente manera:

* Truncamiento: $0.10119 \cdot 10^2 \Longrightarrow 0.1011 \cdot 10^2$
  El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.10119 \cdot 10^2 - 0.1011 \cdot 10^2| = 0.009 \tag{5}$$

  El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_x}{x} = \frac{0.009}{10.119} = 0.000889 \tag{6}$$

* Redondeo simétrico: $0.10119 \cdot 10^2 \Longrightarrow 0.1012 \cdot 10^2$
  El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.10119 \cdot 10^2 - 0.1011 \cdot 10^2| = |-0.001| = 0.001 \tag{7}$$

  El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_x}{x} = \frac{0.001}{10.119} = 0.000099 \tag{8}$$

2 Ejercicio Nº2

Considerando el sistema de punto flotante (floating point) dado por la cuaterna (b, t, L, U) = (10, 3, -2, 3) donde:

- Base “b”: 10
- Precisión “t”: 3
- Rango exponente “[L,U]=[-2,3]”

vemos que lo único que cambia es la precisión o cantidad de dígitos (t=3) respecto el sistema anterior (ejercicio 1) y podemos determinar lo siguiente:

a. El mayor número real que se puede representar es $(1 - 10^{-t}) \cdot 10^U = 0.999 \cdot 10^3 \Longrightarrow 999.0$

b. El mínimo número real positivo que puede representarse, recordando que la mantisa no puede ser menor que $\frac{1}{b} < m < 1$, es $0.100 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow 0.001$. Igual que el anterior sistema que teníamos.

c. El cero se representa como $0.000 \cdot 10^0$. Recordando, según la norma IEEE 754, los valores ceros son valores finitos con significando 0. Estos son ceros con signo, dado que el bit de signo especifica si un cero es $+0$ (cero positivo) o -0 (cero negativo).

d. El número de máquina o epsilon ε de este sistema sería:

   - con redondeo simétrico: $\mathbf{EPS} = u = 0.5 \cdot 10^{1-t} \Longrightarrow 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.005$

   - con truncamiento: $\mathbf{EPS} = u = 10^{1-t} \Longrightarrow 10^{-2} = 0.01$

e. Para representar el número $\mathbf{x} = 57.256$, es decir, $0.57256 \cdot 10^2$, según la política a utilizar obtendremos:

   * Truncamiento: $0.57256 \cdot 10^2 \Longrightarrow 0.572 \cdot 10^2$

     El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.57256 \cdot 10^2 - 0.572 \cdot 10^2| = 0.056 \tag{9}$$

     El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_x}{x} = \frac{0.056}{57.256} = 0.000978 \tag{10}$$

- $*$ Redondeo simétrico: $0.57256 \cdot 10^2 \Longrightarrow 0.573 \cdot 10^2$

  El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.57256 \cdot 10^2 - 0.573 \cdot 10^2| = |-0.044| = 0.044 \tag{11}$$

  El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_x}{x} = \frac{0.044}{57.256} = 0.000768 \tag{12}$$

f. Para representar el número $\mathbf{x} = 10.119$, que en el sistema de punto flotante equivale a $\mathbf{x} = 10.119 = 0.10119 \cdot 10^2$, podemos hacerlo de la siguiente manera:

- $*$ Truncamiento: $0.10119 \cdot 10^2 \Longrightarrow 0.101 \cdot 10^2$
  El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.10119 \cdot 10^2 - 0.101 \cdot 10^2| = 0.019 \tag{13}$$

  El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_x}{x} = \frac{0.019}{10.119} = 0.001878 \tag{14}$$

- $*$ Redondeo simétrico: $0.10119 \cdot 10^2 \Longrightarrow 0.101 \cdot 10^2$
  El error absoluto es

$$\delta_x = |x - x^*| \Longrightarrow \delta_x = |0.10119 \cdot 10^2 - 0.101 \cdot 10^2| = |-0.001| = 0.019 \tag{15}$$

  El error relativo es

$$\mathbf{r_x} = \frac{\delta_x}{x} = \frac{0.019}{10.119} = 0.001878 \tag{16}$$

Nótese que los errores, tanto los absolutos como relativos, son iguales para ambas políticas de aproximación debido a que llegan al mismo resultado. Sin embargo, dado que la precisión del sistema de floating point disminuye (cambia de t=4 a t=3) podemos observar que los errores, en general, aumentaron drásticamente, algo que era intuitivamente esperable.

3 Ejercicio Nº3

Sea $y = f(x) = x^3$ nuestra función objetivo, asumiendo artimética infinita y considerando $\mathbf{x} = 2.56 \pm 0.01$ (donde $\Delta x = .01$), podemos determinar:

a. Los siguientes valores dado el input x:

$$f(2.56 - 0.01) \approx 16.581375$$

$$f(2.56) = 16.7772$$

$$f(2.56 + 0.01) \approx 16.974593$$

b. Un intervalo para $y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y \in [16.581375 \quad ; \quad 16.974593]$

c. Es posible reescribir el valor de la función como $y = y^* \pm \Delta y \quad \Longrightarrow \quad y = 16.7772 \pm 0.19$
Dado el cambio en la sensibilidad de la función en su dominio $x = [2.55; 2.57]$ el diferencial Δy a priori no es preciso.

d. La cota de error absoluto Δy a partir de la propagación de los errores puede ser calculada de la siguiente manera. Considerando $y = x^3$ que implica dos operaciones: $a = x \cdot x$; $y = a \cdot x$, tendremos entonces dos errores relativos respectivamente, que son:

$$r_a = 1 \cdot r_x + 1 \cdot r_x \tag{17}$$
$$r_y = 1 \cdot r_a + 1 \cdot r_x \tag{18}$$

Como no es posible calcularlos, debemos expresarlos como la cota de error relativo:

$$R_a = R_x + R_x \tag{19}$$
$$R_y = R_a + R_x \tag{20}$$

que reemplazando (19) en (20) implica:

$$R_y = 3 \cdot R_x \tag{21}$$

A su vez, sabiendo que $R_x = \Delta x / x$ y que $\Delta x = 0.01$ tenemos:

$$R_y = 3 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right) = 3 \cdot \left(\frac{0.01}{2.56}\right) \implies R_y = 0.011719 \tag{22}$$

donde (22) es la **cota del error relativo** para y, pero según la consigna necesitamos la cota del error absoluto. Recordemos que $R_y = \Delta y / y$, por lo tanto $\Delta y = R_y \cdot y$. El valor de $y = f(x)$ sabemos que era 16.7772, por lo que podemos calcular la cota como:

$$\begin{aligned} \Delta y &= R_y \cdot y \\ &= (0.011719)(16.7772) \\ &= 0.196612 \end{aligned} \tag{23}$$

Así, hemos conseguido nuestra cota de error absoluto para y, que resultó ser $\Delta y = 0.196612$

e. La cota de error relativo es ni más ni menos que (22) que resultó ser $R_y = 0.011719$

f. Sea $\mathbf{r_y}$ el error relativo de y, $\mathbf{r_x}$ el error relativo de x, podemos hallar un valor $\mathbf{f_x}$ tal que $\mathbf{r_y} = \mathbf{f_x} \cdot \mathbf{r_x}$.

Para esto, consideremos nuevamente el Teorema del Valor Medio de Lagrange. Diferenciando la función:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^2 \tag{24}$$

Dividiendo por y:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y \cdot dx} &= \frac{3 \cdot x^2}{y} \\ \frac{\delta_y}{y} &= \frac{3 \cdot x^2 \cdot \delta_x}{x^3} \\ r_y &= 3 \cdot \frac{\delta_x}{x} \\ r_y &= 3 \cdot r_x \end{aligned} \tag{25}$$

Reordenando:

$$\frac{r_y}{r_x} = 3 \tag{26}$$

g. Para entender la intuición matemática de (26), notemos lo siguiente:

$$\frac{r_y}{r_x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \tag{27}$$

A simple vista, lo que podemos ver es que (26) es la expresión matemática alternativa de la elasticidad de la función. Nos muestra cómo cambia y ante un cambio relativo de x. En economía, esto suele utilizarse masivamente para representar la elasticidad-precio en funciones de demanda u oferta: los cambios relativos en la cantidad ante cambios en los precios.

