Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

4. März 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können.
Ordnung spielt seit jeher eine essentielle Rolle in der Geschichte der Mathematik, aber erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigte man sich mit Ordnung verbunden mit algebraischen Operationen. Derartige Strukturen treten in vielen verschiedenen mathematischen Disziplinen auf. Im 20. Jahrhundert entwickelte sich die Theorie der angeordneten Strukturen, beginnend mit Arbeiten von Hölder, Hahn und Hausdorff. In seinem Werk „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß“ zeigte Hölder 1901, dass sich jede archimedisch angeordnete Gruppe in eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen einbetten lässt. Hölder bediente sich dabei der von Dedekind eingeführten Schnitte in $\mathbb{Q}$. Der österreichische Mathematiker Hans Hahn baute diese Theorie in seinem Werk „Über nichtarchimedische Größensysteme“ auf nichtarchimedisch angeordnete Strukturen aus. Er zeigte, dass diese in Form einer Untergruppe in einen lexikographisch geordneten Funktionenraum eingebettet werden können.
In der vorliegenden Ausarbeitung liegt die Aufmerksamkeit auf der Betrachtung abelscher angeordneter Gruppen. Wenn derartige Gruppen den Definitionsbereich eines lexikographisch geordneten Funktionenraums darstellen, erweist sich dieser als ein Körper. Dabei ist die Wohlordnung des Trägers der Funktionen unverzichtbar.
Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Nach einer kurzen Wiederholung der wichtigsten algebraischen Strukturen erfolgt ein Einblick in die Theorie der angeordneten abelschen Gruppen. Diese benötigen wir später zur Konstruktion des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers. Über die Wohlordnung, führt die Archimedizität zur zentralen Aussage des ersten Kapitels, dem Satz von Hölder. Im zweiten Teil werden Eigenschaften des Rings der formalen Potenzreihen auf den natürlichen Zahlen über einem Körper näher beschrieben. Eine Erweiterung der Menge der formalen Potenzreihe führt uns zum Körper der formalen Potenzreihen auf einer wohlgeordneten Teilmenge der ganzen Zahlen, den Laurentreihen. Basierend auf Arbeiten von Fuchs

und Prieß-Crampe wird die Konstruktion des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers auf einer angeordneten abelschen Gruppe durchgeführt und gezeigt, dass es sich tatsächlich um einen Körper handelt

Kapitel 2

Notationen

$\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen
K^*	die Menge der Einheiten im Körper K
$x \in A$	x ist Element der Menge A
$A \subseteq B (A \subset B)$	A ist eine (echte) Untermenge von B
$A \cap B, A \cup B$	Durchschnitt, Vereinigung der Mengen A, B
$A \setminus B$	die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen
$\varnothing$	die leere Menge
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
|a|	der absolute Betrag von a
P, P(G)	der Positivbereich einer Gruppe G
W_G	Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten Menge G
$a \ll b$	a ist unendlich kleiner als b
$a \sim b$	a ist archimedisch äquivalent zu b
$\langle z \rangle$	die von z erzeugte Untergruppe
Σ	die Menge konvexer Untergruppen einer angeordneten abelschen Gruppe

Kapitel 3

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die Ausarbeitung benötigten theoretischen Grundlagen zusammengestellt. Wir betrachten zunächst zentrale algebraische Strukturen und fokussieren uns im weiteren Verlauf auf Gruppen und Ordnungen, die in ihnen definiert werden können.

3.1 Algebraische Strukturen

Wir beginnen mit der Definition der elementaren algebraischen Strukturen Gruppe, Ring, Körper und Quotientenkörper. Die Vertrautheit mit grundlegenden Begriffen über Mengen und Abbildungen sowie den wichtigen Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird vorausgesetzt. Die folgenden Ausführungen sind orientiert an [SP08] und [Fis08].

3.1.1 Definition

Eine nichtleere Menge G mit der Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G, (a, b) \mapsto a \circ b$, heißt *Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

G1: (Assoziativgesetz) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.

G2: (Neutrales Element) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $1_G \in G$ mit $1_G \circ a = a \circ 1_G = a$ für alle $a \in G$.

G3: (Inverses Element) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element a^{-1} in G mit $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = 1_G$.

Die Gruppe heißt *abelsch*, falls folgendes gilt:

G4: (Kommutativgesetz) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$.

3.1.2 Bemerkung

Wenn $(G, \circ)$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe ist, so wird das Inverse eines Elements

$a \in G$ mit a^{-1} bezeichnet.
Wenn nichts anderes gesagt ist, verwenden wir in abelschen Gruppen die Verknüpfung $+$. Wir nennen das neutrale Element 0_G und $-a$ das Inverse zu $a \in G$.

3.1.3 Beispiel
$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{R},+)$ sind abelsche Gruppen.

3.1.4 Definition
Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1_G. Die Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe*, wenn gilt:

U1: $1_G \in U$.

U2: $a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$.

U3: $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$.

3.1.5 Definition
Sei R eine nichtleere Menge und seien $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel $(R,+,\cdot)$ bezeichnen wir als *Ring mit Eins*, wenn gilt:

R1: $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe (deren neutrales Element mit 0_R bezeichnet wird).

R2: Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ: Für $a, b, c \in R$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Das neutrale Element der Multiplikation wird mit 1_R bezeichnet).

R3: (Distributivgesetze) Für alle $a, b, c \in$ R gilt

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ und } (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

3.1.6 Bemerkung
Ist die Multiplikation kommutativ, so heißt $(R,+,\cdot)$ *kommutativer Ring mit Eins*. Anstelle von $(R,+,\cdot)$ sprechen wir vereinfachend von dem Ring R.

3.1.7 Definition
Sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$.

(a) Ein Element $a \in R$ heißt *Nullteiler*, falls $a \neq 0$ und ein $0 \neq b \in R$ existiert mit $ab = 0$.

(b) Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, falls ein $b \in R$ existiert mit $ab = 1$.

3.1.8 Bemerkung
Falls $a \in R$ eine Einheit ist, existiert das Inverse und es ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen das Inverse mit a^{-1}.

3.1.9 Definition

Ein kommutativer Ring R mit Eins heißt *Integritätsbereich*, falls $R \neq \{0\}$ und es in R keine Nullteiler gibt.

3.1.10 Definition

Sei K eine nichtleere Menge mit mindestens zwei Elementen und seien $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K. Genau dann ist $(K,\ +,\ \cdot)$ ein *Körper*, wenn K ein kommutativer Ring mit Eins ist, sodass jedes Element $0 \neq a \in K$ ein eindeutig bestimmtes multiplikatives Inverses hat.

3.1.11 Satz

Sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren auf $R \times R \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt. Sei $(r,u), (s,v) \in R \times R \setminus \{0\}$. Es gilt, dass $(r,u) \sim (s,v)$ ist genau dann, wenn $rv = su$ ist. Man sieht sofort, dass die Relation reflexiv und symmetrisch ist. Sei $(r,u) \sim (s,v)$ und $(s,v) \sim (t,w)$, also $rv = su$ und $sw = tv$. Wir können nun schreiben:

$$rwv = rvw = suw = swu = tvu = tuv.$$

Nach Voraussetzung ist R ein Integritätsbereich. Da v ungleich null ist, folgt $rw = tu$, so dass $(r,u) \sim (t,w)$ ist. Somit ist $\sim$ transitiv. Auf $R \times R \setminus \{0\}$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(r,u) + (s,v) = (rv + su, uv),$$

$$(r,u)(s,v) = (rs, uv)$$

Wir setzen $\mathrm{Quot}(R) = (R \times R \setminus \{0\}, \sim)$ *und bezeichnen die Äquivalenzklasse von (r,u) mit $\frac{r}{u}$. Nach Definition gilt für $(r,u), (r_1,u_1) \in (R \times R \setminus \{0\}, \sim)$:*

$$\frac{r}{u} = \frac{r_1}{u_1} \text{ genau dann, wenn } ru_1 = ur_1$$

Wir definieren die Addition und Multiplikation der Äquivalenzklassen folgendermaßen:

$$\frac{r}{u} + \frac{s}{v} = \frac{rv + su}{uv}$$

$$\frac{r}{u}\frac{s}{v} = \frac{rs}{uv}$$

$\mathrm{Quot}(R, +, \cdot)$ *ist ein Körper, wir nennen ihn den Quotientenkörper von R.*

Beweis:

Wir zeigen die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen. Sei $(r_1,u_1), (r_2,u_2), (s_1,v_1), (s_2,v_2) \in R \times R \setminus \{0\}$ und $\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2}$ und $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$. Nach Definition gilt $r_1u_2 = u_1r_2$ und $s_1v_2 = v_1s_2$.

Daher erhalten wir:

$$u_1v_1\left(r_2v_2+u_2s_2\right)=u_1v_1r_2v_2+u_1v_1u_2s_2=u_1r_2v_1v_2+u_1u_2v_1s_2=r_1u_2v_1v_2+u_1u_2s_1v_2=u_2v_2\left(r_1v_1+u_1s_1\right)$$

Es gilt also $\frac{r_2v_2+u_2s_2}{u_2v_2}=\frac{r_1v_1+u_1s_1}{u_1v_1}$. Somit ist die Addition wohldefiniert. Die Wohldefiniertheit der Multiplikation folgt analog. Denn für die oben definierten Äquivalenzklassen erhalten wir $u_2v_2\left(r_1s_1\right)=u_2v_2r_1s_1=r_1u_2s_1v_2=u_1r_2v_1s_2=u_1v_1\left(r_2s_2\right)$. Die Menge (Quot(R), $+$) ist eine abelsche Gruppe. Die Assoziativität und Kommutativität können leicht nachgerechnet werden. Das neutrale Element der Addition ist $0=\frac{0}{1}$, das negative Element der Addition ist $-\left(\frac{r}{u}\right)=\frac{-r}{u}$. Weiter ist (Quot(R), $\cdot$) eine abelsche Gruppe, wobei $\frac{1}{1}$ das neutrale Element und $\left(\frac{r}{u}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$ das inverse Element ist.
Das Distributivgesetz kann mithilfe der Bruchrechenregeln leicht gezeigt werden. Somit ist der Körper (Quot(R), $+$, $\cdot$) konstruiert. □

3.1.12 Bemerkung

Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

3.1.13 Beispiel

Es gilt $\text{Quot}(\mathbb{Z})=\mathbb{Q}$.

3.1.14 Beispiel

Ist D $\subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\mathcal{O}(D)$ der in D holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt $M\left(D\right):=\text{Quot}(\mathcal{O}\left(D\right))=\{\frac{f}{g}:f,g\in\mathcal{O}(D),\ g\neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen. Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert.

3.1.15 Definition

Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* ist ein K-Vektorraum V, auf dem zusätzlich eine Multiplikation $(v,w)\mapsto v\cdot w$ definiert ist und für den gilt:

(a) $(V,+,\cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.

(b) Für $v,w\in V$ und $\lambda\in K$ gilt $\lambda\left(vw\right)=\left(\lambda v\right)w=v\left(\lambda w\right)$

3.2 Angeordnete algebraische Strukturen

3.2.1 Anordnung

3.2.1 Definition

Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn es eine Relation " $\leq$ " auf A gibt die folgende Eigenschaften für alle $a,b,c\in A$ erfüllt.

- T1: (Reflexivität) $a \leq a$,
- T2: (Antisymmetrie) Aus $a \leq b$ und $b \ \leq a$ folgt $a = b$,
- T3: (Transitivät) Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

Die Relation " $\leq$ " bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 die anschließende Bedingung erfüllt ist:

- T4: Für alle $a, b \in A$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$. Dabei gilt $a < b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$ ist.

3.2.2 Definition

Seien A und A' teilweise geordnete Mengen. Eine Abbildung $\phi\colon A \to A', a \mapsto a'$ wird *Ordnungsisomorphismus* von A nach A' genannt, falls folgende Anforderungen erfüllt sind:

(a) (Ordnungstreue) Wenn $a \leq b$ gilt, so folgt $\phi(a) \leq \phi(b)$ für alle $a, b \in A$.

(b) (Bijektivität) Für jedes $a' \in A'$ existiert genau ein $a \in A$, mit $a' = \phi(a)$.

A und A' werden in diesem Fall *ordnungsisomorph*, kurz *o-isomorph* genannt.

3.2.3 Definition

Eine *teilweise geordnete Gruppe* bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

- G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,
- G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation " $\leq$ ", wie in 3.2.1,
- G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: Für $a, b \in G$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $ca \leq cb$ und $ac \leq bc$ für alle $c \in G$.

3.2.4 Definition

Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

3.2.5 Beispiel

Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G ist bezüglich der selben Relation wie G angeordnet.

3.2.6 Beispiel

Wir betrachten die natürliche Ordnung auf den natürlichen, ganzen und reellen Zahlen.

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für $a, b \in \mathbb{N}$, dass

$$a \leq b \text{ genau dann gilt, wenn } b - a \in \mathbb{N}_0$$

für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$, dass

$$a \leq b \text{ ist, genau dann, wenn } b - a \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } a = b \text{ gilt.}$$

(c) Die Gruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$a \leq b \text{ ist, genau dann, wenn } 0 \leq b - a \text{ gilt.}$$

3.2.7 Bemerkung
Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus obiger Definition einer angeordneten Gruppe. Denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei, so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz G3 ergeben. □

3.2.8 Bemerkung
Wir nennen P den *Positivbereich* von G.

P1: $\{0\} \cup P \cup -P = G$, $P \cap -P = \varnothing$,

P2: $P \circ P \subseteq P$,

P3: $x + P + (-x) \subseteq P$ für jedes $x \in G$.

