Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

22. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

2 Mathematische Grundlagen **5**

2.1 Algebraische Strukturen . . . 5

2.2 Einblick in die Bewertungstheorie . . . 8

2.3 Ordnung in algebraischen Strukturen . . . 10

2.3.1 Anordnung . . . 10

2.3.2 Wohlordnung . . . 12

3 Angeordnete abelsche Gruppen **14**

3.1 Wohlordnung in angeordneten abelschen Gruppen . . . 15

3.2 Archimedisch angeordnete Gruppen . . . 17

3.3 Der Satz von Hölder . . . 19

3.4 Die angeordnete Menge konvexer Untergruppen . . . 22

4 Potenzreihenkörper **24**

4.1 Formale Potenzreihen . . . 24

4.1.1 Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen . . . 25

4.1.2 Der Ring der formalen Potenzreihen . . . 25

4.1.3 Eigenschaften des Potenzreihenrings . . . 29

4.2 Formale Laurentreihen . . . 31

4.2.1 Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen . . . 32

4.2.2 Der Körper der formalen Laurentreihen . . . 33

4.3 Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper . . . 39

4.3.1 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen . . . 40

4.3.2 Definition der Addition und Multiplikation in $K((z^G))$ . . . 41

4.3.3 Der verallgemeinerte Ring der formalen Potenzreihen . . . 43

4.3.4 Die Konstruktion des Inversen in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ . . . 45

Notation

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen
K^*	die Menge der Einheiten im Körper K
$x \in A$	x ist Element der Menge A
$A \subseteq B (A \subset B)$	A ist eine (echte) Untermenge von B
$A \cap B, A \cup B$	Durchschnitt, Vereinigung der Mengen A, B
$A \setminus B$	die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen
$\varnothing$	die leere Menge
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
|a|	der absolute Betrag von a
P, P(G)	der Positivbereich einer Gruppe G
W_G	Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten Menge G
$a \ll b$	a ist unendlich kleiner als b
$a \sim b$	a ist archimedisch äquivalent zu b
$\langle z \rangle$	die von z erzeugte Untergruppe
Σ	die Menge konvexer Untergruppen einer angeordneten Gruppe
$V \oplus W$	die direkte Summe der Untervektorräume V, W
$A \hookrightarrow B$	A eingebettet in B
$\langle u \rangle$	die von u erzeugte konvexe Untergruppe

Kapitel 1

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können.
Ordnung spielt seit jeher eine essentielle Rolle in der Geschichte der Mathematik, aber erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigte man sich mit Ordnung verbunden mit algebraischen Operationen. Derartige Strukturen treten in vielen verschiedenen mathematischen Disziplinen auf. Im 20. Jahrhundert entwickelte sich die Theorie der angeordneten Strukturen, beginnend mit Arbeiten von Hölder, Hahn und Hausdorff. In seinem Werk „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß“ zeigte Hölder 1901, dass jede archimedisch angeordnete Gruppe sich in eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen einbetten lässt. Hölder bediente sich dabei der von Dedekind eingeführten Schnitte in $\mathbb{Q}$. Der österreichische Mathematiker Hans Hahn baute diese Theorie in seinem Werk „Über nichtarchimedische Größensysteme“ weiter aus auf nichtarchimedisch angeordnete Strukturen und zeigte, dass für diese ebenso eine Einbettung als Untergruppe eines lexikographisch geordneten Funktionenraums existiert.
In der vorliegenden Ausarbeitung liegt die Aufmerksamkeit auf der Betrachtung abelscher angeordneter Gruppen. Wenn derartige Gruppen den Definitionsbereich eines lexikographisch geordneten Funktionenraums darstellen, erweist sich dieser als ein Körper. Dabei ist die Wohlordnung des Trägers der Funktionen unverzichtbar.
Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Als erstes erfolgt ein Einblick in die Theorie der angeordneten Gruppen, die später zur Konstruktion des Potenzreihenkörpers benötigt werden. Über die Wohlordnung, führt die Archimedizität und der Satz von Hölder zur zentralen Aussage des ersten Kapitels, dem Hahnschen Einbettungssatz. Im zweiten Teil werden Eigenschaften des Potenzreihenrings über einem Körper näher beschrieben und verallgemeinert bewiesen, wie der Körper der Laurentreihen entsteht. Basierend auf Arbeiten von Fuchs und Prieß-Crampe wird die Konstruktion des Potenzreihenkörpers auf einer angeordneten abelschen Gruppe durchgeführt und gezeigt, dass es sich tatsächlich um einen Körper handelt.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die Ausarbeitung benötigten theoretischen Grundlagen zusammengestellt. Wir betrachten zunächst zentrale algebraische Strukturen und fokussieren uns im weiteren Verlauf auf Gruppen und Ordnungen die in ihnen definiert werden können.

2.1 Algebraische Strukturen

Wir beginnen mit der Definition der elementaren algebraischen Strukturen Gruppe, Ring, Körper und Quotientenkörper. Die Vertrautheit mit grundlegenden Begriffen über Mengen und Abbildungen, sowie den wichtigen Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird vorausgesetzt. Die folgenden Ausführungen sind orientiert an [SP08] und [Fis08].

2.1.1 Definition
Eine nichtleere Menge G mit der Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G, (a, b) \mapsto a \circ b$ heißt *Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

G1: (Assoziativgesetz) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.

G2: (Neutrales Element) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $1_G \in G$ mit $1_G \circ a = a \circ 1_G = a$ für alle $a \in G$.

G3: (Inverses Element) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element a^{-1} in G mit $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = 1_G$.

Die Gruppe heißt *abelsch*, falls folgendes gilt:

G4: (Kommutativgesetz) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$.

2.1.2 Bemerkung
Wenn $(G, \circ)$ eine Gruppe ist, so wird das Inverse eines Elements $a \in G$ mit a^{-1} bezeichnet.

Wenn nichts anderes gesagt ist, verwenden wir in abelschen Gruppen die Verknüpfung $+$ und nennen das neutrale Element 0_G und $-a$ das Inverse zu $a \in G$.

2.1.3 Beispiel
$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen.

2.1.4 Definition
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1_G. Die Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe*, wenn gilt:

U1: $1_G \in U$.

U2: $a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$.

U3: $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$.

2.1.5 Definition
Sei R eine nichtleere Menge und seien $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ bezeichnen wir als *Ring mit Eins*, wenn gilt:

R1: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (deren neutrales Element mit 0_R bezeichnet wird).

R2: Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ: Für $a, b, c \in R$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (das neutrale Element wird mit 1_R bezeichnet).

R3: (Distributivgesetze) Für alle a,b,c $\in$ R gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ und } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

2.1.6 Bemerkung
Ist die Multiplikation kommutativ, so heißt $(R, +, \cdot)$ *kommutativer Ring mit Eins*. Anstelle von $(R, +, \cdot)$ sprechen wir vereinfachend von dem Ring R.

2.1.7 Definition
Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$.

(a) Ein Element $a \in R$ heißt *Nullteiler*, falls $a \neq 0$ und ein $b \in R, b \neq 0$ existiert mit $ab = 0$.

(b) Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, falls ein $b \in R$ existiert mit $ab = 1$.

2.1.8 Bemerkung
Falls $a \in R$ eine Einheit ist, existiert das Inverse und es ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen das Inverse mit a^{-1}.

2.1.9 Definition

Ein kommutativer Ring R mit Eins heißt *Integritätsbereich*, falls es in R keine Nullteiler gibt.

2.1.10 Definition

Sei K eine nichtleere Menge mit mindestens zwei Elementen und seien $+, \cdot$ zwei Verknüpfungen auf K. Genau dann ist $(K,\ +,\ \cdot)$ ein *Körper*, wenn folgende Gesetze gelten:

(a) Addition

  (i) (Assoziativgesetz) Für alle $a, b, c \in K$ ist $(a+b)+c = a+(b+c)$.

  (ii) (Kommutativgesetz) Für alle $a, b \in K$ ist $a+b = b+a$.

  (iii) (Nullelement) Es gibt genau ein Element $0_K \in K$ mit $0_K + a = a + 0_K = a$ für alle $a \in K$.

  (iv) (Negatives Element) Zu jedem $a \in K$ gibt es (genau) ein $-a \in K$ mit $(-a)+a = a+(-a) = 0$.

(b) Multiplikation:

  (i) (Assoziativgesetz) Für alle $a, b, c \in K$ ist $(ab)\,c = a\,(bc))$.

  (ii) (Kommutativgesetz) Für alle $a, b \in K$ ist $ab = ba$.

  (iii) (Einselement) Es gibt genau ein Element $1_K \in K$ mit $1_K a = a 1_K = a$ für alle $a \in K$.

