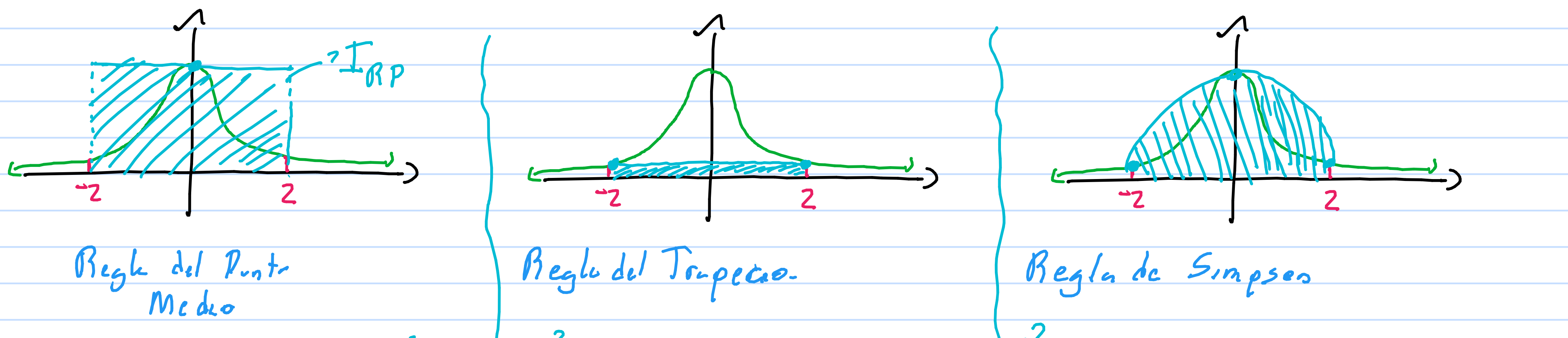
ANPI   Fecha: 6/11/25

Problema: Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$. → Regla del Rectángulo
→ Regla del Trapecio
→ Regla de Simpson.

$$|I - I_A| \leq \text{const.}\, d_{max}$$

Estos métodos son métodos simples y no dan buen resultado siempre.

Ejm: Considere $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx = 1.764162\ldots$



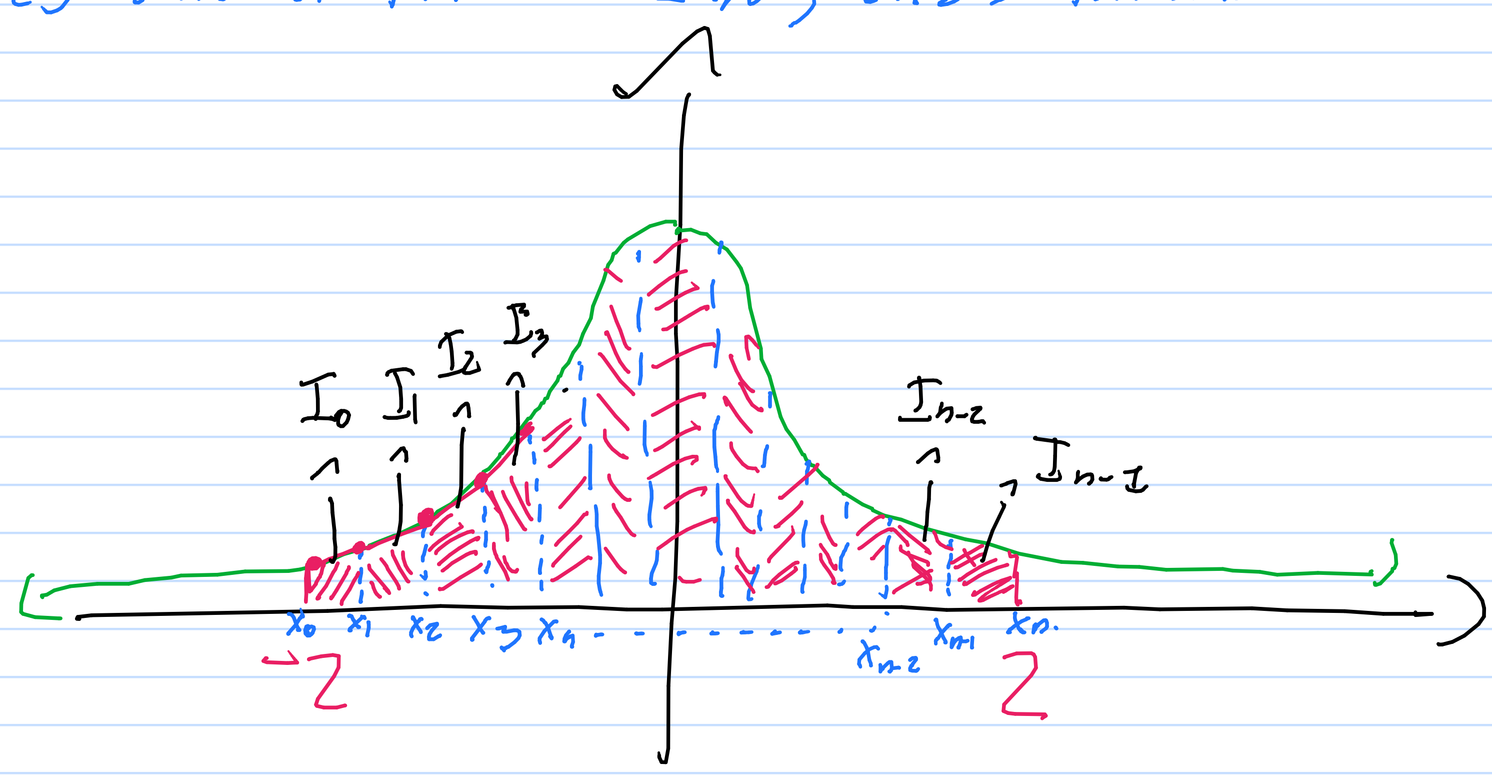
$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \approx (2-2)\cdot e^{-0^2} = 4$$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \approx \frac{(2-(-2))(e^{-(-2)^2}+e^{-2^2})}{2} \approx 0.07326\ldots$$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \approx \frac{(2-(-2))}{6}\left(e^{-(-2)^2}+4e^{-(0)^2}+e^{-(2)^2}\right) \approx 2.6910875\ldots$$