Genügt eine Teilmenge $P = \{x \in G | x \geq 1\}$ einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so nennt man $(G, \circ)$ *anordnungsfähig.*

3.2.9 Beispiel
Ist G mit dem Positivbereich P eine angeordnete Gruppe, so ist G auch mit dem Positivbereich $(-P)$ eine angeordnete Gruppe. Die Abbildung $a \mapsto -a$ ist ein Ordnungsisomorphismus.

3.2.2 Wohlordnung

Nun beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Wohlordnung. Diese wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. Wir definieren wohlgeordnete Mengen wie in [Fuc66, S. 16].

3.2.10 Definition

Eine angeordnete Menge W nennt man *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Es existiert also ein Element $u \in V$ mit $u \leq v$ für alle $v \in V$.

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Dieses Theorem, so stellte sich nach erfolglosen Widerlegungsversuchen zahlreicher Mathematiker heraus, ist äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Lemma von Zorn.
Beispielsweise ist die natürliche Anordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist mit der natürlichen Anordnung " $\leq$ " total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt sind und somit $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element enthält. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

3.2.11 Bemerkung

Ist $W \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat W ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element.

3.2.12 Bemerkung

Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet.

3.2.13 Beispiel

Betrachte folgende Relation " $\preceq$ " auf $\mathbb{Z}$:

$$a \preceq b \text{ genau dann, wenn } |a| \leq |b| \text{ oder } |a| = |b| \text{ und } a \leq b$$

ist. Die Relation " $\preceq$ " ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$ und wir erhalten $0 \preceq -1 \preceq 1 \preceq -2 \preceq 2 \preceq -3 \preceq 3 \ldots$.

Kapitel 4

Angeordnete abelsche Gruppen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die zur Betrachtung des Potenzreihenkörpers benötigt werden. Nach einer Einführung in die Theorie angeordneter abelscher Gruppen beschäftigen wir uns mit deren Wohlordnung, eine Eigenschaft, die für die Konstruktion des Potenzreihenkörpers unabdingbar ist. Mithilfe der Archimedizität führen wir eine spezielle Art der Anordnung von Gruppen ein. Die Familie der konvexen Untergruppen führt uns zu Aussagen über die Anordnungsfähigkeit von Gruppen. Daran schließt die zentrale Aussage des Kapitels an: der Satz von Hölder. Der Satz besagt, dass archimedisch angeordnete Gruppen in die additive Gruppe des $\mathbb{R}$ eingebettet werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen sind angelehnt an [Fuc66, S. 21 - 28] und [PC83, S. 1 - 4].

4.0.14 Definition
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist ein Tripel $(G, +, \leq)$, wobei $(G, +)$ eine additiv geschriebene abelsche Gruppe ist, die bezüglich „ $\leq$ " total geordnet ist.

4.0.15 Notation
Wir verwenden im Hauptteil 5 für eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +, \leq)$ meist vereinfachend die Bezeichnung G.

4.0.16 Bemerkung
Ist eine abelsche Gruppe G mit dem Positivbereich P angeordnet, so definieren wir $a \leq b$ genau dann, wenn $b - a \in P$ ist für $a, b \in G$.

4.0.17 Beispiel

- Die Menge der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.
- Die Menge der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.

4.1 Wohlordnung in angeordneten abelschen Gruppen

Die folgenden Aussagen orientieren sich an der Arbeit „A residue theorem for Malcev–Neumann series“ von Guoce Xin.

4.1.1 Satz

Sei “ $\leq$ ” eine totale Ordnung auf der Menge W. Dann ist W genau dann wohlgeordnet, wenn es keine streng monoton fallende Folge in W gibt.

Beweis:

“ $\Rightarrow$ ” Sei W wohlgeordnet. Angenommen es gibt eine streng monoton fallende Folge von Elementen in W, nämlich $a_1 > a_2 > a_3 > ....$ Damit erhalten wir eine Teilmenge $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, die kein kleinstes Element besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Wohlordnung von W.
“ $\Leftarrow$ ” Es gibt keine streng monoton fallende Folge in W. Angenommen W ist nicht wohlgeordnet. Dann gibt es eine Teilmenge A von W, die kein kleinstes Element enthält. Für ein beliebiges Element $a_1 \in A$ finden wir ein $a_2 \in A$ mit $a_2 < a_1$. Dieses Verfahren lässt sich endlos fortsetzen und wir erhalten eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > a_3 > ...$, Widerspruch. □

4.1.2 Beispiel

Total geordnete endliche Mengen sind wohlgeordnet.

Betrachte nun die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen W_A einer total geordneten Menge A, die nicht zwangsläufig wohlgeordnet ist.

4.1.3 Lemma

Sei $w_n \in W_A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} w_n \in W_A$, und für $w_1, w_2 \in W_A$ gilt $w_1 \cup w_2 \in W_A$.

Beweis:

Die erste Aussage ist trivial. Zum Beweis der zweiten Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $w_1 \cup w_2$ sei nicht wohlgeordnet, dann gibt es nach 4.1.1 eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > ...$ in $w_1 \cup w_2$.
Betrachten wir alle Elemente der Teilmenge w_1. Wir können diese, da w_1 total geordnet ist, als Folge $a_{i_1} > a_{i_2}...$ schreiben. Aufgrund der Wohlordnung von w_1 ist die so erhaltene fallende Folge endlich. Die selbe Argumentation wählen wir für w_2 und erhalten die endliche fallende Folge $a_{j_1} > a_{j_2}....$ Aber jedes Element der streng monoton fallenden Folge $a_1 > a_2 > ...$ ist in einer der beiden endlichen Folgen enthalten. Widerspruch! □

Die Menge W_A ist somit unter endlicher Vereinigung und dem Schnitt über $n \in \mathbb{N}$ Elementen abgeschlossen.

4.1.4 Lemma

Wir betrachten eine total geordnete Menge A. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A erfüllt mindestens eine der drei folgenden Eigenschaften:

(1) $a_1, a_2, ...$ enthält eine streng monoton wachsende Teilfolge.

(2) $a_1, a_2, ...$ enthält eine konstante Teilfolge.

(3) $a_1, a_2, ...$ enthält eine streng monoton fallende Teilfolge.

Beweis:

Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt weder die Bedingung (2) noch (3). Wir wollen zeigen, dass sie eine streng monoton wachsende Teilfolge enthält.
Da die Folge nach Voraussetzung keine streng monoton fallende Teilfolge enthält, gibt es ein kleinstes Element a_{i_1}. Andernfalls ließe sich eine streng monoton fallende Teilfolge konstruieren. Es werden alle Folgenglieder a_n mit $a_n = a_{i_1}$ aus $(a_n)_{n\geq 1}$entfernt. Die Folge bleibt unendlich, da es nur endlich viele Folgenelemente nach Voraussetzung gibt, die gleich a_{i_1} sind. In der daraus entstandenen Folge ist jedes Element größer als a_{i1}. Sie enthält wiederum keine streng monoton fallende oder konstante Teilfolge. In der so entstandenen Folge ist jedes enthaltene Element echt größer als a_{i1}.
Wir wiederholen das durchgeführte Verfahren und konstruieren so die streng monoton wachsende Teilfolge $a_{i1} < a_{i2} < ....$

□

Bernhard Hermann Neumann, ein deutsch-englisch-australischer Mathematiker, bewies in seinem Werk „On ordered division rings“ [Neu, S. 206] die beiden folgenden wichtigen Lemmata, deren volle Bedeutung sich im Hauptteil 5.7 erschließen wird.

4.1.5 Lemma

Die Menge W ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W eine monoton steigende Teilfolge $w_{\tau(1)} \leq w_{\tau(2)} \leq ...$ enthält.

Beweis:

“ $\Rightarrow$ ” Sei die total geordnete Menge W wohlgeordnet. Dann gilt nach Lemma 4.1.4 und mit Satz 4.1.1, dass eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W entweder eine streng monoton steigende oder konstante Teilfolge enthält. Jede Folge aus W besitzt daher eine monoton steigende Teilfolge.
“ $\Leftarrow$ ” Jede Folge von Elementen aus W enthält eine monoton steigende Teilfolge. Angenommen W sei nicht wohlgeordnet. Nach Satz 4.1.1 existiert somit eine streng monoton fallende Folge in W. Nach Voraussetzung muss jede Folge eine monoton steigende Teilfolge enthalten. Dies führt zu einem Widerspruch, da eine streng monoton fallende Folge keine monoton steigende Teilfolge enthalten kann. □

Wir bezeichnen die Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten abelschen Gruppe G mit W_G.

4.1.6 Lemma (Lemma von B.H. Neumann)
Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe und $V, W \subseteq G$ wohlgeordnet, dann ist $U = V + W$ ebenso wohlgeordnet.

Beweis:

Sei

$$u_1 = v_1 + w_1,\ u_2 = v_2 + w_2\ ...,\ \text{mit } v_r \in V, w_r \in W \text{ und } r \in \mathbb{N}$$

eine beliebige Folge von Elementen aus U. Es gibt eine monoton steigende Teilfolge $v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, ...$ mit $v_{\tau(1)} \leq v_{\tau(2)} \leq ...$ in der Menge V. Die entsprechende Folge in W, nämlich $w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, ...$ enthält ebenso eine monoton steigende Teilfolge $w_{\tau(\sigma(1))} \leq w_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Daraus folgt, es gibt zu der beliebigen Folge von Elementen aus U ebenso eine monoton steigende Teilfolge $u_{\tau(\sigma(1))} \leq u_{\tau(\sigma(2))} \leq ...$, Nach Lemma 4.1.5 ist U damit wohlgeordnet. □

4.1.7 Folgerung
Seien V, W wohlgeordnete Teilmengen einer angeordneten Gruppe G, dann gibt es für ein $g \in G$ nur endlich viele Paare $(v, w) \in V \times W$ mit $v + w = g$.

Beweis:

Angenommen es gäbe unendlich viele paarweise verschiedene $(v_n, w_n) \in V \times W$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass $g = v_n + w_n$. Da V und W wohlgeordnet sind, besitzt weder $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Teilfolge. Die Folge $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält keine konstante Teilfolge, da sie nach Voraussetzung paarweise verschiedene Glieder besitzt. Nach Satz 4.1.4 hat $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge. Widerspruch, da g konstant bleiben muss. □

4.2 Archimedisch angeordnete abelsche Gruppen

Erst seit dem Ende des 19. Jahrhunderts kristallisierte sich die hohe Bedeutung angeordneter Strukturen in der Mathematik heraus. Man erkannte, dass das archimedische Axiom unverzichtbar für die nähere Untersuchung dieses Bereichs war. Es spielte unter anderem eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der reellen Zahlen mithilfe des Dedekindschen Schnittes (1872). Genau genommen ermöglicht die archimedische Eigenschaft die Herstellung von Kommutativität und Vollständigkeit.
Wir orientieren uns an dem Kapitel „Angeordnete Gruppen“ in [Fuc66, S. 73 - 93], sowie an Arbeiten von Prieß-Crampe [PC70], [PC83].
Im Folgenden sei G eine angeordnete abelsche Gruppe.

4.2.1 Definition

Der *absolute Betrag* $|a|$ eines Elements a $\in G$ ist definiert als $|a| = \max\{a, -a\}$.

Es gilt die *Dreiecksungleichung* für alle $a, b \in G$:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \text{ für alle } a, b \in G.$$

Die Ungleichung gilt trivialerweise wenn beide Elemente das gleiche Vorzeichen haben. Sei also $a < 0$ und $b > 0$. Dann ist $a = -|a|$.
Falls $|a| \leq b$ ist, erhalten wir

$$|a + b| = |-|a| + b| = b - |a| \leq b = |b| \leq |a| + |b|.$$

Falls $|a| > b$ ist, erhalten wir

$$|a + b| = |-|a| + b| = |a| - b \leq |a| \leq |a| + |b|.$$

4.2.2 Definition

G heißt *archimedisch*, wenn es für alle $a, b \in G$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

4.2.3 Definition

Seien $a, b \in G$. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n|a| < |b|.$$

In Zeichen schreiben wir $a \ll b$.

4.2.4 Definition

Die Elemente $a, b \in G$ werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, wenn natürliche Zahlen m und n existieren, so dass:

$$|a| < m|b| \text{ und } |b| < n|a|.$$

In diesem Fall schreiben wir $a \sim b$.

4.2.5 Folgerung

Für jedes Paar von Elementen $a, b \in G$ gilt genau eine der anschließenden Relationen:

(i) $a \ll b$ (ii) $a \sim b$ (iii) $b \ll a$,

Des Weiteren schließen wir aus Definition 4.2.3 und 4.2.4:

(i) Aus $a \ll b$ und $a \sim c$ folgt $c \ll b$;

(ii) Aus $a \ll b$ und $b \sim d$, folgt $a \ll d$;

(iii) Aus $a \ll b$ und $b \ll c$ folgt $a \ll c$;

(iv) Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$;

(v) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Sind alle Elemente von $G \setminus \{0\}$ archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet*.
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne $[g]$ die *archimedische Klasse* in der das Element $g \in G$ liegt, $[G]$ die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G.

