Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

24. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können. Der Text ist in drei Hauptteile gegliedert. Als erstes erfolgt ein kleiner Einblick in die Theorie der angeordneten Gruppen, die später zur Konstruktion des Hahnschen Potenzreihenkörpers benötigt werden. Im zweiten Teil werden Eigenschaften des Potenzreihenrings über einem Körper näher beschrieben und verallgemeinert bewiesen wie der Körper der Laurentreihen entsteht. Basierend auf Arbeiten von Fuchs und Priess-Crampe wird die Konstruktion des Potenzreihenkörpers über einer angeordneten Gruppe als Träger durchgeführt.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die später benötigt werden. Zunächst betrachten wir die wichtigsten Eigenschaften angeordneter Gruppen. Die Kette der konvexen Untergruppen spielt eine wichtige Rolle bei der Anordnungsfähigkeit von Gruppen. Hölders Aussage, archimedisch angeordnete Gruppen lassen sich in die additive Gruppe des $\mathbb{R}$ einbetten, führt uns zur allgemeineren Form: dem Hahnschen Einbettungssatz. Dieser besagt, dass angeordnete abelsche Gruppen auch als Untergruppen eines lexikographisch geordneten reellen Funktionenraums, beispielsweise der Körper der Laurentreihen, verstanden werden können.
Die Theorie der angeordneten Strukturen, in unserem Fall ausschließlich Gruppen, liefert wichtige Erkenntnisse zur späteren Konstruktion des Körpers von formalen Potenzreihen. Die reellen Funktionen die durch Potenzreihen dargestellt werden, sind nicht mehr nur auf den natürlichen Zahlen, sondern jeder angeordneten abelschen Gruppe definierbar, wobei auf die Wohlordnung nicht verzichtet werden kann.

2.1 Angeordnete Gruppen

2.1.1 Definition

Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn die Relation " $\leqslant$ " folgende Eigenschaften für alle a,b,c $\in$ A erfüllt.

T1: *Reflexivität:* $a \leqslant a$,

T2: *Antisymmetrie:* Aus $a \leqslant b$, $b \leqslant a$ folgt $a = b$,

T3: *Transitivität:* Aus $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ folgt $a \leqslant c$

"$\leqslant$"bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4: Für alle a, b $\in$ A besteht entweder a $<$ b, oder a $=$ b, oder a $>$ b, wobei a $<$ b $\Leftrightarrow a \leqslant bunda \neq b$. [Fuc66]

2.1.2 Definition

Eine *teilweise geordnete Gruppe G* bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,

G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation " $\leqslant$ ", wie in 2.1.1,

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: Für a, b $\in$ G gilt: Aus a $\leqslant$ b folgt ca $\leqslant$ cb und ac $\leqslant$ bc für alle c $\in$ G. [Fuc66]

2.1.3 Definition

Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

2.1.4 Satz

Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei. [PC83]

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus obiger Definition einer angeordneten Gruppe **??**. Denn: Angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz [G3] 2.1.2 ergeben. □

2.1.5 Bemerkung

Genügt eine Teilmenge $P := \{x \in G | x \geqslant 0\}$ einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so nennt man (G,$\circ$) *anordnungsfähig*. Wir nennen P den Positivbereich von G.

P1: $\{0\} \cup P \cup -P = G$, $P \cap -P = \varnothing$

P2: P $\circ$ P $\subseteq$ P

P3: P ist normal in G /

2.1.6 Bemerkung

Eine angeordnete Gruppe G ist eine abelsche Gruppe zusammen mit einem Positivbereich P. Man definiert dann $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in Pfra, b \in G$.

2.1.7 Definition

Der absolute Betrag $|a|$ eines Elements a $\in$ G, wobei G eine angeordnete Gruppe sei, ist definiert als $|a| = max\{a, -a\}$

Nun beschäftigen wir uns mit der Wohlordnung von total geordneten Gruppen. Diese wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. G $\neq \varnothing$, versehen mit der Ordnungsrelation $\leqslant$.

2.1.8 Definition
Eine angeordnete Menge W nennt man *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Das heisst es existiert ein Element$x \in V$, mit $u \leq v$ für alle $v \in V$. [Fuc66]

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Die Anordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist eine Wohlordnung. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist mit der natürlichen Anordnung "$\leqslant$"total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt sind und somit $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element enthält. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

2.1.9 Bemerkung
Ist M $\subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat M ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element. [SP08]

2.1.10 Beispiel
Betrachte die Relation „ $\preceq$ “ auf $\mathbb{Z}$:

$$a \preceq b \Leftrightarrow |a| \leq |b| \text{ und } (|a| = |b| \Rightarrow a \leq b).$$

„ $\preceq$ “ ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$ und es gilt: ... $-1 \preceq 1 \preceq -2 \preceq 2 \preceq -3 \preceq 3$...

2.1.1 Archimedisch angeordnete Gruppen

Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an das Kapitel „Angeordnete Gruppen"(S. 73- 93) in [Fuc66], sowie Arbeiten von Priess- Crampe [PC69], [PC83].

2.1.11 Definition
Eine angeordnete Gruppe (G,+) heisst *archimedisch*, wenn es für alle a, b $\in$ G mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

2.1.12 Definition
Seien a, b $\in$ G, wobei G eine angeordnete Gruppe sei. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n|a| < |b|$$

In Zeichen schreiben wir: a„ $\ll$“b.

2.1.13 Definition

Sei G eine angeordnete Gruppe, und $|a|$ der absolute Betrag eines Elements a $\in$ G. Zwei Elemente a,b $\in$ G werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, wir schreiben: $a \sim b$, wenn natürliche Zahlen m und n existieren, so dass: $|a| < m|b|$ und $|b| < n|a|$.

2.1.14 Folgerung

Daraus folgt, dass für jedes Paar von Elemente a, b $\in$ G genau eine der anschließenden Relationen gilt:

(i) a $\ll$ b, (ii) a $\sim$ b, (iii) b $\ll$ a.

