Lecture 9: TP3 - Intertemporal Labor Supply Exercise

Economía Laboral

Junghanss, Juan Cruz

Universidad del CEMA

2nd Semester 2022

Contents

Today's lecture content:

- TP Nº3 - Modelo Dinámico de Oferta de Trabajo

Ejercicio 3: Considere el siguiente modelo dinámico de oferta de trabajo. Un individuo vive desde el período $t = 0$ hasta el período $t = T$ y sus preferencias están descriptas por la siguiente función de utilidad:

$$U = \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t), h(t)) dt$$

en donde

$$u(c(t), h(t)) = \frac{c(t)^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m\frac{h(t)^{1+\theta}}{1+\theta}$$

y $c(t)$ es el consumo en el período t, $h(t)$ son las horas de trabajo en el período t y σ, θ y m son parámetros de la función de utilidad del individuo.

Modelo Dinámico de Oferta de Trabajo

Por fines didácticos, resolveremos el problema en tiempo discreto, asumiendo dos períodos, i.e. $T = 2$. De este modo, la función de utilidad intertemporal del trabajador representativo es

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot \left(\frac{c_t^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m \cdot \frac{h_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right) \tag{1}$$

donde $\beta \equiv \frac{1}{1+r}$.

Lagrangiano y Restricción Presupuestaria

En el caso dinámico, la restricción presupuestaria debe presentarse en valor presente:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t \cdot h_t}{(1+r)^t} \tag{2}$$

En otras palabras, el valor presente del consumo debe ser igual al valor presente del ingreso.

Lagrangiano y Restricción Presupuestaria

En el caso dinámico, la restricción presupuestaria debe presentarse en valor presente:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t \cdot h_t}{(1+r)^t} \tag{2}$$

En otras palabras, el valor presente del consumo debe ser igual al valor presente del ingreso. Por otro lado, considerando el problema de optimización, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot \left(\frac{c_t^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m \cdot \frac{h_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right) + \lambda \cdot \left(\sum_{t=0}^{T} \frac{w_t \cdot h_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \right) \tag{3}$$

Anexo: Valor Presente

Reveamos algunos conceptos para mejorar la intuición matemática del caso dinámico:

- **Time Value of Money**: el valor tiempo del dinero vincula el concepto de que una suma de dinero M vale más **ahora** que lo que valdría en el futuro, debido a su costo de oportunidad.

Anexo: Valor Presente

Reveamos algunos conceptos para mejorar la intuición matemática del caso dinámico:

- **Time Value of Money**: el valor tiempo del dinero vincula el concepto de que una suma de dinero M vale más **ahora** que lo que valdría en el futuro, debido a su costo de oportunidad.
- **Present Value**: el valor presente de una suma de dinero es el monto de dinero M de un período futuro descontado por una tasa (su costo de oportunidad por el Time Value of Money), es decir, es el monto futuro actualizado a su valor equivalente al día de hoy.

Anexo: Valor Presente

Reveamos algunos conceptos para mejorar la intuición matemática del caso dinámico:

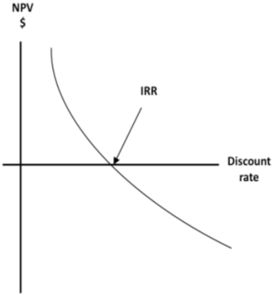
- **Time Value of Money**: el valor tiempo del dinero vincula el concepto de que una suma de dinero M vale más **ahora** que lo que valdría en el futuro, debido a su costo de oportunidad.
- **Present Value**: el valor presente de una suma de dinero es el monto de dinero M de un período futuro descontado por una tasa (su costo de oportunidad por el Time Value of Money), es decir, es el monto futuro actualizado a su valor equivalente al día de hoy.
- **Net Present Value**: es la diferencia entre el valor presente de n ingresos y el valor presente de n egresos, por eso es "neto".