  (iv) (Inverses Element) Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.

(c) Distributivgesetz:

  - Für alle $a, b, c \in K$ ist $a\,(b+c) = ab + bc$.

2.1.11 Satz

Es sei R ein Integritätsbereich bestehend aus wenigstens zwei Elementen. Wir definieren auf $R \times R \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch $(r,u) \sim (s,v)$ genau dann, wenn $rv = su$ ist. Man sieht sofort, dass die Relation reflexiv und symmetrisch ist. Sei $(r,u) \sim (s,v)$ und $(s,v) \sim (t,w)$, also $rv = su$ und $sw = tv$. Wir können nun schreiben:

$$rwv = rvw = suw = swu = tvu = tuv.$$

Nach Voraussetzung ist R ein Integritätsbereich. Da v ungleich null ist, folgt $rw = tu$, so dass $(r,u) \sim (t,w)$ ist. Auf $R \times R \setminus \{0\}$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(r,u) + (s,v) := (rv + su, uv)\,,$$

$$(r,u)\,(s,v) := (rs, uv) \ \textit{ definiert.}$$

Wir setzen $\mathrm{Quot}(R) := R \times R \setminus \{0\} \ \sim$ *und bezeichnen die Äquivalenzklasse von* (r,u) *mit* $\frac{r}{u}$.
In diesem Fall gilt:

$$\frac{r}{u} + \frac{s}{v} = \frac{rv+su}{uv}$$

$$\frac{r}{u}\frac{s}{v} = \frac{rs}{uv}$$

$\mathrm{Quot}(R,+,\cdot)$ *ist ein Körper, wir nennen ihn den Quotientenkörper von* R.

Beweis:

Wir prüfen zunächst die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen.
Seien $(r_1,u_1),(r_2,u_2),(s,v) \in R \times R \setminus \{0\}$ und sei $(r_1,u_1) \sim (r_2,u_2)$. Nach Definition der Äquivalenzrelation ist $r_1u_2 = r_2u_1$. Daher erhalten wir

$$(r_1v+su_1)\,u_2v = r_1u_2v^2 + su_1u_2v = r_2u_1v^2 + su_1u_2v = (r_2v+su_2)\,u_1v$$

also

$$(r_1v+su_1, u_1v) \sim (r_2v+su_2, u_2v)$$

Die Wohldefiniertheit der Multiplikation folgt analog. Man sieht

$$(r_2s, s_2v) \sim (r_1s, u_1v)\,,$$

denn

$$(r_2s)\,(u_1v) = r_1u_2sv = (r_1s)\,(u_2v)\,.$$

Es genügt, die Körperaxiome für (Quot(R), $+$, $\cdot$) nachzurechnen. □

2.1.12 Bemerkung
Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

2.1.13 Beispiel
Ist D $\subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\mathcal{O}(D)$ der in D holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt
$M\,(D)$:=Quot$(\mathcal{O}\,(D)) = \{\frac{f}{g} : f,g \in \mathcal{O}(D),\ g \neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen. Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert.

2.2 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir eine angeordnete abelsche Gruppe $(G,+)$ und eine angeordnete Menge Θ mit 0 als kleinstem Element. Die Ausführungen sind orientiert an dem Kapitel „Archimedische Klassen, Bewertungen und Bedingungen für die Anordnungsfähigkeit von Gruppen“ in [PC83, S. 9 - 11].

2.2.1 Definition

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. Die surjektive Funktion $v\colon G \to \Theta$ wird als *Bewertung* bezeichnet, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

B1: $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in G$,

B2: $v(a) = -v(a)$ für alle $a \in G$,

B3: $v(a+b) \leq \max\{(v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in G$.

Die Gleichheit in der Bedingung [B3] gilt dann, wenn $v(a) \neq v(b)$ ist.
Zwei Bewertungen v, v' auf G mit den Wertemengen Θ, Θ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma\colon \Theta \to \Theta'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v$ ist.
Sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe. Wir bezeichnen mit $[a]$ die archimedische Klasse, in der das Element $a \in G$ liegt. Die Gesamtheit der archimedischen Klassen von G nennen wir $[G]$. Die Abbildung
$G \to [G]\colon a \mapsto [a]$ definieren wir als *natürliche Bewertung.*

2.2.2 Definition

Sei K ein Körper, $(G, +)$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\overline{G} = G \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $v\colon K \to \overline{G}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

B1': $v(a) = \infty$ genau dann, wenn $a = 0$ ist,

B2': $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K$,

B3': $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Ein Beispiel für eine Bewertung ist die Polordnung meromorpher Funktionen in einem festen Punkt, wie im Hauptteil 4.2.14 noch erörtert wird. Man bezeichnet $v\colon K \to \overline{G}$ als *diskrete Bewertung*, falls $G = \mathbb{Z}$ ist.

2.2.3 Definition

Der Unterring A eines Körpers K wird als *Bewertungsring* bezeichnet, wenn für jedes $a \in K$ gilt $a \in A$ oder $a^{-1} \in A$.

2.2.4 Bemerkung

Ist (K, v) ein bewerteter Körper, dann ist $A = \{a \in K\colon v(a) \geq 0_K\}$ ein Bewertungsring.

2.2.5 Definition

Ein Integritätsring R heißt *diskreter Bewertungsring*, falls es auf dem Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ von R eine Bewertung $v : \mathrm{Quot}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gibt und

$$R = \{x \in \mathrm{Quot}(R) : v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$$

ist der Bewertungsring von v ist.

Eine weitere, äquivalente, Definition eines diskreten Bewertungsrings findet man in [Neu92, S. 126].

2.2.6 Definition

Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein Hauptidealring mit einem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{p}$.

2.3 Ordnung in algebraischen Strukturen

2.3.1 Anordnung

2.3.1 Definition

Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn es eine Relation " $\leq$ " auf A gibt die folgende Eigenschaften für alle $a, b, c \in A$ erfüllt.

T1: *Reflexivität:* $a \leq a$,

T2: *Antisymmetrie:* Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$,

T3: *Transitivät:* Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

Die Relation „ $\leq$ " bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 die anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4: Für alle $a, b \in A$ besteht entweder $a < b$, oder $a = b$, oder $a > b$. Dabei gilt $a < b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$.

2.3.2 Definition

Seien A und A' teilweise geordnete Mengen. Eine Abbildung ϕ: $A \to A', a \mapsto a'$ wird *Ordnungsisomorphismus* von A nach A' genannt, falls folgende Anforderungen erfüllt sind:

(a) (Ordnungstreue) Wenn $a \leq b$ gilt, so folgt $\phi(a) \leq \phi(b)$ für alle $a, b \in A$.

(b) (Bijektivität) Für jedes $a' \in A'$ existiert genau ein $a \in A$, mit $a' = \phi(a)$.

A und A' werden in diesem Fall *ordnungsisomorph* genannt.

2.3.3 Definition

Eine *teilweise geordnete Gruppe* bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,

G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation „ $\leq$ “, wie in 2.3.1,

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: Für $a, b \in G$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $ca \leq cb$ und $ac \leq bc$ für alle $c \in G$.

2.3.4 Definition

Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

2.3.5 Beispiel

Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G ist bezüglich der selben Relation wie G angeordnet.

2.3.6 Beispiel

Wir betrachten die natürliche Ordnung auf den natürlichen, ganzen und reellen Zahlen.

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist total geordnet bezüglich der Relation „ $\leq$ “. Es gilt für $a, b \in \mathbb{N}$, dass

$$a \leq b \text{ ist genau dann, wenn } b - a \in \mathbb{N}$$

für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist total geordnet bezüglich der Relation „ $\leq$ “. Es gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$, dass

$$a \leq b \text{ ist, genau dann, wenn } b - a \in \mathbb{N} \text{ oder } a = b \text{ gilt.}$$

(c) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist total geordnet bezüglich der Relation „ $\leq$ “. Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$a \leq b \text{ ist, genau dann, wenn } 0 < b - a \text{ oder } a = b \text{ gilt.}$$

2.3.7 Satz

Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus obiger Definition einer angeordneten Gruppe. Denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei, so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz G3 ergeben. $\square$

2.3.8 Bemerkung
Genügt eine Teilmenge $P := \{x \in G | x \geq 0\}$ einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so nennt man $(G, \circ)$ *anordnungsfähig.* Wir nennen P den *Positivbereich* von G.

P1: $\{0\} \cup P \cup -P = G$, $P \cap -P = \varnothing$,

P2: $P \circ P \subseteq P$,

P3: $x + P + (-x) \subseteq P$ für jedes $x \in G$.