Des weiteren schließen wir aus Definition 2.1.12 und 2.1.13:

(i) Aus a $\ll$ b folgt $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx$ für alle x$\in$ G;

(ii) Aus a $\ll$ b und a $\sim$ c folgt c $\ll$ b;

(iii) Aus a $\ll$ b und b $\sim$ d, folgt a $\ll$ d;

(iv) Aus a $\ll$ b und b $\ll$ c folgt a $\ll$ c;

(v) Aus a $\sim$ b und b $\sim$ c folgt a $\sim$ c.

Sind alle Elemente einer Gruppe archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet*.
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne [x] die *archimedische Klasse* in der das Element x $\in$ G liegt, [G] die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G.
Sind zwei Elemente a, b $\in$ G nicht archimedisch äquivalent, gilt entweder: $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: n|a|<|b| oder $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ sodass: n|b| <|a|.

2.1.15 Definition

Ist G mit dem Positivbereich P eine angeordnete Gruppe, so ist G auch mit dem Positivbereich ($-$P) eine angeordnete Gruppe. Die Abbildung $a \to -a$ ist ein *ordnungserhaltender Isomorphismus* zwischen diesen beiden Gruppen. Man nennt einen solchen Isomorphismus einen *Ordnungsisomorphismus*. Man nennt Gruppen ordnungsisomoroh, wenn es zwischen ihnen einen Ordnungsisomorphismus gibt.

2.1.16 Satz

Eine angeordnete Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist. Folglich sind alle archimedisch angeordneten Gruppen kommutativ. [Hö01]

Beweis:

" $\Leftarrow$ " : Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch angeordnet ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.
" $\Rightarrow$ „: Sei G eine angeordnete Gruppe. Nach 2.1.6 ist G ebenso abelsch und besitzt einen Positivbereich P. Nach Voraussetzung erfüllt G die archimedische Eigenschaft. Sei $G \neq \{e_G\}$, wobei e_G das neutrale Element der Addition in G ist. Andernfalls wäre G isomorph zu $brace0\} \subseteq \mathbb{R}$, der trivialen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Somit ist P nicht leer und wir nehmen ein Element $\alpha \in P$ beliebig. Für jedes $g \in G$ und $g \in P$ definieren wir:

$$S_g := \{\tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ | m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \leq ng$$

Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $m\alpha \leq ng \Leftrightarrow mp\alpha \leq np\alpha$. Die Darstellung von $r \in \mathbb{Q}^+$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen hängt also nicht damit zusammen, ob $r \in S_g$ enthalten ist.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es einen Monomorphismus zu finden der G auf die additive Gruppe der reellen Zahlen abbildet. Wir zeigen nun folgende Aussagen:

(i) Für alle $g \in S_g$ gilt $S_g \neq \varnothing$ und $S_g \neq \mathbb{Q}^+$. Für $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < sunds \in S_g. \Rightarrow r \in S_g$.

(ii) Sei $S_g \subseteq \mathbb{Q}^+$, wobei S_g nicht leer nd beschränkt. Die Abbildung $\Phi : P \to \mathbb{R}^+, g \mapsto supS_g$ ist somit wohldefiniert.

(iii) Für alle $g, h \in \mathbb{Q}^+$. gilt: $g \leq h \Leftrightarrow S_g \subseteq S_h \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h)$.

(iv) Sei $g, h \in P$ und $r, s \in \mathbb{Q}^+$. Sei $r \in S_g$ und $s \in S_h$ so folgt $r + s \in S_{g+h}$. Sei $r \notin S_g$ und $s \notin S_h$, so folgt $r + s \notin S_{g+h}$.

(v) Es gilt: $\Phi\left(g+h\right) = \Phi\left(g\right) + \Phi\left(h\right)$ für alle $g, h \in P$.

(vi) Φ wird fortgesetzt auf die gesamte Gruppe G durch $\Phi\left(e_G\right) = 0$ und $\Phi\left(-g\right) = \Phi\left(g\right)$ für alle g $\in P$.

Insgesamt ist Φ ein Monomorphismus abelscher Gruppen und damit ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
zu (i): Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem Element $g \in p$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng < \alpha$. Nach Definition von S_g gilt $\frac{1}{n} \in S_g$ und somit ist S_g nicht leer.
Angenommen $S_g = \mathbb{Q}^+$, dann wäe $n \in S_g$ und $n\alpha \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Seien $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < sunds \in S_g$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt $kn < lm$ und da $s \in S_g : m\alpha \leq ng$ und $kn\alpha \leq lm\alpha \leq lng$. Daraus

wiederum folgt: $\frac{kn}{ln} = r \in \mathbb{Q}^+$.
zu (ii): Wir haben bereits gezeigt, dass S_g nicht leer ist. Angenommen S_g wäre unbeschränkt, dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in S_g$ mit n < r. Nach (i) folgt daraus $n \in S_g$was impliziert, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n\alpha \leq g$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
zu (iii): □

2.1.2 Kette konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten Gruppe. Untergruppen angeordneter Gruppen besitzen eine durch die teilweise Gruppenordnung induzierte teilweise Ordnung. Wir bezeichnen die Untergruppen als angeordnet, falls die ursprüngliche teilweise Ordnung ebenso eine Anordnung war.

2.1.17 Definition
Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G nennen wir *konvex*, wenn aus a ∈ U, x ∈ G, mit 0 < |x| < |a| folgt x ∈ U. (nach [PC69]) Bezeichne "$\sum$"die *Kette konvexer Untergruppen* einer angeordneten Gruppe G. $\sum$ besitzt folgende Eigenschaften:

S1: Gilt e ∈ $\sum$ und G ∈ $\sum$ dann gilt, wenn C_λ Untergruppe, dann gilt $\cup\, C_\lambda$ und $\cap\, C_\lambda$ liegen in $\sum$.

S2: Ist C ∈ $\sum$ und g ∈ $\sum$, so ist $g^{-1}Cg \in \sum$

S3: Sei D ⊂ C und $\sum$ enthält keine Untergruppe zwischen C und D, so ist D normal in C und C/D ist isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.