Anexo: Valor Presente

Dado que el valor presente se calcula entonces descontado los montos por una tasa (capitalizada por los períodos correspondientes):

$$PV = \sum_{i=0}^{n} \frac{M_i}{(1+r)^i}$$

Podemos entender que si los montos se dividen por un número más grande (una tasa mayor) serán menores. De aquí la relación decreciente entre el PV y la tasa de descuento:



Anexo: Valor Presente

Nótese en el gráfico que habrá un valor determinado de la tasa de descuento que hará que el NPV (que es un polinomio) valga cero. En otras palabras, el present value que es función de la tasa (i.e. $y(x) = NPV(r)$) tiene una raíz.

Recordemos del Teorema Fundamental del Álgebra: "un polinomio de grado n tiene que tener n raices."

Anexo: Valor Presente

Volviendo a nuestra restricción presupuestaria, pero teniendo en cuenta la definición de NPV, notemos lo siguiente:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t \cdot h_t}{(1+r)^t}$$
$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^{T} \frac{w_t \cdot h_t}{(1+r)^t} = 0$$

Básicamente, estamos igualando el polinomio (la budget constraint) a cero, que despejando r implicaría hallar la raíz de dicho polinomio.

Para despejar r (también llamada TIR) necesitan un método numérico. Si les interesa, pueden buscar los métodos de "Newton", "Iteración de Punto Fijo" o algunos más básicos como "Bisección".

Anexo: Valor Presente

Adicionalmente:

- Existe el principio de que “$1 sin riesgo vale más que $1 con riesgo”. De aquí que si tuvieramos $1 a cobrar en el futuro, si fuera seguro se descuenta a una tasa menor a que si fuera riesgoso (tasa de descuento mayor).

Anexo: Valor Presente

Adicionalmente:

- Existe el principio de que "$1 sin riesgo vale más que $1 con riesgo". De aquí que si tuvieramos $1 a cobrar en el futuro, si fuera seguro se descuenta a una tasa menor a que si fuera riesgoso (tasa de descuento mayor).

Por eso la tasa de descuento no es solamente el interés que percibiría el dinero, sino también posee parte de una prima (recompensa) de riesgo. En economía nos enfocamos principalmente en las preferencias del individuo:

- Si es ansioso y valora más el presente, su tasa de descuento será mayor porque su "precio" por esperar es muy alto.
- Si es paciente y valora relativamente más el futuro, su tasa de descuento será menor porque su "precio" por esperar es más bajo.

Condiciones de Primer Orden

Volviendo al problema:

En este caso, para las FOCs debemos calcular las derivadas parciales de cada variable en cada período. Ergo, tendremos 5 condiciones (para $c_t, c_{t+1}, h_t, h_{t+1}, \lambda$).

Consideraremos $t \in [0, 1]$ para los dos períodos de análisis discreto.

Condiciones de Primer Orden: consumo

Según desarrollaremos en el pizarrón;
Consumo en período $t = 0$:

$$[c_t] : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0$$

$$\lambda = c_t^{\sigma} \tag{4}$$

Condiciones de Primer Orden: consumo

Según desarrollaremos en el pizarrón;
Consumo en período $t = 0$:

$$[c_t] : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0$$

$$\lambda = c_t^{\sigma} \tag{4}$$

Consumo en período futuro $t = 1$:

$$[c_{t+1}] : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = 0$$

$$\lambda = \beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1 + r) \tag{5}$$

Condiciones de Primer Orden: trabajo

Trabajo en período $t = 0$:

$$[h_t]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0$$

$$\lambda = \frac{m \cdot h_t^{\theta}}{w_t} \tag{6}$$

Condiciones de Primer Orden: trabajo

Trabajo en período $t = 0$:

$$[h_t]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0$$

$$\lambda = \frac{m \cdot h_t^{\theta}}{w_t} \tag{6}$$

Trabajo en período futuro $t = 1$:

$$[h_{t+1}]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}} = 0$$

$$\lambda = \frac{\beta \cdot m \cdot h_{t+1}^{\theta} \cdot (1 + r)}{w_{t+1}} \tag{7}$$

