Métodos Cuantitativos para Ciencias Sociales y Negocios

Prof. Sergio Pernice

Homework Nº5

Waldemar Diribarne, Lisandro Carril, Juan C. Junghanss

24/04/2021

---

1 Ejercicio Nº1

Tomar un problema de optimización con restricciones de economía y resolverlo con Python y analíticamente.

Imagine una empresa que produce un único bien (x), utilizando para ello dos insumos: trabajo (L) y capital (K). De modo que puede buscar la mezcla optima de ambos y así mejorar su rentabilidad. Entonces, el bien x enfrentará p (precio del bien), w (salario) y r (costo del capital) dados. El nivel de producción del bien lo simbolizamos con Q. Siendo la función de producción:

$$x = f(L, K) = L_x^{1/2} \cdot K_x^{1/2}$$

Primero deseamos minimizar el costo de producir un determinado nivel de producción Q.

$$Min(C) = w \cdot L + r \cdot K \quad s.a. \quad f(K, L) \geq \overline{x}$$

A partir de la construcción del Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = w \cdot L + r \cdot K + \lambda \cdot \left(\overline{x} - L_x^{1/2} \cdot K_x^{1/4}\right)$$

Derivando respecto las variables L, K, λ obtenemos las Condiciones de Primer Orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda \cdot \frac{L_x^{-1/2}}{2} \cdot K_x^{1/4} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w = \lambda \cdot \frac{K_x^{1/4}}{2 \cdot L_x^{1/2}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda \cdot \frac{K_x^{-3/4}}{4} \cdot L_x^{1/2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda \cdot \frac{L_x^{1/2}}{4 \cdot K_x^{3/4}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \overline{x} - L_x^{1/2} \cdot K_x^{1/4} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{x} = L_x^{1/2} \cdot K_x^{1/4} \tag{3}$$

Si operamos las primeras dos condiciones, al dividirlas y trabajarlas algebraicamente:

$$\frac{w}{r} = \frac{\lambda \cdot \frac{K_x^{1/4}}{2 \cdot \sqrt{L_x}}}{\lambda \cdot \frac{\sqrt{L_x}}{4 \cdot K_x^{3/4}}} = \frac{4 \cdot K_x^{1/4} \cdot K_x^{3/4}}{2 \cdot L_x^{1/2} \cdot L_x^{1/2}}$$

$$\boxed{\frac{w}{r} = 2 \cdot \frac{K_x}{L_x}} \qquad (4)$$

Esta última relación (4) es la condición de tangencia que implica que la Tasa Marginal de Sustitución Técnica de factores ($TMST_{K,L}$) es igual a la relación de precios relativos de factores w/r.

Para realizar la interpretación geométrica del problema de optimización, reescribamos las condiciones de primer orden (1, 2) como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} w = \lambda \cdot \frac{K_x^{1/4}}{2 \cdot L_x^{1/2}} \\ \\ r = \lambda \cdot \frac{L_x^{1/2}}{4 \cdot K_x^{3/4}} \end{cases}$$

Vectorialmente, este podemos expresarlo como:

$$\begin{bmatrix} w \\ \\ r \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \frac{K_x^{1/4}}{2 \cdot L_x^{1/2}} \\ \\ \frac{L_x^{1/2}}{4 \cdot K_x^{3/4}} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Que resulta ser la expresión vectorial del multiplicador de Lagrange y los vectores gradiente de la función objetivo y restricción. Recordemos:

$$\boxed{\nabla\vec{C} = \lambda \cdot \nabla\vec{X}}$$

Explicado de esta forma en la ecuación 5, dado que λ es un escalar, lo que nos indica es que en el punto óptimo los vectores gradiente de la función objetivo y de la restricción son proporcionales. Se puede interpretar que el gradiente de la función objetivo, en este caso del costo, es una combinación lineal del vector gradiente de la restricción (nuestra función de producción en el ejemplo), o sea, el óptimo restringido pertenecerá al espacio spaneado por los vectores gradientes.

La resolución en Python está adjunta en el archivo correspondiente.