2.3.9 Beispiel
Ist G mit dem Positivbereich P eine angeordnete Gruppe, so ist G auch mit dem Positivbereich $(-P)$ eine angeordnete Gruppe. Die Abbildung $a \mapsto -a$ ist ein Ordnungsisomorphismus.

2.3.2 Wohlordnung

Nun beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Wohlordnung. Diese wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. Wir definieren wohlgeordnete Mengen wie in [Fuc66, S. 16].

2.3.10 Definition
Eine angeordnete Menge W nennt man *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Es existiert also ein Element $u \in V$, mit $u \leq v$ für alle $v \in V$.

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Dieses Theorem, so stellte sich nach erfolglosen Widerlegungsversuchen zahlreicher Mathematiker heraus, ist äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Lemma von Zorn.
Beispielsweise ist die natürliche Anordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist mit der natürlichen Anordnung „ $\leq$ “ total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt sind und somit $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element enthält. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

2.3.11 Bemerkung
Ist $W \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat W ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element.

2.3.12 Beispiel

Betrachte die Relation " $\preceq$ " auf $\mathbb{Z}$. Es gilt,

$$a \preceq b \text{ genau dann, wenn } |a| \leq |b| \text{ oder } |a| = |b| \text{ und } a \leq b$$

ist. Die Relation " $\preceq$ " ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$ und wir erhalten $0 \preceq -1 \preceq 1 \preceq -2 \preceq 2 \preceq 3 \preceq -3 ....$

Kapitel 3

Angeordnete abelsche Gruppen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die zur Betrachtung des Potenzreihenkörpers benötigt werden. Nach einer Einführung in die Theorie angeordneter abelscher Gruppen beschäftigen wir uns mit deren Wohlordnung, eine Eigenschaft, die für die Konstruktion des Potenzreihenkörpers unabdingbar ist. Mithilfe der Archimedizität führen wir eine spezielle Art der Anordnung von Gruppen ein. Die Familie der konvexen Untergruppen führt uns zu Aussagen über die Anordnungsfähigkeit von Gruppen. Daran schließt die zentrale Aussage des Kapitels an: der Satz von Hölder, dass archimedisch angeordnete Gruppen in die additive Gruppe des $\mathbb{R}$ eingebettet werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen sind angelehnt an [Fuc66, S. 21 - 28] und [PC83, S. 1 - 4].

3.0.13 Definition
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist ein Tripel $(G, +, \leq)$, wobei $(G, +)$ eine additiv geschriebene, abelsche Gruppe ist, die bezüglich “ $\leq$ “ total geordnet ist.

3.0.14 Notation
Wir verwenden im Hauptteil 4 für eine angeordnet abelsche Gruppe $(G, +, \leq)$ meist vereinfachend die Bezeichnung G.

3.0.15 Bemerkung
Ist eine abelsche Gruppe G mit dem Positivbereich P angeordnet, so definieren wir $a \leq b$ genau dann, wenn $b - a \in P$ ist für $a, b \in G$.

3.0.16 Beispiel

- Die Menge der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.
- Die Menge der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \leq)$ ist eine angeordnet abelsche Gruppe.

3.1 Wohlordnung in angeordneten abelschen Gruppen

Die folgenden Aussagen orientieren sich an der Arbeit „A residue theorem for Malcev–Neumann series“ von Guoce Xin.

3.1.1 Satz

Sei “ $\leq$ “ eine totale Ordnung auf der Menge W. Dann ist W genau dann wohlgeordnet, wenn es keine streng monoton fallende Folge in W gibt.

Beweis:

“ $\Rightarrow$ “: Sei W wohlgeordnet. Angenommen es gibt eine streng monoton fallende Folge von Elementen in W, nämlich $a_1 > a_2 > a_3 > ....$ Damit erhalten wir eine Teilmenge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die kein kleinstes Element besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Wohlordnung von W.
“ $\Leftarrow$ “ Wir nehmen an, es gibt keine streng monoton fallende Folge in W und betrachten den Fall W ist nicht wohlgeordnet. Dann gibt es eine Teilmenge A von W, die kein kleinstes Element enthält. Für ein beliebiges Element $a_1 \in A$ finden wir $a_2 \in A$ mit $a_2 < a_1$. Dieses Verfahren lässt sich endlos fortsetzen und wir erhalten eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > a_3 > ...$, Widerspruch. □

3.1.2 Beispiel

Total geordnete endliche Mengen sind wohlgeordnet.

Betrachte nun die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen W_S einer total geordneten Menge A, die nicht zwangsläufig wohlgeordnet ist.

3.1.3 Lemma

Sei $w_{n\in\mathbb{N}} \in W_A$, dann gilt $\cap_{\alpha\in\mathbb{N}} w_n \in W_A$ und für $w_1, w_2 \in W_A$ gilt $w_1 \cup w_2 \in W_A$.

Beweis:

Die erste Aussage ist trivial. Zum Beweis der zweiten Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $w_1 \cup w_2$ sei nicht wohlgeordnet, dann gibt es nach 3.1.1 eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > ...$ in $w_1 \cup w_2$.
Betrachten wir alle Elemente der Teilmenge w_1. Wir können diese, da w_1 total geordnet ist, als Folge $a_{i_1} > a_{i_2}...$ schreiben. Aufgrund der Wohlordnung von w_1 ist die so erhaltene fallende Folge endlich. Die selbe Argumentation wählen wir für w_2 und erhalten die endliche fallende Folge $a_{j_1} > a_{j_2}....$ Aber jedes Element der streng monoton fallenden Folge $a_1 > a_2 > ...$ ist in einer der beiden endlichen Folgen enthalten. Widerspruch! □

Die Menge W_A ist somit unter endlicher Vereinigung und unendlichem Schnitt abgeschlossen.

3.1.4 Lemma
Wir betrachten eine total geordnete Menge A. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in A erfüllt mindestens eine der drei folgenden Eigenschaften:*

(1) $a_1, a_2, \ldots$ *enthält eine streng monoton wachsende Teilfolge.*

(2) $a_1, a_2, \ldots$ *enthält eine konstante Teilfolge.*

(3) $a_1, a_2, \ldots$ *enthält eine streng monoton fallende Teilfolge.*

Beweis:

Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt weder die Bedingung (2) noch (3). Wir wollen zeigen, dass sie eine streng monoton wachsende Teilfolge enthält.
Da die Folge somit keine streng monoton fallende Teilfolge enthält, gibt es ein kleinstes Element a_{i_1}, denn andernfalls ließe sich eine streng monoton fallende Teilfolge konstruieren. Die Folge bleibt unendlich wenn wir die ersten Folgenglieder i_1 aus $\{a_n\}_{n\geq 1}$ entfernen, da es nur endlich viele Folgenelemente nach Voraussetzung gibt, die gleich a_{i1} sind. In der daraus entstandenen Folge ist jedes Element größer als a_{i1} und sie enthält wiederum keine streng monoton fallende oder konstante Teilfolge. In der so entstandenen Folge ist jedes enthaltene Element echt größer als a_{i1}.
Wir wiederholen das durchgeführte Verfahren und konstruieren so die streng monoton wachsende Teilfolge $a_{i1} < a_{i2} < \ldots$.

□

Bernhard Hermann Neumann ein deutsch-englisch-australischer Mathematiker bewies in seinem Werk „On ordered division rings“ [Neu, S. 206] die beiden folgenden wichtigen Lemmata, deren volle Bedeutung sich im Hauptteil 4.7 erschließen wird.

3.1.5 Lemma
Die Menge W ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Elementen aus W eine monoton steigende Teilfolge* $w_{\tau(1)} \leq w_{\tau(2)} \leq \ldots$ *enthält.*

Beweis:

“ $\Rightarrow$ “ Sei die total geordnete Menge W wohlgeordnet. Dann gilt nach Lemma 3.1.4 und mit Satz 3.1.1, dass eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W entweder eine streng monoton steigende oder konstante Teilfolge enthält. Jede Folge aus W besitzt daher eine monoton steigende Teilfolge.
“ $\Leftarrow$ “ Jede Folge von Elementen aus W enthält eine monoton steigende Teilfolge. Angenommen W sei nicht wohlgeordnet. Nach Satz 3.1.1 existiert somit eine streng monoton fallende Folge in W. Nach Voraussetzung muss jede Folge eine monoton steigende Teilfolge enthalten. Widerspruch, da eine streng monoton fallende Folge keine monoton steigende Teilfolge enthalten kann. □

Wir bezeichnen mit W_G die Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten abelschen Gruppe G.

3.1.6 Lemma

(Lemma von B.H. Neumann) Sei G eine angeordnete Gruppe und $V, W \subseteq G$ wohlgeordnet, dann ist $U = V + W$ ebenso wohlgeordnet.