Condiciones de Primer Orden: lambda

Finalmente, según la restricción presupuestaria intertemporal:

$$[\lambda] : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{(1+r)} = w_t \cdot h_t + \frac{w_{t+1} \cdot h_{t+1}}{(1+r)} \tag{8}$$

Time Value of Money: recuerden la intuición del consumo presente y el valor presente del consumo futuro (y lo mismo para el lado de los ingresos). Se descuenta todo lo que sea futuro para trabajar con valores actuales.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

3(d) - Asumiendo que $r = \rho$, derive la oferta de trabajo del individuo. Es decir, la función que nos da las horas de trabajo en el período t como función del salario en el período t y los salarios en todos los otros períodos a lo largo del ciclo de vida del individuo.

Tenemos que, de alguna forma, condensar todas las condiciones de primer orden y despejar una demanda de un bien (en este caso c), tanto en t como $t + 1$.

Una vez realizado esto, podremos reinsertar dicha demanda en las ecuaciones de tangencia para obtener la oferta laboral individual.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Una manera simple sería combinar, a partir de los λ, las FOCs de c_t, c_{t+1}, h_t y h_{t+1} para luego insertarlas en la FOC de la restricción presupuestaria.

Igualamos (4) y (5):

$$c_t^{\sigma} = \beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1 + r)$$

$$c_t = \left(\beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1 + r)\right)^{1/\sigma} \tag{9}$$

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Igualamos (5) a (6):

$$\beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1+r) = \frac{m \cdot h_t^{\theta}}{w_t}$$

$$h_t = \left(\beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1+r) \cdot w_t \cdot \frac{1}{m}\right)^{1/\theta} \tag{10}$$

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Igualamos (5) a (6):

$$\beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1+r) = \frac{m \cdot h_t^{\theta}}{w_t}$$

$$h_t = \left(\beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1+r) \cdot w_t \cdot \frac{1}{m}\right)^{1/\theta} \tag{10}$$

Igualamos (5) a (7)

$$\beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1+r) = \frac{\beta \cdot m \cdot h_{t+1}^{\theta} \cdot (1+r)}{w_{t+1}}$$

$$h_{t+1} = \left(\frac{w_{t+1}}{m} \cdot c_{t+1}^{\sigma}\right)^{1/\theta} \tag{11}$$

Y ahora, introducimos las 3 expresiones obtenidas en la restricción presupuestaria. Sería (9), (10) y (11) dentro de la ecuación (8).

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{(1+r)} = w_t \cdot h_t + \frac{w_{t+1} \cdot h_{t+1}}{(1+r)}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\left(\beta c_{t+1}^{\sigma}(1+r)\right)^{1/\sigma} + \frac{1}{(1+r)} c_{t+1} =& w_t \left[\left(\beta c_{t+1}^{\sigma}(1+r) w_t \frac{1}{m}\right)^{1/\theta}\right] \\ &+ \frac{w_{t+1}}{(1+r)} \left[\left(\frac{w_{t+1}}{m} c_{t+1}^{\sigma}\right)^{1/\theta}\right]\end{aligned}$$

Operando algebraicamente obtenemos:

$$c^*_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r) = \left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{1/\sigma} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t\left[\beta(1+r)w_t\frac{1}{m}\right]^{1/\theta} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)}\left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{1/\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{\sigma-\theta}} \tag{12}$$

que sería el nivel óptimo de consumo en el período futuro $t+1$. Este lo debemos reemplazar en la expresión que obtuvimos de c_t con las FOCs (ecuación (9)) para obtener su par en el período corriente.