4.3 Der Satz von Hölder

In diesem Abschnitt werden wir einen sehr wichtigen Satz der Theorie angeordneter Strukturen vorstellen, den *Satz von Hölder*. Dieser Satz besagt, dass jede archimedisch angeordnete Gruppe bis auf Isomorphie einer Untergruppe der angeordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen entspricht. Zwar wird der Beweis dieser Aussage in der verwendeten Literatur Otto Hölder (1901)[Hö01] zugeschrieben, die grundlegenden Ideen dazu lieferte jedoch bereits Bettazi in seinem Werk „Teoria delle grandezze“, 1890[Lü08, S. 578].
Wir orientieren uns hierbei an [Hö01] und [PC83].

4.3.1 Satz
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie zu einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist.

Beweis:

“ $\Leftarrow$ ” Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch angeordnet ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.
“ $\Rightarrow$ ” Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. G besitzt also einen Positivbereich P. Nach Voraussetzung erfüllt G die archimedische Eigenschaft. Sei $G \neq \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element der Addition in G ist. Andernfalls wäre G isomorph zu $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, der trivialen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Angenommen der Positivbereich P hat ein kleinstes Element. Es gibt also ein $g \in P$ mit $0_G \leq g$ wobei für jedes $h \in G$, mit $0_G \leq h \leq g$, folgt, dass $h = 0_G$ gilt. Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem $h \in G$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass $ng \leq h \leq (n+1)\,g$ gilt. Daher erhalten wir $0 \leq h + (-n)\,g \leq (n+1)g - ng = g$. Also gilt, dass $h + (-n)\,g = 0$ ist. Infolgedessen ist $G = \langle g \rangle$, wobei $\langle g \rangle$ die von g erzeugte Untergruppe ist, o-isomorph zur

Gruppe der ganzen Zahlen ist bezüglich der Zuordnung $ng \mapsto n$.
Im weiteren Beweis gehen wir davon aus, dass P kein kleinstes Element hat. Es lässt sich also zu jedem $g \in P$ ein $h \in G$ finden, sodass $0 < h < g$ gilt. Wir bezeichnen die Gruppe G dann als *dicht*.
Wir wählen ein Element $\alpha \in P$ beliebig. Für jedes $g \in P$ definieren wir:

$$S_g := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{>0} | m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \leq ng\} \subset \mathbb{Q}_{>0}.$$

Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $m\alpha \leq ng \Leftrightarrow mp\alpha \leq np\alpha$. Die Darstellung von $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen hängt also nicht damit zusammen, ob r in S_g enthalten ist.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es, einen Monomorphismus zu finden, der G auf die additive Gruppe der reellen Zahlen abbildet. Wir zeigen nun folgende Aussagen:

(i) Für alle $g \in S_g$ gilt $S_g \neq \varnothing$ und $S_g \neq \mathbb{Q}_{>0}$. Für $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $s \in S_g$ mit $r < s$ folgt $r \in S_g$.

(ii) S_g ist nach oben beschränkt für alle $g \in G$. Die Abbildung $\Phi : P \to \mathbb{R}^+, g \mapsto \sup\{S_g\}$ ist somit wohldefiniert.

(iii) Für alle $g, h \in P$ gilt $g \leq h$ genau dann, wenn $S_g \subseteq S_h$ ist. Dies gilt genau dann, wenn $\Phi(g) \leq \Phi(h)$ erfüllt ist.

(iv) Sei $g, h \in P$ und $r, s \in \mathbb{Q}_{>0}$. Sei $r \in S_g$ und $s \in S_h$ so folgt $r + s \in S_{g+h}$.
Sei $r \notin S_g$ und $s \notin S_h$, so folgt $r + s \notin S_{g+h}$.

(v) Es gilt $\Phi(g + h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für alle $g, h \in P$.

(vi) Φ wird fortgesetzt auf die gesamte Gruppe G durch $\Phi(0_G) = 0$ und $\Phi(-g) = -\Phi(g)$ für alle g $\in P$.

Insgesamt ist Φ ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen und damit ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Zu (i): Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem Element $g \in P$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng > \alpha$. Nach Definition von S_g gilt $\frac{1}{n} \in S_g$ und somit ist S_g nicht leer.
Angenommen $S_g = \mathbb{Q}_{>0}$, dann wäre $n \in S_g$ beziehungsweise $n\alpha \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Seien $r, s \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt $kn < lm$ und da $s \in S_g : m\alpha \leq ng$ und $kn\alpha \leq lm\alpha \leq lng$. Daraus wiederum folgt: $\frac{kn}{ln} = r \in S_g$.
Zu (ii): Angenommen S_g wäre unbeschränkt, dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in S_g$ mit n

$<$ r. Nach (i) folgt daraus $n \in S_g$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n\alpha \leq g$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Zu (iii): Zunächst beweisen wir die erste Implikation. Sei $g, h \in P$ und es gelte $g \leq h$. Sei $r \in S_g$, $r := \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir $m\alpha \leq ng$. Da $g \leq h$ ist, folgt $m\alpha \leq nh$ und damit $r \in S_h$. Die zweite Implikation folgt nach Definition von Φ offensichtlich.
Sei $\Phi(g) \leq \Phi(h)$. Angenommen es sei $g > h$. Nach der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(g-h) > 2\alpha$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ möglichst klein mit $m\alpha > nh$. Dieses m existiert, aufgrund der Archimedizität von G. Es gilt $\frac{m}{n} \notin S_h$ und $\frac{m}{n} \geq \Phi(h)$. Da m minimal ist, gilt die Ungleichung $(m-1)\alpha \leq nh$ und wir erhalten $(m+1)\alpha \leq nh + 2\alpha < nh + n(g-h) = ng$ und $\frac{m+1}{n} \in S_g$, also $\frac{m+1}{n} \leq \sup(S_g) = \Phi(g)$. Insgesamt ergibt sich $\Phi(h) \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq \Phi(g)$, Widerspruch.
Zu (iv): Sei $r \in S_g, s \in S_h$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $k\alpha < lg$ und $m\alpha \leq nh$. Wir erhalten $kn\alpha \leq lng$ und $lm\alpha \leq lnh$. Somit liegt $r + s = \frac{kn+lm}{ln}$ in der Menge S_{g+h}. Die zweite Aussage folgt analog indem in Obigem " $\leq$ " durch " $>$ " ersetzt wird.
Zu (v): Als erstes zeigen wir, dass $\Phi(g)+\Phi(h)$ eine obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gibt ein $r \in S_{g+h}$ mit $r > \Phi(g)+\Phi(h)$. Wähle $\epsilon = r - \Phi(g) - \Phi(h)$ und wähle s, t $\in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $\Phi(g) < s < \Phi(g) + \frac{\epsilon}{2}$ und $\Phi(h) < t < \Phi(h) + \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt folgt $s + t < \Phi(g) + \Phi(h) + \epsilon = r$. Da $s \notin S_g$ und $t \notin S_h$ gilt $s + t \notin S_{g+h}$ nach (iv). Wir erhalten $s + t \geq \Phi(g+h) \geq r$ und der Widerspruch $r \leq s + t < r$ zeigt, dass ein derartiges r nicht existieren kann.
Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(g) + \Phi(h)$ die kleinste obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gäbe eine kleinere obere Schranke $o \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\epsilon = \Phi(g) + \Phi(h) - o$. Nach Definition der Abbildung gibt es ein $r \in S_g$ mit $r < \Phi(g) - \frac{\epsilon}{2}$ und $s \in S_h$ mit $s < \Phi(h) - \frac{\epsilon}{2}$. Nach (iv) ist $r + s$ in S_{g+h} und daher $r + s \leq o$. Widerspruch, da $r + s > \Phi(g) + \Phi(h) - \epsilon = o$.
Zu (vi): Falls $g, h > 0_G$ ist haben wir bereit gezeigt, dass aus $g \leq h$ folgt, dass $\Phi(g) \leq \Phi(h)$ ist. Die Aussage gilt offensichtlich, wenn eines der beiden Elemente g oder h gleich Null ist. Sei $g < 0_G$ und $h > 0_G$, dann folgt die Behauptung nach Definition. Die Behauptung bleibt für $g, h < 0_G$ zu zeigen. Wir erhalten

$$g \leq h \Leftrightarrow -g \geq -h \Leftrightarrow \Phi(-g) \geq \Phi(-h) \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h).$$

Wir zeigen nun $\Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für beliebige $g, h \in G$. Es genügt dies für $g, h < 0_G$ zu beweisen. Hier kann auf das bereits Bewiesene zurückgegriffen werden:

$$\Phi(g+h) = -\Phi((-g)+(-h)) = (-\Phi(-g)) + (-\Phi(-h)) = \Phi(g) + \Phi(h).$$

Nun betrachten wir den Fall $g \geq -h$. Dann ist $g + h \geq 0_G$, und nach der bereits gezeigten Aussage folgern wir:
$\Phi(g+h) + \Phi(-h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) - \Phi(h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$.
Setzen wir nun $g < -h$ voraus. Dann ist $-g - h > 0$, also $\Phi(g) + \Phi(-g-h) = \Phi(-h)$, was

äquivalent zu $\Phi(g) - \Phi(g+h) = -\Phi(h)$ und zu $\Phi(g) + \Phi(h) = \Phi(g+h)$ ist.
Die übrigen Fälle folgen analog. Da Φ offensichtlich eine monoton steigende Funktion ist, ist Φ ein ordnungserhaltender Isomorphismus. □

4.3.2 Satz

Sei $(G, +)$ eine Untergruppe der natürlich geordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen und $\phi : G \to \mathbb{R}$ ein injektiver o-Homomorphismus. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist ϕ ein injektiver o-Homomorphismus und damit sind mit $0 < g_1, g_2 \in G$ auch $\phi(g_1)$ und $\phi(g_2)$ positiv. Angenommen es gilt, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} \neq \frac{g_1}{g_2}$, so gibt es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, die zwischen $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)}$ und $\frac{g_1}{g_2}$ liegt. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} < \frac{m}{n} < \frac{g_1}{g_2}$ ist. Weiterhin gehen wir davon aus, dass $n \cdot g_1 > m \cdot g_2$ ist. Nach der archimedischen Eigenschaft der Gruppe G stehen die Bilder $\phi(n \cdot g_1)$ und $\phi(m \cdot g_2)$ in umgekehrter Größenbeziehung zueinander. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Ordnungstreue der Abbildung ϕ. Folglich ist $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} = \frac{g_1}{g_2}$. Wir erhalten somit auch für alle positiven Elemente $g \in G$, dass die Gleichung $\frac{\phi(g_1)}{g_1} = \frac{\phi(g)}{g}$ erfüllt ist.
Für die negativen Gruppenelemente $g \in G$, mit $g < 0$ und daher $-g > 0$ erhalten wir aufgrund der Homomorphismuseigenschaften $\frac{\phi(g)}{g} = \frac{(-1)\cdot\phi(g)}{(-1)\cdot g} = \frac{\phi(-g)}{-g} = \frac{\phi(g_1)}{g_1}$. Mit der positiven Konstanten $r = \frac{m}{n} = \frac{\Phi(g_1)}{g_1}$ ist die Aussage $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$ gezeigt. □

Die Grundaussage dieses Satzes bewies Hion 1954 in seinem russischsprachigen Werk „Archimedisch geordnete Ringe“. Er setzte jedoch einen o-Homomorphismus zwischen zwei Untergruppen der additiven angeordneten Gruppe der reellen Zahlen voraus, ebenso wie Fuchs und Prieß-Crampe, die den Satz in ihre Arbeiten mitaufnahmen. Der Satz 4.3.2 impliziert weiterhin die o-Isomorphie zwischen der Gruppe der ordnungserhaltenden Automorphismen der archimedischen Gruppe und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen. [PC83]

4.4 Die angeordnete Menge konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten abelschen Gruppe. Wir benötigen einige Eigenschaften dieser Menge an speziellen Untergruppen für den Nachweis des Inversen im verallgemeinerten Potenzreihenkörper. Untergruppen teilweise geordneter Gruppen besitzen eine durch die teilweise Gruppenordnung induzierte teilweise Ordnung. Wir bezeichnen die Untergruppen als angeordnet, falls die ursprüngliche teilweise Ordnung ebenso eine Anordnung war.
Sei $(G, +)$ eine Gruppe, U eine Untergruppe und $g \in G$. Wir untersuchen nun die bezüglich der Inklusion linear angeordnete Menge Σ konvexer Untergruppen von G. Wir orientieren unsere

Ausführungen an [Fuc66, S. 81 - 83] und [PC83, S. 3].

4.4.1 Definition

Eine Untergruppe U einer angeordneten abelschen Gruppe G nennen wir *konvex*, wenn aus $a \in U$, $x \in G$, mit $0 < |x| < |a|$ folgt $x \in U$.

"Σ" bezeichne nun die *Menge konvexer Untergruppen* einer angeordneten abelschen Gruppe $(G, +)$.