2 Ejercicio Nº2

Encontrar la "Curva de Óptimos" del primer problema de la presentación de clase.

El problema planteado es:

$$\begin{aligned} \max_{f,c} \quad & U(f,c) = f^{\alpha} \cdot c^{\beta} \\ \text{s.a.} \quad & I(f,c) = i = f \cdot P_f + c \cdot P_c \end{aligned} \tag{6}$$

Si bien estudiamos su resolución de manera directa al reemplazar la restricción (despejada como c) dentro de la función de utilidad, dado que no es un método óptimo porque no generaliza bien para otros problemas, procederemos a resolverlo vía Multiplicadores de Lagrange.

A partir de la construcción del Lagrangiano del problema presentado en 6:

$$\mathcal{L}(f,c,\lambda) = f^{\alpha} \cdot c^{\beta} + \lambda \cdot (f \cdot P_f + c \cdot P_c)$$

Derivando respecto las variables f, c, λ obtenemos las Condiciones de Primer Orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot c^{\beta} + \lambda \cdot P_f = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \beta \cdot c^{\beta-1} \cdot f^{\alpha} + \lambda \cdot P_c = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f \cdot P_f + c \cdot P_c = i \tag{9}$$

Dividiendo las primeras dos condiciones y operando algebraicamente llegamos a la siguiente relación:

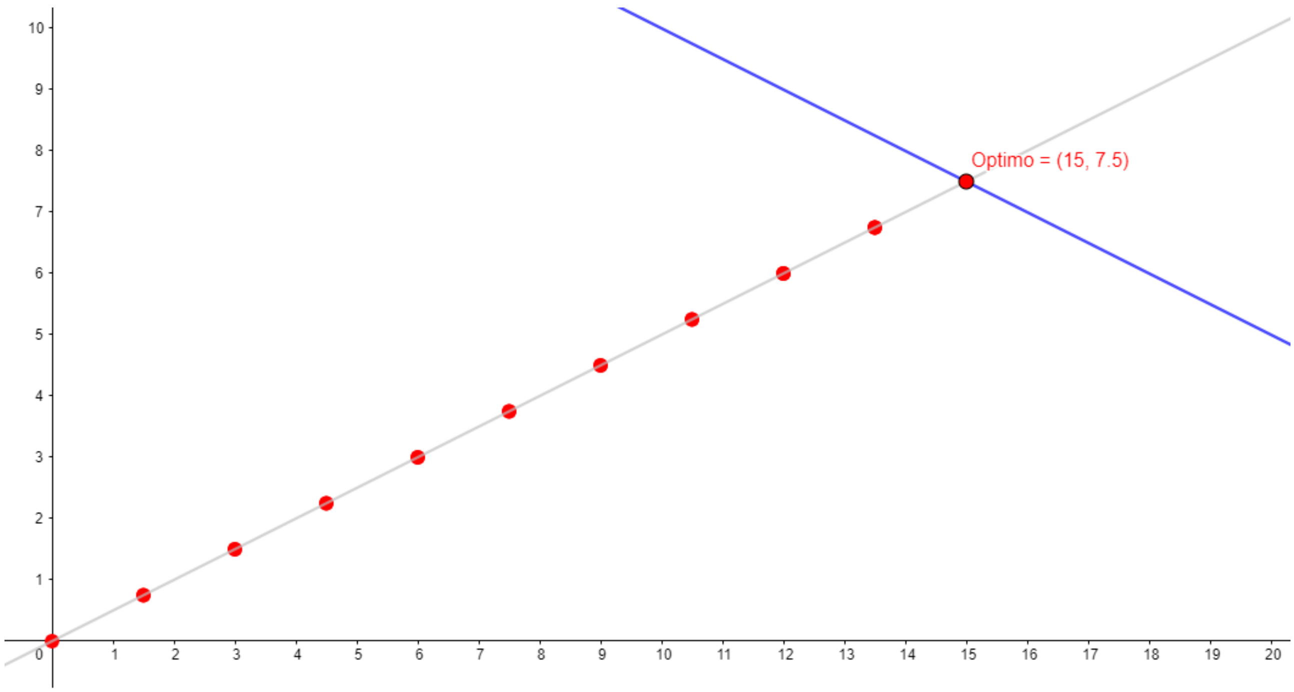
$$\frac{\alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot c^{\beta}}{\beta \cdot c^{\beta-1} \cdot f^{\alpha}} = \frac{P_f}{P_c} \tag{10}$$