Reemplazando (12) en (9):

$$c_t^*(w_t, w_{t+1}, r) = \left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{1/\sigma} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t\left[\beta(1+r)w_t\frac{1}{m}\right]^{1/\theta} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)}\left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{1/\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{\sigma-\theta}} \left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} \tag{13}$$

Esta es la función de demanda de consumo en el período t, esto es, el nivel óptimo de consumo en el período actual.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Finalmente, también con la expresión (12) de c^*_{t+1} podríamos obtener la oferta laboral individual. Si la reemplazamos en (10):

$$h^*_t(w_t, w_{t+1}, r) = \left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t\left[\beta(1+r)w_t\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)}\left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} \left(\beta(1+r)\frac{w_t}{m}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{14}$$

Esta es la función de oferta de trabajo del individuo en el período t, como función del salario corriente y el del período $t+1$, abarcando así, dado que hemos tomado dos períodos, los ingresos laborales de todo el horizonte temporal.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Reemplazamos (12) en (11):

$$h^*_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r) = \left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t\left[\beta(1+r)w_t\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)}\left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} \left(\frac{w_{t+1}}{m}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{15}$$

Y esta es la función de oferta de trabajo del individuo en el período $t+1$.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Sabiendo que $r = \rho \implies 1 + r = 1 + \rho$ y por ende, $\beta = \frac{1}{(1+\rho)}$:

$$h_t^*(w_t, w_{t+1}, r)\Big|_{\rho=r} = \left\{ \frac{1 + \frac{1}{(1+r)}}{w_t^{\frac{1+\theta}{\theta}} + w_{t+1}^{\frac{1+\theta}{\theta}} \frac{1}{(1+r)}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} m^{\frac{1}{\sigma-\theta}} (w_t)^{1/\theta} \qquad (16)$$

Esta es la oferta de trabajo del individuo representativo si su tasa subjetiva de descuento intertemporal es igual a la tasa de interés, $\rho = r$.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

La idea de la hipótesis del ingreso permanente es que el consumo depende de una medida del ingreso de largo plazo y no solamente del ingreso corriente. Múltiples definiciones del ingreso permanente son posibles. Generalmente se define el ingreso permanente como el hipotético flujo constante de ingreso que tiene el mismo valor presente que la riqueza real del individuo.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

De acuerdo a d), la oferta de trabajo y el consumo corriente dependen de un componente permanente del ingreso del trabajador y del salario corriente. El multiplicador de Lagrange, λ, es como el ingreso permanente en la teoría de la función consumo. Sin embargo, λ puede expresarse como una función del ingreso permanente o de la riqueza únicamente en el caso en que los salarios son constante a lo largo del ciclo de vida. En general, dado un ingreso permanente, el trabajador necesitará información sobre los salarios futuros para determinar su nivel de consumo y oferta de trabajo en cada período. Toda esta información afectará la decisión del trabajador únicamente a través de λ. Es decir que λ resume toda la información acerca de los salarios a lo largo del ciclo de vida que el trabajador requiere para tomar su decisión acerca de niveles de consumo y oferta de trabajo.

e) Describa el comportamiento de la oferta de trabajo en términos del salario corriente, w_t, y de alguna medida del salario permanente, w^*.

Teniendo en cuenta la reflexión anterior acerca de la importancia del λ, podemos calcular su valor óptimo al insertar la oferta laboral h^*_{t+1} (15) dentro de la FOC de la restricción (7):
Sustitumos (15) en (7):

$$\lambda = \left\{ \frac{\Big[\beta(1+r)\Big]^{1/\sigma} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t \Big[\beta(1+r) w_t \frac{1}{m}\Big]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)} \Big[\frac{w_{t+1}}{m}\Big]^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma\theta}{\theta-\sigma}} \left(\frac{w_{t+1}}{m}\right) \frac{\beta m(1+r)}{w_{t+1}}$$

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Despejando:

$$\lambda^* = \left[\left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t \left[\beta(1+r) w_t \frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)} \left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} \Big(\beta(1+r)\Big)^{\frac{1}{\theta}} \right]^{\theta} \quad (17)$$

donde $\lambda^*(w_t, w_{t+1}, r)$ corresponde a lo mencionado anteriormente, ya que resume toda la información sobre los salarios a lo largo del ciclo de vida del trabajador. Ahora bien, para los fines de este ejercicio (e) comparemos esta expresión con (14) la oferta laboral corriente h_t^*

