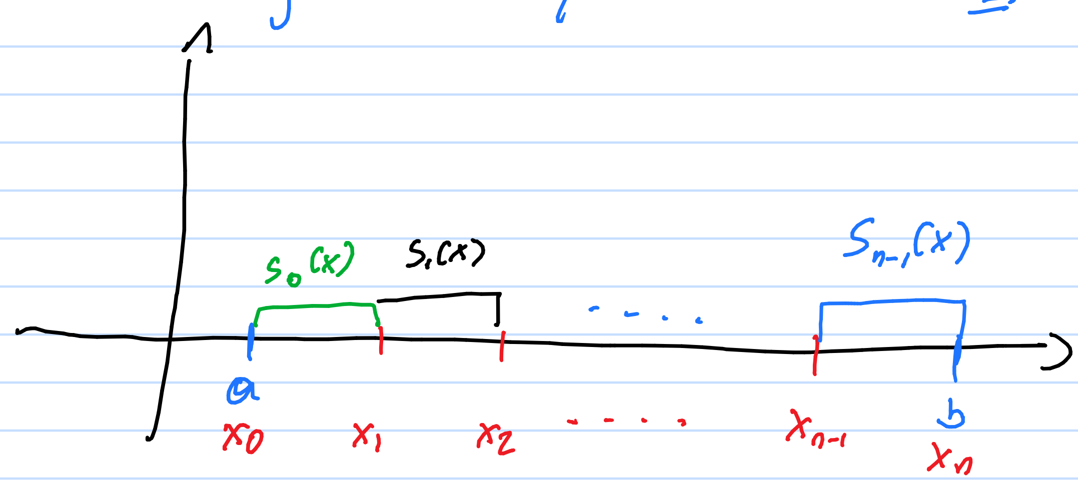
ANP I   Fecha: 30/10/25

Trazadores

Sea $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una discretización del intervalo $[a,b]$

La interpolación por trazadores cúbicos consiste en tomar un conjunto de elementos de S en cada subintervalo de la forma $[x_i, x_{i+1}]$.

Es decir, considerar una partición de $[a,b]$ y construir un polinomio de interpolación de grado no superior a un entero K fijo.



$$\longrightarrow \quad S(x) = \begin{cases} S_0(x) & si\ x \in [x_0, x_1[\\ S_1(x) & si\ x \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & si\ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Trazador Cúbico Lineal: (Ver video)

Cota de error Sea f una función 2 veces diferenciable en $[a,b]$ y sea $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ la discretización de $[a,b]$. Si $S(x)$ es el trazador lineal usando los pares ordenados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, entonces:

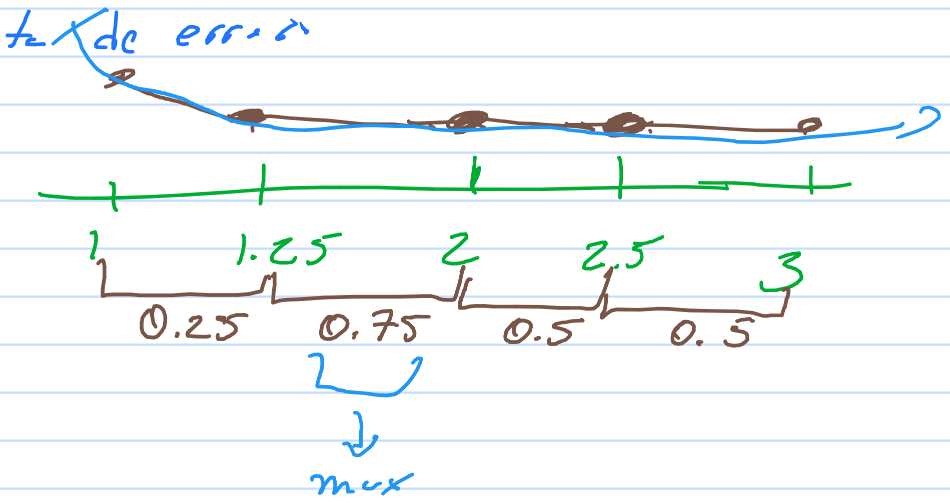
$$|f(x) - S(x)| = 0 \quad , \ si\ x = x_j \ , para\ algún\ j = 0, \dots, n-1$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot d_{max}$$

donde $h = \max_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$ y $d_{max} = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Ejm: Sea $f(x) = \ln(x)$ en $[1,3]$. Considere el conjunto de discretización $S = \{1, 1.25, 2, 2.5, 3\}$. Calcule la cota de error.