Beweis:

Sei

$$u_1 = v_1 + w_1,\ u_2 = v_2 + w_2 \ ..., \text{ mit } v_r \in V, w_r \in W$$

eine beliebige Folge von Elementen aus U. Es gibt eine Folge $v_1, v_2, ...$ mit $v_{\tau(1)} \leq v_{\tau(2)} \leq ...$ und zu der Folge $w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, ...$ eine nichtabfallende Teilfolge $w_{\tau(\sigma(1))} \leq w_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Daraus folgt es gibt zu der beliebigen Folge von Elementen aus U ebenso eine nicht abfallende Teilfolge $u_{\tau(\sigma(1))} \leq u_{\tau(\sigma(2))} \leq ...,$ Nach Lemma 3.1.5 ist U damit wohlgeordnet. □

3.1.7 Folgerung

Seien V, W wohlgeordnete Teilmengen einer angeordneten Gruppe G, dann gibt es für ein $g \in G$ nur endlich viele Paare $(v, w) \in V \times W$ mit $v + w = g$.

Beweis:

Angenommen es gäbe unendlich viele $v_n \in V, w_n \in W$ wobei $g = v_n + w_n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge besitzt paarweise verschiedene Glieder. Da V und W wohlgeordnet sind, besitzt weder $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Teilfolge. Nach Satz 3.1.4 hat $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge. Widerspruch, da g konstant bleiben muss. □

3.2 Archimedisch angeordnete Gruppen

Erst seit dem Ende des 19. Jahrhunderts kristallisierte sich die hohe Bedeutung geordneter Strukturen in der Mathematik heraus. Man erkannte, dass das archimedische Axiom unverzichtbar für die nähere Untersuchung dieses Bereichs war, unter anderem spielte es schon eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der reellen Zahlen mithilfe des Dedekindschen Schnittes (1872). Genau genommen ermöglicht die archimedische Eigenschaft die Herstellung von Kommutativität und Vollständigkeit.
Wir orientieren uns an dem Kapitel „Angeordnete Gruppen“ in [Fuc66, S. 73 - 93], sowie Arbeiten von Prieß-Crampe [PC70], [PC83].

3.2.1 Definition

Der *absolute Betrag* $|a|$ eines Elements a $\in G$, wobei G eine angeordnete Gruppe sei, ist definiert als $|a| = \max\{a, -a\}$.

Wenn die angeordnete Gruppe zusätzlich abelsch ist, gilt die *Dreiecksungleichung* für alle $a, b \in G$:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \text{ für alle } a, b \in G.$$

Die Ungleichung gilt trivialerweise wenn beide Elemente das gleiche Vorzeichen haben. Sei also $a < 0$ und $b > 0$. Dann ist $a = -|a|$.
Falls $|a| \leq |b|$ ist, erhalten wir

$$|a + b| = |-|a| + b| = b - |a| \leq b = |b| \leq |a| + |b|.$$

Falls $|a| > b$ ist, erhalten wir

$$|a + b| = |-|a| + b| = |a| - b \leq |a| \leq |a| + |b|.$$

3.2.2 Definition

Eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +)$ heisst *archimedisch*, wenn es für alle $a, b \in G$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

3.2.3 Definition

Seien $a, b \in G$, wobei G eine angeordnete Gruppe ist. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n|a| < |b|.$$

In Zeichen schreiben wir $a \ll b$.

3.2.4 Definition

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe, und $|a|$ der absolute Betrag eines Elements a aus G. Zwei Elemente $a, b \in G$ werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, wenn natürliche Zahlen m und n existieren, so dass:

$$|a| < m|b| \text{ und } |b| < n|a|.$$

In diesem Fall schreiben wir $a \sim b$.

3.2.5 Folgerung

Für jedes Paar von Elementen $a, b \in G$ gilt genau eine der anschließenden Relationen:

(i) $a \ll b$, (ii) $a \sim b$, (iii) $b \ll a$.

Des Weiteren schließen wir aus Definition 3.2.3 und 3.2.4:

(i) Aus $a \ll b$ folgt $-g + a + g \ll -g + b + g$ für alle $g \in G$;

(ii) Aus $a \ll b$ und $a \sim c$ folgt $c \ll b$;

(iii) Aus $a \ll b$ und $b \sim d$, folgt $a \ll d$;

(iv) Aus $a \ll b$ und $b \ll c$ folgt $a \ll c$;

(v) Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$.

Sind alle Elemente einer Gruppe $G \setminus \{0\}$ archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet*.
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne $[g]$ die *archimedische Klasse* in der das Element $g \in G$ liegt, $[G]$ die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G.
Sind zwei Elemente $a,\ b \in G$ nicht archimedisch äquivalent, gilt entweder für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n|a| < |b|$, oder für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n|b| < |a|$.

3.3 Der Satz von Hölder

In diesem Abschnitt werden wir einen sehr wichtigen Satz der Theorie angeordneter Strukturen vorstellen, den *Satz von Hölder*. Dieser Satz besagt, dass jede archimedisch angeordnete Gruppe bis auf Isomorphie einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen mit der Ordnung "$<$" entspricht. Zwar wird der Beweis dieser Aussage in der verwendeten Literatur Otto Hölder (1901)[Hö01] zugeschrieben, die grundlegenden Ideen dazu lieferte jedoch bereits Bettazi in seinem Werk „Teoria delle grandezze“, 1890[Lü08, S. 578].
Wir orientieren uns hierbei an [Hö01] und [PC83].

3.3.1 Satz

Eine angeordnete abelsche Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie zu einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " : Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch angeordnet ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.
" $\Rightarrow$ " : Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe, G besitzt einen Positivbereich P. Nach Voraussetzung erfüllt G die archimedische Eigenschaft. Sei $G \neq \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element der Addition in G ist. Andernfalls wäre G isomorph zu $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, der trivialen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Somit ist P nicht leer und wir nehmen ein Element $\alpha \in P$ beliebig. Für jedes $g \in G$ definieren wir:

$$S_g := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ | m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \leq ng\}$$

Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $m\alpha \leq ng \Leftrightarrow mp\alpha \leq np\alpha$. Die Darstellung von $r \in \mathbb{Q}^+$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen hängt also nicht damit zusammen, ob r in S_g enthalten ist.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es, einen Monomorphismus zu finden, der G auf die additive Gruppe der reellen Zahlen abbildet. Wir zeigen nun folgende Aussagen:

(i) Für alle $g \in S_g$ gilt $S_g \neq \varnothing$ und $S_g \neq \mathbb{Q}^+$. Für $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ folgt $r \in S_g$.

(ii) Sei $S_g \subseteq \mathbb{Q}^+$, wobei S_g nicht leer und beschränkt. Die Abbildung $\Phi : P \to \mathbb{R}^+, g \mapsto \sup\{S_g\}$ ist somit wohldefiniert.

(iii) Für alle $g, h \in P$ gilt $g \leq h$ genau dann, wenn $S_g \subseteq S_h$ genau dann, wenn $\Phi(g) \leq \Phi(h)$.

(iv) Sei $g, h \in P$ und $r, s \in \mathbb{Q}^+$. Sei $r \in S_g$ und $s \in S_h$ so folgt $r + s \in S_{g+h}$.
Sei $r \notin S_g$ und $s \notin S_h$, so folgt $r + s \notin S_{g+h}$.

(v) Es gilt $\Phi(g + h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für alle $g, h \in P$.

(vi) Φ wird fortgesetzt auf die gesamte Gruppe G durch $\Phi(0_G) = 0$ und $\Phi(-g) = -\Phi(g)$ für alle g $\in P$.

Insgesamt ist Φ ein Monomorphismus abelscher Gruppen und damit ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Zu (i): Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem Element $g \in P$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng > \alpha$. Nach Definition von S_g gilt $\frac{1}{n} \in S_g$ und somit ist S_g nicht leer.
Angenommen $S_g = \mathbb{Q}^+$, dann wäre $n \in S_g$ und $n\alpha \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Seien $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt $kn < lm$ und da $s \in S_g : m\alpha \leq ng$ und $kn\alpha \leq lm\alpha \leq lng$. Daraus wiederum folgt: $\frac{kn}{ln} = r \in S_g$.
Zu (ii): Wir haben bereits gezeigt, dass S_g nicht leer ist. Angenommen S_g wäre unbeschränkt, dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in S_g$ mit n < r. Nach (i) folgt daraus $n \in S_g$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n\alpha \leq g$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Zu (iii): Zunächst beweisen wir die erste Implikation. Sei $g, h \in P$ und es gilt $g \leq h$. Sei $r \in S_g$, $r := \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir $m\alpha \leq ng$. Da $g \leq h$ folgt $m\alpha \leq nh$ und damit $r \in S_h$. Die zweite Implikation folgt nach Definition von Φ offensichtlich.
Sei $\Phi(g) \leq \Phi(h)$. Angenommen $g > h$, nach der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(g - h) > 2\alpha$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ möglichst klein, mit $m\alpha < nh$. Es gilt $\frac{m}{n} \notin S_h$ und $\frac{m}{n} \geq \Phi(h)$ Da m minimal ist, gilt die Ungleichung $(m - 1)\alpha \leq nh$ und wir erhalten $(m + 1)\alpha \leq nh + 2\alpha < nh + n(g - h) = ng$ und $\frac{m+1}{n} \in S_g$, also $\frac{m+1}{n} \leq \sup(S_g) = \Phi(g)$.