4 Ejercicio Nº4

4.1 Ejercicio (a)

Sea $y = f(x) = 2^x$ nuestra función objetivo, asumiendo artimética infinita y considerando $\mathbf{x} = 7 \pm 0.1$ (donde $\Delta x = .1$), podemos determinar:

a. Los siguientes valores dado el input x:

$$f(7-0.1) \approx 119.42822291671$$

$$f(7) = 2^7 = 128$$

$$f(7+0.1) \approx 137.18700320465$$

b. Dados los valores de $f(x)$, un intervalo para esta $f(x) = y$ sería $y \in [119.42822 \quad ; \quad 137.18700]$

c. Para escribir a la función como $y = y^* \pm \Delta y$ tomemos la primer diferencia:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \ln(2) \cdot 2^x \\ dy &= \ln(2) \cdot 2^x \cdot dx \end{aligned} \tag{28}$$

Considerando que $x = 7$ y $dx = 0.1$ reemplazamos:

$$\begin{aligned} dy &= (0.693147) \cdot 2^7 \cdot (0.1) \\ dy &= \Delta y = 8.87228 \end{aligned} \tag{29}$$

Entonces:

$$y = 128 \pm 8.87228 \tag{30}$$

d. La cota de error absoluto Δy a partir de la propagación de los errores puede ser calculada de la siguiente manera considerando el diferencial (28). Tendremos un error relativo igual a:

$$\begin{aligned} dy &= \ln(2) \cdot 2^x \cdot dx \\ \frac{dy}{y} &= \frac{\ln(2) \cdot 2^x \cdot dx}{2^x} \\ r_y &= \ln(2) \cdot dx \cdot \frac{x}{x} \\ r_y &= \ln(2) \cdot x \cdot r_x \end{aligned} \tag{31}$$

Considerando la cota de error relativo:

$$R_y = \ln(2) \cdot x \cdot R_x \tag{32}$$

Recordando que:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.1}{7} = 0.01428571 \tag{33}$$

implica que (32) es igual a:

$$R_y = \ln(2) \cdot (7)(0.01428571) \quad \Longrightarrow \quad R_y = 0.069315 \tag{34}$$

donde (34) es nuestra cota del error relativo para y, por lo que la cota del error absoluto es:

$$\begin{aligned} \Delta y &= R_y \cdot y \\ &= (0.069315)(128) \\ &= 8.8722812494822 \end{aligned} \tag{35}$$

Así, nuestro resultado (35) es la cota del error absoluto Δy que queríamos encontrar.

e. Además, la cota del error relativo es nuestro resultado (34) que es $R_y = 0.069315$.

f. Para hallar un valor $\mathbf{f_x}$ tal que $\mathbf{r_y} = \mathbf{f_x} \cdot \mathbf{r_x}$ consideremos nuevamente nuestra primer diferencia:

$$dy = \ln(2) \cdot 2^x \cdot dx$$

Dividiendo por y:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \ln(2) \cdot 2^x \cdot \frac{dx}{y} \\ \frac{\delta_y}{y} &= \ln(2) \cdot 2^x \cdot \frac{\delta_x}{2^x} \\ r_y &= \ln(2) \cdot \delta_x \end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por x:

$$\begin{aligned} r_y &= \ln(2) \cdot \delta_x \cdot \frac{x}{x} \\ r_y &= \underbrace{\ln(2) \cdot x}_{\mathbf{f_x}} \cdot r_x \end{aligned}$$

Por lo que considerando $x = 7$ tenemos que:

$$r_y = 4.85203 \cdot r_x \tag{36}$$

donde $\mathbf{f_x} = 4.85203$

g. Al igual que en el ejercicio anterior, la intuición matemática de (36) es la elasticidad de la función, también llamada “sensibilidad”.

4.2 Ejercicio (b)

Sea $y = f(x) = 3^{-x}$ nuestra función objetivo, asumiendo artimética infinita y considerando $\mathbf{x} = 4 \pm 0.02$ (donde $\Delta x = .02$), podemos determinar:

a. Los siguientes valores dado el input x:

$f(4 - 0.02) = 3^{3.98} \approx 0.012077375132459$

$f(4) = 3^{-4} = \frac{1}{81} \approx 0.012345679012346$

$f(4 + 0.02) = 3^{4.02} \approx 0.012619943373808$

b. Dados los valores de $f(x)$, un intervalo para esta $f(x) = y$ sería $y \in [0.012077 \quad ; \quad 0.012619]$

c. Considerando el intervalo anterior, podemos escribir a la función como:
$y = y^* \pm \Delta y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{81} \pm 0.000271$. Esto es derivable también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\ln(3) \cdot 3^{-x} \\ dy &= -\ln(3) \cdot 3^{-x} \cdot dx \\ &= -\ln(3) \cdot 3^{-4} \cdot (0.02) \\ &= -0.000271 \end{aligned} \tag{37}$$

d. La cota de error absoluto Δy a partir de la propagación de los errores puede ser calculada de la siguiente manera. Considerando el primer diferencial de la función:

$$dy = -\ln(3) \cdot 3^{-x} \cdot dx$$

dividimos por y:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -\ln(3) \cdot 3^{-x} \cdot \frac{dx}{y} \\ \frac{\delta_y}{y} &= -\ln(3) \cdot 3^{-x} \cdot \frac{\delta_x}{3^{-x}} \\ r_y &= -\ln(3) \cdot \delta_x \end{aligned} \tag{38}$$

multiplicando y dividiendo por x:

$$\begin{aligned} r_y &= -\ln(3) \cdot \delta_x \cdot \frac{x}{x} \\ r_y &= -\ln(3) \cdot x \cdot r_x \end{aligned}$$

donde $-\ln(3) \cdot x$ sería nuestro ponderador. Considerando $x = 4$:

$$\begin{aligned} r_y &= -\ln(3) \cdot (4) \cdot r_x \\ r_y &= -(4.39445) \cdot r_x \end{aligned} \tag{39}$$

Teniendo en cuenta la cota de error relativo:

$$R_y = -(4.39445) \cdot R_x \tag{40}$$

Recordando que:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.02}{4} = 0.005 \tag{41}$$

implica que (40) es igual a:

$$R_y = -(4.39445)(0.005) \quad \Longrightarrow \quad R_y = |-0.02197| = 0.02197 \tag{42}$$

donde (42) es nuestra cota del error relativo para y, por lo que la cota del error absoluto es:

$$\begin{aligned} \Delta y &= R_y \cdot y \\ &= (0.02197)\left(\frac{1}{81}\right) \\ &= 0.000271 \end{aligned} \tag{43}$$

Así, nuestro resultado (43) es la cota del error absoluto Δy que queríamos encontrar.

e. La cota del error relativo es (42) $R_y = 0.02197$

f. El valor $\mathbf{f_x}$ que deseamos encontrar, tal que $\mathbf{r_y} = \mathbf{f_x} \cdot \mathbf{r_x}$ no es ni más ni menos que el coeficiente de la ecuación (39):

$$r_y = -(4.39445) \cdot r_x$$

considerando su valor absoluto es $\mathbf{f_x} = 4.39445$

g. Dada la intuición matemática de elasticidad que entendemos para este coeficiente, podemos observar que la función es relativamente muy elástica en ese punto $x = 4$.

4.3 Ejercicio (c)

Sea $y = f(x) = \sin(x)$ nuestra función objetivo, asumiendo artimética infinita y considerando $\mathbf{x} = 1.6 \pm 0.004$ (donde $\Delta x = .004$), podemos determinar:

a. Los siguientes valores dado el input x:

$$f(1.6 - 0.004) = \sin(1.596) \approx 0.999682$$

$$f(1.6) = \sin(1.6) = 0.999573$$

$$f(1.6 + 0.004) = \sin(1.604) \approx 0.999449$$

b. Dados los valores de $f(x)$, un intervalo para la función senoidal sería $y \in [0.999449 \quad ; \quad 0.999682]$

c. Para representarla como $y = y^* \pm \Delta y$ podemos calcular el diferencial Δy de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$$
$$dy = \cos(x) \cdot dx$$

según los valores de la consigna implica:

$$dy = \cos(1.6) \cdot (0.004) = |-0.000117| = 0.000117 \tag{44}$$

Por lo que podemos reescribir el intervalo como $y = 0.999573 \pm 0.000117$

d. La cota de error absoluto Δy a partir de la propagación de los errores puede ser calculada de la siguiente manera. Considerando el primer diferencial de la función:

$$dy = \cos(x) \cdot dx$$

dividimos por y:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos(x)}{y} \cdot dx$$
$$\frac{\delta_y}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \delta_x$$
$$r_y = \cot(x) \cdot \delta_x$$

multiplicamos y dividimos por x:

$$r_y = \cot(x) \cdot \delta_x \cdot \frac{x}{x}$$
$$r_y = \cot(x) \cdot x \cdot r_x \tag{45}$$

Considerando la cota de error relativo:

$$R_y = \cot(x) \cdot x \cdot R_x \tag{46}$$

donde

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.004}{1.6} = 0.0025 \tag{47}$$

lo que implica que:

$$R_y = \cot(1.6) \cdot (1.6) \cdot (0.0025) \quad \Longrightarrow \quad R_y = |-0.000117| \tag{48}$$

ergo, considerando que $\Delta y = R_y \cdot y$:

$$\Delta y = (0.000117) \cdot (0.999573) = 0.000117 \tag{49}$$

e. Nótese que en (49) obtuvimos el mismo resultado que para (48), es decir, que la cota de error absoluto es igual a la del error relativo.

f. Para hallar el valor $\mathbf{f_x}$ tal que $\mathbf{r_y} = \mathbf{f_x} \cdot \mathbf{r_x}$ tomemos la ecuación (45):

$$r_y = \underbrace{\cot(x) \cdot x}_{\mathbf{f_x}} \cdot r_x \tag{50}$$

evaluada en los valores $x = 1.6$ implica:

$$r_y = -(0.046739) \cdot r_x \tag{51}$$

g. Considerando el valor absoluto del coeficiente $\mathbf{f_x} = 0.046739$ podemos ver que la función es relativamente inelástica para ese punto dado que $|\mathbf{f_x}| < 1$ (siendo 1 el valor de elasticidad unitaria).

