Métodos iterativos para la solución numérica del problema de Cauchy

1. Problema de Cauchy y su solución numérica

El **problema de Cauchy** consiste en determinar una función $y(x)$ que satisfaga una ecuación diferencial ordinaria junto con una condición inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $f(x, y)$ es una función conocida, x_0 es el punto inicial y y_0 el valor de la solución en dicho punto. En otras palabras, se busca una curva $y(x)$ que no solo cumpla la ecuación diferencial, sino que además pase por el punto (x_0, y_0).

Sin embargo, en la práctica muchas ecuaciones diferenciales no poseen una solución analítica expresable en forma cerrada. En tales casos, se recurre a una **solución numérica**, la cual permite aproximar los valores de $y(x)$ mediante un proceso iterativo que genera una secuencia de puntos discretos en un intervalo $[a, b]$:

$$x_j = x_0 + jh, \qquad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

donde $h = \dfrac{b-a}{n}$ representa el tamaño de paso. En este caso, $x_0 = a$ y $x_n = b$.

Luego, cada valor y_{j+1} se calcula a partir del anterior mediante una relación recursiva de la forma:

$$y_{j+1} = y_j + h\,\Phi(x_j, y_j, h), \tag{1}$$

donde la función Φ constituye una **aproximación de la pendiente promedio** de la solución en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$. La elección de la expresión para Φ determina el método numérico empleado.

En consecuencia, la solución numérica del problema de Cauchy se construye mediante los pares ordenados:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \dots,\ (x_n, y_n),$$

donde cada $y_j \approx y(x_j)$ representa una estimación de la solución exacta. De esta forma, el método avanza paso a paso, aproximando la trayectoria continua de $y(x)$ a través de un procedimiento iterativo.

La Figura 1 ilustra este proceso para el caso $n = 5$, donde $y(x)$ representa la solución del problema de Cauchy. Los valores y_j que se presentan en esta figura se obtienen mediante una fórmula iterativa que sigue la estructura general presentada en la ecuación (1).

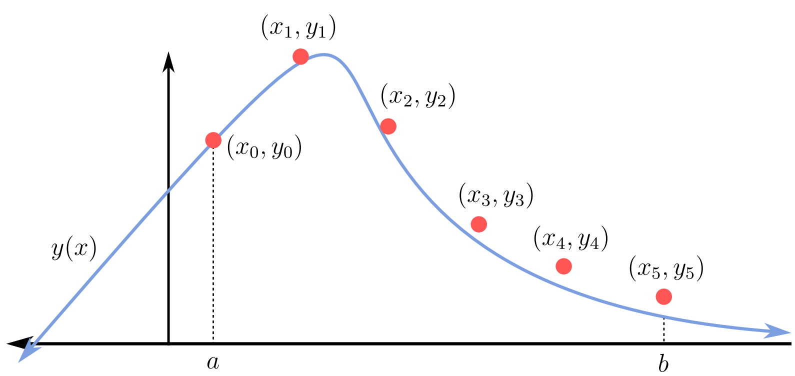

Figura 1: Representación gráfica del proceso iterativo de aproximación para el problema de Cauchy.

2. Algoritmos para la solución numérica del problema de Cauchy

Método	Fórmula general	Pasos	Orden
Euler	$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$	1	1
Predictor-Corrector (Heun o Euler mejorado)	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$ $\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f(x_k + h,\, y_k + hK_1) \end{cases}$	1	2
Runge-Kutta de orden 2 (punto medio)	$y_{k+1} = y_k + h\, K_2$ $\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f\big(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2}K_1\big) \end{cases}$	1	2
Runge-Kutta de orden 3	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$ $\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f\big(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2}K_1\big)\,, \\ K_3 = f(x_k + h,\, y_k - hK_1 + 2hK_2) \end{cases}$	1	3
Runge-Kutta de orden 4	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ $\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f\big(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2}K_1\big)\,, \\ K_3 = f\big(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2}K_2\big)\,, \\ K_4 = f(x_k + h,\, y_k + hK_3) \end{cases}$	1	4
Método de Taylor de orden p	$y_{k+1} = y_k + h\, y'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \cdots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_k)$	1	p
Adams-Bashforth de 2 pasos	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1})$	2	2
Adams-Bashforth de 3 pasos	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$	3	3
Adams-Bashforth de 4 pasos	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})$	4	4

Observaciones:

- En el método de Taylor, la primera derivada de la solución se expresa como $y'(x) = f(x, y)$, mientras que las derivadas de orden superior se obtienen derivando sucesivamente dicha expresión con respecto a x. En general, se cumple que

  $$y^{(k)}(x) = \frac{d^{\,k-1}}{dx^{\,k-1}} f(x, y), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

  donde la función $f(x, y)$ es conocida y proviene de la ecuación diferencial original.

- En los métodos de Adams–Bashforth se define $f_k = f(x_k, y_k)$, y el número de pasos indica la cantidad de valores previos de y_j que deben conocerse para calcular y_{n+1}.

  Por ejemplo, en el método de Adams–Bashforth de **dos pasos** es necesario conocer los valores y_0 y y_1, donde y_1 puede obtenerse mediante alguno de los métodos de un solo paso presentados en la tabla anterior (por ejemplo, el método de Euler o Runge–Kutta de orden 4).

  De manera similar, en el método de Adams–Bashforth de **tres pasos** se requieren los valores y_0, y_1 y y_2, los cuales pueden calcularse previamente utilizando alguno de los métodos de un solo paso.

Ejercicio: Implemente computacionalmente los métodos presentados en la tabla anterior para aproximar la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 1]$ utilizando $n = 6$ subintervalos. Compare los resultados obtenidos con la solución analítica $y(x) = 2e^x - x - 1$, analizando la precisión y el comportamiento de cada método en los puntos obtenidos.