Insgesamt ergibt sich $\Phi(h) \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq \Phi(g)$, Widerspruch.
Zu (iv): Sei $r \in S_g, s \in S_h$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $k\alpha < lg$ und $m\alpha \leq nh$. Wir erhalten $kn\alpha \leq lng$ und $lm\alpha \leq lng$. Somit liegt $r + 1 = \frac{kn+lm}{ln}$ in der Menge S_{g+h}. Die zweite Aussage folgt analog indem in Obigem " $\leq$ " durch " $>$ " ersetzt wird.
Zu (v): Als erstes zeigen wir, dass $\Phi(g+h)$ eine obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gibt ein $r \in S_{g+h}$ mit $r > \Phi(g+h)$. Wähle $\epsilon = r - \Phi(g) - \Phi(h)$ und wähle s, t $\in \mathbb{Q}^+$ mit $\Phi(g) < s < \Phi(g) + \frac{\epsilon}{2}$ und $\Phi(h) < t < \Phi(h) + \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt folgt $s + t < \Phi(g) + \Phi(g) + \epsilon = r$. Da $s \notin S_g$ und $t \notin S_h$ gilt $s + t \notin S_{g+h}$ nach (i). Wir erhalten $s + t \geq \Phi(g+h) \geq r$ und der Widerspruch $r \leq s + t < r$ zeigt, dass ein derartiges r nicht existieren kann.
Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(g+h)$ die kleinste obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gäbe eine kleinere obere Schranke $o \in \mathbb{R}^+$ und sei $\epsilon = \Phi(g) + \Phi(h) - o$. Nach Definition der Abbildung gibt es ein $r \in S_g$ mit $r < \Phi(g) - \frac{\epsilon}{2}$ und $s \in S_h$ mit $s < \Phi(h) - \frac{\epsilon}{2}$. Nach (iv) ist $r + s$ in S_{g+h} und daher $r + s \leq o$. Widerspruch, da $r + s > \Phi(g) + \Phi(h) - \epsilon = o$.
Zu (vi): Falls $g, h > 0_G$ wurde die Äquivalenz $g \leq h \Leftrightarrow \Phi(g) + \Phi(h)$ bereits gezeigt. Die Aussage ist offensichtlich, wenn eines der beiden Elemente g oder h gleich Null ist. Sei $g < 0_G$ und $h > 0_G$, dann folgt die Behauptung nach Definition. Die Aussage bleibt für $g, h < 0_G$ zu zeigen:

$$g \leq h \Leftrightarrow -g \geq -h \Leftrightarrow \Phi(-g) \geq \Phi(-h)\, n \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h).$$

Wir zeigen nun $\Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für beliebige $g, h \in G$. Es genügt dies für $g, h < 0_G$ zu beweisen. Hier kann auf das bereits Bewiesene zurückgegriffen werden:

$$\Phi(g+h) = -\Phi((-g) + (-h)) = (-\Phi(-g)) + (-\Phi(-h)) = \Phi(g) + \Phi(h).$$

Zunächst betrachten wir den Fall $g \geq -h$. Dann ist $g + h \geq 0_G$, und nach der bereits gezeigten Aussage folgern wir:
$\Phi(g+h) + \Phi(-h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) - \Phi(h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$.
Setzen wir nun $g < -h$ voraus. Dann ist $-g - h > 0$, also $\Phi(g) + \Phi(-g-h) = \Phi(-h)$, was äquivalent zu $\Phi(g) - \Phi(g+h) = -\Phi(h)$ und zu $\Phi(g) + \Phi(h) = \Phi(g+h)$ ist. □

3.3.2 Satz

Sei $(G, +)$ eine Untergruppe der natürlich geordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen und $\phi : G \to \mathbb{R}$ ein injektiver o-Homomorphismus. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist ϕ ein injektiver o-Homomorphismus und damit sind mit $0 < g_1, g_2 \in G$ auch $\phi(g_1)$ und $\phi(a_2)$ positiv. Angenommen es gilt, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} \neq \frac{g_1}{g_2}$, so gibt es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, die zwischen $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)}$ und $\frac{g_1}{g_2}$ liegt. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} < \frac{m}{n} < \frac{g_1}{g_2}$ ist. Weiterhin gehen wir davon aus, dass $n \cdot g_1 > m \cdot g_2$ ist.

Nach der archimedischen Eigenschaft der Gruppe G stehen die Bilder $\phi(n \cdot g_1)$ und $\phi(m \cdot g_2)$ in umgekehrter Größenbeziehung zueinander. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Ordnungstreue der Abbildung ϕ. Folglich ist $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} \neq \frac{g_1}{g_2}$. Wir erhalten somit auch für alle positiven Elemente $g \in G$, dass die Gleichung $\frac{\phi(g_1)}{g_1} = \frac{\phi(g)}{g}$ erfüllt ist.
Für die negativen Gruppenelemente $g \in G$, mit $g < 0$ und daher $-g > 0$ erhalten wir aufgrund der Homomorphismuseigenschaften $\frac{\phi(g)}{g} = \frac{(-1) \cdot \phi(g)}{(-1) \cdot g} = \frac{\phi(-g)}{-g} = \frac{\phi(g_1)}{g_1}$. Mit der positiven Konstanten $r := \frac{m}{n}$ ist die Aussage $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$ gezeigt. $\square$

Die Grundaussage dieses Satzes bewies erstmals Hion 1954 in seinem russischsprachigen Werk „Archimedisch geordnete Ringe“. Er setzte jedoch einen o-Homomorphismus zwischen zwei Untergruppen der additiven angeordneten Gruppe der reellen Zahlen voraus, ebenso wie Fuchs und Prieß-Crampe, die den Satz in ihre Arbeiten mitaufnahmen. Der Satz 3.3.2 impliziert weiterhin die o-Isomorphie zwischen der Gruppe der ordnungserhaltenden Automorphismen der archimedischen Gruppe und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen. [PC83]

3.4 Die angeordnete Menge konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten Gruppe. Wir benötigen einige Eigenschaften dieser Menge an speziellen Untergruppen für den Nachweis des Inversen im verallgemeinerten Potenzreihenkörper. Untergruppen teilweise geordneter Gruppen besitzen eine durch die teilweise Gruppenordnung induzierte teilweise Ordnung. Wir bezeichnen die Untergruppen als angeordnet, falls die ursprüngliche teilweise Ordnung ebenso eine Anordnung war.
Sei $(G, +)$ eine Gruppe, U eine Untergruppe und $g \in G$. Wir untersuchen nun die bezüglich der Inklusion linear angeordnete Menge Σ konvexer Untergruppen von G. Wir orientieren unsere Ausführungen an [Fuc66, S. 81 - 83] und [PC83, S. 3].

3.4.1 Definition

Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G nennen wir *konvex*, wenn aus $a \in U$, $x \in G$, mit $0 < |x| < |a|$ folgt $x \in U$.

„Σ“ bezeichne nun die *Menge konvexer Untergruppen* einer angeordneten Gruppe $(G, +)$.

3.4.2 Definition

Sei $C, D \in \Sigma$, wenn $D \subset C$ und Σ keine weitere Untergruppe zwischen C und D enthält, nennen wir das Paar C, D *Sprung* in Σ und bezeichnen es mit $D \prec C$.

3.4.3 Satz

Die Menge der konvexen Untergruppen Σ besitzt folgende Eigenschaften:

S1: Die Vereinigung und der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen aus Σ liegen wieder in Σ.

S2: Ist $C \in \Sigma$ und $g \in G$, so ist $g^{-1}Cg \in \Sigma$

S3: Sei $D \prec C$ in Σ, so ist D normal in C und C/D ist isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.

