Trazadores Lineales y Cúbicos

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

Introducción

Sea $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto soporte en un intervalo $[a, b]$.

- La interpolación por trazadores consiste en tomar un conjunto de elementos del soporte en cada subintervalo de la forma $[x_i, x_{i+1}]$.
- Es decir, considerar una partición de $[a, b]$ y construir un polinomio de interpolación de grado no superior a un entero k fijo sobre dicho conjunto de nodos.

Introducción

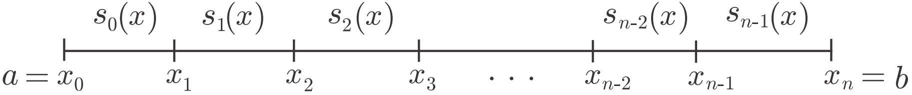

Figura: Restricciones del trazador $S(x)$ en $[a, b]$.

Introducción

- En la práctica, el trazador más utilizado es la de grado 3, conocido como *trazador cúbicos*.
- Se describe la interpolación por trazadores de grado $k = 1$ y $k = 3$.

Trazador Lineal

- El ejemplo más sencillo de interpolación mediante el método de trazadores es el de una función cuya gráfica está conformada por rectas a trozos (grado $k = 1$).
- Es decir segmentos, sobre un conjunto soporte $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, de tal manera que el extremo final de un segmento coincide con el principio del siguiente.

Trazador Lineal

- Para los puntos
$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_{n-1}, y_{n-1}) \text{ y } (x_n, y_n),$$
en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, la gráfica es una función lineal formada por los segmentos que unen los puntos: (x_0, y_0) con (x_1, y_1), (x_1, y_1) con (x_2, y_2) y así sucesivamente.
- La función a trozos $S(x)$, donde cada trozo se define por
$$s_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad \text{para } x \in [x_i, x_{i+1}[,$$
teniendo en cuenta que el último subintervalo se considera cerrado por la derecha, es decir, $[x_{n-1}, b]$.

Trazador Lineal

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 4]$ y considere el soporte $\mathcal{S} = \{1, 2, 4\}$. Determine el polinomio de interpolación por trazadores lineales.

Solución: Primero, se calculan los puntos donde se desea realizar la interpolación, los cuales son:

$$(1, f(1)) = (1, 1),\ (2, f(2)) = \left(2, \tfrac{1}{2}\right) \text{ y } (4, f(4)) = \left(4, \tfrac{1}{4}\right).$$

Trazador Lineal

Luego,

- Sea s_0, donde $s_0(x) = m_0 x + b_0$, el segmento que une los puntos $(1, 1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Al sustituir los puntos en s_0, surge un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 1 & = & m_0 + b_0, \\ \frac{1}{2} & = & 2m_0 + b_0, \end{cases}$$

cuya solución es dada por $m_0 = \frac{-1}{2}$ y $b_0 = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $s_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

Trazador Lineal

- Similarmente, sea s_1, donde $s_1(x) = m_1x + b_1$, el segmento que une los puntos $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(4, \frac{1}{4}\right)$. Al sustituir los puntos en s_1, surge un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & = & 2m_1 + b_1, \\ \frac{1}{4} & = & 4m_1 + b_1, \end{array} \right.$$

  cuya solución corresponde a $m_1 = \frac{-1}{8}$ y $b_1 = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, $s_1(x) = -\frac{x}{8} + \frac{3}{4}$.

Trazador Lineal

Finalmente, el interpolador por trazadores lineales $S(x)$ se define por:

$$S(x) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x \in [1,2[, \\ -\dfrac{x}{8}+\dfrac{3}{4} & \text{si} \quad x \in [2,4]. \end{cases}$$

Trazador Lineal

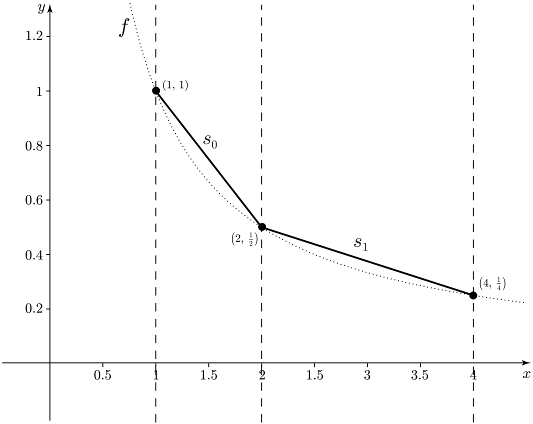

Figura: Trazador lineal para $f(x) = \frac{1}{x}$ con $\mathcal{S} = \{1, 2, 4\}$.