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

La oferta laboral corriente $h_t^*(w_t, w_{t+1}, r)$ (14) era:

$$h_t^* = \left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t \left[\beta(1+r) w_t \frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)} \left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} \left(\beta(1+r)\frac{w_t}{m}\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (14)$$

Y $\lambda^*(w_t, w_{t+1}, r)$ es:

$$\lambda^* = \left[\left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t \left[\beta(1+r) w_t \frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)} \left[\frac{w_{t+1}}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} \left(\beta(1+r)\right)^{\frac{1}{\theta}} \right]^{\theta}$$

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Dada su equivalencia, salvo por el término $(w_t/m)^{1/\theta}$, quiere decir que podemos expresar la oferta laboral $h_t^*(w_t, w_{t+1}, r)$ (14) como:

$$h_t^* = \left(\lambda^*\right)^{1/\theta} \cdot \left(\frac{w_t}{m}\right)^{1/\theta}$$

$$h_t^*(w_t, w_{t+1}, r) = \left[(\lambda^*(w_t, w_{t+1}, r) \cdot \frac{w_t}{m}\right]^{1/\theta} \tag{18}$$

Como vemos, la oferta de trabajo depende tanto del componente permanente del ingreso, que está dado por λ^*, como por el salario corriente, w_t.

Oferta Laboral Individual (presente y futura)

Conclusiones:

- λ depende negativamente de w_t y w_{t+1}, es decir, del salario/ingreso permanente. Y como por (18) sabemos que la cantidad ofertada de trabajo depende positivamente de λ, quiere decir que ante aumentos del ingreso permanente ($\uparrow \{w_t, w_{t+1}\} \Rightarrow \downarrow \lambda$), cae la cantidad ofertada de servicios laborales en el período t. Esto se debe al efecto ingreso negativo sobre la cantidad ofertada de trabajo.
- h_t depende positivamente del salario corriente, w_t: este es el efecto sustitución positivo que se genera sobre la cantidad ofertada de trabajo.

Impuesto Transitorio al Ingreso

f) Analice el efecto de un aumento transitorio en el impuesto ingreso (i.e. en el período corriente únicamente) sobre la oferta de trabajo corriente y en los períodos restantes.

Replanteamos el problema de optimización:

$$\max \quad U = \left(\frac{c_t^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m\frac{h_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right) + \beta \cdot \left(\frac{c_{t+1}^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m\frac{h_{t+1}^{1+\theta}}{1+\theta} \right)$$

$$\text{s.a.} \quad c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} = (1-\tau_T)w_t h_t + \frac{w_{t+1} \cdot h_{t+1}}{1+r}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso

De manera que el Lagrangiano quedaría como:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{c_t^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m\frac{h_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right) + \beta \left(\frac{c_{t+1}^{1+\sigma}}{1+\sigma} - m\frac{h_{t+1}^{1+\theta}}{1+\theta} \right) + \lambda \left[(1-\tau_T) w_t h_t + \frac{w_{t+1} h_{t+1}}{1+r} - c_t - \frac{c_{t+1}}{1+r} \right]$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: FOCs

Las FOCs serían simétricas al caso sin impuestos salvo excepciones:
Consumo en período $t = 0$:

$$[c_t]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0$$

$$\lambda = c_t^{\sigma} \tag{19}$$

Consumo en período futuro $t = 1$:

$$[c_{t+1}]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = 0$$

$$\lambda = \beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1 + r) \tag{20}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: FOCs

Trabajo en período $t = 0$:

$$[h_t]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0$$

$$\lambda = \frac{m \cdot h_t^{\theta}}{(1 - \tau_T) w_t} \tag{21}$$

Trabajo en período futuro $t = 1$:

$$[h_{t+1}]: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{t+1}} = 0$$

$$\lambda = \frac{\beta \cdot m \cdot h_{t+1}^{\theta} \cdot (1 + r)}{w_{t+1}} \tag{22}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: FOCs