S4: Sei D ⊂ C und $\sum$ enthält keine Untergruppe zwischen C und D, so erzeugen die Hauptautomorphismen von C/D einen Integritätsbereich $\Phi C/D$ im Endomorphismenring $\Psi\{C/D\}$. Der durch $\Psi\{C/D\}$ und durch die Quadratwurzeln der Hauptautomorphismen erzeugte Körper $\Gamma\{C/D\}$ ist einem Unterkörper der reellen Zahlen isomorph.

2.1.18 Bemerkung
Für konvexe Untergruppen gelten folgende Eigenschaften:

(a) Eine konvexe Untergruppe ist auch bezüglich der ganzen Gruppe konvex.

(b) Der Durchschnitt konvexer Untergruppen ist ebenso wieder eine konvexe Untergruppe.

2.1.19 Definition
Ein System $\sum$ aus Untergruppen einer Gruppe G nennen wir *System aller konvexen Untergruppen* einer Anordnung von G, genau dann wenn $\sum$ den obigen Bedingungen S1 - S4 genügt. [Mal48]

2.1.3 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir (G,+), eine angeordnete abelsche Gruppe und eine angeordnete Menge Θ mit einem maximalen Element μ.

2.1.20 Definition

Eine *Bewertung* $\omega(a)$ mit $a \in$ G ist eine Funktion ω: G -> Θ, so dass folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

B1: $\omega(a) = \mu <=>$ a = 0,

B2: $\omega(na) = \omega(a)\ \forall n \in \mathbb{N}$,

B3: $\omega(a+b) \geq min\{(\omega(a), \omega(b)\}$.

Die Gleichheit in der Bedingung (iii) gilt dann, wenn $\omega(a) \neq \omega(b)$. Zwei Bewertungen $\upsilon,\ \upsilon'$ auf G mit den Wertemengen Γ, Γ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma : \Gamma\ \rightarrow\ \Gamma'$ gibt, so dass $\sigma \circ \upsilon = \upsilon$.
Sei (G, +) eine angeordnete Gruppe, dann nennt man die Abbildung a $\mapsto$ [a]: G $\rightarrow$ [G] die *natürliche Bewertung.* [PC83]

2.1.21 Definition

[PC83] Sei K ein Körper, $(\Theta, \cdot)$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\overline{\Theta} = \Theta \cup 0$ mit 0 als absorbierendes Element für alle $0 < \gamma \in \Theta$. Eine Abbildung $\omega : K \rightarrow \overline{\Theta}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie 2.1.20 [B1] erfüllt und zusätzlich folgendes gilt:

B2': $\omega(ab) = \omega(a)\,\omega(b))$ für alle $a, b \in K$

B3': $\omega(a+b) \leq max\{v(a), \omega(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Ein Beispiel für eine Bewertung ist die Polordnung meromorpher Funktionen in einem festen Punkt, wie im Hauptteil (Potenzringe/Laurentreihen) 3 3.2.5 noch erörtert wird. Man bezeichnet $\omega : K \rightarrow \overline{\Theta}$ als diskrete Bewertung, falls gilt $\overline{\Theta} = \mathbb{Z}$

2.1.4 Der Hahnsche Einbettungssatz

Wie in den vorherigen Paragraphen ausgeführt sind archimedische Gruppen abelsch und isomorph zu Untergruppen der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Das heißt es gibt einen injektiven monotonen Homomorphismus f: G $\mapsto$ ($\mathbb{R}$, +). Existiert ein weiterer solcher Homomorphismus, g: G $\mapsto$ ($\mathbb{R}$, +), dann existiert genau eine reelle Zahl $\lambda > 0$, mit g(x) = r*f(x), wobei x $\in$ G

2.1.22 Satz

Jede angeordnete abelsche Gruppe ist zu einer Untergruppe eines angeordneten Vektorraumes über $\mathbb{Q}$ ordnungsisomorph.

2.1.23 Satz

Jeder angeordnete Vektorraum G über $K(x)$, wobei $K(x)$ der rationales Funktionenkörper, ist einem Unterraum des lexikographisch geordneten Funktionenraums $W(G)$ o-isomorph.

2.1.24 Satz

[PC83] (Hahnscher Einbettungssatz, Hahn 1907) Eine angeordnete abelsche Gruppe A lässt sich ordnungstreu in die Hahn-Gruppe $H(\Gamma, \mathbb{R})$ einbinden, wobei $\Gamma =[A]\ \{[0]\}$.

Kapitel 3

Potenzreihenkörper

Bevor wir mit der allgemeinen Untersuchung von Potenzreihenkörpern beginnen, wird in diesem Kapitel ein wichtiges Beispiel von Ringen eingeführt. Zunächst wird die Menge der formalen Potenzreihen definiert und nachgewiesen, dass es sich bezüglich komponentweiser Addition und Faltung um einen Ring handelt. Als Beispiel eines Potenzreihenkörpers betrachten wir den Körper der Laurentreihen genauer, der dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht. Die genauere Analyse der Eigenschaften des Trägers der Elemente des Körpers der Laurentreihen zeigt, dass dieser auch über einer angeordneten Gruppe definiert sein kann und trotzdem ein Körper durch Einbettung des Ringes entsteht. Der dadurch entstandene Körper, wird als *Potenzreihenkörper* bezeichnet.

3.1 Der Potenzreihenring

Allgemein ist ein Ring folgendermaßen definiert:

3.1.1 Definition
[Fis08] Sei R eine nichtleere Menge und seien $\oplus : R \times R \to R$ und $\odot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel (R, $\oplus, \odot$)

R1: (R, $\oplus$) ist eine abelsche Gruppe,

R2: (R, $\odot$) ist ein Monoid,

R3: (Distributivgesetze) Für alle a,b,c $\in$ R gilt a $\cdot(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Das neutrale Element bezüglich der Addition wird mit 0_R, das neutrale Element bezüglich der Multiplikation mit 1_R bezeichnet. Wir betrachten im Folgenden nur den Ring der formalen

Potenzreihen K[[z]] über einem beliebigen Körper K. Hervorzuheben ist, dass z keine Variable, die für eine Zahl steht, repräsentiert, sondern eine Unbestimmte darstellt. Daraus ergibt sich die Irrelevanz von Konvergenzfragen in der Theorie der formalen Potenzreihenringe und -körper. Mit $K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}$ wird die Menge der formalen Potenzreihen in z über K bezeichnet. $K[[z]]$ ist ein Ring bezüglich der Addition und Multiplikation, wie in 3.1.1 bewiesen wird.