4.4 Ejercicio (d)

Sea $w = f(x, y, z) = x^2 \cdot y^3 + z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz + 6$ nuestra función objetivo, asumiendo artimética infinita y considerando $x = 5.12 \pm 0.03$; $y = 2.37 \pm 0.01$; $z = 1.09 \pm 0.02$ podemos calcular una cota del error absoluto y una cota del error relativo de $w(x, y, z)$.

Sea el diferencial total de una función de tres variables:

$$dw = w_x(x, y, z) \cdot dx + w_y(x, y, z) \cdot dy + w_z(x, y, z) \cdot dz$$

implica que para nuestra función es:

$$dw = \left(2xy^3 + \frac{z^4}{x}\right) dx + \left(3y^2x^2 - 5z\right) dy + \left(4z^3 \cdot \ln(2x) - 5y\right) dz \tag{52}$$

Operando algebraicamente:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{w} &= \frac{\left(2xy^3 + \frac{z^4}{x}\right) dx + \left(3y^2x^2 - 5z\right) dy + \left(4z^3 \cdot \ln(2x) - 5y\right) dz}{w} \\
r_w &= \frac{\left(2xy^3 + \frac{z^4}{x}\right) x \cdot r_x + \left(3y^2x^2 - 5z\right) y \cdot r_y + \left(4z^3 \cdot \ln(2x) - 5y\right) z \cdot r_z}{w} \\
r_w &= \frac{\left(2xy^3 + \frac{z^4}{x}\right) x \cdot r_x + \left(3y^2x^2 - 5z\right) y \cdot r_y + \left(4z^3 \cdot \ln(2x) - 5y\right) z \cdot r_z}{x^2 \cdot y^3 + z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz + 6} \\
r_w &= \frac{\left(2x^2y^3 + z^4\right) r_x + \left(3y^3x^2 - 5z\right) r_y + \left(4z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz\right) r_z}{x^2 \cdot y^3 + z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz + 6}
\end{aligned}$$

Reordenando:

$$r_w = \frac{\left(2x^2y^3 + z^4\right)}{w} r_x + \frac{\left(3y^3x^2 - 5z\right)}{w} r_y + \frac{\left(4z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz\right)}{w} r_z \tag{53}$$

Por lo que la cota de error absoluto sería:

$$R_w = \frac{\left(2x^2y^3 + z^4\right)}{w} R_x + \frac{\left(3y^3x^2 - 5z\right)}{w} R_y + \frac{\left(4z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz\right)}{w} R_z \tag{54}$$

Para calcularla explícitamente, recordemos los siguientes valores:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.03}{5.12} = 0.005859375 \tag{55}$$

$$R_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0.01}{2.37} = 0.004219409 \tag{56}$$

$$R_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{0.02}{1.09} = 0.018348624 \tag{57}$$

Y considerando el valor absoluto de w:

$$\begin{aligned} w(x,y,z) &= x^2 \cdot y^3 + z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz + 6 \\ &= (5.12)^2 \cdot (2.37)^3 + (1.09)^4 \cdot \ln(10.24) - 5(2.37)(1.09) + 6 \\ &= 345.33474674876 \end{aligned} \tag{58}$$

Estos valores implican:

$$\begin{aligned} R_w &= \frac{\left(2x^2y^3 + z^4\right)}{345.335}(0.00586) + \frac{\left(3y^3x^2 - 5z\right)}{345.335}(0.00422) + \frac{\left(4z^4 \cdot \ln(2x) - 5yz\right)}{345.335}(0.01835) \\ R_w &= \frac{(699.347)}{345.335}(0.00586) + \frac{(1041.45)}{345.335}(0.00422) + \frac{(0.218558)}{345.335}(0.01835) \\ R_w &= 0.01187 + 0.01273 + 0.000012 \\ R_w &= 0.024605 \end{aligned} \tag{59}$$

Finalmente, la cota de error absoluto sería:

$$\begin{aligned} \Delta w &= R_w \cdot w \\ \Delta w &= (0.024605)(345.33477) \\ \Delta w &= 8.4969 \end{aligned} \tag{60}$$

5 Ejercicio Nº5

Considerando aritmética infinita, podemos determinar las fórmulas de los errores absolutos y relativos de z, junto con su diagrama de árbol correspondiente, en los siguientes casos:

a. Sea la función $z = x + y$, sus fórmulas de error absoluto y relativo son las siguientes:

   Recordemos que por el Teorema de Valor Medio de Lagrange (multivariable) sabemos que:

$$\delta_z = \delta_x + \delta_y \tag{61}$$

   y que, operando algebraicamente, podemos llegar a:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_z}{z} &= \frac{\delta_x}{z} + \frac{\delta_y}{z} \\
\frac{\delta_z}{z} &= \frac{\delta_x}{x+y} \cdot \frac{x}{x} + \frac{\delta_y}{x+y} \cdot \frac{y}{y} \\
\frac{\delta_z}{z} &= \frac{\delta_x}{x} \cdot \frac{x}{x+y} + \frac{\delta_y}{y} \cdot \frac{y}{x+y} \\
r_z &= \left(\frac{x}{x+y}\right) \cdot r_x + \left(\frac{y}{x+y}\right) \cdot r_y
\end{aligned} \tag{62}$$

   y (62) es nuestra fórmula de error relativo. Por otro lado, de igual manera la cota de error relativo es:

$$R_z = \left(\frac{x}{x+y}\right) \cdot R_x + \left(\frac{y}{x+y}\right) \cdot R_y \tag{63}$$

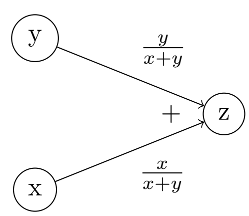
   que es equivalente a:

$$R_z = \frac{\Delta z}{z} \tag{64}$$

   lo que implica que la cota de error absoluto es:

$$\Delta z = R_z \cdot z \tag{65}$$

   Por último, el grafo de propagación del error de esta función es:



b. Sea la función $z = x - y$, podemos calcular las fórmulas de error absoluto y relativo de la siguiente manera:

   Por Teorema del Valor Medio de Lagrange, su fórmula error absoluto es:

$$\delta_z = \delta_x - \delta_y \tag{66}$$

Y, operando algebraicamente:

$$\begin{aligned}
\delta_z &= \delta_x - \delta_y \\
\frac{\delta_z}{z} &= \frac{\delta_x}{z} - \frac{\delta_y}{z} \\
\frac{\delta_z}{z} &= \frac{\delta_x}{x-y} - \frac{\delta_y}{x-y} \\
\frac{\delta_z}{z} &= \frac{\delta_x}{x-y} \cdot \frac{x}{x} - \frac{\delta_y}{x-y} \cdot \frac{y}{y} \\
r_z &= r_x \cdot \left(\frac{x}{x-y}\right) - r_y \cdot \left(\frac{y}{x-y}\right) \qquad (67)
\end{aligned}$$

así, hemos conseguido nuestra fórmula de error relativo (67). La cota de este es:

$$R_z = R_x \cdot \left(\frac{x}{x-y}\right) - R_y \cdot \left(\frac{y}{x-y}\right) \qquad (68)$$