Trazador Lineal

Estimado de error del trazador lineal

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ y S el trazador lineal que interpola a la función f en los nodos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Entonces una cota de error del trazador lineal es dada por

$$\|f - S\|_\infty \;\leqslant\; \frac{1}{8}h^2\|f''\|_\infty,$$

donde $h = \max\limits_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)$ y $\|\cdot\|_\infty$ es la norma infinito sobre $[a,b]$, definida por

$$\|f\|_\infty \;=\; \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Trazador Lineal

Ejercicio

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1,4]$ y considere el soporte $\mathcal{S} = \{1,2,4\}$. Calcule el estimado de error del trazador lineal en $[1,4]$.

Solución: Sea $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$.

- $h = \max\limits_{i=0}^{2}(x_{i+1} - x_i) = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2.$
- $|f''(x)| = \frac{2}{x^3}$ es una función decreciente en $[1,4]$, entonces alcanza su máximo en $x = 1$. Por lo tanto:

$$\|f''\|_\infty \;=\; \max_{x\in[1,4]} |f''(x)| = \frac{2}{1} = 2.$$

Entonces:

$$\|f - S\|_\infty \;\leqslant\; \frac{1}{8}h^2\|f''\|_\infty = \frac{1}{8}\cdot(2)^2\cdot 2 = 1.$$

Trazador Lineal

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(x+1)$ en el intervalo $[1,3]$ y considere el soporte $\mathcal{S} = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$. Determine el polinomio de interpolación por trazadores lineales. Luego calcule el estimado de error.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2^x - x$ en el intervalo $[-2,2]$ y considere el soporte $\mathcal{S} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Determine el polinomio de interpolación por trazadores lineales. Luego calcule el estimado de error.

Trazador Cúbico

Trazador Cúbico

Considere el conjunto soporte $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y los puntos (x_k, y_k), para $k = 0, 1, ..., n$. Se desea construir una función a trozos S, tal que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, con $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, la gráfica sea un polinomio s_i, a lo mas cúbico, el cual cumple con las siguientes condiciones:

- $S(x_i) = y_i$, para $i = 0, 1, 2, ..., n$.
- $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$, para $i = 0, 1, 2, ..., n-2$.
- $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$, para $i = 0, 1, 2, ..., n-2$.
- $s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$, para $i = 0, 1, 2, ..., n-2$.

Trazador Cúbico

Es decir, la función $S(x)$ es una función a trozos en el intervalo $[a,b]$, que interpola los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ... (x_n, y_n), tal que:

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0(x-x_0)^3 + b_0(x-x_0)^2 + c_0(x-x_0) + d_0 & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1[\\ s_1(x) = a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1 & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ s_*(x) = a_*(x-x_*)^3 + b_*(x-x_*)^2 + c_*(x-x_*) + d_* & \text{si} \quad x \in [x_*, x_n] \end{cases}$$

$$(* = n-1)$$

Esta función debe ser diferenciable 2 veces y continua tanto para S, como para S' y S''. Lo único que falta es calcular el valor de a_i, b_i, c_i y d_i, para $i = 0, 1, ..., n-1$.

Trazador Cúbico

Sea $h_i = x_{i+1} - x_i$. El cálculo de las constantes a_i, b_i, c_i y d_i se obtiene de la siguiente manera:

- $a_i = \dfrac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$
- $b_i = \dfrac{M_i}{2}$
- $c_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \dfrac{h_i}{6}(M_{i+1} + 2M_i)$
- $d_i = y_i$

Ahora falta calcular el valor de cada M_i, para $i = 0, 1, ..., n-1$. Las constantes M_i depende de la condición de frontera que se utilice:

- Condición de frontera natural o libre: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$
- Condición de frontera sujeta: $S'(x_0) = y_0'$ y $S'(x_n) = y_n'$

Trazador Cúbico

- **Frontera Natural o libre.**

  Para este caso $M_0 = M_n = 0$, y el resto de los M_i se calculan resolviendo el método el siguiente sistema tridiagonal:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

donde $u_i = 6\left(\dfrac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)$ y $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Trazador Cúbico

- **Frontera Sujeta.**

  Los M_i se calculan resolviendo el método el siguiente sistema tridiagonal:

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ w \end{pmatrix}$$

  donde

  - $u_i = 6\left(\dfrac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)$
  - $v = 6\left(\dfrac{y_1-y_0}{h_0} - y_0'\right)$
  - $w = 6\left(y_n' - \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$
  - $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Trazador Cúbico