3.1.1 Rechnen im Potenzreihenring

Im Folgenden werden Addition und Multiplikation in $K[[z]]$ definiert sowie durch einen Nachweis der Ringaxiome 3.1.1 (R1-R3) gezeigt, dass $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen ist.

Formale Potenzreihen werden komponentenweise addiert:

$+ : K[[z]] \times K[[z]] \to K[[z]]$, $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$

Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen erfolgt durch die sogenannte Faltung: $\cdot$: $K[[z]] \times K[[z]] \to K[[z]] : \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0)\, x_n$

Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$. Das *neutrale Element der Addition* 0_R ist die Nullreihe. Sei $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n$, wobei $a_k = 0$ für alle k $\in \mathbb{N}$. Dann folgt:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Wir bezeichnen $-f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$ als das *Inverse der Addition*.
Es gilt: $f(x) + (-f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n + (\sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n) z^n = 0_R$. Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe. Darunter verstehen wir diejenige Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind: $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n$, wobei $a_0 = 1$ und $a_n = 0$ für alle n $\in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Damit folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j \cdot b_k)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
Für das *Inverse der Multiplikation* muss für zwei Potenzreihen $f, g \in K[[z]]$ nach Defintion gelten:

$$fg = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \overset{!}{=} 1$$

Folglich muss $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0}$ erfüllt sein. Außerdem folgt für die restlichen Koeffizientenwerte:

$$\sum_{j+k=n} (a_j b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Die Koeffizienten b_n werden rekursiv durch diese Gleichungen definiert und die so entstandene Potenzreihe ist die Inverse.

3.1.2 Eigenschaften des Potenzreihenrings

Zunächst betrachten wir die Einheiten im Potenzreihenring bevor für die Erweiterung des Potenzreihenrings zu einem Körper wichtige Folgerungen bewiesen werden.

3.1.2 Satz
Sei $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist eine formale Potenzreihe $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann eine Einheit, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Beweis über Induktion.
Sei $a_0 \neq 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \stackrel{!}{=} 1$.
Finde entsprechendes $\sum_{k=0}^{\infty} b_m z^m$.
Für b_0 muss gelten $a_0 b_0 = 1$. Da gilt $a_0 \neq 0$ besitzt sie eine eindeutige Lösung,nämlich $b_0 = a_0^{-1}$.
Angenommen $\exists b_k$ mit $k < n$ sodass alle $c_m := a_j * b_k, 1 \subseteq m < n$ gleich 0 sind.
Für den n-ten Koeffizienten ergibt sich $0 \stackrel{\text{def}}{c}_m = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$
Bis auf b_n sind alle Werte festgelegt. Da $a_0 \neq 0$ ist die Lösung für b_n eindeutig.
" $\Rightarrow$ " Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = 1$. Zu zeigen ist: $a_0 \neq 0$.
Es folgt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für $n > 0$ und $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$ □

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind deren konstanter Term ungleich 0 ist.

3.1.3 Satz
Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.
Seien $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n$ und $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (b_n) x^n$ mit

$$f(x) \cdot g(x) = \sum a_n z^n \cdot \sum b_n z^n = 0.$$

Nach Definition der Multiplikation gilt also

$$\textstyle\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei nun o.B.d.A. $\sum a_n z^n \neq 0$. Zu zeigen ist: $\sum b_n z^n = 0$. Dazu zeigen wir, dass kein Index n existiert für den $b_n = 0$ und somit: $[b_0, b_1, ..., b_{n-1} = 0 \Rightarrow b_n = 0], \forall n \in \mathbb{N}$ Sei k der erste Index sodass $a_k \neq 0$ gilt.

$$\sum_{k+l=k} a_k b_l = \sum_{k+0=k} a_k b_0 = 0$$

Damit gilt $b_0 = 0$. Seien jetzt $b_0 ... b_{n-1} = 0$. Mit $\sum_{k+l=n+l} a_k b_{n-k} = a_l b_n = 0$. Es folgt daher auch $b_n = 0$. □

3.1.4 Satz

Betrachte $\mathbb{C}\langle T\rangle$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}\langle T\rangle$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[x]$.

Beweis:

Wir haben bereits in 3.1.3 gezeigt, dass $\mathbb{C}[[z]$ ein Integritätsring ist. Nun bleibt für $\mathbb{C}\langle T\rangle$ noch zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.
Betrachte zwei konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2. Innerhalb des $min\{r_1, r_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen und somit auch die Summe der beiden Potenzreihen. Das Produkt besitzt denselben Konvergenzradius, da beide Reihen im Radius $min\{r_1, r_2\}$ absolut konvergieren und somit nach dem großen Umordnungssatz auch das Cauchyprodukt gegen den gleichen Wert. □

3.1.5 Satz

Die Menge $Quot(R) := \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \in R \times (R \setminus 0) : a\tilde{b} = \tilde{a}b\})$ mit R Integritätsring ist zusammen mit der
Addition $Quot(R) \times Quot(R) \to Quot(R), (x, y) \mapsto x + y$,
und der Multiplikation: $Quot(R) \times Quot(R) \to Quot(R), (x, y) \mapsto x \cdot y$ ein Körper.
Man bezeichnet ihn als Quotientenkörper von R. [Fis08]

Beweis:

Es genügt die Körperaxiome nachzurechnen. (siehe [Fis08] S. 173) □

Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

3.1.6 Beispiel

Ist D $\leqslant \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\Theta(D)$ der in G holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt
$\Phi(D) := Quot(\Theta(D)) = \{\frac{f}{g} : f, g \in \Phi(D), g \neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen. Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert, sind also damit Definitionslücken in g.

