Métodos numéricos para EDO de segundo orden

Considérese la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'),$$

con condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = z_0$. Para aplicar métodos numéricos como Euler o Runge–Kutta, se transforma la ecuación en un sistema de primer orden mediante las sustituciones:

$$\begin{cases} g_1(x) = y(x), \\ g_2(x) = y'(x), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_1' = g_2, \\ g_2' = f(x, g_1, g_2). \end{cases}$$

Así, el vector de estado se define como $G = [g_1, g_2]^T$ y el sistema se escribe de forma compacta como

$$G' = F(x, G), \quad G(x_0) = [y_0, z_0]^T.$$

Método de Euler de primer orden

El método de Euler explícito se aplica al sistema $G' = F(x, G)$ según la fórmula iterativa:

$$G_{k+1} = G_k + h\, F(x_k, G_k),$$

donde h es el paso de integración y $x_k = x_0 + kh$. En términos de las variables y y z, el método queda expresado como:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\, z_k, \\ z_{k+1} &= z_k + h\, f(x_k, y_k, z_k). \end{aligned}$$

Algorithm 1 Método de Euler para EDO de segundo orden

Entrada: $f(x, y, v)$, x_0, y_0, v_0, h, N
$x \leftarrow x_0, \quad y \leftarrow y_0, \quad v \leftarrow v_0$
for $k = 0$ **to** $N - 1$ **do**
    $y \leftarrow y + h \cdot v$
    $v \leftarrow v + h \cdot f(x, y, v)$
    $x \leftarrow x + h$
end for

Método de Runge–Kutta de tercer orden (RK3)

El método de Runge–Kutta de orden 3 aplica tres evaluaciones de la función F por paso:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= F(x_k, X_k), \\
K_2 &= F\big(x_k + \tfrac{h}{2},\, X_k + \tfrac{h}{2} K_1\big)\,, \\
K_3 &= F(x_k + h,\, X_k + h(-K_1 + 2K_2))\,,
\end{aligned}
$$

$$
X_{k+1} = X_k + \tfrac{h}{6}\,(K_1 + 4K_2 + K_3)\,.
$$

En forma expandida:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \tfrac{h}{6}\left(K_1^{(y)} + 4K_2^{(y)} + K_3^{(y)}\right), \\
v_{k+1} &= v_k + \tfrac{h}{6}\left(K_1^{(v)} + 4K_2^{(v)} + K_3^{(v)}\right),
\end{aligned}
$$

donde $K_i^{(y)}$ y $K_i^{(v)}$ son las componentes de K_i.

Algorithm 2 Método de Runge–Kutta de tercer orden (RK3) para EDO de segundo orden

Entrada: $f(x, y, v)$, x_0, y_0, v_0, h, N
$x \leftarrow x_0, \quad y \leftarrow y_0, \quad v \leftarrow v_0$
for $k = 0$ **to** $N - 1$ **do**
    $K1_y = v$
    $K1_v = f(x, y, v)$
    $K2_y = v + (h/2) \cdot K1_v$
    $K2_v = f(x + h/2,\, y + (h/2) \cdot K1_y,\, v + (h/2) \cdot K1_v)$
    $K3_y = v + h(-K1_v + 2K2_v)$
    $K3_v = f(x + h,\, y + h(-K1_y + 2K2_y),\, v + h(-K1_v + 2K2_v))$
    $y = y + (h/6) \cdot (K1_y + 4K2_y + K3_y)$
    $v = v + (h/6) \cdot (K1_v + 4K2_v + K3_v)$
    $x = x + h$
end for