4.4.2 Definition

Sei $C, D \in \Sigma$. Wenn $D \subset C$ und Σ keine weitere Untergruppe zwischen C und D enthält, nennen wir das Paar $C,\ D$ *Sprung* in Σ und bezeichnen es mit $D \prec C$.

4.4.3 Satz

Die Menge der konvexen Untergruppen Σ besitzt folgende Eigenschaften:

S1: Die Vereinigung und der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen aus Σ liegen wieder in Σ.

S2: Ist $C \in \Sigma$ und $g \in G$, so ist $-g + C + g \in \Sigma$

S3: Sei $D \prec C$ in Σ, so ist D normal in C und C/D ist isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.

Beweis:

Zu S1: Seien $C, D \in \Sigma$ konvexe Untergruppen der angeordneten abelschen Gruppe G und sei $c \in C, c \notin D$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, c ist bezüglich der Anordnung von G größer als das neutrale Element 0_G. Da c nicht in D liegt, kann es kein Element $d \in D$ geben, sodass $0_G < c < d$. In diesem Fall würde c nach der konvexen Eigenschaft in D liegen. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und daher gilt $D \subseteq C$. Der Schnitt $C \cap D = D$, da $D \subseteq C$. Die Untergruppe D ist konvex nach Voraussetzung. Ebenso gilt $C \cup D = C$ und C ist auch eine konvexe Untergruppe nach Voraussetzung. Damit folgt unmittelbar, dass sowohl der Schnitt konvexer Untergruppen wieder angeordnet und konvex ist, als auch die Vereinigung.
Zu S2: Jede Untergruppe einer angeordnet abelschen Gruppen ist ein Normalteiler. Die Aussage folgt also sofort aus den Eigenschaften einer angeordneten abelschen Gruppe. Zu S3: Der erste Teil der Aussage ist trivial (s. Beweis S2). In Σ existiert keine Untergruppe zwischen C und D. Die Faktorgruppe C/D enthält dementsprechend nur die trivialen konvexen Untergruppen 0_G und G. Wir zeigen zunächst, dass C/D archimedisch geordnet ist. Sei $0_G \neq g \in G$. Das Element $h \in C/D$ gehört nicht zu einer von $g \in C/D$ erzeugten konvexen Untergruppe, wenn

$ng < h$ für $b = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Da C/D nur die trivialen konvexen Untergruppen enthält, ist $g = 0_G$. Die Faktorgruppe ist archimedisch angeordnet. Der Satz von Hölder 4.3.1 liefert nun, dass C/D isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist. □

4.5 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +)$ und eine angeordnete Menge Θ mit 0 als kleinstem Element. Die Ausführungen sind orientiert an dem Kapitel „Archimedische Klassen, Bewertungen und Bedingungen für die Anordnungsfähigkeit von Gruppen" in [PC83, S. 9 - 11].

4.5.1 Definition

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. Die surjektive Funktion $v\colon G \to \Theta$ wird als *Bewertung* bezeichnet, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

B1: $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in G$,

B2: $v(a) = -v(a)$ für alle $a \in G$,

B3: $v(a + b) \leq \max\{(v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in G$.

Die Gleichheit in der Bedingung [B3] gilt dann, wenn $v(a) \neq v(b)$ ist.
Zwei Bewertungen v, v' auf G mit den Wertemengen Θ, Θ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma\colon \Theta \to \Theta'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v$ ist.
Sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe. Wir bezeichnen die archimedische Klasse, in der das Element $a \in G$ liegt mit $[a]$. Die Gesamtheit der archimedischen Klassen von G nennen wir $[G]$. Die Abbildung $G \to [G]\colon a \mapsto [a]$ definieren wir als *natürliche Bewertung*.

4.5.2 Definition

Sei K ein Körper, $(G, +)$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\overline{G} = G \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $v\colon K \to \overline{G}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

B1': $v(a) = \infty$ genau dann, wenn $a = 0$ ist,

B2': $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K$,

B3': $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Man bezeichnet $v\colon K \to \overline{G}$ als *diskrete Bewertung*, falls $G = \mathbb{Z}$ ist.

4.5.3 Definition

Der Unterring A eines Körpers K wird als *Bewertungsring* bezeichnet, wenn $a \in A$ oder $a^{-1} \in A$ für jedes $a \in K$ gilt.

4.5.4 Bemerkung

Ist (K, v) ein bewerteter Körper, dann ist $A = \{a \in K : v(a) \geq 0_K\}$ ein Bewertungsring.

4.5.5 Definition

Ein Integritätsring R heißt *diskreter Bewertungsring*, falls es auf dem Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ von R eine Bewertung $v : \mathrm{Quot}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gibt und

$$R = \{x \in \mathrm{Quot}(R) : v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$$

der Bewertungsring von v ist.

Eine weitere, äquivalente, Definition eines diskreten Bewertungsrings findet man in [Neu92, S. 126].

4.5.6 Definition

Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein Hauptidealring mit einem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{p}$.

Kapitel 5

Potenzreihenkörper

Die aus der Analysis bekannten Potenzreihen stellen ein bekanntes und wichtiges Werkzeug dar. In mathematischen Gebieten, wie der Kombinatorik, Automaten- und Kontrolltheorie ermöglichen sie sowohl eine kompakte Darstellung von Summenformeln, als auch deren Auffindung. Potenzreihen können ebenso über den Weg der Algebra definiert werden, anhand der Folge ihrer Koeffizienten. In der algebraische Sichtweise wird grundsätzlich auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet. Dadurch kann auf beliebigen Körpern und Ringen gearbeitet werden. Die sogenannten formalen Potenzreihen in einer Unbekannte z, auf den natürlichen Zahlen, deren Koeffizienten in einem beliebigen Körper K liegen, bilden einen Ring $K[[z]]$. Aufbauend darauf stellen wir einen Zusammenhang zu den, in der Funktionentheorie häufig verwendeten, Laurentreihen her. Der Ring der formalen Potenzreihen ist ein Integritätsring. Daraus folgt, dass dieser in einen kleinsten Körper eingebettet werden kann. Dieser Quotientenkörper von $K[[z]]$ entspricht genau dem Körper $K((z))$, den die Laurentreihen formen.
Potenzreihen bilden somit algebraische Strukturen, deren Beschaffenheit von dem Träger der Reihen abhängt. Daher stellt sich die Frage, ob die formalen Potenzreihen weiter verallgemeinert werden können und welche Voraussetzungen der Träger erfüllen muss, damit diese allgemeinen formalen Potenzreihen einen Körper ergeben.

5.1 Formale Potenzreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den formalen Potenzreihen auf den natürlichen Zahlen. Wir definieren die Verknüpfungen zwischen formalen Potenzreihen und zeigen, welche algebraischen Strukturen die Menge der formalen Potenzreihen bildet.

5.1.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe* über K ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to K$, $n \mapsto a_n$.

5.1.2 Bemerkung zur Notation

Wir werden formale Potenzreihen im Folgenden immer als Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^1 + a_2 z^2 + ... \tag{5.1}$$

schreiben, mit $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Anstelle von $f(z)$ schreiben wir vereinfachend f, da wir die Unbestimmte immer mit z bezeichnen.

5.1.3 Beispiel

Wichtige Beispiele für formale Potenzreihen aus der Analysis sind Exponential-, Sinus- und Cosinusreihe:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + ... \\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - ... \\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - ...
\end{aligned}$$

5.1.4 Bemerkung

In formalen Potenzreihen müssen nicht alle Potenzen der Unbestimmten explizit auftreten. Die Koeffizienten der nicht auftretenden Potenzen sind 0 und die Potenzen werden deshalb weggelassen.

5.1.1 Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen

Wir bezeichnen die Menge der formalen Potenzreihen in z auf $\mathbb{N}_0$ über K mit

$$K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}.$$

Wir nehmen folgende Rechenregeln für die Unbestimmte z an.

5.1.5 Lemma

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe und seien $g_1, g_2 \in G$, dann gilt:

(i) $z^{g_1} \cdot z^{g_2} = z^{g_1+g_2}$

(ii) $z^{0_G} = 1_K$

5.1.6 Definition

Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei formale Potenzreihen über K. Wir definieren ihre *Summe* $f+g$ folgendermaßen:

$$+\colon K[[z]]\times K[[z]]\to K[[z]]: \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$$

Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen f,g erfolgt durch die sogenannte Faltung:

$$\begin{aligned}
&\cdot\colon K[[z]]\times K[[z]]\to K[[z]]:\\
&\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) &&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) z^n\\
& &&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+...+a_nb_0\right) z_n
\end{aligned}$$

5.1.2 Der Ring der formalen Potenzreihen

5.1.7 Satz

Die Menge $(K[[z]],+,\cdot)$ *ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.*

Beweis:

Wir weisen die Ringaxiome, wie in 3.1.5 definiert, nach.
Die Assoziativität und Kommutativität der Menge $(K[[z]],+)$ lassen sich leicht nachprüfen. Sei $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Das *neutrale Element der Addition* 0_K ist die Nullreihe $g(z):=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $b_n=0$ für alle n $\in\mathbb{N}_0$. Denn wir erhalten als Summe von g und f:

$$\begin{aligned}
f+g &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right) z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen $-f=\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)z^n$ als das *Inverse der Addition*, denn es gilt

$$\begin{aligned}
f+(-f) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n+(\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)z^n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_n)z^n\\
&= 0_K.
\end{aligned}$$

$(K[[z]],+)$ ist daher eine abelsche Gruppe. Die Assoziativität der Multiplikation und die Distributivgesetze rechnen wir nach.
Seien $f, g, h \in K[[z]]$, mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ und $h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot h) &= f \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} b_j c_k \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l+j+k=n} a_l b_j c_k \right) z^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k \right) z^n \right) \cdot h \\ &= (f \cdot g) \cdot h. \end{aligned}$$

Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe 1_K. Darunter verstehen wir diejenige Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 0 \text{ für alle n } \in \mathbb{N} \text{ sind.}$$

Damit folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j \cdot b_k) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
Die Multiplikation ist kommutativ, denn die Addition und Multiplikation in dem Körper K sind kommutativ. Es genügt somit ein Distributivgesetz nachzuweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} f \cdot (g+h) &= f \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j (b_k + c_k) \right) z^n \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k + \sum_{j+k=n} a_j c_k \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j b_k z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j c_k z^n \\ &= f \cdot g + f \cdot h, \end{aligned}$$

wobei (*) aufgrund der Distributivität in K folgt.

$\square$

5.1.8 Bemerkung

Sei $f, g \in K[[z]]$, mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Wir bezeichnen g als die *Inverse Potenzreihe* von f, wenn für

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \end{aligned}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ mit } c_n = \sum_{j+k=n} (a_j b_k),$$

gilt, dass $c_0 = 1$ und $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Wir zeigen zunächst, dass zu einer formale Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann die inverse Potenzreihe existiert, wenn $a_0 \neq 0$.

5.1.9 Satz

Sei $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist eine formale Potenzreihe $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann eine Einheit, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Beweis:

“ $\Leftarrow$ ” Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und es gelte $a_0 \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass es eine Potenzreihe $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ gibt, sodass das Produkt der formalen Potenzreihen f, g den Wert 1_K annimmt und somit f eine Einheit ist. Wir müssen nun eine entsprechende Potenzreihe g finden, sodass $f \cdot g = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \stackrel{!}{=} 1$ ist.
Wir beweisen die Rückrichtung mithilfe des Prinzips der Induktion:
Für b_0 muss die Gleichung $a_0 b_0 = 1$ erfüllt sein. Da a_0 ungleich null ist, besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$.
Nach Induktionsvoraussetzung existieren alle $b_0, ..., b_{n-1}$ und sind bereits bestimmt. Für den n-ten Koeffizienten ergibt sich $0 = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$. Da a_0 ungleich 0 ist, existiert die Lösung für b_n. Sie ist eindeutig bestimmt durch $b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j+k=n,\ j>0} a_j b_k$.
Damit existiert ein eindeutiges Inverses zu f und f ist eine Einheit.
“ $\Rightarrow$ ” Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = 1$.

Nach 5.1.8 folgt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für $n > 0$. Daraus erhalten wir unmittelbar $a_0 b_0 = 1$. Somit muss a_0 ungleich 0 sein. □

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind deren konstanter Term ungleich 0 ist. In diesem Fall können wir die inverse Potenzreihe konstruieren.

5.1.10 Korollar

Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $a_0 \neq 0$. *Die inverse Potenzreihe* $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *ist rekursiv definiert durch*

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \textit{und} \qquad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j+k=n,\ j>0} a_j b_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

siehe Rückrichtung im Beweis 5.1.9.

□

5.1.11 Beispiel

Es sei $z \in \mathbb{R}$ und $0 \neq q \in \mathbb{R}$ beliebig und $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n = q^n$. Wir bestimmen die inverse Potenzreihe $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Dazu wenden wir die Formel aus 5.1.10 an:

$b_0 = \frac{1}{a_0} = 1,$

$b_1 = -a_1 b_0 = -q,$

$b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) = -\left(-q^2 + q^2\right) = 0,$

...