Beweis:

Zu S1: Seien $C, D \in \Sigma$ konvexe Untergruppen der angeordneten Gruppe G und sei $c \in C, c \notin D$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, c ist bezüglich der Anordnung von G größer als das neutrale Element e. Da c nicht in D liegt, kann es kein Element $d \in D$ geben, sodass $e < c < d$, da in diesem Fall c in D liegen würde nach der konvexen Eigenschaft. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und daher gilt $D \subseteq C$. Damit folgt unmittelbar, dass sowohl der Schnitt konvexer Untergruppen wieder angeordnet und konvex ist, als auch die Vereinigung.
Zu S2: Für $g \in C$ ist offensichtlich $g^{-1}Cg = C \in \Sigma$. Falls $g \notin C$, so ist $g^{-1}Cg$ eine Untergruppe von G, denn für alle $c_1, c_2 \in C, g \in G$ ist $g^{-1}c_1g \cdot g^{-1}c_2g = g^{-1}c_1c_2g \in g^{-1}Cg$ und $g^{-1}c_1g^{-1} = g^{-1}{c_1}^{-1}g \in g^{-1}C_1g$. Die Anordnung von G überträgt sich auf $g^{-1}C_1g$ und die Untergruppe ist konvex, da C nach Voraussetzung und G als triviale Untergruppe konvex ist.
Zu S3: Nach Voraussetzung gilt $D \prec C$ und offensichtlich erfüllt jedes Element $g \in G$ die Bedingung $g^{-1}D_1g \prec g^{-1}C_1g$. Weiterhin erhalten wir im Fall $g \in C$, dass $g^{-1}C_1g = C$, und da $D \subset C$ ist $g^{-1}D_1g = D$. Infolgedessen ist D normal in C und die Faktorgruppe C/D enthält, da in Σ keine Untergruppe zwischen C und D existiert, dementsprechend nur die trivialen konvexen Untergruppen. In C/D ist für jedes $c \in C/D$ die Menge $\{g \in C/D : \exists_{m,n \in \mathbb{Z}} m \cdot a \leq g \leq n \cdot a\}$. Damit ist C/D archimedisch und nach Satz von Hölder 3.3.1 isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen. □

Kapitel 4

Potenzreihenkörper

Die aus der Analysis bekannten Potenzreihen stellen ein bekanntes und wichtiges Werkzeug dar. In mathematischen Gebieten, wie der Kombinatorik, Automaten- und Kontrolltheorie ermöglichen sie sowohl eine kompakte Darstellung von Summenformeln, als auch deren Auffindung. Potenzreihen können ebenso über den Weg der Algebra definiert werden, durch die Folge ihrer Koeffizienten. Die algebraische Sichtweise zieht den neuen Aspekt mit sich, dass grundsätzlich auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet wird und dadurch auf beliebigen Körpern und Ringen gearbeitet werden kann.
Diese sogenannten formalen Potenzreihen in einer Unbekannte z, auf den natürlichen Zahlen, deren Koeffizienten in einem beliebigen Körper K liegen, bilden einen Ring $K[[z]]$. Aufbauend darauf stellen wir einen Zusammenhang zu den, in der Funktionentheorie häufig verwendeten, Laurentreihen her. Der Ring formaler Potenzreihen ist ein Integritätsring, woraus folgt, dass dieser in einen kleinsten Körper eingebettet werden kann. Dieser Quotientenkörper von $K[[z]]$ entspricht genau dem Körper, den die Laurentreihen $K((z))$ formen.
Potenzreihen bilden somit algebraische Strukturen, deren Beschaffenheit von dem Träger der Reihen abhängt. Daher stellt sich die Frage, ob die formalen Potenzreihen weiter verallgemeinert werden können und welche Voraussetzungen der Träger erfüllen muss, damit diese allgemeinen formalen Potenzreihen einen Körper ergeben.

4.1 Formale Potenzreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den formalen Potenzreihen auf den natürlichen Zahlen. Wir definieren die Verknüpfungen zwischen formalen Potenzreihen und zeigen welche algebraischen Strukturen die Menge der formalen Potenzreihen bildet.

4.1.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe* über K ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to K$, $n \mapsto a_n$.

4.1.2 Bemerkung

Wir werden formale Potenzreihen im Folgenden immer als Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^1 + a_2 z^2 + ... \tag{4.1}$$

schreiben, mit $a_n \in K$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

4.1.1 Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen

Wir bezeichnen die Menge der formalen Potenzreihen in z auf $\mathbb{N}_0$ über K mit

$$K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}$$

.

4.1.3 Definition

Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei formale Potenzreihen über K. Wir definieren ihre *Summe* $f + g$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} +\colon K[[z]] \times K[[z]] \to K[[z]] : \qquad & \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \\ = \;& \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen f, g erfolgt durch die sogenannte Faltung:

$$\begin{aligned} \cdot\colon K[[z]] \times K[[z]] \to K[[z]] : \qquad & \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) \\ = \;& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) z^n \\ = \;& \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0)\, z_n \end{aligned}$$

4.1.2 Der Ring der formalen Potenzreihen

4.1.4 Satz

Die Menge $(K[[z]], +, \cdot)$ ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.

Beweis:

Wir weisen die Ringaxiome, wie in 2.1.5 definiert, nach.
Die Assoziativität und Kommutativität der Menge $(K[[z]],+)$ lässt sich leicht nachprüfen. Sei $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Das *neutrale Element der Addition* 0_K ist die Nullreihe $g(z):=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $b_n=0$ für alle n $\in \mathbb{N}_0$. Denn wir erhalten als Summe von g und f:

$$\begin{aligned} f+g &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)\, z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $-f=\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)z^n$ als das *Inverse der Addition*, denn es gilt

$$\begin{aligned} f+(-f) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + (\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)z^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_n)z^n \\ &= 0_K. \end{aligned}$$

$(K[[z]],+)$ ist daher eine abelsche Gruppe. Die Assoziativität der Multiplikation und die Distributivgesetze rechnen wir nach.
Seien $f,g,h\in K[[z]]$, mit $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ und $h=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

$$\begin{aligned} f\cdot(g\cdot h) &= f\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} b_j c_k\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+j+k=n} a_l b_j c_k\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) z^n\cdot h \\ &= (f\cdot g)\cdot h. \end{aligned}$$

Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe 1_K. Darunter verstehen wir diejenige

Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind:

$$g \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 0 \text{ für alle n } \in \mathbb{N}_0$$

.

Damit folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j \cdot b_k)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
Die Multiplikation ist kommutativ, denn die Addition und Multiplikation in dem Körper K sind kommutativ. Es genügt somit ein Distributivgesetz nachzuweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}
f \cdot (g+h) &= f \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n)\, z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j\,(b_k + c_k) \right) z^n \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k + \sum_{j+k=n} a_j c_k \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j b_k z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j c_k z^n \\
&= f \cdot g + f \cdot h,
\end{aligned}$$

wobei (*) aufgrund der Distributivität in K folgt.

□

4.1.5 Satz

Sei $f, g \in K[[z]]$, mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Wir bezeichnen g als die Inverse Potenzreihe von f, wenn für

$$\begin{aligned}
fg &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) \\
&\overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ mit } c_n = \sum_{j+k=n} (a_j b_k),$$

gilt, dass $c_0 = 1$ *und* $c_n = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist.*

Beweis:

Sei $h = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n$. Wir können beliebig viele Koeffizienten aus dieser Summe herausziehen nach Definition der Addition:

$$\begin{aligned} h &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \\ &= a_0 b_0 z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \\ &= a_0 b_0 + a_1 b_1 z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \\ &= ... \end{aligned}$$

Nach Definition der formalen Potenzreihe stellt z eine Unbestimmte dar. Man sieht leicht, dass die Summe nur den Wert 1_K annimmt, falls $a_0 b_0 = 1_K$ erfüllt. □

Wir zeigen zunächst, dass zu einer formale Potenzreihe $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ genau dann die inverse Potenzreihe existiert, wenn $a_0 \neq 0$.

4.1.6 Satz
Sei $K[[z]]$ *der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist eine formale Potenzreihe* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *genau dann eine Einheit, wenn* $a_0 \neq 0$ *ist.*

Beweis:
„ $\Leftarrow$ “ Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und es gelte $a_0 \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass das Produkt der formalen Potenzreihen f, g mit $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ den Wert 1_K annimmt und somit f eine Einheit ist. Wir müssen nun eine entsprechende Potenzreihe g finden, sodass $f \cdot g = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \overset{!}{=} 1$ ist.
Wir beweisen die Rückrichtung mithilfe des Prinzips der Induktion:
Für b_0 muss die Gleichung $a_0 b_0 = 1$ erfüllt sein. Da a_0 ungleich null ist besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$.
Angenommen es existiert ein b_k mit $k < n$, sodass alle $a_j b_k$, für $1 \leq m < n$, gleich 0 sind. Für den n-ten Koeffizienten ergibt sich $0 = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$. Bis auf b_n sind alle Werte festgelegt. Da a_0 ungleich 0 ist, ist die Lösung für b_n eindeutig.
„ $\Rightarrow$ “ Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = 1$.
Nach Voraussetzung folgt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für $n > 0$. Daraus erhalten wir unmittelbar $a_0 b_0 = 1$. Somit muss a_0 ungleich 0 sein. □

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind deren konstanter Term ungleich 0 ist. In diesem Fall können wir die inverse Potenzreihe konstruieren.