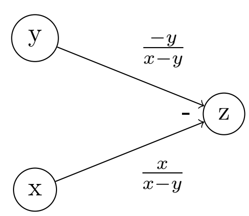
que es equivalente a:

$$R_z = \frac{\Delta z}{z}$$

y la cota de error absoluto en cuestión es:

$$\Delta z = R_z \cdot z$$

Finalmente, el diagrama de árbol asociado a esta función es:



c. Sea $z = x \cdot y$ nuestra función objetivo, gracias al Teorema del Diferencial de Lagrange sabemos que su fórmula de error absoluto es:

$$\delta_z = y \cdot \delta_x + x \cdot \delta_y \qquad (69)$$

Ergo, operando algebraicamente obtendremos la fórmula de eror relativo:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_z}{z} &= y \cdot \frac{\delta_x}{z} + x \cdot \frac{\delta_y}{z} \\
\frac{\delta_z}{z} &= y \cdot \frac{\delta_x}{x \cdot y} + x \cdot \frac{\delta_y}{x \cdot y} \\
r_z &= 1 \cdot r_x + 1 \cdot r_y \qquad (70)
\end{aligned}$$

Ya con nuestra fórmula de error relativo (67) podemos obtener la cota de error relativo:

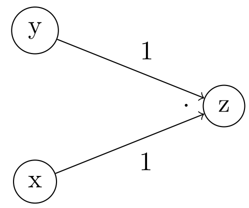
$$R_z = 1 \cdot R_x + 1 \cdot R_y \quad \Longrightarrow \quad R_z = \frac{\Delta z}{z} \qquad (71)$$

que implica:

$$\Delta z = R_z \cdot z \tag{72}$$

donde (72) es nuestra cota de error absoluto.

Por último, el grafo asociado a esta operación aritmética es:



d. Sea la función $z = \frac{x}{y}$, la fórmula de error absoluto es:

$$\delta_z = \left(\frac{1}{y}\right) \cdot \delta_x - \left(\frac{x}{y^2}\right) \cdot \delta_y \tag{73}$$

que, operando algebraicamente, alcanzamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_z}{z} &= \left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{\delta_x}{z} - \left(\frac{x}{y^2}\right) \cdot \frac{\delta_y}{z} \\
\frac{\delta_z}{z} &= \left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{\delta_x}{\frac{x}{y}} - \left(\frac{x}{y^2}\right) \cdot \frac{\delta_y}{\frac{x}{y}} \\
\frac{\delta_z}{z} &= 1 \cdot \frac{\delta_x}{x} - 1 \cdot \frac{\delta_y}{y} \\
r_z &= 1 \cdot r_x - 1 \cdot r_y
\end{aligned} \tag{74}$$

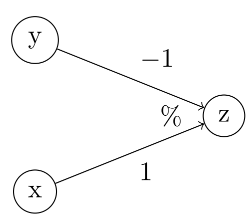
donde (74) es nuestra fórmula para el error relativo. La cota de este es:

$$R_z = R_x - R_y \quad \Longrightarrow \quad R_z = \frac{\Delta z}{z} \tag{75}$$

y que implica:

$$\Delta z = R_z \cdot z \tag{76}$$

Finalmente, su diagrama de árbol es:



6 Ejercicio Nº6

De igual manera que en el ejercicio Nº5, en este caso debemos determinar las fórmulas para los errores absolutos y relativos de las funciones, con la diferencia de que asumiremos aritmética finita. Recordemos que trabajando con aritmética finita se incluye una fuente de error más a nuestra operatoria, que implicará considerar el número de máquina (epsilon o EPS) en nuestras operaciones.

Dado que el desarrollo mostrado en el ejercicio anterior es consistente con este caso también, expondremos directamente las fórmulas solicitadas.

a. Sea $z = x + y$ la función, tenemos que:

- Fórmula de error absoluto:

$$\delta_z = \delta_x + \delta_y + u \tag{77}$$

- Fórmula de error relativo:

$$r_z = \left(\frac{x}{x+y}\right) \cdot r_x + \left(\frac{y}{x+y}\right) \cdot r_y + u \tag{78}$$

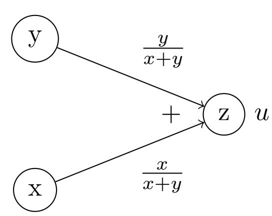
- Fórmula de cota de error absoluto:

$$\Delta z = R_z \cdot z + u \tag{79}$$

- Fórmula de cota de error relativo:

$$R_z = \left(\frac{x}{x+y}\right) \cdot R_x + \left(\frac{y}{x+y}\right) \cdot R_y + u \tag{80}$$

- Grafo asociado:



b. Sea $z = x - y$ la función, tenemos que:

- Fórmula de error absoluto:

$$\delta_z = \delta_x - \delta_y + u \tag{81}$$

- Fórmula de error relativo:

$$r_z = \left(\frac{x}{x-y}\right) \cdot r_x - \left(\frac{y}{x-y}\right) \cdot r_y + u \tag{82}$$

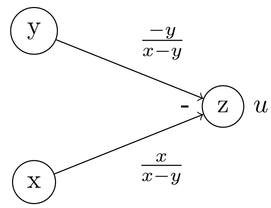
- Fórmula de cota de error absoluto:

$$\Delta z = R_z \cdot z + u \tag{83}$$

- Fórmula de cota de error relativo:

$$R_z = \left(\frac{x}{x-y}\right) \cdot R_x - \left(\frac{y}{x-y}\right) \cdot R_y + u \tag{84}$$

- Grafo asociado:



c. Sea $z = x \cdot y$ la función, tenemos que:

- Fórmula de error absoluto:

$$\delta_z = y \cdot \delta_x + x \cdot \delta_y + u \tag{85}$$

- Fórmula de error relativo:

$$r_z = r_x + r_y + u \tag{86}$$

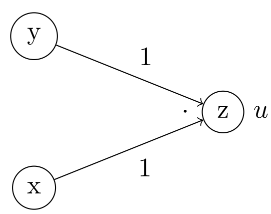
- Fórmula de cota de error absoluto:

$$\Delta z = R_z \cdot z + u \tag{87}$$

- Fórmula de cota de error relativo:

$$R_z = R_x + R_y + u \tag{88}$$

- Grafo asociado:



d. Sea $z = x/y$ la función, tenemos que:

- Fórmula de error absoluto:

$$\delta_z = y \cdot \delta_x - \left(\frac{x}{y^2}\right) \cdot \delta_y + u \tag{89}$$

- Fórmula de error relativo:

$$r_z = r_x - r_y + u \tag{90}$$

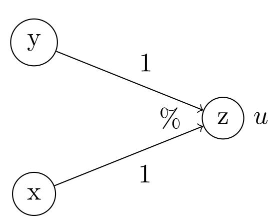
- Fórmula de cota de error absoluto:

$$\Delta z = R_z \cdot z + u \tag{91}$$

- Fórmula de cota de error relativo:

$$R_z = R_x + R_y + u \tag{92}$$

- Grafo asociado:



7 Ejercicio Nº7

Sea $z = x \cdot y$ la función objetivo con los inputs $x = 6.2 \pm 0.2$; $y = 1.8 \pm 0.1$ y nuestro sistema de aritmética finita con precisión t=3 y política de redondeo simétrico.

a. La cota del error relativo de z puede ser hallada de la siguiente manera a continuación. Consideremos por el Teorema del Valor Medio en Diferencial de Lagrange que nuestra fórmula de error absoluto es:

$$\delta_z = y \cdot \delta_x + x \cdot \delta_y \tag{93}$$

De la cual podemos derivar nuestra fórmula de error relativo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_z}{z} &= \frac{y \cdot \delta_x}{z} + \frac{x \cdot \delta_y}{z} \\ \frac{\delta_z}{z} &= \frac{y \cdot \delta_x}{x \cdot y} + \frac{x \cdot \delta_y}{x \cdot y} \\ r_z &= 1 \cdot r_x + 1 \cdot r_y \end{aligned} \tag{94}$$

Así, con (94) podemos hallar la expresión de cota del error relativo:

$$R_z = R_x + R_y + u \tag{95}$$

donde $u = 0.5 \cdot 10^{1-3} = 0.005$ y los valores R_x y R_y son:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.2}{6.2} = 322.581 \cdot 10^{-4} \approx 0.032 \tag{96}$$

$$R_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0.1}{1.8} = 555.556 \cdot 10^{-4} \approx 0.056 \tag{97}$$

reemplazandolos en (95) implica:

$$R_z = 0.032 + 0.056 + 0.005 \quad \Longrightarrow \quad R_z = 0.093 \tag{98}$$

Y si quisieramos la cota del error absoluto:

$$\Delta z = R_z \cdot z = (0.093) \cdot (11.16) \quad \Longrightarrow \quad \Delta z = 1.03788 \approx 1.038 \tag{99}$$

b. Resolviendo la operación $x \cdot y$ en floating point para los valores extremos de los inputs. Para una interpretación más rápida utilizaremos notación en cada valor extremo:

$$\begin{aligned} x = x \pm \Delta x \quad &\Longrightarrow \quad x = 6.2 \pm 0.2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 6.4; \quad x_2 = 6. \\ y = y \pm \Delta y \quad &\Longrightarrow \quad y = 1.8 \pm 0.1 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 1.9; \quad y_2 = 1.7 \end{aligned}$$