$b_n = -(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) = -\left(-q^{n-1}(-q) + q^n\right) = 0.$

für alle $n \geq 3$ folgt induktiv, dass ebenso $b_n = 0$ gilt. Die inverse Potenzreihe zu f ist $g := b_0 + b_1 z = 1 - qz$.
Für $q = 1$ entspricht f der geometrischen Reihe. Diese konvergiert bekanntlich für $|z| < 1$ und es gilt $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

5.1.3 Eigenschaften des Potenzreihenrings

Wir beweisen zunächst, dass $K[[z]]$ ein Integritätsring und damit nullteilerfrei ist. Wir wissen also, dass der Ring $K[[z]]$ in einen kleinsten Körper, den Quotientenkörper, eingebettet werden kann. Anschließend betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Menge der konvergenten Potenzreihen im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

5.1.12 Satz

Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.
Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$f \cdot g \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 0.$$

Nach Definition der Multiplikation gilt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei nun o.B.d.A. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \neq 0$. Wir zeigen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gleich null ist. Es soll also kein Index n existieren, für den $b_n \neq 0$ ist. Wir folgern aus $b_0, b_1, ..., b_{n-1} = 0$ induktiv, dass $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.
Sei j der erste Index, sodass $a_j \neq 0$ gilt.

$$\sum_{i+k=j} a_i b_k = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + ... + a_j b_0 = a_j b_0 \overset{\text{Vor.}}{=} 0.$$

Da $a_j \neq 0$ ist, muss $b_0 = 0$ gelten.
Seien jetzt $b_0, ..., b_{n-1} = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i+k=j+n} a_i b_k &= a_0 b_{j+n} + a_1 b_{j+(n-1)} + ... + a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + ... + a_{j+n} b_0 \\ &= a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + ... + a_{j+n} b_0 = a_j b_n \overset{\text{Vor.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Da $a_j \neq 0$ ist folgt $b_n = 0$. □

Da Konvergenzbetrachtungen nur im Körper der reellen und komplexen Zahlen Sinn machen, beschränken wir uns in folgendem Satz auf $\mathbb{C}$.

5.1.13 Definition

Eine Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ heißt *konvergent*, wenn es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$ gibt, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ als Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert.
Das heißt, die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k {z_0}^k$ der Partialsummen ist konvergent und man schreibt für den Limes $s = \lim_{n\to\infty} s_n$:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \tag{5.2}$$

Auf der Menge D der Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ konvergiert, wird somit eine Abbildung $z_0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ definiert. Wir nennen D den *Konvergenzbereich.*

5.1.14 Bemerkung

Sei $\mathbb{C}\{z\}$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{C}\{z\}$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[z]]$.

Beweis:

Wir haben bereits in 5.1.12 gezeigt, dass $\mathbb{C}[[z]$ ein Integritätsring ist. Nun bleibt für $\mathbb{C}\{z\}$ noch zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.
Betrachte zwei konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2. Innerhalb des Radius $\min\{r_1, r_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen und somit auch die Summe der beiden Potenzreihen. Das Produkt besitzt denselben Konvergenzradius, da beide Reihen im Radius $\min\{r_1, r_2\}$ absolut konvergieren und nach dem großen Umordnungssatz konvergiert auch das Cauchyprodukt gegen den gleichen Wert. □

Im nächsten Teil können wir zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht. Auf diesen werden wir später näher eingehen.

5.2 Formale Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen. Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit wird jedoch auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet und nur formale Laurentreihen, also Laurentreihen in einer Unbestimmten z behandelt. Wir orientieren uns dabei an [Lü08, S. 563 - 572].

5.2.1 Definition

Eine *formale Laurentreihe* über dem Körper K ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto a_n$, wobei ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $f(n) = 0$ ist für alle $n < k$.

5.2.2 Notation

Wir werden Laurentreihen im Folgenden meist als Reihe der Form

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, n \geq -k \text{ und } a_n \in K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

schreiben. Dabei bezeichnet $\sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^{-n}$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

5.2.3 Definition

Der *Träger* einer Laurentreihe $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \in K((z))$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}.$$

5.2.4 Bemerkung

Unter einem Träger einer Laurentreihe versteht man den Definitionsbereich der Funktion, die durch die Laurentreihe dargestellt wird.

5.2.1 Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen

Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da andernfalls die Multiplikation nicht definiert werden kann. Wir bezeichnen die Menge der formalen Laurentreihen in z auf $\mathbb{Z}$ über K mit

$$K((z)) = \{ \sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K, m \in \mathbb{Z}\}$$

Die Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen erfolgt analog zur Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen.

5.2.5 Definition

Zwei Laurentreihen $f, g \in K((z))$, mit $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$, werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert:

$$+ \quad : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=min(-k,-m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n. \tag{5.3}$$

Die Multiplikation erfolgt durch Faltung der Laurentreihen.

$$\cdot : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-m-k}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j)\, z^n. \tag{5.4}$$

5.2.6 Bemerkung

Die Multiplikation formaler Laurentreihen ist unter der Bedingung wohldefiniert, dass formale Laurentreihen höchstens endliche viele Terme mit negativen Exponenten besitzen.
Diese Forderung ist unverzichtbar, denn andernfalls wäre die Summe $\sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j)$ in 5.4 unendlich und das Produkt somit nicht bestimmbar.

5.2.7 Satz

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe mit endlichem Hauptteil. Dann gilt, der Träger der

Laurentreihe ist wohlgeordnet.

Beweis:

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe, die obige Bedingung erfüllt. Wir können f nach der Definition einer formalen Laurentreihe schreiben als $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = g + h$. Wie in 3.2.6 gezeigt, ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ total geordnet. Der Hauptteil h jeder formalen Laurentreihe besteht aus endlich vielen Summanden, was die Wohlordnung von $\mathrm{supp}(h)$, dem Trägers des Hauptteils, impliziert (wir erinnern an 4.1.2). Der Träger des Nebenteils, $\mathrm{supp}(g)$, ist aufgrund der Wohlordnung der natürlichen Zahlen wohlgeordnet.
Für $\mathrm{supp}(f)$ gilt trivialerweise, dass er der Vereinigung von $\mathrm{supp}(g)$ und $\mathrm{supp}(h)$ entspricht. Unter Verwendung von Satz 4.1.3 erhalten wir die Wohlordnung des Trägers der formalen Laurentreihe. □

5.2.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Menge der formalen Laurentreihen $K((z))$ und weisen deren Körperstruktur nach. Auf diesen Ergebnissen aufbauend stellen wir die Verbindung zwischen dem Körper der Laurentreihen und dem zuvor behandelten Ring der formalen Potenzreihen her. Bezugnehmend auf 5.1.14 betrachten wir aus Gründen der Vollständigkeit die Menge der konvergenten Laurentreihen.
Abschließend konstruieren wir mithilfe der Wohlordnung des Trägers eine Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen und stellen den bewertungstheoretischen Zusammenhang zu dem Ring der formalen Potenzreihen her.

5.2.8 Satz
Die Menge $(K((z)), +\cdot)$ ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.

Beweis:

Es genügt das Nachrechnen der Ringaxiome. Der Beweis verläuft ähnlich zu 5.1.7. □

5.2.9 Satz
$(K((z)), +\cdot)$ ist mit der definierten Addition und Multiplikation ein Körper.

Beweis:

Sei $0 \neq f \in K((z))$ und $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$, mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$. Wir wissen bereits $K((z))$ ist ein kommutativer Ring. Um zu zeigen, dass $K((z))$ ein Körper ist, genügt es zu beweisen, dass zu jedem Element f von $K((z))$ ein Inverses g existiert. Wir definieren $g \in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so entstandene Laurentreihe invers zu f ist. Die Konstruktion von g läuft ähnlich zur Konstruktion der inversen Potenzreihe in Satz 5.1.10.

Setze $g = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_n = 0_K$ für alle $n < -m$ und $b_{-m} = \frac{1}{a_m}$. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $b_{-m}, ..., b_{-m+l-1}$ bereits definiert. Wir wählen $b_{-m+l} = -\frac{1}{a_m} \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n}$. Nach Definition der Multiplikation in $K((z))$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} b_l a_l &= \sum_{n=m-m}^{\infty} \sum_{k+j=n} (a_k \cdot b_j)\, z^n \\ &= \sum_{n=-m}^{-m+l} b_n a_{l-n}. \end{aligned}$$

Für $l = 0$ folgt
$b_0 a_0 = b_{-m} a_m = 1$. Es bleibt der Fall $l > 0$ zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} b_l a_l &= \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n} + b_{-m+l} a_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $gf = 1_K$ und da $K((z))$, wie bereits gezeigt, ein kommutativer Ring ist, folgt $fg = 1_K$. Wir können zu jedem Element $f \neq 0$ aus $K((z))$ folglich ein Inverses konstruieren, womit $K((z))$ ein Körper ist. $\square$

Mithilfe von 3.1.11 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

5.2.10 Satz
Es gilt $K((z)) = \text{Quot}(K[[z]])$.

Beweis:

Nach Konstruktion von $K((z))$ ist klar, dass $K[[z]] \subseteq K((z))$. Betrachte die Abbildung:

$$\Phi : K((z)) \rightarrow \text{ Quot}\,(K[[z]])$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} \frac{z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} & \text{, falls } m < 0 \\ \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{1} & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert bezüglich m, dem kleinsten Index für den $a_m \neq 0$ gilt. Denn ist $m \geq 0$, so entspricht der Hauptteil der Laurentreihe der Nullreihe und die Reihe liegt somit in $K[[z]]$. Für den Fall $m \leq 0$ existiert ein eindeutiges $g \in K[[z]]$ und wir können $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = z^{-m} g$ schreiben.
Wir weisen nach, dass Φ ein Körperisomorphismus ist. Damit wir die Fallunterscheidung nach unserer Definition der Abbildung Φ nicht explizit durchführen müssen, setzen wir $z^{-k} = 1$ in

beiden Äquivalenzklassen von 5.5 falls $k \geq 0$ ist. Durch diese Vereinfachung müssen wir den unteren Fall in 5.5 nicht gesondert formulieren. Sei $m \leq l$:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)\right) &= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}(a_n+b_n)z^n}{z^{-m}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} + \frac{z^{-m}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}{z^{-m}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} + \frac{z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}{z^{-l}} \\
&= \Phi\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) + \Phi\left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)
\end{aligned}$$

Damit ist Φ bezüglich der Addition ein Homomorphismus. Nun betrachten wir die Multiplikation. Aufgrund der oben getroffenen Vereinfachung gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)\right) &= \frac{z^{-m-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)}{z^{-m-l}} \\
&= \frac{\left(z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)}{z^{-m}z^{-l}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} \cdot \frac{z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}{z^{-l}} \\
&= \Phi\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \Phi\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)
\end{aligned}$$

Der Kern der Abbildung ist das Element 0_K und da Φ ein Homomorphismus ist, erhalten wir die Injektivität.
Wir zeigen, dass der Homomorphismus auch surjektiv ist. Sei $m, l \geq 0$ und $q = \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n} \in \mathrm{Quot}(K[[z]])$, mit $\sum_{n=l} b_n z^n \neq 0$.
Die Reihe $\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n$ kann deswegen in die Gestalt $z^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_0 \neq 0$ gebracht werden. Nach Satz 5.1.9 kann diese Reihe invertiert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n} \\
&= \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n} \\
&= \frac{\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{-1}}{z^l} \\
&= \Phi\left(z^{-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Wir sehen sofort, dass $(z^{-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{-1} \in K((z))$ ist. Der Homomorphismus ist folglich bijektiv und die Behauptung ist gezeigt. □

Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung von K um das transzendente Element z dar. Im Folgenden beschränken wir uns, aufgrund der Konvergenzbetrachtung, erneut auf den Körper $\mathbb{C}$.

5.2.11 Definition

Eine Laurentreihe $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn deren Haupt- und Nebenteil in z_0 konvergieren.

5.2.12 Bemerkung

Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ und $R \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ für alle z mit $r \leq |z| \leq R$.

5.2.13 Satz

Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\{z\}$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\{z\}$.

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

Zwischenbehauptung: In $\mathbb{C}\{z\}$ sind genau die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ invertierbar für die $a_0 \neq 0$ gilt.