Finalmente, según la restricción presupuestaria intertemporal:

$$[\lambda] : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{(1+r)} = (1 - \tau_T) w_t h_t + \frac{w_{t+1} \cdot h_{t+1}}{(1+r)} \tag{23}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Óptimo

Igualamos (19) a (20):

$$c_t^{\sigma} = \beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1 + r)$$

si $\beta = 1/(1 + r)$ entonces

$$c_t = c_{t+1} \tag{24}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Óptimo

Igualamos (19) a (20):

$$c_t^{\sigma} = \beta \cdot c_{t+1}^{\sigma} \cdot (1 + r)$$

si $\beta = 1/(1 + r)$ entonces

$$c_t = c_{t+1} \tag{24}$$

Igualamos (20) a (21):

$$\frac{mh_t^{\theta}}{(1 - \tau_T)w_t} = c_{t+1}^{\sigma}$$

$$c_{t+1} = \left[\frac{mh_t^{\theta}}{(1 - \tau_T)w_t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \tag{25}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Óptimo

Igualamos (22) a (20):

$$c_{t+1}^{\sigma} = \frac{\beta \cdot m \cdot h_{t+1}^{\theta}(1+r)}{w_{t+1}}$$

si $\beta = 1/\left(1+r\right)$ entonces:

$$c_{t+1} = \left[\frac{h_{t+1}^{\theta} m}{w_{t+1}}\right]^{1/\sigma} \tag{26}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Óptimo

Igualamos (26) a (25):

$$\left[\frac{m \cdot h_t^{\theta}}{(1-\tau_T) \cdot w_t}\right]^{1/\sigma} = \left[\frac{h_{t+1}^{\theta} \cdot m}{w_{t+1}}\right]^{1/\sigma}$$

$$h_t = \left[\frac{h_{t+1}^{\theta} \cdot (1-\tau_T) \cdot w_t}{w_{t+1}}\right]^{1/\theta} \tag{27}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Óptimo

Igualamos (26) a (25):

$$\left[\frac{m \cdot h_t^{\theta}}{(1-\tau_T) \cdot w_t}\right]^{1/\sigma} = \left[\frac{h_{t+1}^{\theta} \cdot m}{w_{t+1}}\right]^{1/\sigma}$$

$$h_t = \left[\frac{h_{t+1}^{\theta} \cdot (1-\tau_T) \cdot w_t}{w_{t+1}}\right]^{1/\theta} \tag{27}$$

Reemplazamos (26) en (24):

$$c_t = \left[\frac{h_{t+1}^{\theta} \cdot m}{w_{t+1}}\right]^{1/\sigma} \tag{28}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Óptimo

Y si introducimos las ecuaciones c_{t+1} (26), h_t (27) y c_t (28) dentro de la FOC de restricción presupuestaria (23):

$$\left[\frac{h_{t+1}^{\theta} m}{w_{t+1}}\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{1+r}\left[\frac{h_{t+1}^{\theta} m}{w_{t+1}}\right]^{\frac{1}{\sigma}} = (1-\tau_T) w_t \left(\left[\frac{h_{t+1}^{\theta}(1-\tau_T) w_t}{w_{t+1}}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) + \frac{w_{t+1} h_{t+1}}{1+r}$$

Impuesto Transitorio al Ingreso: Oferta Laboral

Según el desarrollo en el pizarrón para llegar a h^*_{t+1}, obtenemos:

$$h_{t+1} = \left[\frac{1 + \frac{1}{1+r}}{(1-\tau_T)^{1+\frac{1}{\theta}} w_t \left(w_t\right)^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{1+r} \left(w_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} m^{\frac{1}{\sigma-\theta}} \left(w_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (29)$$

Así, hemos llegado a $h_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r, \tau_T)$, la oferta de trabajo del individuo representativo en el período $t+1$ ante la introducción del impuesto (transitorio) al ingreso laboral del período t, τ_T.