Del ejemplo anterior, se deduce que los 3 métodos generan una mala aproximación.

Una técnica que mejora significativamente la precisión de aproximar la integral definida, es dividir el intervalo $[a,b]$, en sub intervalos



Si I_j es la aproximación de $\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$ utilizando alguno de los 3 métodos vistos anteriormente.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_0 + I_1 + \ldots + I_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} I_j$$

Sea:

$$\text{Rect\_PM}(f,a,b) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{Trapecio}(f,a,b) = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$

$$\text{Simpson}(f,a,b) = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

Entonces, las versiones compuestas de los métodos anteriores son:

① Discretizar $[a,b]$: $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$x_0 = a,\ x_n = b$

$x_j = a + j\cdot h$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{m-1}$ ↳ # de puntos

② $$\text{Rect\_PM\_Comp}(f,a,b,n) = \sum_{j=0}^{n-1} \text{Rect\_PM}(f, x_j, x_{j+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{(x_{j+1}-x_j)}_{h}\cdot f\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right) = h\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right)$$

$$\text{Trapecio\_Comp}(f,a,b,n) = \sum_{j=0}^{n-1} \text{Trapecio}(f, x_j, x_{j+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\overbrace{(x_{j+1}-x_j)}^{h}(f(x_j)+f(x_{j+1}))}{2} = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(f(x_j)+f(x_{j+1}))$$

$$\text{Simpson\_Comp}(f,a,b,n) = \sum_{j=0}^{n-1} \text{Simpson}(f, x_j, x_{j+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\overbrace{(x_{j+1}-x_j)}^{h}}{6}\left(f(x_j)+4f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)+f(x_{j+1})\right)$$

$$= \frac{h}{6}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f(x_j)+4f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)+f(x_{j+1})\right)$$

Note que: $x_{j+1} - x_j = a + (j+1)h - a - jh$
$= \cancel{a} + \cancel{jh} + h - \cancel{a} - \cancel{jh}$
$= h$

Ejm: Implemente computacionalmente los métodos de la regla del rectángulo (PM) y Trapecio compuesto para aproximar

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx$$

Cota de Error

Sea $I = \int_a^b f(x)\,dx$

$I_{pmc} = \text{Rect\_PM\_Comp}(f, a, b, n)$

$I_{TC} = \text{Trapecio\_Comp}(f, a, b, n)$

$I_{SC} = \text{Simpson\_Comp}(f, a, b, n)$

Entonces:

Error Absoluto

$$\left\{\begin{array}{l} |I - I_{pmc}| \leq \dfrac{(b-a)}{24} \cdot h^2 \cdot d_1 \\[2ex] |I - I_{TC}| \leq \dfrac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot d_1 \\[2ex] |I - I_{SC}| \leq \dfrac{(b-a)}{2880}\, h^4 \cdot d_2 . \end{array}\right.$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$d_1 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$d_2 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Ejemplo: Calcule la cota de error de $\int_2^5 \ln(x)\,dx$ con la regla del Simpson Compuesto usando $n = 20$ (21 puntos) # de subintervalos

$$|I - I_{SC}| \leq \frac{(b-a)}{2880}\, h^4 \cdot d_2 .$$

$$= \frac{(5-2)}{2880} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^4 \cdot \frac{3}{8}$$

$$= 1.9775 \times 10^{-7}$$

① $a = 2$, $b = 5$

② $h = \dfrac{5-2}{20} = \dfrac{3}{20}$

③ $d_2 = \max_{x \in [2,5]} |f^{(4)}(x)|$

$$= \max_{x \in [2,5]} \frac{6}{x^4}$$

$$= \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Nota: Uno puede obtener el valor de n, de tal manera que

$$|I - I_A| \leq tol$$

sabiendo que $|I - I_A| \leq \underbrace{\quad}_{\text{fórmula de cota de error}} \leq tol$

Uno puede despejar el n que hace cierta la desigualdad

Ejm: Calcule el número de puntos que debe tener el conjunto discretizado del $[a,b]$ para aproximar

$$I = \int_2^5 \ln(x)\,dx$$

usando la regla de Simpson compuesta, tal que el error absoluto sea menor o igual a 10^{-20}

$$|I - I_{SC}| \leq \underbrace{\frac{(b-a)}{2880} \cdot h^4 d_c}_{} \leq 10^{-20}$$

Despejar el "n"

$$\Rightarrow \frac{(b-a)}{2880}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 \cdot d_2 \leq 10^{-20}$$

$$\Rightarrow \frac{(5-2)}{2880}\,\frac{(5-2)^4}{n^4} \cdot \frac{3}{8} \leq 10^{-20}$$

$$\Rightarrow \frac{3^6}{2880 \cdot 8} \cdot \frac{1}{n^4} \leq 10^{-20}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3^6}{2880 \cdot 8} \cdot \frac{1}{10^{-20}}} \leq \sqrt{n^4}$$

$$\Rightarrow 42175{,}599\ldots \leq n \to \text{\# de subintervalos}$$

$\hookrightarrow 42176$

R/ Se necesitan, al menos 42177 puntos

$\Rightarrow$ # puntos $n+1 = 42177$

Ejercicio:

Calcule el número de subintervalos que debe tener el conjunto discretizado del $[a,b]$ para aproximar

$$I = \int_1^4 e^{\frac{x}{5}}\,dx$$

usando la regla del Trapecio compuesta, tal que el error absoluto sea menor o igual a 2^{-52} $\hookrightarrow$ cero de máquina

$$|I - I_{TC}| \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot d_1 \leq 2^{-52}$$

- $d_1 = \max_{x\in[1,4]} |f''(x)|$

$= \max_{x\in[1,4]} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot e^{\frac{x}{5}}$

$= \dfrac{e^{4/5}}{25}$

$$\Rightarrow \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{n^2} \cdot \frac{e^{4/5}}{25} \leq 2^{-52}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{12} \cdot \frac{9}{2^{-52}} \cdot \frac{e^{4/5}}{25}} \leq \sqrt{n^2}$$

- $h = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n}$

$$\Rightarrow 30034398{,}22 \leq n$$

$\hookrightarrow 30034399 \to$ # de subintervalos

Nota: Las calculadoras o programas especializados, cuando aproximan el valor de $\int_a^b f(x)dx$ no le pide al usuario el numero de sub-intervalos a aplicar para aproximar dicho valor.

En este caso, genera una sucesión

$$S_K = \text{regla\_numerica}(f, a, b, K)$$

donde K es el # de sub-intervalos que se divide $[a,b]$.

Con esto se genera una sucesión

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots\ldots, S_K, \ldots\ldots$$

donde $S_K \to \int_a^b f(x)dx$, cuando $K \to \infty$

El criterio de parada sera: 1) $|S_{K+1} - S_K| < tol$

2) $\dfrac{|S_{K+1} - S_K|}{|S_{K+1}|} < tol.$