Lo que para nuestra función implica:

$$z_1 = x_1 \cdot y_1 = (6.4)(1.9) = 12.16 \tag{100}$$

$$z_2 = x_2 \cdot y_2 = (6.)(1.7) = 10.2 \tag{101}$$

Según podemos observar en los resultados, el error absoluto en cada caso es:

$$\delta_z^1 = |z_1 - z^*| = 12.16 - 11.16 = 1. \tag{102}$$

$$\delta_z^2 = |z_2 - z^*| = |10.2 - 11.16| = 0.96 \tag{103}$$

Ambos valores se encuentran dentro del rango admisible, ya que nuestro cota de error absoluto que obtuvimos en el inciso (a) es mayor ($\Delta z = 1.038$). Podemos esperar lo mismo para las cotas de error relativo.

c. Repitiendo la comparación con los valores $x = 6.2 \pm 0.002$; $y = 1.8 \pm 0.001$ podemos ver lo siguiente:

Las cotas de error relativo para x e y son:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.002}{6.2} = 3.22581 \cdot 10^{-4} \approx 0.000323 \tag{104}$$

$$R_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0.001}{1.8} = 5.55556 \cdot 10^{-4} \approx 0.000556 \tag{105}$$

por lo que la cota de error relativo para z es:

$$R_z = 0.000323 + 0.000556 + 0.005 = 0.005879 \approx 0.006 \tag{106}$$

y la cota para el error absoluto:

$$\Delta z = (0.006) \cdot (11.16) = 0.06696 \approx 0.067 \tag{107}$$

Nótese en los resultados (106) y (107) que las cotas disminuyen drásticamente ante la menor cota de error absoluto en los datos de entrada x e y. Más específicamente, el diferencial en cada variable exógena disminuyó de 0.1 a 0.001 (100 veces menor).

Finalmente, verificando las cotas al resolver para los valores extremos:

$$x = x \pm \Delta x \implies x = 6.2 \pm 0.002 \implies x_1 = 6.202; \quad x_2 = 6.198$$
$$y = y \pm \Delta y \implies y = 1.8 \pm 0.1 \implies y_1 = 1.801; \quad y_2 = 1.799$$

Lo que para nuestra función implica:

$$z_1 = x_1 \cdot y_1 = (6.202)(1.801) = 11.1698 \tag{108}$$

$$z_2 = x_2 \cdot y_2 = (6.198)(1.799) = 11.1502 \tag{109}$$

Verificando los resultados, vemos que el error absoluto en cada caso es:

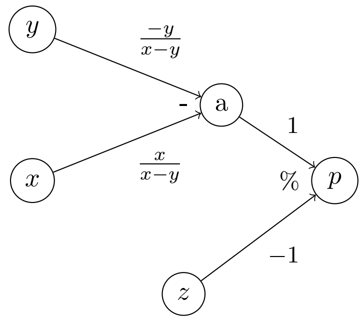
$$\delta_z^1 = |z_1 - z^*| = 11.1698 - 11.16 = 0.0098 \tag{110}$$

$$\delta_z^2 = |z_2 - z^*| = |11.1502 - 11.16| = 0.0098 \tag{111}$$

Nuevamente podemos observar que las cotas son menores que la calculada antes (107), por lo que los resultados a priori son correctos. Asimismo, el ejercicio nos permite entender intuitivamente que a menor cota de error en los datos de entrada, menor será la propagación.

8 Ejercicio Nº8

Sea la función $p = (x - y)/z$ con los inputs $x = 42.7 \pm 0.01$; $y = 41.4 \pm 0.01$; $z = 3.25 \pm 0.01$ podemos calcular su cota de error relativo. Utilizaremos precisión de 3 digitos y redondeo simétrico. De forma preliminar resulta adecuado exponer el grafo con las operaciones aritméticas:



Por un lado, la fórmula de error relativo para el resultado del nodo “a” es la siguiente:

$$r_a = \left(\frac{x}{x-y}\right) \cdot r_x - \left(\frac{y}{x-y}\right) \cdot r_y + u_1 \tag{112}$$

Como no es directamente calculable, expresaremos la fórmula de la cota de error relativo:

$$R_a = \left(\frac{x}{x-y}\right) \cdot R_x - \left(\frac{y}{x-y}\right) \cdot R_y + u_1$$

donde los valores R_x y R_y son:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.01}{42.7} = 2.34192 \cdot 10^{-4} \tag{113}$$

$$R_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0.01}{41.4} = 2.41545 \cdot 10^{-4} \tag{114}$$

Y considerando $u_i = u_1 = 0.5 \cdot 10^{1-t} = 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.005$, implica:

$$\begin{aligned} R_a &= \left(\frac{42.7}{42.7-41.4}\right) \cdot \left(2.34192 \cdot 10^{-4}\right) - \left(\frac{41.4}{42.7-41.4}\right) \cdot \left(2.41545 \cdot 10^{-4}\right) + 0.005 \\ &= (32.84615) \cdot \left(2.34192 \cdot 10^{-4}\right) - (31.84615) \cdot \left(2.41545 \cdot 10^{-4}\right) + 0.005 \\ &= 0.007692 - 0.007692 + 0.005 \\ &= 0.005 \end{aligned} \tag{115}$$

Por otro lado, la fórmula de error relativo para el resultado del nodo p es:

$$r_p = 1 \cdot r_a - 1 \cdot r_z + u_2 \tag{116}$$

Y su cota de error relativo es:

$$R_p = R_a - R_z + u_2 \tag{117}$$

donde R_z es:

$$R_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{0.01}{3.25} = 30.7692 \cdot 10^{-4} \tag{118}$$

lo que implica:

$$R_p = 0.005 - 0.003076 + 0.005 \quad \Longrightarrow \quad R_p = 0.006923 \approx 0.007 \tag{119}$$

Y su cota de error absoluto:

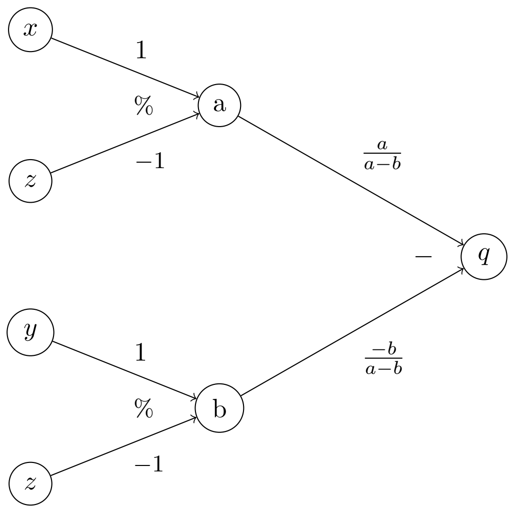
$$\Delta p = R_p \cdot p = (0.007) \cdot 0.4 \quad \Longrightarrow \quad \Delta p = 0.0028 \approx 0.003 \tag{120}$$

Finalmente, el intervalo para nuestra función $p = p^* \pm \Delta p$ es $p \in [0.397; 0.403]$

9 Ejercicio Nº9

De forma similar al ejercicio anterior, consideremos una función $q = x/z - y/z$ con los valores de entrada $x = 42.7 \pm 0.01$; $y = 41.4 \pm 0.01$; $z = 3.25 \pm 0.01$. Podemos calcular su cota de error relativo utilizando precisión de 3 digitos y redondeo simétrico.

Nótese que es la misma función p que antes pero sin denominador común. El grafo en cuestión sería:



Asimismo, recordemos que con aritmética finita y política de redondeo simétrico, nuestro número de máquina es $u = 0.5 \cdot 10^{1-t} = 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.005$.