Esta 10 no es más que la relación óptima de $TMS_{c,f} = P_f/P_c$, que significa que en el óptimo se iguala la Tasa Marginal de Sustitución de bienes del individuo al cociente de precios relativos. Recordemos que la tasa marginal de sustitución es el cociente de utilidades marginales de cada bien. En este punto se igualan las pendientes de la curva de indiferencia y restricción presupuestaria del agente representativo.

De esta ecuación podemos despejar la "Curva de Óptimos" (o bien llamado sendero de expansión en economía):

$$\boxed{c = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{P_f}{P_c} \cdot f} \tag{11}$$

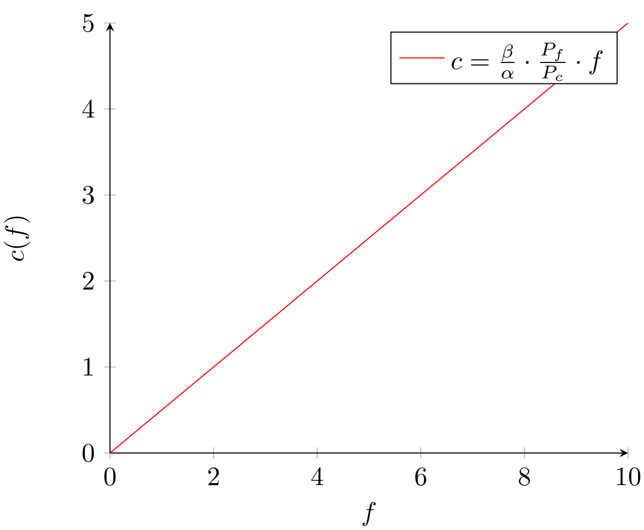
Como ilustración, podemos presentar una imágen de esta curva de óptimos graficada en GeoGebra a partir de los parámetros $P_f = 1; P_c = 2; \alpha = 0.5; \beta = 0.5$. Notar que hemos usado diferentes niveles de restricción presupuestaria (línea azul) para ver la expansión del consumo:



Notar que para el ejemplo de clase, la función sería como:

$$c = \frac{1}{2} \cdot f$$

De forma general, podemos realizar el gráfico en LaTeX con el paquete *tikz* y *pgfplots* para los mismos parámetros:



3 Ejercicio Nº3

Encontrar el multiplicador de Lagrange de la presentación de clase (p.13) e interpretarlo geométricamente.

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z} \quad & U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.} \quad & I(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0,4^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Nuestra función objetivo es una esfera de radio 1 y nuestra restricción es una esfera de radio $0,4$ centrada en $(x = 1; y = z = 0)$.

Recordemos nuestra perspectiva vectorial el problema de multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla\vec{U} = \lambda \cdot \nabla\vec{I}$$
$$\nabla \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \lambda \cdot \nabla \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix}$$

que en nuestro caso, los vectores gradiente serían:

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (x-1) \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

Así, hasta el momento, vemos que queda un sistema de 3 ecuaciones y 4 incognitas (x, y, z, λ). Si agregamos la cuarta condición de primer orden del problema $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0,16$ (es decir, la cuarta derivada primera del lagrangeano respecto a λ), podemos conformar un sistema de 4 ecuaciones por 4 incognitas:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \cdot 2(x-1) \\ 2y &= \lambda \cdot 2y \\ 2z &= \lambda \cdot 2z \\ 0,16 &= (x-1)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Como se trata de un sistema de ecuaciones relativamente simples en términos algebraicos, podemos obtener los resultados rápidamente.

$\lambda = 1$ que satisface las ecuaciones $2y = \lambda \cdot 2y$ y tambien $2z = \lambda \cdot 2z$ no puede ser un resultado, dado que de esta manera implicaría que la primer ecuacion $2x - 2x = -2$, lo que es absurdo. Por ende, se debe cumplir que $y = z = 0$ como parte de la solución.