3.1.7 Satz

$K[[z]]$ ist ein diskreter Bewertungsring. [1]

Beweis:

Nach 3.1.2 folgt $K[[z]]$ besitzt genau ein maximales Ideal nämlich $\mathfrak{m} = (z)$. Für eine Potenzreihe P, mit P $\notin K[[z]]^*$ gilt $a_0 \neq 0$. Somit lässt sich jede derartige Potenzreihe schreiben als $P = T\widetilde{P}$, wobei $\widetilde{P}$ die umindizierte Potenzreihe bezeichnet.
Die Nullteilerfreiheit folgt wie in 3.1.3ausführlicher gezeigt, denn:
Für die Produktreihe FG, wobei F,G $\in K[[z]]$ und F, G von Null verschieden, gilt, dass ab den Indizes i, j gilt $a_i,\ b_j\ \neq 0$ und somit $c_n := a_i b_j \neq 0$.
$K[[z]]$ ist noethersch, da $K[[z]]$ ein Hauptidealring, denn jedes Ideal $\neq 0$ ist erzeugt von z^j, wobei j der kleinste Index ist, ab dem die Koeffizienten c_n der Potenzreihen $\neq 0$
in dem Ideal sind. Denn für das maximale Ideal muss gelten, dass es von einem Element erzeugt wird für das gilt: $a_0 = 0$.
Andernfalls wäre die entsprechende Potenzreihe eine Einheit und würde somit ganz K[[z]]erzeugen.

□

Damit folgt, dass $K[[z]]$ isomorph zu einem, wie in Punkt 2 beschriebenen Bewertungsring $A := 0 \cup \{x \in K * | v(x) \geqslant 0\}$ ist.
Wie in obigem Beweis 3.1.7 gezeigt, gilt: $(z) \subset (z^2) \subset (z)^3 \subset (z)^4 \subset ....$

3.1.8 Satz

Ist R ein diskreter Bewertungsring, so ist Quot(R) ein diskret bewerteter Körper mit der Bewertung v(a/b)=v(a)-v(b).

Nach 3.2.3 können wir jetzt zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen, dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht, auf den wir später näher eingehen werden. Anschließend definieren wir eine entsprechende Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen.

3.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen. Wir bezeichnen mit K((z)) die Menge aller Abbildungen f von $\mathbb{Z}$ in einen kommutativen Körper K, für die es ein Element x $\in \mathbb{Z}$ gibt, mit f(y) = 0 für alle $y < x$. Wenn wir von K sprechen ist im Folgenden immer ein kommutativer Körper gemeint.
Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit wird jedoch auf

[1] https://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/fileadmin/mathematik/downloads/2012AlgKurven.pdf

Konvergenzbetrachtungen verzichtet und nur formale Laurentreihen, also Laurentreihen in einer Unbestimmten z behandelt.

3.2.1 Definition

Eine Laurentreihe ist eine Reihe $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei K ein kommutativer Körper ist. Dabei bezeichnet $\sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^{-n}$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da ansonsten die Multiplikation nicht definiert werden kann. Der Träger der Laurentreihe, also der Definitionsbereich der Funktion, die die Laurentreihe darstellt, ist folgendermaßen definiert: supp(f) $:= \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$. Zwei Laurentreihen werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert.

$$+ : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=min(-k,-m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Wie bereits erwähnt besitzen formale Laurentreihen nur endliche viele Terme mit negativen Exponenten, das bedeutet der Hauptteil besteht aus nur endlich vielen Summanden. Dadurch kann das Produkt zweier solcher Reihen durch Faltung definiert werden.
Eine derartige Darstellung existiert, da K$((z))$ als Quotientenkörper von K[[z]] definiert ist, wie in 3.2.3 gezeigt wird.
Da jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 \neq 0$ invertierbar in K[[z]], dem Ring der formalen Potenzreihen, ist, wird der Quotient $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m}$ bis auf eine Potenz von z im Nenner gekürzt.

$$\cdot : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-m-k}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i + b_j) z^n.$$ [Lü08]

3.2.2 Satz

Sei K ein kommutativer Körper, und bezeichne K((z)) den Körper der formalen Laurentreihen. Dann ist K((z)) tatsächlich ein Körper. [Lü08]

Beweis:

Sei f $\in$ K((z)). Dann gibt es ein i $\in \mathbb{Z}$ sodass die Potenzsumme mit Startwert i für alle Indizes n $\in Z$ mit n $>$ i ungleich, für alle n $<$ i gleich Null ist. Um zu zeigen, dass K((z)) ein Körper ist muss zu jedem Element von K((z)) ein Inverses existieren. Wir definieren g $\in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so definierte Laurentreihe invers zu f ist. Setze $g(n) := 0$ für alle $n < -i$ und $g(-i) := f(i)^{-1}$. Sei $w \in \mathbb{N}$ und $g(-i)...g(-i+w-1)$ bereits definiert. Dann gilt nach Definition der Multiplikation in $K((z))$ und für $g(-i+w) := -f(i)^{-1} \sum_{m=-i}^{-i+w-1} g(m)f(w-m)$:

$$(gf)(w) = \sum_{n=i-i}^{\infty} \sum_{k+l=n} (a_k + b_l) z^n = \sum_{n=-i}^{-i+w} g(n)f(w-n).$$

Im Fall $w < 0$ ist die Summe f(w-n) für $-i \leq n \leq -i + w$ leer. <für $w = 0$ folgt $gf(0) = g(-i)f(i) = 1$. Es bleibt der Fall $w > 0$ zu berücksichtigen:

$$(gf)(w) = \sum_{n=-i}^{-i+w-1} g(n)f(w-n) + g(-i+w)f(i) \overset{\text{defvong}}{=} 0$$

Also ist gf = 1 und aufgrund der Kommutativität folgt fg = 1, womit K((z)) ein Körper ist. □

Mithilfe von 3.1.5 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

3.2.3 Satz
Es gilt $\mathbb{K}((z)) = Quot(K[[z]])$.

Beweis:

Nach Konstruktion von $K((z))$ ist klar, dass $K[[z]] \subseteq K((z))$ Da weiter jede Laurentreihe $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ die Gestalt $\frac{g}{z^m}$ wobei $g \in K[[z]]$ und $m \in \mathbb{N}$ so ist $K((z))$ der Quotientenkörper (siehe 3.1.5) von $K[[z]]$ □

Für $K((z))$ gilt, dass der Körper nur Reihen mit Hauptteilen aus endlichen vielen Summanden enthält. $K((z))$ ist definiert wie in 3.2.3 gezeigt als der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen. Jede Potenzreihe $\sum_{n\geq k} a_n z^n$ mit $a_0 \neq 0$ ist invertierbar in $K[[z]]$. Die Elemente können durch Quotienten dargestellt werden, bei denen alles bis auf eine Potenz von z aus dem Nenner gekürzt wird. Aus $\sum n \subseteq ka_n z^n = z^k \sum n \subseteq 0a_{n+k}z^n$ folgt, dass der Hauptteil aus endlich vielen negativen Koeffizienten besteht.
Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung um das transzendente Element z dar.