4.1.7 Satz
Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $a_0 \neq 0$. *Die inverse Potenzreihe* $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *ist rekursiv definiert durch*

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \textit{und} \qquad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{n=j+k} a_j b_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

Wie im Beweis 4.1.6 verwendet, gilt $a_0 b_0 = 1$, woraus $b_0 = \frac{1}{a_0}$ folgt. Für die restlichen Koeffizientenwerte muss dementsprechend

$$\sum_{n=j+k} a_j b_k = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass das Produkt aus f und der gewählten Potenzreihe g diese Bedingung erfüllt und damit $fg = 1$ gilt.

□

4.1.8 Beispiel
Es sei $q \in \mathbb{R}$ beliebig und $A = \sum a_n z^n$ mit $a_n = q^n$ gleich der geometrischen Reihe. Wir bestimmen die inverse Potenzreihe $B = \sum b_n z^n$. Dazu wenden wir die Formel aus 4.1.7 an:

$$b_0 = \tfrac{1}{a_0} = 1,$$

$$b_1 = -a_1 b_0 = -q,$$

$$b_2 = -\left(a_1 b_1 + a_2 b_0\right) = -\left(-q^2 + q^2\right) = 0,$$

$$\ldots$$

$$b_n = -\left(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\right) = -\left(-q^{n-1}(-q) + q^n\right) = 0.$$

für alle $n \geq 3$ folgt induktiv, dass ebenso $b_n = 0$ gilt. Die inverse Potenzreihe zu $A(z)$ ist $B(z) := b_0 + b_1 z = 1 - qz$.

4.1.3 Eigenschaften des Potenzreihenrings

Zunächst betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Menge der konvergenten Potenzreihen im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
Wir beweisen weiterhin, dass $K[[z]]$ ein Integritätsring und damit nullteilerfrei ist. Wir wissen also, dass der Ring $K[[z]]$ in einen kleinsten Körper, den Quotientenkörper, eingebettet werden kann.

Da Konvergenzbetrachtungen nur im Körper der reellen und komplexen Zahlen Sinn machen, beschränken wir uns in folgendem Satz auf $\mathbb{C}$.

4.1.9 Definition

Eine Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ heißt *konvergent*, wenn es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$ gibt, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ als Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert.
Das heißt die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k {z_0}^k$ der Partialsummen ist konvergent und man schreibt für den Limes $s = \lim_{n\to\infty} s_n$:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \tag{4.2}$$

Auf der Menge D der Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ konvergiert, wird somit eine Abbildung $z_0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ definiert. Wir nennen D den *Konvergenzbereich.*

4.1.10 Bemerkung

Sei $\mathbb{C}\{z\}$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{C}\{z\}$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[z]]$.

Beweis:

Wir haben bereits in 4.1.11 gezeigt, dass $\mathbb{C}[[z]$ ein Integritätsring ist. Nun bleibt für $\mathbb{C}\{z\}$ noch zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.
Betrachte zwei konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2. Innerhalb des $\min\{r_1, r_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen und somit auch die Summe der beiden Potenzreihen. Das Produkt besitzt denselben Konvergenzradius, da beide Reihen im Radius $\min\{r_1, r_2\}$ absolut konvergieren und nach dem großen Umordnungssatz konvergiert auch das Cauchyprodukt gegen den gleichen Wert. □

4.1.11 Satz

Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.
Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum a_n z^n \cdot \sum b_n z^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach Definition der Multiplikation gilt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei nun o.B.d.A. $\sum a_n z^n \neq 0$. Wir zeigen, dass die Potenzreihe $\sum b_n z^n$ gleich null ist. Es soll also kein Index n existieren, für den $b_n \neq 0$ ist. Wir folgern aus $b_0, b_1, ..., b_{n-1} = 0$ induktiv, dass $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.
Sei j der erste Index, sodass $a_j \neq 0$ gilt.

$$\sum_{j+k=j} a_j b_k = \sum_{j+0=j} a_j b_0 \overset{\text{Vor.}}{=} 0.$$

Da $a_j \neq 0$ ist, muss $b_0 = 0$ gelten.
Seien jetzt $b_0, ..., b_{n-1} = 0$. Mit $\sum_{j+k=n+k} a_j b_{n-j} = a_j b_n = 0$. Es folgt daher auch $b_n = 0$. □

Im nächsten Teil können wir zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht, auf den wir später näher eingehen werden.

4.2 Formale Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen. Wir bezeichnen mit $K((z))$ die Menge aller Abbildungen f von $\mathbb{Z}$ in einen K, für die es ein Element $x \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $f(y) = 0$ für alle $y < x$.
Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit wird jedoch auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet und nur formale Laurentreihen, also Laurentreihen in einer Unbestimmten z behandelt. Wir orientieren uns dabei an [Lü08, S. 563 - 572].

4.2.1 Definition

Eine *formale Laurentreihe* über dem Körper K ist eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto a_n$, wobei ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $f(n) = 0$ ist für alle $n < k$.

4.2.2 Notation

Wir werden Laurentreihen im Folgenden meist als Reihe der Form

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, n \geq -k \text{ und } a_n \in K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Dabei bezeichnet $\sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^{-n}$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

4.2.3 Definition

Der *Träger* einer Laurentreihe $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \in K((z))$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}.$$

4.2.4 Bemerkung

Unter einem Träger einer Laurentreihe versteht man den Definitionsbereich der Funktion, die durch die Laurentreihe dargestellt wird.

4.2.1 Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen

Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da andernfalls die Multiplikation nicht definiert werden kann. Wir bezeichnen die Menge der formalen Laurentreihen in z auf $\mathbb{Z}$ über K mit

$$K((z)) = \{\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K, m \in \mathbb{Z}\}$$

Die Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen erfolgt analog zur Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen.

4.2.5 Definition

Zwei Laurentreihen $f, g \in K((z))$, mit $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$, werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert:

$$+ \quad : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=min(-k,-m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n. \tag{4.3}$$

Die Multiplikation erfolgt durch Faltung der Laurentreihen.

$$\cdot : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-m-k}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j) \, z^n. \tag{4.4}$$

4.2.6 Bemerkung

Die Multiplikation formaler Laurentreihen ist unter der Bedingung wohldefiniert, dass formale Laurentreihen höchstens endliche viele Terme mit negativen Exponenten besitzen.
Diese Forderung ist unverzichtbar, denn andernfalls wäre die Summe $\sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j)$ in 4.4 unendlich und das Produkt somit nicht bestimmbar.

4.2.7 Satz

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe mit endlichem Hauptteil. Dann gilt, der Träger der Laurentreihe ist wohlgeordnet.

Beweis:

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe, die obige Bedingung erfüllt. Wir können f nach der Definition einer formalen Laurentreihe schreiben als $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n = g+h = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wie in 2.3.6 gezeigt, ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ total geordnet. Der Hauptteil h jeder formalen Laurentreihe besteht aus endlich vielen Summanden, was die Wohlordnung von $\mathrm{supp}(h)$, dem Trägers des Hauptteils, impliziert (wir erinnern an 3.1.2). Der Träger des Nebenteils, $\mathrm{supp}(g)$, ist aufgrund der Wohlordnung der natürlichen Zahlen wohlgeordnet.
Für $\mathrm{supp}(f)$ gilt trivialerweise, dass er der Vereinigung von $\mathrm{supp}(g)$ und $\mathrm{supp}(h)$ entspricht. Unter Verwendung von Satz 3.1.3 erhalten wir die Wohlordnung des Trägers der formalen Laurentreihe. □

4.2.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Menge der formalen Laurentreihen $K((z))$ und weisen deren Körperstruktur nach. Auf diesen Ergebnissen aufbauend stellen wir die Verbindung zwischen dem Körper der Laurentreihen und dem zuvor behandelten Ring der formalen Potenzreihen her. Bezugnehmend auf 4.1.10 betrachten wir aus Gründen der Vollständigkeit die Menge der konvergenten Laurentreihen.
Abschließend konstruieren wir mithilfe der Wohlordnung des Trägers eine Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen und stellen den bewertungstheoretischen Zusammenhang zu dem Ring der formalen Potenzreihen her.