Considerando $y = z = 0$, tenemos que $0,16 = (x-1)^2$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} &\sqrt{0,16} = (x-1) \\ &x - 1 = \pm 0,4 \quad \Longrightarrow \quad x = 1,4 \vee x = 0,6 \end{aligned}$$

A su vez, estos últimos resultados para x implican que:

$$\text{si} \quad x = 1,4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3,5 \tag{13}$$
$$\text{si} \quad x = 0,6 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1,5 \tag{14}$$

Tal como anticipamos en clase, la solución sería un valor de λ negativo.

4 Ejercicio Nº4

Encontrar el punto crítico restringido para el problema de optimización intertemporal generalizado a tres variables (períodos) de la presentación de clase (p.26). Comprobar a segundo orden si es un máximo o un mínimo.

Planteo del problema:

Variables:
Un individuo debe elegir como repartir su presupuesto B entre tres periodos de consumo:

$$X_1 = \text{consumo en el periodo 1}$$
$$X_2 = \text{consumo en el periodo 2}$$
$$X_3 = \text{consumo en el periodo 3}$$

Parámetros:
Cada X viene asociada a un precio, que es el costo de oportunidad de consumir un periodo antes de cobrar una tasa de interés r

$$P_1 = \tfrac{1}{(1+r)^0} = \text{precio de consumir en 1}$$
$$P_2 = \tfrac{1}{(1+r)^1} = \text{precio de consumir en 2}$$
$$P_3 = \tfrac{1}{(1+r)^2} = \text{precio de consumir en 3}$$

Al ser un precio cada vez menor conforme el periodo es más lejano, tiene incentivos a ahorrar, sin embargo, también hay que tener en cuenta el pago en utilidad que tiene por consumir en cada periodo:

$$\alpha = \text{Ponderador del periodo 1}$$
$$\beta = \text{Ponderador del periodo 2}$$
$$\gamma = \text{Ponderador del periodo 3}$$

Construcción del Lagrangeano:
El individuo debe maximizar la función de utilidad:

$$U = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$$

Respecto a la siguiente restricción presupuestaria en valor presente:

$$B = x_1 + \frac{x_2}{(1+r)} + \frac{x_3}{(1+r)^2}$$

Resultando en un lagrangeano de la forma:

$$\mathfrak{L} = x_1^\alpha \cdot x_2^\beta \cdot x_3^\gamma - \lambda[x_1 + \frac{x_2}{(1+r)} + \frac{x_3}{(1+r)^2} - B]$$

Derivación de las condiciones:
Se deriva el lagrangeano respecto a cada una de las variables:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta x_3^\gamma - \lambda = 0 \Rightarrow \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta x_3^\gamma = \lambda \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_2} = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma - \frac{\lambda}{(1+r)} = 0 \Rightarrow \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma = \frac{\lambda}{(1+r)} \Rightarrow (1+r)\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma = \lambda \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_2} = \gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1} - \frac{\lambda}{(1+r)^2} = 0 \Rightarrow \gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1} = \frac{\lambda}{(1+r)^2} \Rightarrow (1+r)^2 \gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1} = \lambda \tag{17}$$

$$x_1 + \frac{x_2}{(1+r)} + \frac{x_3}{(1+r)^2} - B = 0 \Rightarrow B = x_1 + \frac{x_2}{(1+r)} + \frac{x_3}{(1+r)^2} \tag{18}$$

Sistema de ecuaciones:
De las condiciones (1), (2) y (3) se puede establecer la siguiente igualdad trimembre:

$$\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} = (1+r)\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma} = (1+r)^2\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1}$$

Lo que se observa en cada miembro es que se multiplica la utilidad marginal del consumo en el periodo X_i por la inversa del precio de consumir en ese periodo P_i y se igualan todos entre sí, i.e., la utilidad por unidad de dinero gastada en cada uno de los periodos debe igualarse para llegar al óptimo.