Para hallar la cota de error relativo, calculemos las cotas en cada operación aritmética:

$$R_a = R_x - R_z + u \tag{121}$$
$$R_b = R_y - R_z + u \tag{122}$$

donde los valores de R_x, R_y y R_z son:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.01}{42.7} = 2.34192 \cdot 10^{-4} \tag{123}$$
$$R_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0.01}{41.4} = 2.41545 \cdot 10^{-4} \tag{124}$$
$$R_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{0.01}{3.25} = 30.7692 \cdot 10^{-4} \tag{125}$$

por lo que reemplazando en (121) y (122) implica:

$$R_a = \left(2.34192 \cdot 10^{-4}\right) - \left(30.7692 \cdot 10^{-4}\right) + 0.005 = 21.5727 \cdot 10^{-4} \tag{126}$$
$$R_b = \left(2.41545 \cdot 10^{-4}\right) - \left(30.7692 \cdot 10^{-4}\right) + 0.005 = 21.6463 \cdot 10^{-4} \tag{127}$$

Por otro lado, la cota de la operación aritmética de substracción es:

$$R_q = \left(\frac{a}{a-b}\right) \cdot R_a - \left(\frac{b}{a-b}\right) \cdot R_b + u \tag{128}$$

Reemplazando los resultados (126) y (127) implica:

$$
\begin{aligned}
R_q &= \left(\frac{13.138}{13.138-12.738}\right)\cdot(21.5727\cdot 10^{-4}) - \left(\frac{12.738}{13.138-12.738}\right)\cdot(21.6463\cdot 10^{-4}) + 0.005 \\
&= (32.845)\cdot(21.5727\cdot 10^{-4}) - (31.845)\cdot(21.6463\cdot 10^{-4}) + 0.005 \\
&= 0.07085 - 0.06893 + 0.005 \\
&= 0.00692 \\
R_q &\approx 0.007 \qquad (129)
\end{aligned}
$$

Y la cota de error absoluto sería:

$$\Delta q = R_q \cdot q = (0.00692)\cdot(0.4) \quad\Longrightarrow\quad \Delta q = 0.002768 \approx 0.003 \qquad (130)$$

Su representación en un intervalo es $q \in [0.397; 0.403]$.

Comparando el resultado (120) con nuestro reciente resultado (130) podemos observar que a pesar de representar la función de otra manera, con una operación aritmética más de división, la cota obtenido sigue siendo igual. Debemos tener en cuenta que factorizar funciones nos permite ganar más eficiencia computacional en términos de menos operaciones aritméticas y además, reducimos el error inherente de aritmética finita. En este caso, sin embargo, en alguna cota de error el número de máquina adicional finalmente se cancela y obtenemos el mismo error que en el ejercicio anterior.

10 Ejercicio Nº10

Si rehacemos los ejercicios 8 y 9 considerando política de redondeo por truncamiento, podremos comparar los resultados para ver si varían debido a esta o no. Veamoslo a continuación:

- Sea nuestra función $p = \frac{x-y}{z}$, considerando los resultados obtenidos, tomemos la ecuación (119):

  $$R_p = 0.005 - 0.003076 + 0.005 \quad\Longrightarrow\quad R_p = 0.006923 \approx 0.006 \qquad (131)$$

  Y por ende, su cota de error absoluto es:

  $$\Delta p = R_p \cdot p = (0.006)\cdot 0.4 \quad\Longrightarrow\quad \Delta p = 0.0024 \approx 0.002 \qquad (132)$$

  Esto implica que el intervalo para nuestra función $p = p^* \pm \Delta p$ es $p \in [0.398; 0.402]$.

- Sea nuestra función $q = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$, considerando los resultados obtenidos, tomemos la ecuación que nos llevó a (129):

  $$R_q = 0.07085 - 0.06893 + 0.005 \quad\Longrightarrow\quad R_q = 0.00692 \approx 0.006 \qquad (133)$$

  Y su cota de error absoluto sería:

  $$\Delta q = R_q \cdot q = (0.006)\cdot 0.4 \quad\Longrightarrow\quad \Delta q = 0.0024 \approx 0.002 \qquad (134)$$

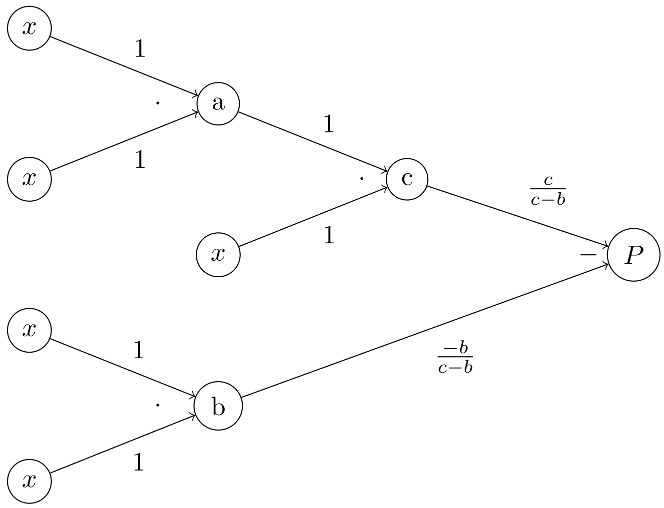
  Nuevamente, vemos que el intervalo para la función es $q \in [0.398; 0.402]$.

En vista de los resultados obtenidos, podemos concluir que optando por política de truncamiento la propagación del error termina siendo menor, pero a costa de una menor “precisión” en el redondeo, ya que la aproximación simétrica es mejor para decimales mayores al 5.

11 Ejercicio Nº11

Sea el polinomio $P(x) = x^3 - x^2$, podemos calcular $P(2.54)$ trabajando en punto flotante con precisión t=3 y redondeo simétrico.

El diagrama de árbol del polinomio es:



Los errores relativos en cuestión, por un lado, son:

$$r_a = 1 \cdot r_x + 1 \cdot r_x + u \tag{135}$$
$$r_c = 1 \cdot r_a + 1 \cdot r_x + u \tag{136}$$

Reemplazando (135) en (136):

$$r_c = 3 \cdot r_x + 2 \cdot u \tag{137}$$

donde $r_x = 0$ porque $\Delta x = 0$:

$$r_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0}{2.54} = 0 \tag{138}$$

y nuestro número de maquina u con redondeo simétrico es:

$$u = 0.5 \cdot 10^{1-t} = 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.005 \tag{139}$$

en (137), considerando la cota del error relativo, implica:

$$R_c = 3 \cdot (0) + 2 \cdot (0.005) \quad \Longrightarrow \quad R_c = 0.01 \tag{140}$$

Por otro lado, tenemos:

$$r_b = 1 \cdot r_x + 1 \cdot r_x + u \tag{141}$$
$$R_b = 0.005 \tag{142}$$

Finalmente, de la resta aritmética entre los nodos c y b, tenemos:

$$\begin{aligned} R_P &= \left(\frac{c}{c-b}\right) \cdot R_c - \left(\frac{b}{c-b}\right) \cdot R_b + u \qquad (143)\\ &= \left(\frac{16.387}{16.387 - 6.452}\right) \cdot (0.01) - \left(\frac{6.452}{16.387 - 6.452}\right) \cdot (0.005) + 0.005 \\ &= 0.018247 \\ &\approx 0.019 \qquad (144) \end{aligned}$$

Si quisieramos comparar resultados optando por otra política de redondeo podemos elegir truncamiento. En primer lugar, resolviendo con truncamiento, lo que cambia principalmente es nuestro EPS:

$$u = 10^{1-t} = 10^{-2} = 0.01 \tag{145}$$

Esto implica:

$$R_c = 3 \cdot R_x + 2 \cdot u = 3 \cdot (0) + 2 \cdot (0.01) \quad \Longrightarrow \quad R_c = 0.02 \tag{146}$$

$$R_b = 2 \cdot R_x + u = 2 \cdot (0) + 0.01 \quad \Longrightarrow \quad R_b = 0.01 \tag{147}$$

Y nuestra cota de error relativo para el polinomio sería:

$$\begin{aligned} R_P &= \left(\frac{c}{c-b}\right) \cdot R_c - \left(\frac{b}{c-b}\right) \cdot R_b + u \\ &= \left(\frac{16.387}{16.387 - 6.452}\right) \cdot (0.02) - \left(\frac{6.452}{16.387 - 6.452}\right) \cdot (0.01) + 0.01 \\ &= 0.036494 \\ &\approx 0.036 \end{aligned} \tag{148}$$

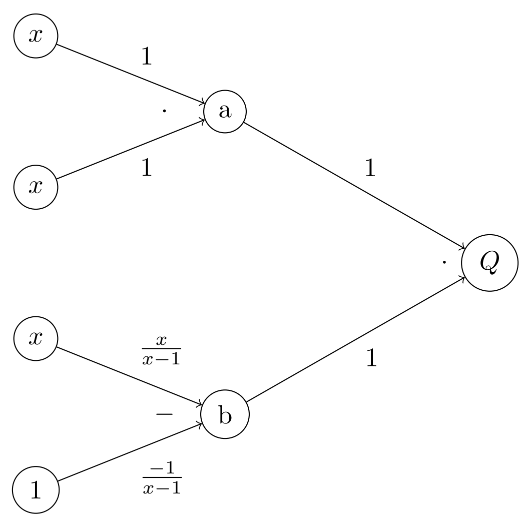
Así, en vista de los resultados (144) y (148) podemos observar que con la política de truncamiento o “chopping” (por su nombre en inglés), el error relativo de la computación del polinomio aumenta drásticamente.