3.2.4 Satz
Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\langle z\rangle$ *ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen* $\mathbb{C}_L\langle z\rangle$.

Beweis:

Wie in Beweis 3.1.1 konstruieren wir das formale Inverse zu einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\langle T\rangle$ mit $a_0 \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass auch dieses Inverse konvergiert. Nach Voraussetzung konvergiert f und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in f beschränkt ist, also $|a_n| \leq a, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$. Betrachte $f(z_0) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n {z_0}^n$ konvergente Laurentreihe mit $|z_0| > 0$. Da $f(z_0)$ konvergent, ist die Folge $(a_n|z_0|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und für die Potenzreihe gilt:

$$\overline{f}(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \frac{z}{z_0}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \text{ mit } \omega := \frac{z}{z_0}$$

Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge a_n größer 1 ist und es sei ohne Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge b_n der inversen wie in 3.1.1. Es gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Indem wir zeigen, dass $|b_n|$ beschränkt ist durch ein Vielfaches von a^n geben wir eine positive untere Schranke an den Konvergenzradius an und zeigen somit das Inverse konvergiert. Wir zeigen mithilfe von Induktion, es existiert ein $C > 1$ mit $C \in \mathbb{R}$ sodass:

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

Nach Konstruktion des Inversen 3.1.1 ist die Ungleichung für b_0 erfüllt. Gelte die Abschätzung für b_n. Wähle $C := \frac{a}{a-1}$. Dann gilt:
$|b_{n+1}| = |-\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq a\sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq aC^n \sum_{k=1}^{n+1} a^k \leq aC^n \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (aC)^{n+1}$. Wie in 3.2.3 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Des weiteren ist noch zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist, dies wurde bereits in 3.1.4 für Potenzreihen gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Laurentreihen f, g ist natürlich wieder konvergent, man muss nur den Nebenteil betrachten. Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multpliziere man diese so mit den Potenzen von z, dass man eine konvergente Potenzreihe erhält und geht wie in 3.1.4 vor. Nun definieren wir wie in 3.2.3 die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}_L\langle z\rangle \to Quot(\mathbb{C}\langle z\rangle)$ $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} [(z^m \sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n, z^m)], & \text{wenn } m < 0, \\ [\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n, 1], & \text{wenn } m > 0. \end{cases}$.
Wie in 3.2.3 bereits gezeigt, handelt es sich um einen Isomorphismus und die Behauptung ist somit bewiesen. □

Wie in 3.1.7 gezeigt, ist $K[[z]]$ ein diskreter Bewertungsring und der kleinste vorkommende Exponent eines Monoms liefert die Bewertung einer Potenzreihe. Der Quotientenkörper eines diskreten Bewertungsrings besitzt ebenso eine Bewertung 3.1.8. So können wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 3.2 der Laurentreihe supp(f) $:= \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$. Nach 2.1.21 suchen wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus (nach B3 2.1.21). Betrachte $min\{(supp(f))\}$, eindeutig bestimmt durch den kleinsten Index n_0 der Laurentreihe ab dem der Koeffizient $a_{n_0} \neq 0$. Die Menge all dieser Elemente bildet eine angeordnete abelsche Gruppe Ψ und es gibt einen Isomorphismus von $\psi : \Psi \to \mathbb{Z}$.

3.2.5 Satz

Betrachte die Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$, mit $a_{n_0} \neq 0$ Die Abbildung $v : K((z))->$ $\mathbb{Z}$ definiert durch $v(f) = n_0$ ist eine diskrete Bewertung.

Beweis:

Klar: Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt und damit $v(f) = min\{\{(supp(f)\})\}$. Nach 2.1.21 sind noch (B1-B3') nachzuweisen mit der angeordneten abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ als Bildmenge.

zu B1 : Klar nach Definition.

zu B2 : Sei $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$. Dann ist $v(f) = n_0$ und $v(g) = m_0$ Damit gilt: $v(f) + v(g) = n_0 + m_0$.
$v(f * g) = v(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{n=m+k} a_m b_k z^n) =$, wobei $a_m = 0$ für $m < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$. Betrachte $n < n_0 + m_0$. Da $n = m + k$ folgt m $< n_0$ oder k $< m_0$. Nach Voraussetzung folgt entweder $a_m = 0$ oder $b_k = 0$ und somit ist auch das Produkt $a_m b_k = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Sei $n = n_0 + m_0$. Das Produkt $a_{n_0} b_{m_0} \neq 0$ und daher $v(fg) = n_0 + m_0$.

zu B3 : Für v(f+g) gilt, wenn f, g wie oben definiert: $v(f+g) = v\left(\sum_{n=min\{n_0,m_0\}}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\right) = min\{n_0, m_0\} \leqslant max\{n_0, m_0\} \overset{\text{def}}{=} max\{v(f), v(g)\}$.