Sería conveniente reexpresar la ecuación (15) de la oferta de trabajo en el período $t+1$ sin impuestos $h_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r)$:

$$h^*_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r) = \left\{ \frac{\left[\beta(1+r)\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{(1+r)}}{w_t\left[\beta(1+r)w_t\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)}\left(\frac{w_{t+1}}{m}\right)^{\frac{1}{\theta}}} \right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} \left(\frac{w_{t+1}}{m}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{15}$$

Operando algebraicamente llegamos a (15'):

$$h^*_{t+1}(w_t, w_{t+1}, r) = \left[\frac{1 + \frac{1}{(1+r)}}{w_t\left(w_t\right)^{1/\theta} + \frac{w_{t+1}}{(1+r)}\left(w_{t+1}\right)^{1/\theta}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} m^{\frac{1}{\sigma-\theta}} \left(w_{t+1}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{15'}$$

Conclusión Nº1: si comparamos (29) con (15'), vemos que la única diferencia es que en la oferta de trabajo CON impuestos aparece en el denominador el término "$(1-\tau)^{1+\frac{1}{\theta}}$".

La conclusión dependerá de los parámetros de la función:

- Si asumimos $\sigma > \theta$ y como $\tau_T > 0 \Longrightarrow (1-\tau_T) < 1$, entonces, esto nos quiere decir que el trabajador, ante la introducción del impuesto transitorio en el período t, aumentará su oferta laboral en el período $t+1$ (*efecto ingreso predominante*).
- Si asumimos $\theta > \sigma$, como $\tau_T > 0 \Longrightarrow (1-\tau_T) < 1$, entonces, esto nos quiere decir que el trabajador, ante la introducción del impuesto transitorio en el período t, contraerá su oferta laboral en el período $t+1$ (*efecto sustitución predominante*).

Impuesto Transitorio al Ingreso: Oferta Laboral

Nos resta comparar las ofertas laborales individuales h_t, es decir, en el período corriente t.

Primero, debemos despejar h_t con la introducción del impuesto, ya que aún no la habíamos calculado. Tan solo debemos reemplazar h^*_{t+1} (29) en h_t (27).

$$h_t = \left[\frac{h^{\theta}_{t+1} \cdot (1-\tau_T) \cdot w_t}{w_{t+1}}\right]^{1/\theta} \tag{27}$$

Introduciendo nos queda:

$$h^*_t = \left[\frac{1+\frac{1}{1+r}}{(1-\tau_T)^{1+\frac{1}{\theta}} w_t^{\frac{1+\theta}{\theta}} + \frac{1}{1+r} w_{t+1}^{\frac{1+\theta}{\theta}}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-\theta}} m^{\frac{1}{\sigma-\theta}} (1-\tau_T)^{\frac{1}{\theta}} (w_t)^{\frac{1}{\theta}} \tag{30}$$

(30) es nuestra oferta laboral con impuestos en el período actual $h^*_t(w_t, w_{t+1}, r, \tau_T)$.

Impuesto Transitorio al Ingreso: Oferta Laboral

Conclusión Nº2: si comparamos (30) con h_t (17), que era la oferta sin impuesto, vemos dos diferencias:

1. Término "$(1-\tau_T)^{1+\frac{1}{\theta}}$" en el denominador.
2. Término "$(1-\tau_T)^{1/\theta}$" en el numerador.

La conclusión sobre el efecto en la oferta de trabajo será nuevamente ambigua, dependerá de los valores de los parámetros.

Impuesto Transitorio al Ingreso: Oferta Laboral

Sin embargo, prestemos atención a lo siguiente:

- El término "$(1-\tau_T)^{1+\frac{1}{\theta}}$", dado que $\tau_T > 0$ y $\theta > 0$, es estrictamente menor 1: $(1-\tau_T)^{1+\frac{1}{\theta}} < 1 \quad \forall\, \tau_T,\ \theta$. De este modo, este término, dado que está en el denominador, tiende a que el trabajador aumente su oferta de trabajo ante la introducción del impuesto transitorio: denota un *efecto ingreso*.
- Por otro lado, el término "$(1-\tau_T)^{1/\theta}$" en el numerador denota un *efecto sustitución*. Dado que $\tau_T > 0$ y como está multiplicando a "$w_t^{1/\theta}$", entonces sabemos que su impacto sobre la oferta laboral es negativo.

