Método de Interpolación por Diferencias Divididas de Newton

1. Introducción

El método de diferencias divididas de Newton es una técnica de interpolación polinómica que construye un polinomio que pasa exactamente por un conjunto de puntos dados. Es particularmente útil cuando se añaden nuevos puntos, ya que no requiere recalcular todo el polinomio desde cero.

2. Definición del Método

2.1. Diferencias Divididas

- **Diferencia Dividida de Orden 0**:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

- **Diferencia Dividida de Orden 1**:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- **Diferencia Dividida de Orden k**:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

2.2. Polinomio Interpolador de Newton

El polinomio interpolador de grado n que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ está dado por:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

3. Ejemplo de Interpolación con 5 Puntos

Consideremos los siguientes puntos $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(3, 10)$, $(4, 17)$, $(5, 26)$.

3.1. Construcción de la Tabla de Diferencias Divididas

Cuadro 1: Tabla de Diferencias Divididas

x	$f[x]$	1° orden	2° orden	3° orden	4° orden
1	**2**				
		3			
2	5		**1**		
		5		**0**	
3	10		1		**0**
		7		0	
4	17		1		
		9			
5	26				

3.2. Cálculos Detallados

3.2.1. Diferencias de Orden 1:

$$
\begin{aligned}
f[1,2] &= \frac{5-2}{2-1} = 3 \\
f[2,3] &= \frac{10-5}{3-2} = 5 \\
f[3,4] &= \frac{17-10}{4-3} = 7 \\
f[4,5] &= \frac{26-17}{5-4} = 9
\end{aligned}
$$

3.2.2. Diferencias de Orden 2:

$$
\begin{aligned}
f[1,2,3] &= \frac{5-3}{3-1} = 1 \\
f[2,3,4] &= \frac{7-5}{4-2} = 1 \\
f[3,4,5] &= \frac{9-7}{5-3} = 1
\end{aligned}
$$

3.2.3. Diferencias de Orden 3:

$$f[1,2,3,4] = \frac{1-1}{4-1} = 0$$
$$f[2,3,4,5] = \frac{1-1}{5-2} = 0$$

3.2.4. Diferencias de Orden 4:

$$f[1,2,3,4,5] = \frac{0-0}{5-1} = 0$$

3.3. Construcción del Polinomio

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 2 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)(x-3) \\ & + 0(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 + 3(x-1) + (x-1)(x-2) \\ &= 2 + 3x - 3 + (x^2 - 3x + 2) \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

4. Pseudocódigo para Implementación Simbólica

Algorithm 1 Interpolación de Newton - Versión Simbólica

```
Require: x ∈ ℝ^(n+1), y ∈ ℝ^(n+1), n                ▷ Vectores de puntos y grado
Ensure: P(X)                                        ▷ Polinomio interpolador simbólico

function NewtonSimbolico(x, y, n)
    // Paso 1: Calcular diferencias divididas simbólicamente
    Declarar tabla ∈ ℝ^((n+1)×(n+1))                ▷ Matriz para diferencias
    Declarar polinomio ← 0                          ▷ Polinomio resultante
    Declarar termino ← 1                            ▷ Término acumulativo (x − x_0)(x − x_1)...

    // Inicializar primera columna con valores y
    for i = 0 to n do
        tabla[i, 0] ← y[i]                          ▷ Diferencias de orden 0
    end for

    // Calcular diferencias divididas recursivamente
    for j = 1 to n do
        for i = 0 to n − j do
            tabla[i, j] ← (tabla[i + 1, j − 1] − tabla[i, j − 1]) / (x[i + j] − x[i])
        end for
    end for

    // Paso 2: Construir polinomio simbólicamente
    polinomio ← tabla[0, 0]                         ▷ Primer término: f[x_0]
    termino ← 1                                     ▷ Inicializar término acumulativo

    for k = 1 to n do
        termino ← termino × (X − x[k − 1])          ▷ Multiplicar por (x − x_(k−1))
        polinomio ← polinomio + tabla[0, k] × termino
    end for

    return polinomio                                ▷ Retornar expresión simbólica del polinomio
end function
```

5. Ejemplo de Uso del Pseudocódigo Simbólico

Algorithm 2 Ejemplo de Aplicación

// Definir puntos de interpolación
$puntos \leftarrow [(1,2),(2,5),(3,10),(4,17),(5,26)]$

// Obtener polinomio interpolador simbólico
$P \leftarrow \text{NewtonSimbolicoExpandido}(puntos)$

// El resultado debería ser: $P(X) = X^2 + 1$
Salida: $P(X) = X^2 + 1$

6. Propiedades y Ventajas

1. **Eficiencia**: Solo se calculan las diferencias necesarias
2. **Flexibilidad**: Fácil añadir nuevos puntos sin recalcular todo
3. **Estabilidad**: Menos propenso a errores numéricos que otros métodos
4. **Estructura**: La tabla organiza sistemáticamente los cálculos