□

3.3 Der Potenzreihenkörper

Die Grundlagen zur Konstruktion eines Körpers über sehr allgemein definierten formalen Potenzreihen untersuchte Hahn 1907 in seiner Arbeit „Über nichtarchimedische Größensysteme". Die so definierten Potenzreihen erlaubten nicht nur mehr Exponenten der Unbestimmten aus der Menge der ganzen Zahlen, sondern aus beliebigen wohlgeordneten Untergruppen der Wertegruppe. Als erster stelle er Potenzreihen mit verallgemeinerten Exponenten vor wie:

$$f = 1 + z^{log2} + z^{log3} + z^{log4} + ...$$
$$g = \tfrac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{4} z^{\frac{3}{4}} + \tfrac{7}{8} z^{\frac{7}{8}} + ... + z + \tfrac{3}{2} z^{\frac{3}{2}} + ... + 2z^2 + ...$$

Hahn konnte im Laufe des Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes zeigen, dass die nach ihm benannten Potenzreihen nicht nur eine Gruppe, wie ursprünglich angenommen, bilden. Neben Hahn beschäftigten sich auch die beiden Mathematiker Neumann und Mal'cev mit den von Hahn konstruierten Reihen und deren Einbettung in einen Körper.
Bevor wir uns der Konstruktion der Hahnschen Potenzreihen zuwenden, wird die Rolle des Trägers der Potenzreihen bei der Konstruktion von Potenzreihenkörpern genauer erörtert.

3.3.1 Träger über ganzen Zahlen

Wir kennen bereits die in 3.1 definierten Potenzreihen sowie ihre Verallgemeinerung, die Laurentreihen. Bisher haben wir uns nur mit Potenzreihen beschäftigt, deren Elemente auf einer Teilmenge der ganzen Zahlen indiziert werden. Die Exponenten der Unbestimmten der indozierten algebraischen Struktur $(K[[z]], K((z)))$ gehören in beiden Fällen ebenso einer Teilmenge der ganzen Zahlen an.

Betrachten wir den Körper der formalen Laurentreihen über dem Körper K. Wie in 3.2 definiert, ist T eine Teilmenge der ganzen Zahlen und da für jede Teilmenge ein Minimum existieren, ist T wohlgeordnet nach 2.1.8. Die Wohlordnung des Trägers ist eine Voraussetzung zur Definition der Multiplikation im Körper K((z)).

3.3.2 Träger über angeordneter abelscher Gruppe

Wir haben im vorherigen Kapitel festgestellt, dass die bisher betrachteten Potenzreihen immer auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (Potenzreihenring $K[[z]]$) oder den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (Laurentreihenkörper $K((z))$) definiert waren. In 3.3.1 wurde gezeigt, dass die Mengen auf denen wir Potenzreihenringe definieren können eine bestimmte unverzichtbare Eigenschaft innewohnt, die Wohlordnung. Im Folgenden betrachten wir bestimmte Arten von Mengen, nämlich die bereits in dem vorherigen Kapitel 2 vorgestellten angeordneten Gruppen. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66].

Für einen Körper K und $(\Gamma, \cdot)$ eine angeordnete Gruppe, die Menge aller Funktionen von Γ nach K. Die Addition derartiger Funktionen f,g ist definiert durch: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ für alle $x \in \Gamma$. Sei $\lambda \in K$ dann ist $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ für x $\in \Gamma$, $\lambda \in K$ und $f \in K[[\Gamma]]$.
Wir bezeichnen $X^a \in K[[\Gamma]]$, wobei für die Funktion z^a gilt, dass $z^a(a) = 1$ und $z^a(x) = 0$ wenn $x \neq a$.
Jedes Element $f \in K[[\Gamma]]$ kann geschrieben werden, als $f = \sum_{a \in \Gamma} f(a) z^a$. Somit sehen wir auch, dass Γ kanonisch in $K[[\Gamma]]$ eingebettet ist vermöge der Abbildung $\Gamma \mapsto K[[\Gamma]]$, $g \longmapsto \sum_{a \in \Gamma} f(a) z^a$ mit $z^a(a) = 1$ und $z^a(b) = 0$ für alle $a \neq b$.

Dementsprechend definieren wir die Gesamtheit dieser Elemente. Sei $(\Gamma, \cdot)$ eine angeordnete Gruppe und K ein Körper.

3.3.1 Definition
$F := \sum_{x \in \Gamma} \Phi_x z^x$ mit $(\Phi_x \in K)$. F nennt man eine formale Potenzreihe auf Γ über K. Die Gesamtheit dieser formalen Potenzreihen wird im Folgenden mit $K[[z^\Gamma]]$ bezeichnet.

Die Definition von F verlangt, dass die Koeffizienten $\Phi_x \in K$ liegen und $supp(F) = [x \in \Gamma | \Phi_x \neq 0]$ wohlgeordnet sei bezüglich der Anordnung von Γ.
Die Exponenten x der Unbestimmten z sind ebenfalls Element der angeordneten Gruppe Γ. Die Potenzreihen werden aufsummiert über einer Untermenge U bestehend aus Elementen x aus Γ. Die Anordnung der Gruppe G überträgt sich auf die Untermenge U nach 22.1.3. Der Träger besitzt somit ein kleinstes Element. Alternativ lässt sich die Reihe als $F = \Phi_{x_1} z^{x_1} + \Phi_{x_2} z^{x_2} + ... + \Phi_{x_p} z^{x_p} + ...$, Summation über den Ordinalzahlen p bis zu einem fixierten $a \in \Gamma$ und Exponenten $x_1 \leq ... \leq x_p ...$ die bezüglich der Anordnung „ $\leq$ “ von Γ

monoton steigend geordnet sind. [Car48]
Eine formale Potenzreihe bezeichnet eine Funktion $\Phi : G \mapsto K$, die in der Anordnung von Γ einen wohlgeordneten Träger $supp(\Phi) = \{g \in G | f(g) \neq 0\}$ besitzt.

$$K[[z^{\Gamma}]] = \{F := \sum_{x\in\Gamma} a_x z^x | supp(F) \text{ ist wohlgeordnet.}\}$$