Más especificamente, la cota de error relativo de un método a otro aumenta un 89% aproximadamente.

12 Ejercicio Nº12

Sea el polinomio $Q(x) = x^2 \cdot (x-1)$, podemos calcular $Q(2.54)$ trabajando en punto flotante con precisión t=3 y redondeo simétrico. Nótese que $Q(x)$ es la expresión factorizada del polinomio $P(x)$ del ejercicio anterior, lo que implica menos operaciones aritméticas como podremos apreciar a continuación.

El grafo del polinomio $Q(x)$ en este caso es:



Las fórmulas de error relativo son:

$$r_a = 1 \cdot r_x + 1 \cdot r_x + u \tag{149}$$

$$r_b = \left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot r_x - \left(\frac{1}{x-1}\right) \cdot (0) + u \tag{150}$$

$$r_Q = 1 \cdot r_a + 1 \cdot r_b + u \tag{151}$$

donde $u = u_i = 0.5 \cdot 10^{1-t} = 0.005$. Reemplazando (149) y (150) junto con nuestro número de máquina u en la fórmula de (151) tenemos que:

$$\begin{aligned} r_Q &= 1 \cdot (2 \cdot r_x + u) + 1 \cdot \left[\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot r_x + u\right] + u \\ r_Q &= 2 \cdot r_x + \left(\frac{2.54}{2.54-1}\right) \cdot r_x + 3 \cdot (0.005) \\ r_Q &= 2 \cdot r_x + (1.6493) \cdot r_x + 0.015 \\ r_Q &= (3.6493) \cdot r_x + 0.015 \end{aligned} \tag{152}$$

Considerando la cota de error relativo:

$$R_Q = (3.6493) \cdot R_x + 0.015 \tag{153}$$

Sin embargo, recordemos que al no tener un error en el parámetro de entrada (específicamente una cota de error absoluto Δx), sea de medición u otro tipo, implica lo siguiente:

$$R_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0}{2.54} = 0 \tag{154}$$

y, por consiguiente, nuestra ecuación (153) implica:

$$R_Q = (3.6493) \cdot (0) + 0.015 = 0.015 \tag{155}$$

Desde ya, comparemos nuestro resultado (155) con el del ejercicio anterior (144) podemos ver que la diferencia es casi apenas el "machine number", es decir, nuestro EPS $u = 0.005$:

$$R_P - R_Q = 0.019 - 0.015 = 0.004 \approx u$$

Esto sucede porque al factorizar el polinomio reducimos la cantidad de operaciones aritméticas, especificamente reducimos de 4 operaciones a 3 y por ende, se propaga menos el error inherente u.

Por otro lado, podemos resolver nuevamente utilizando truncamiento. Debemos recalcular nuestro número de maquina y nuevamente reemplazar (149) y (150) en (151).

$$u = 10^{1-t} = 10^{-2} = 0.01$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} r_Q &= 1 \cdot (2 \cdot r_x + u) + 1 \cdot \left[\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot r_x + u\right] + u \\ r_Q &= 2 \cdot r_x + \left(\frac{2.54}{2.54-1}\right) \cdot r_x + 3 \cdot (0.01) \\ r_Q &= 2 \cdot r_x + (1.6493) \cdot r_x + 0.03 \\ r_Q &= (3.6493) \cdot r_x + 0.03 \end{aligned} \tag{156}$$

Recordando (154) que implica $R_x = 0$:

$$R_Q = 0.03 \tag{157}$$

Nótese, que al igual que el caso de redondeo simétrico, la cota del error relativo es menor con el polinomio $Q(x)$ que el $P(x)$ sin factorizar.

13 Ejercicio Nº13

Sea la función trascendente $\sin(x)$ evaluada en $x = 0.5$, podemos calcular el número de términos del desarrollo en serie de Taylor (alrededor de cero $x_0 = 0$) necesarios para obtener el $\sin(0.5)$ con 6 cifras significativas exactas.

De manera preliminar, podemos recordar la expresión de la Serie de Taylor y ciertos detalles en el apéndice.

Considerando la derivada primera de $\sin(x)$, tenemos $f'(x) = \cos x$ y es sabido por trigonometría básica que:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{158}$$

y, por inducción, esto implica:

$$f^{n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \tag{159}$$

Recordando la expresión del término complementario de error $T(x)$:

$$T(x) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

podemos reemplazar la enésima derivada de $\sin(x)$ en esta última expresión:

$$T(x) = \frac{\sin\left(\theta + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} \tag{160}$$

Dado que $\theta \in [x_0, x]$ (donde $x_0 = 0\ ; x = 0.5$) y la función $\sin(x)$ es creciente en ese intervalo, el peor caso (mayor número) de nuestro término de error sería cuando $\theta = 0.5$

Si queremos obtener la aproximación de $\sin(0.5)$ con precisión de 6 dígitos significativos exactos, debemos buscar un término $T(x)$ que sea del orden de magnitud de 10^{-7}. Para esto, iteraremos $T(x)$ en n para llegar a tal valor deseado:

$$T(x) = \frac{\sin(0.5 + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} \cdot (0.5 - 0)^{n+1} \tag{161}$$

Por practicidad, presentaremos los resultados de la iteración en una tabla:

n	$\lvert T(x)\rvert$
1	0.05992819
2	0.01828297
3	0.00124850
4	0.00022853
5	0.00001040
6	0.00000136
7	0.000000046
8	0.0000000047

Como se puede apreciar en la tabla, para el orden $n = 7$ ya alcanzamos un error tolerable dado que es del orden de magnitud 10^{-8}.

Finalmente, para validar que nuestra serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ alcance los 6 dígitos exactos de precisión respecto el resultado exacto de $\sin(0.5)$, veamos su resultado:

$$y = f(x) = \sin(x)$$
$$y^* = \cos(x)(x) - \frac{\sin(x)}{2}(x)^2 - \frac{\cos(x)}{3!}(x)^3 + \frac{\sin(x)}{4!}(x)^4 + \frac{\cos(x)}{5!}(x)^5 - \frac{\sin(x)}{6!}(x)^6 - \frac{\cos(x)}{7!}(x)^7$$

$$y^* = \cos(0)(0.5) - \frac{\sin(0)}{2}(0.5)^2 - \frac{\cos(0)}{3!}(0.5)^3 + \frac{\sin(0)}{4!}(0.5)^4 + \frac{\cos(0)}{5!}(0.5)^5 - \frac{\sin(0)}{6!}(0.5)^6 - \frac{\cos(0)}{7!}(0.5)^7$$

operando:

$$y^* = (0.5) - \frac{1}{3!}(0.5)^3 + \frac{1}{5!}(0.5)^5 - \frac{1}{7!}(0.5)^7$$

Podemos observar que en la expansión de Taylor de la función seno se cancelan los términos pares, ya que $\sin(0) = 0$.

$$\begin{aligned} y^* &= (0.5) - \frac{1}{3!}(0.5)^3 + \frac{1}{5!}(0.5)^5 - \frac{1}{7!}(0.5)^7 \\ y^* &= 0.5 - 0.020833 + 0.00026 - 0.000002 \\ y^* &= 0.479425 \end{aligned} \tag{162}$$

Mientras que la solución exacta es $\sin(0.5) = 0.\underbrace{479425}_{objetivo}5386042$

14 Ejercicio Nº14

Sea la función trascendente $e^{1.8}$ evaluada en $x = 1.8$, podemos calcular el número de términos del desarrollo en serie de Taylor (alrededor de cero $x_0 = 0$) necesarios para obtener $\exp(1.8)$ con 6 cifras significativas exactas.

Considerando que la enésima derivada de la función exponencial de tipo e^x es el mismo número de Euler elevado a la x, tenemos que su n expresión de la derivada es:

$$f^{n)}(x) = e^x \tag{163}$$

Recordando el término complementario de error de la serie de Taylor:

$$T(x) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

reemplazando en este la enésima derivada de e^x implica:

$$T(x) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} \tag{164}$$

Ya con nuestro polinomio para el error de la serie, podemos ahora evaluar en qué orden nos permitirá cumplir con un desarrollo de Taylor con 6 cifras significativas. Tengamos en cuenta que para obtener una precisión de 6 cifras necesitamos un error de orden de magnitud como mínimo de 10^{-7} en adelante.