Para hacerla manejable, desdoblaremos en tres igualdades de cada miembro con los otros dos, donde nos quedará un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\text{I)} &\quad \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} = (1+r)\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma}\\
\text{II)} &\quad \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} = (1+r)^2\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1}\\
\text{III)} &\quad (1+r)\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma} = (1+r)^2\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1}
\end{aligned}$$

Resolución del sistema:
Despejamos X_1 de la ecuación (I):

$$\begin{aligned}
\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} &= (1+r)\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma}\\
\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} &= (1+r)\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}\\
\frac{x_1^{\alpha-1}}{x_1^{\alpha}} &= (1+r)\frac{\beta}{\alpha}\frac{x_2^{\beta-1}}{x_2^{\beta}}\\
x_1^{-1} &= (1+r)\frac{\beta}{\alpha}x_2^{-1}\\
x_1 &= \frac{1}{(1+r)}\frac{\alpha}{\beta}x_2
\end{aligned}$$

Queda X_1 sólo en función de X_2.

Despejamos X_2 de la ecuación (III):

$$\begin{aligned}
(1+r)\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma} &= (1+r)^2\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1}\\
(1+r)\beta x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma} &= (1+r)^2\gamma x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1}\\
\beta x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma} &= (1+r)\gamma x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1}\\
\beta x_2^{\beta-1} &= (1+r)\gamma x_2^{\beta}x_3^{-1}\\
\frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{(1+r)}x_3 &= \frac{x_2^{\beta}}{x_2^{\beta-1}}\\
\frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{(1+r)}x_3 &= \frac{x_2^{\beta}}{x_2^{\beta-1}} = x_2^{\beta-\beta+1} = x_2\\
x_2 &= \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{(1+r)}x_3
\end{aligned}$$

Queda X_2 sólo en función de X_3.

Reemplazando x_2 por $\frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{(1+r)}x_3$ en la ecuación $x_1 = \frac{1}{(1+r)}\frac{\alpha}{\beta}x_2$, ponemos X_1 sólo en función de X_3 también:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{(1+r)}\frac{\alpha}{\beta}x_2 \\
x_1 &= \frac{1}{(1+r)}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{(1+r)}x_3 \\
x_1 &= \frac{1}{(1+r)^2}\frac{\alpha}{\gamma}x_3
\end{aligned}$$

Reemplazamos tanto $x_1 = \frac{1}{(1+r)^2}\frac{\alpha}{\gamma}x_3$ en la ecuación (II):

$$\begin{aligned}
\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} &= (1+r)^2\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1} \\
\alpha x_1^{\alpha-1}x_3^{\gamma} &= (1+r)^2\gamma x_1^{\alpha}x_3^{\gamma-1} \\
\frac{\alpha}{\gamma} &= (1+r)^2 x_1^{-1}x_3^{-1} \\
\frac{\alpha^2}{\gamma^2} &= (1+r)^4 x_3^{-2} \\
x_3^2 &= (1+r)^4\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \\
x_3 &= (1+r)^2\frac{\gamma}{\alpha}
\end{aligned}$$

Habiendo obtenido ese valor, que sólo depende de parámetros dados, obtuvimos el consumo en el periodo 3, ahora se reemplaza en las ecuaciones de X_1 y X_2 para saber los suyos también.

Consumo en el periodo 2:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{(1+r)}x_3 \\
x_2 &= \frac{\beta}{\gamma}\frac{(1+r)^2}{(1+r)}\frac{\gamma}{\alpha} \\
x_2 &= \frac{\beta}{\alpha}(1+r)^2
\end{aligned}$$

Consumo en el periodo 1:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{(1+r)}\frac{\alpha}{\beta}x_2 \\
x_1 &= \frac{1}{(1+r)}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}(1+r)^2 \\
x_1 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{(1+r)^2}\frac{\alpha}{\gamma}x_3 \\
x_1 &= \frac{1}{(1+r)^2}\frac{\alpha}{\gamma}(1+r)^2\frac{\gamma}{\alpha} \\
x_1 &= 1
\end{aligned}$$