Beweis:

Zunächst konstruieren wir formal das Inverse, wie wir es in Satz 5.1.10 bereits durchgeführt haben. Es bleibt zu zeigen, dass diese inverse Potenzreihe konvergiert. Sei eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, also $|a_n| \leq a$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.
Nach Definition der Konvergenz formaler Potenzreihen gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$, sodass die Reihe $f = \sum a_n {z_0}^n$ konvergiert.
Die Folge $(a_n|z_0|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist somit eine Nullfolge und daher beschränkt. Nach dem Lemma von Abel konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ für $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < |z_0|$ in dem Konvergenzbereich $D(0, z_0)$. Wähle $q = \frac{\zeta}{z_0}$. Wir erhalten, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

ist konvergent. Nun bestimmen wir das Inverse ähnlich wie in 5.1.10 und zeigen, dass die

Koeffizientenfolge wieder beschränkt ist, woraus die Konvergenz der inversen Potenzreihe folgt. Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge a_n größer 1 ist und es sei ohne Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge b_n des Inversen wie wir sie in Satz 5.1.10 konstruiert haben. Es gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Wir zeigen, dass $|b_n|$ durch ein Vielfaches von a^n beschränkt ist. Ist dies gezeigt, können wir eine positive untere Schranke des Konvergenzradius angeben. Mithilfe von Induktion beweise wir, dass ein $C > 1$ existiert, mit $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

ist. Die Ungleichung ist für b_0 nach Konstruktion des Inversen 5.1.10 erfüllt.
Die Abschätzung gelte für b_n. Wir wählen $C > \frac{a}{a-1}$. Als Abschätzung für den Koeffizienten b_{n+1} erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} |b_{n+1}| = |-\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq a \sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq a\ C^n\ \sum_{k=1}^{n+1} a^k \\ \leq a\ C^n\ \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (a\ C)^{n+1} \end{aligned}$$

gilt. □

Wie in Satz 5.2.10 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Des weiteren bleibt zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist. Dies wurde bereits in 5.1.14 für formale Potenzreihen gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Laurentreihen f, g ist ebenso konvergent. Um dies zu zeigen reicht es den Nebenteil zu betrachten. Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multipliziere man diese so mit den Potenzen von z, dass man eine konvergente Potenzreihe erhält und geht wie in 5.1.14 vor. Nun definieren wir wie in 5.2.10 die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}_L\{z\} \to \mathrm{Quot}(\mathbb{C}\{z\})$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} & \text{, falls } m < 0 \\ \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{1} & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Der Satz 5.2.10 liefert die Isomorphie der Abbildung Φ. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Nun versuchen wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 5.2.3 der Laurentreihe $\text{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$. Nach 4.5.2 suchen wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus.

5.2.14 Satz

Die Abbildung $v\colon K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $v(f) = \min(\text{supp}(f))$ ist eine diskrete Bewertung.

Beweis:

Klar: Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt und damit $v(f)$ =min$\{(\text{supp}(f)\})\}$. Nach Definition 4.5.2 sind für den Körper $K((z))$ und die angeordnet abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ noch B1'-B3' nachzuweisen.

zu B1' : Klar nach Definition.

zu B2' : Sei $f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$, mit $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Dann ist v(f) $=n_0$ und v(g) $= m_0$. Damit gilt, dass $v(f) + v(g) = n_0 + m_0$ entspricht.
Sei

$$v(fg) = v(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m+k=n} a_m b_k z^n) \stackrel{!}{=} v(f) + v(g),$$

wobei $a_m = 0$ für $m < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$. Betrachte $n < n_0 + m_0$. Nach Voraussetzung folgt entweder $a_m = 0$, oder $b_k = 0$ und somit ist auch das Produkt $a_m b_k = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Sei $n = n_0 + m_0$. Das Produkt $a_{n_0} b_{m_0}$ ist ungleich Null und daher erhalten wir, dass $v(fg) = n_0 + m_0 = v(f) + v(g)$ ist.

zu B3' : Wenn f, g wie oben definiert sind, erhalten wir für $v(f + g)$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} v(f+g) &= v\left(\sum_{n=\min\{n_0,m_0\}}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\right) \\ &= \min\{n_0, m_0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{v(f), v(g)\} \end{aligned}$$

□

Wie wir in 5.2.10 gezeigt haben, ist der Körper der Laurentreihen eine Obermenge des Rings der Potenzreihen $K[[z]]$. Nachdem wir auf $K((z))$ bereits eine Bewertung definiert haben, weisen wir nach, dass es sich auch bei $K[[z]]$ um einen diskreten Bewertungsring 5.2.15 handelt.

5.2.15 Satz

$K[[z]]$ ist ein diskreter Bewertungsring.

Beweis:

Wie im vorherigen Satz gezeigt, existiert auf dem Körper der Laurentreihen eine diskrete Bewertung. Wie wir in 5.2.10 bewiesen haben, ist der Quotientenkörper von $K[[z]]$ dieser Körper der Laurentreihen. Nach 5.1.9 folgt, $K[[z]]$ besitzt genau ein maximales Ideal nämlich $\mathfrak{m} = (z)$. Für eine Potenzreihe f, die in $K[[z]]$ keine Einheit ist, nimmt der konstante Term den Wert 0 an und wir erhalten, dass $a_0 = 0$ ist. Somit lässt sich jede derartige Potenzreihe schreiben als $f = z\widetilde{f}$, wobei $\widetilde{f}$ die umindizierte Potenzreihe bezeichnet.
Die Nullteilerfreiheit folgt wie in 5.1.12 ausführlicher gezeigt. Sei $0 \neq f, g \in K[[z]]$ und wir definieren der Einfachheit halber $c_n := a_i b_j \neq 0$. Für die Produktreihe fg erhalten wir, ab den Indizes i, j, dass $a_i,\ b_j \neq 0$ ist. Der Hauptidealring $K[[z]]$ ist noethersch , denn jedes Ideal ist erzeugt von z^j, wobei j der kleinste Index ist, ab dem die Koeffizienten c_n der Potenzreihen ungleich 0 in dem Ideal sind. Für das maximale Ideal muss gelten, dass es von einem Element erzeugt wird, für das gilt $a_0 = 0$. Andernfalls wäre die entsprechende Potenzreihe eine Einheit und würde somit ganz $K[[z]]$ erzeugen. Nach Definition des diskreten Bewertungsring 4.5.6 gilt die Behauptung. □

Damit folgt, dass $K[[z]]$ isomorph zu einem, wie in Punkt 4 beschriebenen Bewertungsring $A = \{0\} \cup \{x \in K * | v(x) \geqslant 0\}$ ist.
Wie in obigem Beweis 5.2.15 gezeigt, gilt: $(z) \subset (z^2) \subset (z)^3 \subset (z)^4 \subset ....$

5.3 Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper

Die Grundlagen zur Konstruktion eines Körpers über sehr allgemein definierten formalen Potenzreihen untersuchte Hahn 1907 in seiner Arbeit „Über nichtarchimedische Größensysteme“. Hahn formulierte als einer der ersten Mathematiker Potenzreihen mit verallgemeinerten Exponenten aus einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, wie beispielsweise:

$$f = 1 + z^{log2} + z^{log3} + z^{log4} + ...$$
$$g = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}z^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{8}z^{\frac{7}{8}} + ... + z + \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + ... + 2z^2 + ...$$

Die einzige, unverzichtbare Bedingung, die Hahn an diese verallgemeinerten Potenzreihen stellte, war die Wohlordnung des Trägers der verallgemeinerten Potenzreihe. Im Laufe des Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes konnte er zeigen, dass die nach ihm benannten Potenzreihen nicht nur eine Gruppe, wie ursprünglich angenommen, bilden, sondern einen Körper.
Während seiner Beschäftigung mit Hilberts siebzehntem Problem untersuchte er die Hahnschen Potenzreihen hinsichtlich ihrer Körpereigenschaften. Neben Hahn beschäftigten sich auch die beiden Mathematiker Neumann und Mal'cev mit den von Hahn konstruierten Reihen und deren Einbettung in einen Körper.

Wir fokussieren unsere Betrachtungen auf verallgemeinerte Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen und die algebraischen Strukturen, die wir auf ihnen definieren können.

5.3.1 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen

Wir haben bisher ausschließlich formale Reihen betrachtet, die auf einer wohlgeordneten Teilmenge der ganzen Zahlen definiert waren. In Satz 5.2.7 haben wir gezeigt, dass die Wohldefiniertheit der Multiplikation mit der Wohlordnung des Trägers der Laurentreihe zusammenhängt.
Im Folgenden betrachten wir allgemeinere Arten von Mengen, nämlich die bereits in dem vorherigen Kapitel 4 vorgestellten angeordneten abelschen Gruppen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass auf angeordneten abelschen Gruppen definierte Potenzreihen, unter der Voraussetzung der Wohlordnung des Trägers, addiert und multipliziert werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66, S. 194 - 199], [Hah, S. 601 - 655] und [PC83, S. 49 - 64].

Wir bezeichnen mit G im Folgenden immer eine angeordnete abelsche Gruppe in additiver Schreibweise.

5.3.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe über dem Körper K auf der angeordneten abelschen Gruppe G* ist eine Abbildung $f\colon G \to K, g \mapsto a_g$, wobei ein $h \in G$ existiert, sodass $f(g) = 0$ für alle $g < h$.

5.3.2 Definition
Der *Träger* einer formalen Potenzreihe f auf einer angeordneten abelschen Gruppe G über einem Körper K ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{supp}(f) = \{g \in G |\ a_g \neq 0\}$$

Wir stellen die in 5.3.1 definierte formale Potenzreihe im Folgenden meist nicht mehr in Funktionsschreibweise, sondern als Reihe dar. Aus diesem Grund präsentieren wir diese gebräuchlichere Definition einer formalen Potenzreihe.

5.3.3 Definition
Sei K ein Körper und G eine angeordnete abelsche Gruppe. Die Reihe

$$\sum_{g \in G} a_g z^g, \text{ mit } a_g \in K, \text{ deren Träger } \operatorname{supp}(f) \text{ wohlgeordnet ist,}$$

wird als *formale Potenzreihe auf einer angeordnet abelschen Gruppe* bezeichnet.

5.3.4 Notation
Wenn wir ab jetzt von formalen Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen über einem Körper sprechen, bezeichnen wir diese vereinfachend als *formale Potenzreihen.*

Wir bezeichnen die Menge aller formalen Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe G über dem Körper K mit

$$K\left(\left(z^G\right)\right) = \{\sum_{g\in G} a_g z^g |\ a_g \in K,\ \mathrm{supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet}\}$$

5.3.2 Addition und Multiplikation in $K((z^G))$

In diesem Abschnitt definieren wir die Verknüpfungen auf $K((z^G))$. Wir gehen dabei ähnlich wie in Teil 5.2.1 vor. Wir müssen berücksichtigen, dass die Verknüpfungen nur dann wohldefiniert sind, wenn die Wohlordnung des Trägers erhalten bleibt.

5.3.5 Definition
Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, mit $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$ und $h = \sum_{g\in G} b_g z^g$.
Die Summe zweier formaler Potenzreihen f, g ist definiert durch die Addition der Koeffizientenfolgen:

$$\begin{aligned} +\colon f + h &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} b_g z^g \\ &= \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g\right) z^g \end{aligned}$$

5.3.6 Satz
Die in 5.3.5 definierte Addition zweier formaler Potenzreihen $f, g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist wohldefiniert und die Summe $f + h$ ist wieder eine formale Potenzreihe.

Beweis:

Wir zeigen, dass der Träger der Summe $f + h$ wohlgeordnet ist. Es gilt offensichtlich $\mathrm{supp}(f + h) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(h)$. Nach Lemma 4.1.3 ist die Vereinigung zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet. Die Definition der Wohlordnung besagt, dass jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wiederum wohlgeordnet ist.
Nach Voraussetzung sind $\mathrm{supp}(f) = \{g \in G | a_g \neq 0\}$ und $\mathrm{supp}(h) = \{g \in G | b_g \neq 0\}$ wohlgeordnet. Das kleinste Element von $\mathrm{supp}(f + h)$ existiert und es gilt

$$\min\left(\mathrm{supp}\left(f + h\right)\right) = \min\{\min\left(\mathrm{supp}(f)\right), \min\left(\mathrm{supp}(h)\right)\}.$$

Somit ist $f + g$ eine formale Potenzreihe. $\square$

5.3.7 Definition
Sei $\lambda \in K$ und $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der formalen Potenzreihe f mit dem Körperelement λ ist definiert durch:

$$\lambda f = \lambda \left(\sum_{g \in G} a_g z^g \right) = \sum_{g \in G} \lambda a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$$

Bevor wir die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen definieren können, benötigen wir etwas Vorarbeit.
Sei $f,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Wir betrachten zunächst die multiplikative Verknüpfung einzelner Monome.

5.3.8 Definition
Seien $a_{g_1} z^{g_1}, b_{g_2} z^{g_2} \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der Monome ist nach den Potenzgesetzen definiert als

$$a_{g_1} z^{g_1} \cdot b_{g_2} z^{g_2} = a_{g_1} b_{g_2} z^{g_1 + g_2}$$

5.3.9 Bemerkung
Wir haben die obige Definition der Multiplikation zweier Monome bereits, ohne explizite Nennung, für die Definition der Multiplikation formaler Laurentreihen und Potenzreihen verwendet.

Die distributive Fortsetzung der Multiplikation von Monomen führt zur Definition der Multiplikation in $K\left(\left(z^G\right)\right)$. Wir erhalten das Produkt als Summe über der Summe des Produkts der einzelnen Koeffizienten.