Impuesto Transitorio al Ingreso: Oferta Laboral

En definitiva, hay dos impactos del impuesto transitorio, τ_T, sobre la oferta individual de trabajo: uno positivo por efecto ingreso, "$(1-\tau_T)^{1+\frac{1}{\theta}}$", y otro negativo por efecto sustitución, "$(1-\tau_T)^{1/\theta}$". Es decir que no está a priori definido si la cantidad ofertada de horas de trabajo para cada nivel de salario caerá ($ES > EI$) o aumentará ($EI > ES$).

Ejercicio 3(g)-(h)

(g) Analice el efecto de un aumento permanente en el impuesto al ingreso (i.e. en todos los períodos) sobre la oferta de trabajo corriente y en los períodos restantes.

(h) Compare sus resultados en f) con los de g).

Presentar resolución en la entrega del TP Nº3.

Oferta de trabajo à la Frisch

(i) Calcule la oferta de trabajo de Frisch (i.e. λ constante) en logaritmos, $\ln h_t$**.**

Hagamos una breve reseña de la oferta laboral de Frisch (por Ragnar Frisch) antes de resolver el ejercicio:

- Se la denomina también como "Oferta λ constante".
- λ denota la utilidad marginal de la riqueza, por lo que esta oferta representa la oferta laboral de inviduos *neutrales al riesgo*.
- Se emplea principalmente para calcular la "Elasticidad de Frisch de la Oferta Laboral", ya que mide exclusivamente la magnitud del efecto sustitución ante un cambio en el nivel de salario.

Oferta de trabajo à la Frisch

Para calcular la oferta nueva, remitámonos a (18), que fue la formulación de la oferta de trabajo a la que llegamos como función de λ:

$$h_t^*(w_t, w_{t+1}, r) = \left(\lambda^*(w_t, w_{t+1}, r) \cdot \frac{w_t}{m}\right)^{1/\theta} \tag{18}$$

tomando λ constante, $\overline{\lambda}$:

$$h_t^*(w_t, w_{t+1}, r) = \left(\overline{\lambda} \cdot \frac{w_t}{m}\right)^{1/\theta}$$

Oferta de trabajo à la Frisch

y aplicado logaritmos:

$$\ln h_t = \ln \left[\left(\overline{\lambda} \cdot \frac{w_t}{m} \right)^{1/\theta} \right]$$

$$\ln h_t = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\ln \overline{\lambda} + \ln w_t - \ln m \right) \tag{31}$$

Esta, (31), es la oferta individual de trabajo de Frisch log-linearizada.

Ejercicio 3(j)-(k)

(j) ¿Cómo interpretaría el parámetro de preferencia m?

(k) Asumiendo que $m = e^{X \cdot \beta + u}$, exprese la relación que obtuvo de la oferta de trabajo dinámica de manera que pueda ser estimada utilizando datos de salarios y horas de trabajo.

Presentar resolución en la entrega del TP Nº3.

Cambios en la tasa de descuento

(I) Resuelva el punto (d) para el caso de $r > \rho$ y $r < \rho$. Compare la evolución de la oferta de trabajo a lo largo del ciclo de vida en los tres casos.

Presentar resolución en la entrega del TP Nº3.

Hint: para el caso en que $r = \rho$, el resultado obtenido es que $h_t = h_{t+1}$. Si la tasa subjetiva de preferencia intertemporal del individuo es exactamente igual a la tasa de interés de mercado, mantendrá constante la cantidad de trabajo que ofrece en cada período. Esto se debe porque el individuo es "igual de paciente que el mercado", por lo que no tendrá incentivos a adelantar ni postergar consumo intertemporalmente, sino a manterlo constante. Como todo lo que consume lo puede obtener si y solo si trabaja, para mantener su consumo constante, ceteris paribus, deberá mantener constante la cantidad de trabajo que ofrezca en cada período.