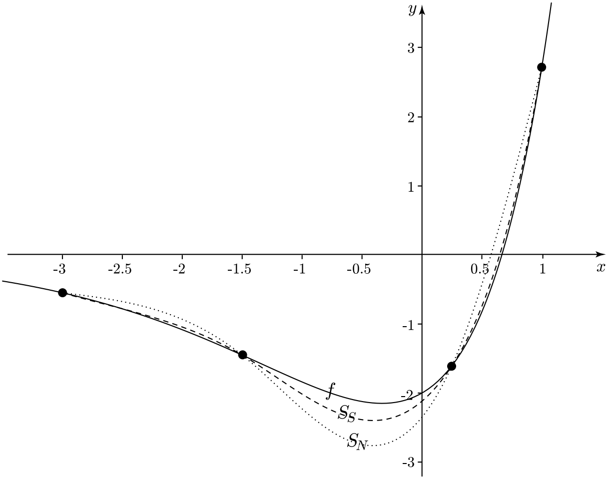

Figura: Gráfica de $f(x)$, $S_N(x)$ su trazador natural y S_S su trazador sujeto.

Trazador Cúbico

Ejemplo

Considere la función $f(x) = 3xe^x - 2e^x$ en el intervalo $[1, 1.1]$, con soporte $\mathcal{S} = \{1, 1.05, 1.07, 1.1\}$:

1. encontrar el trazador cúbico $S(x)$ con frontera natural,
2. encontrar el trazador cúbico con $S(x)$ con frontera sujeta a $S'(1) = 11.099211$ y $S'(1.1) = 12.951205$.

Trazador Cúbico

Hay que calcular la función a trozos $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [1, 1.05[\\ s_1(x) & \text{si } x \in [1.05, 1.07[\\ s_2(x) & \text{si } x \in [1.07, 1.1] \end{cases}$$

donde s_0, s_1, s_2, son polinomios de grado 3, máximo, tal que

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \qquad i = 0, 1, 2.$$

Trazador Cúbico

Primero, se calcula los valores $y_i = f(x_i)$, donde x_i son los nodos, para $i = 0, 1, 2, 3$, el cuál se presenta en la siguiente tabla:

k	x_k	$y_k = f(x_k)$
0	1	2.718282
1	1.05	3.286299
2	1.07	3.527609
3	1.1	3.905416

Los nodos x_0, x_1, x_2 y x_3 no están igualmente espaciados, por lo que se necesitan calcular los pasos h_0, h_1 y h_2:

- $h_0 = x_1 - x_0 = 0.05$
- $h_1 = x_2 - x_1 = 0.02$
- $h_2 = x_3 - x_2 = 0.03$

Trazador Cúbico

Trazador cúbico libre: Como es un trazador cúbico libre, entonces $M_0 = M_3 = 0$. Luego se calculan los momentos M_1 y M_2 a través del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2(0.05+0.02) & 0.02 \\ 0.02 & 2(0.02+0.03) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

donde

- $u_0 = 6\left(\frac{3.527609-3.286299}{0.02} - \frac{3.286299-2.718282}{0.05}\right) = 4.230960$
- $u_1 = 6\left(\frac{3.905416-3.527609}{0.03} - \frac{3.527609-3.286299}{0.02}\right) = 3.168400.$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 2(0.05+0.02) & 0.02 \\ 0.02 & 2(0.02+0.03) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.230960 \\ 3.168400 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $M_1 = 0$, $M_1 = 26.450588$, $M_2 = 26.393882$ y $M_3 = 0$.

Trazador Cúbico

Luego, se calculan las constantes a_i, b_i, c_i y d_i

1. Constante a_i:
   - $a_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = 88.168627$
   - $a_1 = \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = -0.47255$
   - $a_2 = \frac{M_3 - M_2}{6h_2} = -146.632678$
2. Constante b_i:
   - $b_0 = \frac{M_0}{2} = 0$
   - $b_1 = \frac{M_1}{2} = 13.225294$
   - $b_2 = \frac{M_2}{2} = 13.196941$
3. Constante c_i:
   - $c_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(M_1 + 2M_0) = 11.139918$
   - $c_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_2 + 2M_1) = 11.801183$
   - $c_2 = \frac{y_3 - y_1}{h_2} - \frac{h_2}{6}(M_3 + 2M_2) = 12.329628$
4. Constante d_i:
   - $d_0 = y_0 = 2.7182282$
   - $d_1 = y_1 = 3.286299$
   - $d_2 = y_2 = 3.527609$