5.3.10 Definition
Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen f, h erfolgt durch Faltung:

$$\begin{aligned} \cdot : f \cdot h &= \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1} \cdot \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2} \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{g_1 + g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} z^g. \end{aligned}$$

5.3.11 Satz
Die oben definierte Multiplikation zweier formaler Potenzreihen $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist wohldefiniert. Das Produkt fh ist ebenso eine formale Potenzreihe in $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wir untergliedern den Beweis und zeigen zunächst, dass die Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ existiert und endlich ist. Die Summe existiert, wenn die Träger $\text{supp}(f)$ und $\text{supp}(h)$ nicht leer sind. Andernfalls erhalten wir die leere Summe. Der Träger der Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ kann reduziert werden auf die Elemente $g = g_1 + g_2$ für die gilt, dass $g_1 \in \text{supp}(f)$ und $g_2 \in \text{supp}(h)$ ist. Andernfalls wäre a_{g_1} oder b_{g_2} gleich null und das Produkt somit ebenso null. Da G eine angeordnete abelsche Gruppe ist und $g_1, g_2 \in G$ sind, ist aufgrund der Abgeschlossenheit der Addition $g = g_1 + g_2 \in G$. Die Existenz der Summe ist nachgewiesen. Die Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ ist ungleich null für alle $g_1 \in \text{supp}(f)$ und $g_2 \in \text{supp}(h)$.
Die Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ ist endlich, wenn es nur endlich viele Darstellungen für $g \in G$ in der Form $g = g_1 + g_2$ gibt, wobei $g_1 \in \text{supp }(f)$ und $g_2 \in \text{supp}(h)$. Nach Voraussetzung sind sowohl $\text{supp}(f)$, als auch $\text{supp}(h)$ wohlgeordnet. Die Gruppe G ist angeordnet abelsch und wir können die Folgerung aus dem Lemma von Neumann 4.1.7 anwenden. Die Aussage ist somit bewiesen.
Nun bleibt zu zeigen, dass der Träger des Produkts $\text{supp}(fh)$ wohlgeordnet ist. Nach obiger Argumentation ist leicht zu sehen, dass $\text{supp}(fh)$ in der Summe der Träger, $\text{supp}(f) + \text{supp}(h)$, enthalten ist.
Nach Voraussetzung sind $\text{supp}(f)$ und $\text{supp}(h)$ wohlgeordnet. Die Summe $\text{supp}(f) + \text{supp}(h)$ ist nach dem Lemma von Neumann 4.1.6 wohlgeordnet. Jede angeordnete Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet laut der Definition einer Wohlordnung. Die Mengen $\text{supp}(f)$, $\text{supp}(h)$ sind als Teilmengen der angeordneten Gruppe G angeordnet. Die Summe $\text{supp}(f) + \text{supp}(h)$ ist aufgrund der Abgeschlossenheit der Addition in G ebenso eine angeordnete Teilmenge von G. Daher gilt, dass $\text{supp}(fh)$, als angeordnete Teilmenge einer wohlgeordneten Menge (siehe Bemerkung 3.2.12), wohlgeordnet ist.
Somit ist die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ wohldefiniert und das Produkt fh liegt in $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

5.3.12 Bemerkung

Wir haben oben gezeigt,dass die durch Multiplikation entstandene Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ aus 5.7 endlich ist. Deswegen können wir den Koeffizient γ_g der Unbestimmten z^g in dem Produkt aus 5.7 für ein festes $g \in G$ explizit darstellen:

$$\gamma_g = a_{g_{1_1}} b_{g_{2_1}} + a_{g_{1_2}} b_{g_{2_2}} + ... + a_{g_{1_n}} b_{g_{2_n}}$$

$\square$

Insgesamt erhalten wir, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation abgeschlossen ist. [Hah, Seite 601ff], [Neu, S. 210- 213].

5.3.13 Beispiel

Bei der Reihe $F := z^{\frac{-1}{p}} + z^{\frac{-1}{p^2}} + z^{\frac{-1}{p^3}} ...$, mit $p \neq 0$ handelt es sich um eine formale Potenzreihe über einem beliebigen Körper, da der Träger $\{\frac{-1}{p}, \frac{-1}{p^2}, \frac{-1}{p^3}, ...\}$ wohlgeordnet ist.

5.3.3 Der verallgemeinerte Ring der formalen Potenzreihen

Wir haben bisher die Addition und Multiplikation auf $K\left(\left(z^G\right)\right)$ definiert. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein kommutativer Ring über K ist.
In der verwendeten Literatur ([PC83], [Fuc66]) findet sich die multiplikative Schreibweise der angeordneten Gruppe G. Die multiplikative Schreibweise ermöglicht eine noch allgemeinere Definition der Multiplikation zum Beispiel mithilfe von Faktorsystemen. Auf Basis dieser Definition konnte B.H. Neumann 1949 Schiefkörper von formalen Potenzreihen konstruieren.
Im Fall einer additiv geschriebenen, abelschen, angeordneten Gruppe erhalten wir den direkten Bezug zu dem beschriebenen Laurentreihenkörper und dem darin eingebetteten Potenzreihenring. Dieser entsteht für den Fall, dass es sich bei der angeordneten, abelschen Gruppe um $\mathbb{Z}$ handelt.

5.3.14 Satz
$K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist ein kommutativer Ring über K.

Beweis:

Seien im Folgenden f, h, k $\in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit

$$f = \sum_{g\in G} a_g z^g, \qquad h = \sum_{g\in G} b_g z^g, \qquad k = \sum_{g\in G} c_g z^g.$$

Es gilt $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.

- *Assoziativität:* Für alle $f, h, k \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ gilt nach Definition der Addition:

$$\begin{aligned} f + (h + k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \left(\sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g\right) \\ &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} (b_g + c_g) z^g \\ &= \sum_{g\in G} (a_g + b_g + c_g) z^g \\ &= \sum_{g\in G} (a_g + b_g) z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g. \end{aligned}$$

- *Neutrales Element der Addition:* Bezeichne 0_K das neutrale Element der Addition $0_K = \sum_{g\in G} a_g z^g$, wobei ähnlich wie in 5.1.1 gilt $a_g = 0$ für alle $g \in G$. Der Träger von 0_K ist die leere Menge, welche nach Definition wohlgeordnet ist.

- *Inverses Element der Addition:* Zu jedem Gruppenelement f gibt es ein inverses Element der Addition $-f = \sum_{g \in G} -a_g z^g$, wobei $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(-f)$, mit $f + (-f) = 0_K$.
- *Kommutativität:* $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist abelsch bezüglich der Addition, denn es gilt

$$\begin{aligned} f + h &= \sum_{g \in G} a_g z^g + \sum_{g \in G} b_g z^g = \sum_{g \in G} \left(a_g + b_g\right) z^g \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{g \in G} \left(b_g + a_g\right) z^g = \sum_{g \in G} b_g z^g + \sum_{g \in G} a_g z^g \\ &= h + f. \end{aligned}$$

  Die Gleichheit in (*) gilt, da K ein Körper ist und $a_g, b_g \in K$ sind.

Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist ein kommutatives Monoid bezüglich der oben definierten Multiplikation.

- *Assoziativität:*

$$\begin{aligned} f \cdot (h \cdot k) &= \sum_{g \in G} a_g z^g \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g z^g \cdot \sum_{g \in G} c_g z^g\right) \\ &= \sum_{g \in G} a_g z^g \cdot \sum_{g \in G} \sum_{g_1 + g_2 = g} \left(b_{g_1} \cdot c_{g_2}\right) z^g \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{g_3 + g_1 + g_2 = g} a_{g_3} b_{g_1} c_{g_2} z^g \\ &= \left(\sum_{g \in G} \sum_{g_3 + g_1 = g} a_{g_3} b_{g_1} z^g\right) \sum_{g \in G} c_g z^g \\ &= \left(\sum_{g \in G} a_g z^g \cdot \sum_{g \in G} b_g z^g\right) \cdot \sum_{g \in G} c_g z^g \\ &= (fh)\, k. \end{aligned}$$

- *Kommutativität:* Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$

$$fh = \sum_{g \in G} \sum_{g_1 + g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} z^g = \sum_{g \in G} \sum_{g_2 + g_1 = g} b_{g_2} a_{g_1} z^g = hf$$

  Die Gleichheit folgt unmittelbar aus der Kommutativität von G und der Kommutativität der Multiplikation im Körper K.

Wegen der Kommutativität der Multiplikation genügt es ein Distributivgesetz nachzuweisen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f \cdot (h+k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g \left(\sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g \right) \\
&= \sum_{g\in G} a_g z^g \left(\sum_{g\in G} (b_g + c_g)\, z^g \right) \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}(b_{g_2} + c_{g_2}) z^g \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}b_{g_2} + a_{g_1}c_{g_2} z^g \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}b_{g_2} z^g + \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}c_{g_2} z^g \\
&= fh + fk.
\end{aligned}$$

In den Beweis der Distributivgesetze und die Gültigkeit der Gleichheit fließen die im Körper K gültige Kommutativität der Multiplikation, die Rechengesetze für die Unbestimmte 5.1.5, beziehungsweise die Kommutativität der angeordneten abelschen Gruppe G mit ein. □

5.3.4 Das Inverse in $K\left(\left(z^G\right)\right)$

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.
In diesem Abschnitt orientieren wir uns an [Fuc66, S. 196- 198] und [Neu, S. 210- 213]. Wir benötigen etwas Vorarbeit, bevor wir zeigen können, dass zu jeder formalen Potenzreihe ein Inverses existiert und die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein Körper ist.

5.3.15 Satz
Jede formale Potenzreihe $0 \neq f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ *lässt sich in der Form*

$$f = \lambda \cdot z^g \cdot (1_K + h) \;\; \textit{für}\; \lambda \in K,\;\; g \in G,\;\; h \in K\left(\left(z^G\right)\right),\;\; \textit{und}\; \min\left(\operatorname{supp}(h)\right) > 0$$

darstellen.

Beweis:

Sei $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{supp}(f)$ wohlgeordnet. Nach Definition der Wohlordnung existiert ein kleinstes Element $\gamma \in G$ in $\operatorname{supp}(f)$ mit $\gamma = \min(\operatorname{supp}(f))$. Da G eine angeordnete abelsche Gruppe ist, existiert für jedes Element ein additives Inverses.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f &= z^{\gamma} \sum_{g\in G} a_g z^{g-\gamma} \\ &= z^{\gamma} \left(1_K a_\gamma + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} a_g z^{g-\gamma} \right) \\ &\overset{(*)}{=} z^{\gamma}\, a_\gamma \left(1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} \frac{a_g}{a_\gamma{}^{-1}} z^{g-\gamma} \right) \\ &= z^{\gamma}\, a_\gamma \left(1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} b_{g-\gamma} z^{g-\gamma} \right), \end{aligned}$$

mit $b_{g-\gamma} = \frac{a_g}{a_\gamma{}^{-1}}$. Die Gleichheit in (*) gilt, denn zu a_γ, mit $a_\gamma \in K$ und $a_\gamma \neq 0$ für $\gamma \in$supp(f), existiert das Inverse.
Es gilt weiterhin $g - \gamma > 0$ für alle $g \in G \setminus \{\gamma\}$, da $\gamma =$min(supp(f)) und damit ist $g > \gamma$ für alle $g \in G$. Wir erhalten die Positivität des Trägers der entstandenen formalen Potenzreihe $h = \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} b_{g-\gamma} z^{g-\gamma}$. □

5.3.16 Lemma
Sei $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $\min(\text{supp}(f)) > 0$ und $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$, dann liegt für beliebige Körperelemente λ_n die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} h &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G} a_g z^g \right)^n \end{aligned}$$

in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ und ist wohldefiniert.

Beweis:

Wir unterteilen den Beweis in zwei Blöcke. Die unendliche Reihe h, wie im Lemma definiert, liegt genau dann in $K\left(\left(z^G\right)\right)$, wenn ihr Träger wohlgeordnet ist. Der Träger supp(h) ist eine Teilmenge der Vereinigung der Träger supp(f^n). Es genügt nachzuweisen, dass

1. die Vereinigung der Träger, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$supp(f^n), ist wohlgeordnet,
2. für ein festes $\gamma \in G$ gibt es nur endliche viele $n \in \mathbb{N}$, sodass $(f^n)_\gamma \neq 0$ ist. Wir schreiben $(f^n)_\gamma = \left(\sum_{g\in G} \sum_{g_1+\ldots+g_n=g} a_{g_1} a_{g_2} \ldots a_{g_n} z^g\right)_\gamma = \sum_{g_1+\ldots+g_n=\gamma} a_{g_1} a_{g_2} \ldots a_{g_n} z^\gamma$

zu 1.: Die Bedingung ist erfüllt, wenn es keine streng monoton fallende Folge

$$u_1 = g_{11}+g_{12}+...+g_{1n_1} > u_2 = g_{21}+g_{22}+...+g_{2n_2} > ... > u_i = g_{i1}+g_{i2}+...+g_{in_i} > ..., \quad (5.7)$$

mit $g_{ik} \in \operatorname{supp}(f)$, gibt. Angenommen es gäbe eine derartige Folge in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}(f^n)$. Da G insbesondere eine angeordnete Gruppe ist, können die $g_ik \in G$ angeordnet werden. Wir können ein maximales Element, $\max(g_{ik})$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ bestimmen. Nach Definition einer konvexen Untergruppe und da $\min\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}(f^n)\right) > 0$ ist, gilt in G offensichtlich, dass

$$\langle u_i \rangle = \langle \max_k (g_{ik}) \rangle$$

besteht.
Der Träger der formalen Potenzreihe f ist nach Voraussetzung wohlgeordnet. Betrachte die Menge der von $a \in \operatorname{supp}(f)$ erzeugten Untergruppe $\langle a \rangle$. Aufgrund der Wohlordnung von $\operatorname{supp}(f)$ existiert eine kleinste Untergruppe U von G. Wir wählen die Untergruppe U möglichst klein.
Offensichtlich gilt wegen der Konvexitätseigenschaft,

$$\langle u_1 \rangle \supseteq \langle u_2 \rangle \supseteq ... \supseteq \langle u_i \rangle \supseteq ....$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass

$$\langle u_i \rangle = U \qquad \text{für } (i = 1, 2, ...)$$

ist. Wir wählen nun aus jeder Folge von g_{ik_i} ein $g_i{}^*$, sodass $\langle g_{ik_i} \rangle = \langle u_i \rangle = U$ gilt. Es können mehrere $g \in \operatorname{supp}(f)$ existieren, die die Gleichheit $\langle g \rangle = U$ erfüllen. Aufgrund der Wohlordnung des Trägers $\operatorname{supp}(f)$ gibt es unter diesen Elementen, bezüglich der Anordnung von G, ein kleinstes, wir bezeichnen es mit g^*. Es gilt $g^* \leq g_1{}^* \leq u_1$, wobei $\langle g^* \rangle = \langle g_1{}^* \rangle = \langle u_1 \rangle = U$. Die erste Ungleichung erhalten wir aufgrund der Minimalität von g^*. Die zweite Ungleichung folgt aus der Definition von u_1.
Aufgrund der Eigenschaften von konvexen Untergruppen einer angeordneten Gruppe existiert ein $p \in \mathbb{N}$, sodass $u_1 \leq pg^*$ und da $u_1 > u_2 > ... > u_i > ...$ gilt

$$u_i \leq pg^* \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der Kommutativität der Gruppe G kann die Darstellung der Folge u_i auf die beiden folgenden Fälle eingeschränkt werden

$$u_i = g_i{}^* \qquad\qquad u_i = v_i + g_i{}^*,$$

wobei v_i bestimmte Summen von g_{ik} bezeichnen. Die Elemente $g_i{}^*$ sind Elemente des Trägers.

