ANPI

Ecuación Diferencial Ordinaria

Fecha: 14-10-25

Solución de una EDO de Segundo Orden.

Caso 1: Valores iniciales con y, y'.

Una EDO de segundo orden es de la forma:

$$\boxed{y''(x) = f(x, y(x), y'(x))}$$

con valores iniciales: $y(x_0) = y_0$

$y'(x_0) = z_0$

Por notación, usamos $y = y(x)$, $y' = y'(x)$. Por lo tanto, el problema se reduce al siguiente:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Sea $g_1(x) = y(x)$ y $g_2(x) = y'(x)$. Note que.

$$\begin{cases} g_1' = g_2 \\ g_2' = f(x, g_1, g_2) \end{cases}$$

Esto se puede ver como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{bmatrix} g_1' \\ g_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ f(x, g_1, g_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad G' = F(x, g_1, g_2)$$

Solución Utilizando Euler Sea un intervalo $[a,b]$, donde $a = x_0$

Sea $[a,b]$ discretizado en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, donde $x_0 = a$,

$x_n = b$

$x_j = a + j \cdot h$

$h = \frac{b-a}{n-1}$

El método iterativo de Euler para resolver el problema:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

es:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h \cdot z_k \longrightarrow \text{Aproxima a } y \\ z_{k+1} = z_k + h \cdot f(x_k, y_k, z_k) \longrightarrow \text{Aproxima a } y' \end{cases}$$

Ejercicio: Utilizando el método de Euler, implemente computacionalmente en Octave una aproximación de la solución del problema en $[0, 2]$

$$\begin{cases} y'' = x - y' - y \longrightarrow f(x, y, y') = x - y' - y \\ y(0) = 1 \longrightarrow y_0 = 1 \\ y'(0) = 0 \longrightarrow z_0 = 0 \end{cases}$$

Nota: Comparar con la solución

$$y(x) = 2e^{-x/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 1$$

Caso 2: Valores iniciales con solo $y(x)$.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} y''(x) = \widetilde{p(x)}\, y'(x) + \widetilde{q(x)}\, y(x) + \widetilde{r(x)} \\ \underset{(y_0)}{y(a) = \alpha} \quad , \quad \underset{(y_n)}{y(b) = \beta} \end{cases} \longrightarrow \text{Definido por un intervalo } [a,b]$$

Objetivo: Calcular la función y.

La solución de este problema se realiza resolviendo un sistema de ecuaciones lineales, donde la matriz de coeficientes es tridiagonal.

La solución son pares ordenados de la forma

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \dots,\ (x_n, y_n)$$

(*)

- $\underline{x_0, x_1, \dots, x_n} \longrightarrow h = \dfrac{(b-a)}{n-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_j = a + j \cdot h$
- $\underline{y_0, y_1, \dots, y_n} \longrightarrow y_0 = \alpha$, $y_n = \beta$ (Valores Iniciales)

Sea $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. Entonces el vector $\vec{y}$ se obtiene

de resolver el sistema $A\vec{y} = d$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde:

(**)
- $a_j = 2 + h\, q_j$, donde $q_j = q(x_j)$
- $b_j = \dfrac{h}{2} p_j - 1$, donde $p_j = p(x_j)$
- $c_j = -\dfrac{h}{2} p_j - 1$, donde $p_j = p(x_j)$

(***)
- $d_1 = -h^2 \cdot r_1 + \left(\dfrac{h}{2} p_1 + 1\right)\alpha$, donde $r_1 = r(x_1)$, $p_1 = p(x_1)$
- $d_{n-1} = -h^2 \cdot r_{n-1} + \left(\dfrac{-h}{2} p_{n-1} + 1\right)\beta$, donde $r_{n-1} = r(x_{n-1})$, $p_{n-1} = p(x_{n-1})$
- $d_j = -h^2 r_j$, donde $r_j = r(x_j)$, $j = 2, 3, \dots, n-2$

Pseudocódigo:

Entrada: $p(x), q(x), r(x), [a,b], n, \alpha, \beta$

Salida: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

Paso 1: Calcular $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (*)

Paso 2: $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $r_j = r(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$

Paso 3: Construir vectores
$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$
$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-2})$
$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2})$ (**)

Paso 4: Construir vector $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$ (***)

Paso 5: Usando Thomas, resolver el sistema $A\vec{y} = d$ $\hookrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

Paso 6: $y_0 = \alpha$, $y_n = B$.