1. Simple Linear Regression

단순 선형 회귀에서는

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

로 표현됩니다.

- y_i: 종속 변수 (관측값)
- x_i: 독립 변수
- β_0, β_1: 회귀 계수
- ϵ_i: 오차항

목표

잔차(residual) $e_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$의 제곱합을 최소화하는 β_0, β_1를 찾습니다. 잔차 제곱합을 S로 정의하면,

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

1.1 최소화 조건

잔차 제곱합 $S(\beta_0, \beta_1)$를 β_0와 β_1에 대해 편미분하여 0으로 만듭니다.

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)) = 0$$

1.2 정리

위 두 식을 정리하면 두 개의 정상 방정식(normal equations)이 나옵니다.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

이를 행렬식으로 풀거나 직접 계산하면 β_0와 β_1는 다음과 같습니다:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

결과

- β_1: 기울기
- β_0: 절편

2. Multiple Linear Regression

다중 선형 회귀에서는

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

로 표현됩니다.

- $\mathbf{y}$: $n \times 1$ 종속 변수 벡터
- $\mathbf{X}$: $n \times p$ 독립 변수 행렬 (첫 열은 1)
- $\boldsymbol{\beta}$: $p \times 1$ 회귀 계수 벡터
- $\boldsymbol{\epsilon}$: $n \times 1$ 오차 벡터

목표

잔차 벡터 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$의 제곱합 S를 최소화합니다:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

2.1 최소화 조건

목적함수 $S(\boldsymbol{\beta})$를 $\boldsymbol{\beta}$에 대해 편미분합니다:

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{X}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

이를 0으로 놓으면,

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{y} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

2.2 정리

정상 방정식을 풀어 $\boldsymbol{\beta}$를 구합니다:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

결과

- $\boldsymbol{\beta}$: 다중 선형 회귀에서의 계수 벡터
- $(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$: 설계 행렬 $\mathbf{X}$의 정보 행렬의 역행렬