Nach Definition der Wohlordnung gibt es keine streng monoton fallende Folge unter den $g_i{}^*$. Aus diesem Grund und da die Folge $(u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Annahme streng monoton fallend ist, existieren nur endlich viele u_i der ersten Form.
Folglich muss eine streng monoton fallende Folge v_i existieren: $v_{i1} > v_{i2} > ... > v_{ij} > ....$ Diese Folge hat die selbe Form wie 5.7. Wir erhalten mit der gleichen Argumentation, dass $\langle v_i \rangle = U$ ist. Wir wissen, dass $v_i \leq u_i$ ist, da $u_i = v_i + g_i{}^*$ gilt. Wir können also wieder eine natürliche Zahl $q = p - 1$ finden, sodass $v_i \leq qa^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wir haben aus u_i eine Folge konstruiert, die ebenso $\langle v_i \rangle = U$ und $v_i \leq (p-1)\, g^*$ erfüllt. Dies widerspricht jedoch der Minimalitätseigenschaft von U. Die Vereinigung der Träger $\mathrm{supp}(F^n)$ muss somit wohlgeordnet sein.
Nach Definition 3.2.10 und Bemerkung 3.2.12 ist $\mathrm{supp}(h)$, als Teilmenge der wohlgeordneten Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f^n)$, wohlgeordnet.
zu 2.: Wir nehmen nun an, es existieren für jedes festgehaltene Element der angeordneten abelschen Gruppe G unendlich viele ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$g = g_{i1} + g_{i2} + ... + g_{in_i},\ i \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } n_1 < n_2 < ... < n_i < ... \text{ und } g_{ik} \in \mathrm{supp}(f).$$

Die Vereinigung der Träger $\mathrm{supp}(f^n)$ ist wohlgeordnet. Somit existiert ein kleinstes Element g der oben definierten Form. Nach Lemma 4.1.4 enthält die Folge $(g_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge, die wir gleich indizieren:

$$g_{11} \leq ... \leq g_{i1} \leq ....$$

Die Folge $g_{i2}+...+g_{in_i}$ ist, mit $i \in \mathbb{N}$, konstant. Damit muss die durch $(g_i)' = g_{i2}+...+g_{in_i},\ i \in \mathbb{N}$ bestimmte Folge nicht wachsend und aufgrund der Wohlordnung der Vereinigung der Träger somit konstant. Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $(g_{j+m})' = (g_j)' = g'$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit liegt g' in der Vereinigung der Träger $\mathrm{supp}(F^n)$, für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $g' < g$, da $g' = -(g_{i1}) + g$ und $g_{i1} > 1_G$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von g. Damit existieren nur endlich viele ganze Zahlen n für die der Koeffizient der formalen Potenzreihe $(a^n)_g \neq 0$ ist. $\square$

5.3.17 Bemerkung

Die in Lemma 5.3.16 definierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G}^{\infty} a_g z^g\right)^n$ mit $\lambda_n \in K$ und $f := \sum_{g\in G}^{\infty} a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ und lässt sich aufgrund der Körpereigenschaften folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot (f)^n &= \lambda_0 f^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (f)^n \\ &= \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (f)^n . \end{aligned}$$

Diese Darstellung erinnert für $\lambda_0 = 1_K$ an die geometrische Reihe.

5.3.18 Definition

Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ und $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0,\ \min(\operatorname{supp}(h)) > 0$. Wir bezeichnen die Menge aller $1_K + f$ mit Υ und definieren auf Υ die Verknüpfung

$$\cdot\colon\ (1_K + f)\cdot(1_K + h) = 1_K + (f + h + fh)$$

5.3.19 Lemma

Sei $1_K + f \in \Upsilon$, *mit* $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ *und* $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. *Das Element*

$$1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$$

liegt in Υ *und ist invers zu* $1_K + f$.

Beweis:

Sei $\mathfrak{f} = 1_K + f \in \Upsilon$, mit $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ und $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist nach Satz 5.3.14 ein kommutativer Ring. Es gilt somit $-f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Der Träger der formalen Potenzreihe $-f$ entspricht dem Träger von f und es gilt $\min(\operatorname{supp}(-f)) > 0$. Nach Lemma 5.3.16 gilt, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist. Der Träger von $\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ ist in der Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(-f^n)$ enthalten. Der Träger $\operatorname{supp}(f^n)$ ist positiv für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Vereinigung positiver Mengen ist ebenfalls positiv und es folgt, dass der Träger der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ positiv ist. Wir erhalten somit $\bar{\mathfrak{f}} = 1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ liegt in Υ. Die Verknüpfung der beiden Gruppenelemente $\mathfrak{f}$ und $\bar{\mathfrak{f}}$ hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{f}} &= (1_K + f)\left(1_K + \overline{f}\right)\\
&= 1_K + \left(f + \overline{f} + f\cdot\overline{f}\right)\\
&= 1_K + \left(\sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n + \left(\sum_{g\in G} a_g z^g\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n\right)\right)\\
&= 1_K + \left(\sum_{n=2}^{\infty}(-f)^n + \left(-\sum_{n=2}^{\infty}(-f)^n\right)\right)\\
&= 1_K + 1_K = 1_K\\
&= \bar{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{f}
\end{aligned}$$

□

5.3.20 Bemerkung

Sei $1_K + f \in \Upsilon$, und $\overline{1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n}$ das Inverse. Der Träger $\operatorname{supp}(f)$ ist größer Null und somit existiert das Inverse $1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ zu $1_K + f$. Es gelten folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
1_K &= (1_K + f)\left(1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n\right) \Leftrightarrow \\
\frac{1_K}{1_K + f} &= 1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n \Leftrightarrow \\
\frac{1_K}{1_K + f} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-f)^n \Leftrightarrow \\
\frac{1_K}{1_K - f} &= \sum_{n=0}^{\infty}(f)^n
\end{aligned}$$

Diese Form der Darstellung zeigt deutlich die Verbindung des inversen Elements mit der geometrischen Reihe.

Mithilfe dieser Erkenntnis und Lemma 5.3.15 sind wir nun in der Lage den zentralen Satz der Ausarbeitung zu beweisen.

5.3.21 Satz

Die formalen Potenzreihen auf einer angeordneten Gruppe G über einem Körper K bilden einen Körper $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wie oben gezeigt, kann jedes Element $f \neq 0$ des Ringes $K\left(\left(z^G\right)\right)$ in der Form $f = \lambda \cdot z^g \cdot (1_K + h)$ geschrieben werden, mit $\lambda \in K^*, g \in G,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right),$ wobei $\min(\operatorname{supp}(h)) > 0$. Wir bezeichnen mit $1_K + \overline{f}$ das Inverse von $1_K + f$ in der Gruppe Υ. Mit selbiger Argumentation wie oben wissen wir $k := \left(1_K + \overline{h}\right) z^{-g}\lambda^{-1}$ ist in$K\left(\left(z^G\right)\right)$. Da $\lambda \in K^*$ liegt, handelt es sich um eine Einheit und es existiert ein Inverses, welches wir mit λ^{-1} bezeichnen. Da g ein Element der angeordneten, abelschen, additiv geschriebenen Gruppe G ist, gibt es auch zu g ein inverses Element, das wir $-g$ nennen. Nach den Rechengesetzen für die Unbestimmte 5.1.5 und den definierten Rechenoperationen in dem Potenzreihenring $K\left(\left(z^G\right)\right)$ erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
f \cdot k &= (\lambda \cdot z^g (1_K + h)) \cdot \left(\left(1_K + \overline{f}\right) z^{-g}\lambda^{-1}\right) \\
&= \left(\lambda \cdot z^g z^{-g}\lambda^{-1}\right) = \left(\lambda z^{g-g}\lambda^{-1}\right) = \left(\lambda\lambda^{-1}\right) \\
&= 1_K \\
&= \left(1_K + \overline{f}\right) z^{-g}\lambda^{-1} \cdot \lambda z^g (1_K + f) \\
&= k \cdot f
\end{aligned}$$

□

5.3.22 Beispiel

Sei G eine archimedisch angeordnete Gruppe. Um den verallgemeinerten Potenzreihenkörper über K angeben zu können, benötigen wir eine angeordnete abelsche Gruppe. Nach dem Satz von Hölder 4.3.1 lässt sich jede archimedisch geordnete Gruppe in eine Untergruppe der additiven reellen Zahlen einbetten. Die reellen Zahlen bilden eine angeordnete abelsche Gruppe. Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper auf G über K entsteht also durch Einbettung von G in $K\left(\left(z^{\mathbb{R}}\right)\right)$

Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe G mit wohlgeordnetem Träger formen über einem Körper K somit den Körper der formalen Potenzreihen $K\left(\left(z^{G}\right)\right)$.
Die Grundsteine dieser Theorie wurden von Hans Hahn 1907 in seinem Beweis, dass formale Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe über $\mathbb{R}$ einen Körper bilden, gelegt. Neumann verallgemeinerte Hahns Ergebnisse und zeigte, dass formale Potenzreihen auf einer multiplikativen Gruppe in der nicht-kommutativen Sichtweise einen Schiefkörper formen. Im Laufe der Jahre konnte die Theorie der formalen Potenzreihen, als Verallgemeinerung der Laurentreihen und Pusieuxreihen, immer weiter ausgebaut werden.
Hier schließt sich der Kreis zu dem, zu Beginn des Kapitels, betrachteten Potenzreihenring $K[[z]]$ und dem Laurentreihenkörper $K((z))$. Die Menge der ganzen Zahlen ist eine angeordnete abelsche additive Gruppe. Über einem beliebigen Körper K wissen wir nun, dass der Laurentreihenkörper mit $G = \mathbb{Z}$ ein Beispiel für einen formalen Potenzreihenkörper darstellt.

Literaturverzeichnis

[Car48] Carruth, Philip W.: Generalized Power Series Fields. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), May, Nr. 3, S. 548 – 559

[Fis08] Fischer, Gerd: *Lehrbuch der Algebra.* 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008

[Fuc66] Fuchs, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966

[Hö01] In: Hölder, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß.* Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1 – 64

[Hah] In: Hahn, Hans: *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*

[Hul12] Hulek, Klaus: *Elementare algebraische Geometrie.* Wiesbaden : Springer Spektrum, Vieweg und Teubner Verlag, 2012

[Jä99] Jänich, K.: *Funktionentheorie: eine Einführung.* Springer, 1999 (Springer-Lehrbuch)

[Lü08] In: Lüneburg, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1.* Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507 – 577

[Neu] Neumann, Bernhard H.: On ordered division rings. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 66, Nr. 1, S. 202 – 252

[Neu92] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992

[PC70] Priess-Crampe, Sibylla: Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen. In: *Archiv der Mathematik* 21 (1970), Nr. 1, S. 362 – 365

[PC83] Priess-Crampe, Sibylla: *Angeordnete Strukturen.* Springer-Verlag, 1983

[Rib92] Ribenboim, Paulo: Noetherian rings of generalized power series. In: *Journal of pure and applied algebra* 79 (1992), Nr. 3, S. 293 – 312

[SP08] Schulze-Pillot, Rainer: *Einfuehrung in Algebra und Zahlentheorie.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[Tar12] Taraz, Anusch: *Diskrete Mathematik - Grundlagen und Methoden.* Basel : Birkhäuser, 2012