3.3.3 Definition der Addition und Multiplikation in $K[[z^{\Gamma}]]$

Seien F, G zwei formale Potenzreihen auf Γ, mit $F = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a a$ und $G = \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a a$ wobei $\Phi_a, \Psi_a \in K$).
Die Summe $F + G := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a$ ist gegeben durch die Addition der Koeffizientenfolgen.
Der Träger der Summe F + G ist wohlgeordnet, da $supp(F) = \{g \in \Gamma | \Phi_g \neq 0\}$ und $supp(G) = \{g \in \Gamma | \Psi_g \neq 0\}$ wohlgeordnet sind und somit das kleinste Element von supp(F+G) existiert und $min\{supp(F + G) = min\{min\{supp(F)\}, min\{supp(G)\}\}$. $\Phi + \Psi$ ist somit eine formale Potenzreihe.
Für jedes Element $\lambda \in K$ gilt, das Produkt mit einem Körperelement $\lambda F = \lambda(\sum_{x\in\Gamma} a_x z^x) = \sum_{x\in\Gamma} \lambda a_x z^x \in K[[z^{\Gamma}]]$. Bevor wir die Multiplikation der Koeffizienten zweier formaler Potenzreihen betrachten, schauen wir uns zunächst an, was mit den Exponenten der Variablen z geschieht. Sei $F, G \in K[[z^{\Gamma}]]$ mit $F = \sum_{g\in\Gamma} \Phi_g z^g$ und $G = \sum_{h\in Gamma} \Psi_h z^h$.
Alternativ lassen sich unsere Reihen folgendermaßen schreiben: $F*G = \left(\Phi_{g_1} z^{g_1} + \Phi_{g_2} z^{g_2} + ... + \Phi_{g_p} z^{g_p} + ...\right) * \left(\Psi_{h_1} z^{h_1} + \Psi_{h_2} z^{h_2} + ... + \Psi_{h_p} z^{h_p} + ...\right)$.
Betrachten wir zunächst das Produkt einzelner Monome: $\Phi_g z^g \Psi_h z^h = \Phi_g \Psi_h z^{g+h}$. Für die Variable z gilt nach den Potenzgesetzen $z^{g1} * z^{h1} = z^{g1+h1}$. Die distributive Forsetzung führt zur Definition der Multiplikation in $K[[z^{\Gamma}]]$. Wir erhalten das Produkt als Summe über der Summe des Produkts der einzelnen Koeffizienten:
$\cdot : F = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a$ und $G = \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a$ wobei $\Phi_a, \Psi_a \in K).FG = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a$.

Um eine Aussage treffen zu können, ob dieses Produkt definiert ist, müssen wir zeigen, dass der Träger des Produkts wohlgeordnet ist. Beachte, dass $supp(FG) \leqq Supp(F) + supp(G)$. Sei $supp(FG) := \{a_1, a_2 \in G | \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} \neq 0\}$. Nach der Definition des Trägers folgt, dass die Menge angeordnet ist, denn als Untermenge von Γ überträgt sich die Anordnung. Wir müssen zeigen, dass jede Teilmenge von supp(FG) ein kleinstes Element besitzt nach 2.1.8. Nach Definition der Multiplikation in unserem Körper K gilt:
$\Phi_{a_1} \Psi_{a_2} \neq 0 \Leftrightarrow \Phi_{a_1} \neq 0$ oder $\Psi_{a_2} \neq 0$. Das bedeutet, dass das Produkt erst dann ungleich Null ist, wenn beide Faktoren ungleich Null sind. Da Γ eine angeordnete Gruppe 2.1.3 lassen sich

$min\{supp(F)\}$ und $min\{supp(F)\}$ vergleichen.

$$min\{min\{supp(F)\}, min\{supp(G)\}\} = \begin{cases} min\{supp(F)\} & \text{für } min\{supp(F)\} \leq min\{supp(G)\} \\ min\{supp(G)\} & \text{für } min\{supp(G)\} \leq min\{supp(F)\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Die Summe $\sum_{a_1 a_2 = a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a$ 3.3.3 ist endlich: Angenommen es gäbe unendliche viele a_1 für welche $\Phi_{a_1} \neq 0$ und $\Psi_{a_1^{-1}a}$

3.3.2 Satz

$K[[z^\Gamma]]$ ist ein Ring über K.

Beweis:

Es gilt $K[[z^\Gamma]]$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition, denn:

- *Assoziativität:* Für alle F, G, H $\in K[[z^\Gamma]]$. gilt nach Definition der Addition: $F + (G + H) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \left(\sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a\right) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Lambda_a) z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a + \Lambda_a) z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a + \sum_{a\in G} \Lambda_a z^a$.
- *Neutrales Element der Addition:* Bezeichne ϵ das neutrale Element der Addition $\epsilon := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a$, wobei ähnlich 3.1.1 $\Phi_a = 0$ für alle $a \in \Gamma$.
- *Inverses Element der Addition:* Zu jedem Gruppenelement F gibt es ein Inverses Element der Addition $F^{-1} := \sum_{a\in\Gamma} -\Phi_a z^a$, mit $F + F^{-1} = \epsilon$.
- *Kommutativität:* $K[[z^\Gamma]]$ ist abelsch da K ein Körper und nach Definition der Addition gilt: $F+G = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a \overset{\Phi,\Psi\in K}{=} \sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Phi_a) z^a = \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a = G + F$.

□

3.3.3 Beispiel

Sei $\Gamma = \mathbb{N}$ und $\leq$ die natürliche Ordnung, dann ist $K[[z^\Gamma]] \cong K[[z]]$ wie in 3.1 beschrieben.

3.3.4 Algebraische Abgeschlossenheit

Literaturverzeichnis

[Car48] Carruth, Philip W.: *Generalized power series fields.* http://www.ams.org/journals/tran/1948-063-03/S0002-9947-1948-0024883-6/S0002-9947-1948-0024883-6.pdf. Version: May 1948

[Fis08] Fischer, Gerd: *Lehrbuch der Algebra.* 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008

[Fuc66] Fuchs, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966

[Hö01] In: Hölder, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß.* Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1–64

[Lü08] In: Lüneburg, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1.* Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507–577

[Mal48] In: Malzew: *Über geordnete Gruppen.* Hayk : Akad. HAYK CCCP, 1948, S. 1499;1501

[PC69] Priess-Crampe, Sibylla: *Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen.* link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF01220929.pdf. Version: 1969

[PC83] Priess-Crampe, Sibylla: *Angeordnete Strukturen.* Springer-Verlag, 1983

[SP08] Schulze-Pillot, Rainer: *Einfuehrung in Algebra und Zahlentheorie.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008