Dado que $\theta \in [x_0, x]$ (donde $x_0 = 0$; $x = 1.8$) y la función $\exp(x)$ es creciente en ese intervalo, el peor caso (mayor número) de nuestro término de error sería cuando $\theta = 1.8 \quad \Longrightarrow \quad e^{1.8}$

Iteraremos la expresión:

$$T(x) = \frac{e^{1.8}}{(n+1)!}\,(1.8-0)^{n+1} \tag{165}$$

Visto en una tabla:

n	$\lvert T(x)\rvert$
1	9.80042889
2	5.88025733
3	2.64611580
4	0.95260168
5	0.28578050
6	0.07348641
7	0.01653444
8	0.00330688
9	0.00059523
10	0.00009740
11	0.00001461
12	0.00000202
13	0.00000026

Nótese que para poder obtener 6 cifras significativas necesitamos un término de error como el de orden $n = 13$, ya que el anterior, por ejemplo, corresponde a 5 cifras.

Por último, debemos validar nuestra serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
&y = f(x) = e^x \\
&y^* = e^{x_0}\cdot(x)^0 + e^{x_0}\cdot(x)^1 + \frac{e^{x_0}}{2}(x)^2 + \frac{e^{x_0}}{3!}(x)^3 + \frac{e^{x_0}}{4!}(x)^4 + \frac{e^{x_0}}{5!}(x)^5 + \frac{e^{x_0}}{6!}(x)^6 + \frac{e^{x_0}}{7!}(x)^7 + \frac{e^{x_0}}{8!}(x)^8 + \frac{e^{x_0}}{9!}(x)^9 \\
&\quad + \frac{e^{x_0}}{10!}(x)^{10} + \frac{e^{x_0}}{11!}(x)^{11} + \frac{e^{x_0}}{12!}(x)^{12} + \frac{e^{x_0}}{13!}(x)^{13}
\end{aligned}$$

dado que $e^0 = 1$ se nos simplifica el cálculo y la serie de Taylor adopta la forma $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$

$$\begin{aligned}
&y^* = (1.8)^0 + 1\cdot(1.8) + \frac{1}{2}(1.8)^2 + \frac{1}{3!}(1.8)^3 + \frac{1}{4!}(1.8)^4 + \frac{1}{5!}(1.8)^5 + \frac{1}{6!}(1.8)^6 + \frac{1}{7!}(1.8)^7 + \frac{1}{8!}(1.8)^8 + \frac{1}{9!}(1.8)^9 \\
&\quad + \frac{1}{10!}(1.8)^{10} + \frac{1}{11!}(1.8)^{11} + \frac{1}{12!}(1.8)^{12} + \frac{1}{13!}(1.8)^{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y^* = 1 + 1.8 + 1.62 + 0.972 + 0.4374 + 0.15746 + 0.04723 + 0.01214 + 0.00273 + 0.000547 + 0.000098 + 0.000016 \\
&\quad + 0.000002 + 0.00000033 \\
&y^* = 6.0496474156112
\end{aligned} \tag{166}$$

Mientras que la solución exacta es $\exp(1.8) = 6.\underbrace{049647}_{objetivo}464413$

Por otro lado, repitiendo el ejercicio para el logaritmo natural evaluado en $x = 1.2$, $\ln(1.2)$, consideremos de forma preliminar las primeras cuatro derivadas de $\ln(x)$

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 1 \cdot x^{-1} = \frac{1}{x} \\ f^{''}(x) &= -1 \cdot 1 \cdot x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2} \\ f^{'''}(x) &= -2 \cdot -1 \cdot x^{-2-1} = \frac{2}{x^3} \\ f^{iv}(x) &= -3 \cdot 2 \cdot x^{-3-1} = \frac{-6}{x^4} \end{aligned}$$

Como podemos observar, en nuestro patrón de derivación tenemos por un lado un término factorial correspondiente a la constante en el numerador $(n-1)!$, que a su vez será negativo o positivo dependiendo el orden de derivación, negativo en las derivadas pares y positivo en las impares, lo que implica agregar $(-1)^{n-1}$. Por otro lado, el término en el denominador es la variable x elevada al orden de derivación n.

Por inducción, entendemos que la enésima derivada para $\ln(x)$ $\forall\, n \geq 1$ es:

$$f^{n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \ln x = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{x^n} \tag{167}$$

Reemplazando (167) en el término de error de la serie de Taylor:

$$T(x) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

$$= \frac{\frac{(n-1+1)!(-1)^{n-1+1}}{\theta^{n+1}}}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

$$= \frac{(n)!(-1)^n}{\theta^{n+1}\,(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

dado que podemos operar algebraicamente la última expresión teniendo en cuenta que $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \frac{1}{(n+1)}$ implica:

$$T(x) = \frac{(-1)^n}{\theta^{n+1}\cdot(n+1)}\,(x - x_0)^{n+1} \tag{168}$$

Como podemos observar, ya que θ se encuentra elevada a la $n+1$ en el denominador, el número más alto para el polinomio $|T(x)|$ se da si $\theta = 1.2$. En el caso extremo contrario, si $\theta = 0$ implica $|T(x)| = \infty$

Iterando la expresión (168) evaluada para $\theta = 1.2$

n	$\lvert T(x)\rvert$
1	0.5
2	0.33333333
3	0.25
4	0.2
5	0.16666667
80	0.01234567
1000	0.000999
2000	0.000499

Ver por qué no converge: el planteo está bien, igual que en clase, pero el hecho de que sea una expansión de serie de taylor alrededor de $x_0 = 0$ hace que sea así de imposible. En cambio, si $x_0 = 1$, como el ejemplo de clase, esto converge en los primeros términos rápidamente...

15 Ejercicio Nº15

Sea un sistema con aritmética finita de precisión t=4 y truncamiento, si tenemos la serie de Taylor del desarrollo de $\ln(x)$ alrededor de $x_0 = 1$, podemos calcular cuántos términos tomaría la serie para alcanzar la máxima precision dado nuestro sistema.

En primer lugar, tengamos en cuenta que si nuestra precisión es de 4 dígitos y utilizamos truncamiento, como mínimo requerimos 5 dígitos de los cuales el último será redondeado al cuarto y así permitimos que los primeros 4 sean de máxima precisión:

$$x = .\underbrace{1234}5678 \quad \Longrightarrow \quad x = .1234$$

En segundo lugar, consideremos el término de error complementario de la serie de Taylor para la función logarítmica (168):

$$T(x) = \frac{(-1)^n}{\theta^{n+1} \cdot (n+1)} (x - x_0)^{n+1}$$

que puede ser simplificado como:

$$T(x) = \frac{(x-1)^{n+1}}{\theta^{n+1} \cdot (n+1)}$$

Si requerimos una precisión de 5 dígitos como mínimo, para así alcanzar la máxima precisión de 4 dígitos dado nuestro sistema como explicamos antes, implica que el error deberá ser del orden de magnitud 10^{-5}:

$$T(x) = \frac{(x-1)^{n+1}}{\theta^{n+1} \cdot (n+1)} \leq 10^{-5} \tag{169}$$

Uno podría intuir que despejando n de la ecuación (169) se obtiene el orden de términos requeridos para satisfacer la desigualdad, pero esto a priori no es posible de despejar.

16 Ejercicio Nº16

Si calculamos $1.0000001^{10000000}$ en diferentes sistemas, podremos notar diferencias:

1. Matlab:
2. Maple:
3. Calculadora científica personal (*Texas Instruments*): 2.718281692545
4. Calculadora científica de Windows: 2.7182816925449662711985502257778
5. Excel: 2.718281694

Como se puede observar, según se realice el cálculo en uno u otro sistema se obtendrán diferentes aproximaciones numéricas al cálculo. En el sistema de punto flotante que utiliza la calculadora de Windows hay una precisión "t" de 31 dígitos, lo que resulta ser mucho mayor, por ejemplo, a la precisión del sistema de Texas Instruments que es de 12 dígitos.

Appendices

Recordemos la expresión de la serie de Taylor como:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h \\ &\approx \left[\sum_{h=0}^{n} \frac{f^{h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h \right] \end{aligned}$$

que será una aproximación a la función objetivo. Sin embargo, podemos avanzar un paso más e igualar nuestro polinomio de Taylor a la función objetivo si y solo si agregamos el "término complementario" o término de error de la serie:

$$f(x) = \left[\sum_{h=0}^{n} \frac{f^{h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h \right] + T(x)$$

donde $T(x)$ es:

$$T(x) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

y donde θ estará comprendido en el intervalo $[x_0, x]$