Trazador Cúbico

Por lo tanto, el polinomio interpolador spline cúbico con frontera natural es

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x) & \text{si } x\in[1,1.05] \\ s_1(x) & \text{si } x\in[1.05,1.07] \\ s_2(x) & \text{si } x\in[1.07,1.1] \end{cases}$$

donde

- $s_0(x)=88.168627(x-1)^3+11.139918(x-1)+2.7182282$
- $s_1(x)=-0.47255(x-1.05)^3+13.225294(x-1.05)^2+11.801183(x-1.05)+3.286299$
- $s_2(x)=-146.632678(x-1.07)^3+13.196941(x-1.07)^2+12.329628(x-1.07)+3.527609$

Trazador Cúbico

Frontera Sujeta a $S'(1) = 11.099211$ y $S'(1.1) = 12.951205$:

Como es un spline con frontera sujeta a las condiciones se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2(0.05) & 0.05 & & \\ 0.05 & 2(0.05+0.02) & 0.02 & \\ & 0.02 & 2(0.02+0.03) & 0.03 \\ & & 0.03 & 2(0.03) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_0 \\ u_1 \\ w \end{pmatrix}$$

donde $u_0 = 4.23096$ y $u_1 = 3.1684$ se habían calculado anteriormente y

- $v = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0'\right) = 1.566774$
- $w = 6\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) = 2.14583$

Trazador Cúbico

Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 & & \\ 0.05 & 0.14 & 0.02 & \\ & 0.02 & 0.1 & 0.03 \\ & & 0.03 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.566774 \\ 4.23096 \\ 3.1684 \\ 2.14583 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $M_0 = 2.272926$, $M_1 = 26.787627$, $M_2 = 18.349793$ y $M_3 = 26.588937$

Trazador Cúbico

Luego, se calculan las constantes a_i, b_i, c_i y d_i

1. Constante a_i:
   - $a_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = -81.71567$
   - $a_1 = \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = 70.315283$
   - $a_2 = \frac{M_3 - M_2}{6h_2} = -45.773022$
2. Constante b_i:
   - $b_0 = \frac{M_0}{2} = 1.136463$
   - $b_1 = \frac{M_1}{2} = 13.393814$
   - $b_2 = \frac{M_2}{2} = 9.174897$
3. Constante c_i:
   - $c_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(M_1 + 2M_0) = 11.099228$
   - $c_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_2 + 2M_1) = 11.825750$
   - $c_2 = \frac{y_3 - y_1}{h_2} - \frac{h_2}{6}(M_3 + 2M_2) = 12.277124$
4. Constante d_i:
   - $d_0 = y_0 = 2.7182282$
   - $d_1 = y_1 = 3.286299$
   - $d_2 = y_2 = 3.527609$

Trazador Cúbico

Por lo tanto, el polinomio interpolador spline cúbico con frontera natural es

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x) & \text{si } x\in[1,1.05] \\ s_1(x) & \text{si } x\in[1.05,1.07] \\ s_2(x) & \text{si } x\in[1.07,1.1] \end{cases}$$

donde

- $s_0(x)=-81.71567(x-1)^3+1.136463(x-1)^2+11.099228(x-1)+2.7182282$
- $s_1(x)=70.315283(x-1.05)^3+13.393814(x-1.05)^2+11.825750(x-1.05)+3.286299$
- $s_2(x)=-45.773022(x-1.07)^3+9.174897(x-1.07)^2+12.277124(x-1.07)+3.527609$

Trazador Cúbico

Estimado de error del trazador cúbico

Sea f una función real, definida, continua y con cuarta derivada continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si S es el único trazador cúbico de interpolación respecto al conjunto soporte $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, entonces para $\|\cdot\|_\infty$ la norma-∞ sobre $[a, b]$, se cumple que:

$$\|f - S\|_\infty \leqslant \frac{5h^4}{384} \left\| f^{(4)} \right\|_\infty ,$$

donde $h = \max_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$

Trazador Cúbico

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(x+1)$ en el intervalo $[1, 3]$ y considere el soporte $\mathcal{S} = \{1, 2, 2.5, 3\}$.

- Determine el polinomio de interpolación por trazadores cúbico libre.
- Determine el polinomio de interpolación por trazadores cúbico sujeto, donde $S'(1) = 1.2$ y $S'(3) = 0.4$.
- Luego calcule el estimado de error.

Trazador Cúbico

Ejemplo

Un trazador cúbico natural S de la función f esta definido por

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & \text{si } x \in [1,2[\\ s_1(x) = d + c(x-2) + b(x-2)^2 + a(x-2)^3, & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

Encuentre a, b, c y d.