Solución



$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot d_{max}$$

$$= \frac{0.75^2}{8} \cdot 1$$

$$= 0.0703125\dots$$

① $h = 0.75$

② $d_{max} = \max_{x \in [1,3]} \left| [\ln(x)]^{(2)} \right|$

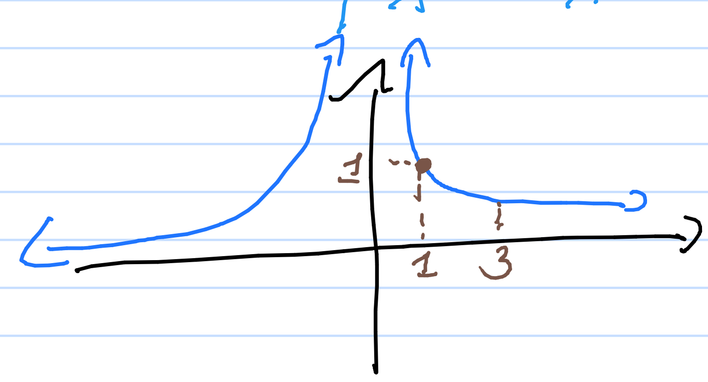
$$= \max_{x \in [1,3]} \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} = 1$$

$f(x) = \ln(x)$

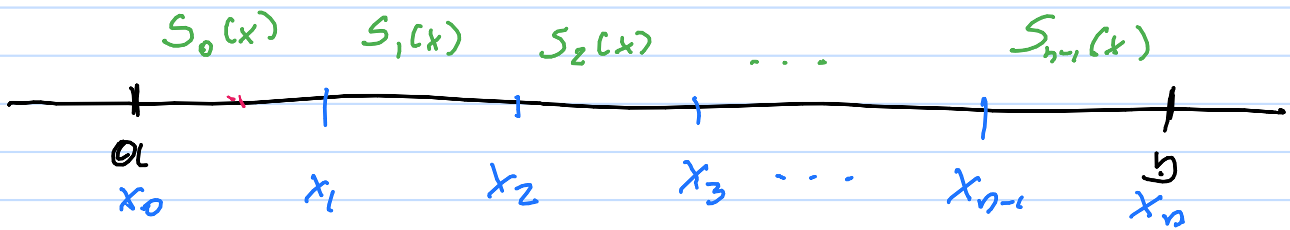
$f'(x) = \frac{1}{x}$

$|f''(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2}$



Trazador Cúbico

Sea $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ los puntos a utilizar.



$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \\ S_1(x) \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) \end{cases}$$

donde $S_j(x) = a_j \cdot (x - x_j)^3 + b_j \cdot (x - x_j)^2 + c_j (x - x_j) + d_j$

Estos trazadores cumplen lo siguiente:

- $S(x_j) = y_j$
- $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$
- $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$
- $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$

Continuidad de S en las funciones S_j, y sus primeras dos derivadas

Nota. Recuerde que cada $S_j(x)$ dentro del trazador cúbico tiene la forma:

$$S_j(x) = a_j\cdot(x-x_j)^3 + b_j\cdot(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j$$

Es decir, debemos calcular a_j, b_j, c_j y d_j, donde.

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ & \vdots & & \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$a_j = \frac{m_{j+1} - m_j}{6h_j} \qquad b_j = \frac{m_j}{2} \qquad c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(m_{j+1} + 2m_j)$$

$$d_j = y_j$$

donde: $\boxed{h_j = x_{j+1} - x_j}$ y $\boxed{m_0 = m_n = 0}$, y el resto de los valores de $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ se obtienen resolviendo el siguiente sistema tridiagonal:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \end{pmatrix}}_{\text{Resuelve con Thom}}$$

donde $u_j = 6\left(\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}\right)$

Ejercicio: Implementar en GNU Octave / Python dicho método, y que genere una matriz con los coeficientes de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ & \vdots & & \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Utilice el ejemplo $f(x) = 3xe^x - 2e^x$ en $[1, 1.1]$ y $S = \{1, 1.05, 1.07, 1.1\}$

Cota de error del Trazador Cúbico

Cota de error Sea f una función 4 veces diferenciable en $[a,b]$ y sea $S=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ la discretización de $[a,b]$. Si $S(x)$ es el trazador cúbico usando los pares ordenados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, entonces:

$$|f(x) - S(x)| = 0 \quad , \text{ si } x = x_j \text{ , para algún } j = 0, \dots, n-1$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5h^4}{384} \cdot d_{max} \qquad \text{si } x \neq x_j$$

donde $h = \max\limits_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$ y $d_{max} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

Ejercicio

Sea $f(x) = \ln(x)$ en $[1,3]$. Considere el conjunto de discretización $S=\{1, 1.25, 2, 2.5, 3\}$. Calcule la cota de error del trazador cúbico.