4.2.8 Satz
Die Menge $(K((z)), +\cdot)$ *ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.*

Beweis:

Es genügt das Nachrechnen der Ringaxiome. Der Beweis verläuft analog zu 4.1.4. □

4.2.9 Satz
$(K((z)), +\cdot)$ *ist mit der definierten Addition und Multiplikation ein Körper.*

Beweis:

Sei $0 \neq f \in K((z))$ und $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$, mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$. Wir wissen bereits $K((z))$ ist ein kommutativer Ring. Um zu zeigen, dass $K((z))$ ein Körper ist, genügt es zu beweisen, dass zu jedem Element f von $K((z))$ ein Inverses g existiert. Wir definieren $g \in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so entstandene Laurentreihe invers zu f ist. Die Konstruktion von g läuft ähnlich zur Konstruktion der inversen Potenzreihe in Satz 4.1.7.
Setze $g = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_n = 0_K$ für alle $n < -m$ und $b_{-m} = \frac{1}{a_m}$. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $b_{-m}, ..., b_{-m+l-1}$ bereits definiert. Wir wählen $b_{-m+l} = -\frac{1}{a_m} \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n}$. Nach Definition

der Multiplikation in $K((z))$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} b_l a_l &= \sum_{n=m-m}^{\infty} \sum_{k+j=n} (a_k \cdot b_j) \, z^n \\ &= \sum_{n=-m}^{-m+l} b_n a_{l-n}. \end{aligned}$$

Für $l = 0$ folgt
$b_0 a_0 = b_{-m} a_m = 1$. Es bleibt der Fall $l > 0$ zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} b_l a_l &= \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n} + b_{-m+l} a_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $gf = 1_K$ und da $K((z))$, wie bereits gezeigt, ein kommutativer Ring ist, folgt $fg = 1_K$. Wir können zu jedem Element $f \neq 0$ aus $K((z))$ folglich ein Inverses konstruieren, womit $K((z))$ ein Körper ist. □

Mithilfe von 2.1.11 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

4.2.10 Satz
Es gilt $K((z)) = \mathrm{Quot}(K[[z]])$.

Beweis:

Nach Konstruktion von $K((z))$ ist klar, dass $K[[z]] \subseteq K((z))$. Betrachte die Abbildung:

$$\Phi : K((z)) \to \ \mathrm{Quot}\,(K[[z]])$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} \frac{z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} & \text{, falls } m < 0 \\ \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{1} & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert bezüglich m, dem kleinsten Index für den $a_m \neq 0$ gilt. Denn ist $m \geq 0$, so entspricht der Hauptteil der Laurentreihe der Nullreihe und die Reihe liegt somit in $K[[z]]$. Für den Fall $m \leq 0$ existiert ein eindeutiges $g \in K[[z]]$ und wir können $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = z^{-m} g$ schreiben.
Wir weisen nach, dass Φ ein Körperisomorphismus ist. Damit wir die Fallunterscheidung nach unserer Definition der Abbildung Φ nicht explizit durchführen müssen, setzen wir $z^{-}k = 1$ in beiden Äquivalenzklassen von 4.5 falls $k \geq 0$ ist. Durch diese Vereinfachung müssen wir den unteren Fall nicht gesondert formulieren. Sei $m \leq l$:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right)+\left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)\right) &= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}(a_n+b_n)\,z^n}{z^{-m}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n}{z^{-m}}+\frac{z^{-m}\sum_{n=l}^{\infty}a_n z^n}{z^{-m}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n}{z^{-m}}+\frac{z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty}a_n z^n}{z^{-l}} \\
&= \Phi\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right)+\Phi\left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)
\end{aligned}$$

Damit ist Φ bezüglich der Addition ein Homomorphismus. Nun betrachten wir die Multiplikation. Aufgrund der oben getroffenen Vereinfachung gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)\right) &= \frac{z^{-m-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty}b_n z^n\right)}{z^{-m-l}} \\
&= \frac{\left(z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n\right)\left(z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty}b_n z^n\right)}{z^{-m}z^{-l}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n}{z^{-m}}\cdot\frac{z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty}a_n z^n}{z^{-l}} \\
&= \Phi\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\Phi\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)
\end{aligned}$$

Der Kern der Abbildung ist das Element 0_K und da Φ ein Homomorphismus ist, gilt die Injektivität.
Wir zeigen, dass der Homomorphismus auch surjektiv ist. Sei $m, l \geq 0$ und $q = \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}\ inQuot\,(K[[z]])$, mit $\sum_{n=l} b_n z^n \neq 0$.
Die Reihe $\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n$ kann deswegen in die Gestalt $z^l\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_0 \neq 0$ gebracht werden. Nach Satz 4.1.6 kann diese Reihe invertiert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n}{\sum_{n=l}^{\infty}b_n z^n} \\
&= \frac{\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n}{z^l\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n} \\
&= \frac{\left(\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)^{-1}}{z^l} \\
&= \Phi\left(z^{-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Wir sehen sofort, dass $(z^{-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)^{-1} \in K((z))$ ist. Der Homomorphismus ist folglich bijektiv und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung von K um das transzendente Element z dar. Im Folgenden beschränken wir uns, aufgrund der Konvergenzbetrachtung, erneut auf den Körper $\mathbb{C}$.

4.2.11 Definition

Eine Laurentreihe $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn deren Haupt- und Nebenteil in z_0 konvergieren.

4.2.12 Bemerkung

Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ und $R \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ für alle z mit $r \leq |z| \leq R$.

4.2.13 Satz

Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\{z\}$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\{z\}$.

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

Zwischenbehauptung: In $\mathbb{C}\{z\}$ sind genau die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ invertierbar für die $a_0 \neq 0$ gilt.

Beweis:

Zunächst konstruieren wir formal die Inverse, wie wir es in Satz 4.1.7 bereits durchgeführt haben. Es bleibt zu zeigen, dass diese inverse Potenzreihe konvergiert. Sei eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, also $|a_n| \leq a$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.
Nach Definition der Konvergenz formaler Potenzreihen gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$, sodass die Reihe $f = \sum a_n {z_0}^n$ konvergiert.
Die Folge $(a_n|z_0|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist somit eine Nullfolge und daher beschränkt. Nach dem Lemma von Abel konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ für $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < |z_0|$ in dem Konvergenzbereich $D\,(0, z_0)$. Wähle $q = \frac{\zeta}{z_0}$. Wir erhalten, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$$

ist konvergent. Nun bestimmen wir das Inverse ähnlich wie in 4.1.7 und zeigen, dass die Koeffizientenfolge wieder beschränkt ist, woraus die Konvergenz der inversen Potenzreihe folgt. Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge a_n größer 1 ist und es sei ohne

Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge b_n des Inversen wie wir sie in Satz 4.1.7 konstruiert haben. Es gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Wir zeigen, dass $|b_n|$ durch ein Vielfaches von a^n beschränkt ist. Ist dies gezeigt, können wir eine positive untere Schranke des Konvergenzradius angeben. Mithilfe von Induktion beweise wir, dass ein $C > 1$ existiert, mit $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

ist. Die Ungleichung ist für b_0 nach Konstruktion des Inversen 4.1.7 erfüllt.
Die Abschätzung gelte für b_n. Wir wählen $C > \frac{a}{a-1}$. Als Abschätzung für den Koeffizienten b_{n+1} erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} |b_{n+1}| = |-\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq a \sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq a\ C^n \sum_{k=1}^{n+1} a^k \\ \leq a\ C^n \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (a\ C)^{n+1} \end{aligned}$$

gilt. □

Wie in Satz 4.2.10 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Des weiteren bleibt zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist. Dies wurde bereits in 4.1.10 für formale Potenzreihen gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Laurentreihen f, g ist ebenso konvergent. Um dies zu zeigen reicht es den Nebenteil zu betrachten, . Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multipliziere man diese so mit den Potenzen von z, dass man eine konvergente Potenzreihe erhält und geht wie in 4.1.10 vor. Nun definieren wir wie in 4.2.10 die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}_L\{z\} \to \mathrm{Quot}(\mathbb{C}\{z\})$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} & \text{, falls } m < 0 \\ \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{1} & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Der Satz 4.2.10 liefert die Isomorphie der Abbildung Φ. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Nun versuchen wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 4.2.3 der Laurentreihe $\mathrm{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$. Nach 2.2.2 suchen wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus.

4.2.14 Satz

Die Abbildung $v\colon K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $v(f) = \min(\operatorname{supp}(f))$ ist eine diskrete Bewertung.

Beweis:

Klar: Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt und damit $v(f)$ =min$\{(\operatorname{supp}(f)\})\}$. Nach Definition 2.2.2 sind für den Körper $K((z))$ und die angeordnet abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ noch (B1'-B3') nachzuweisen.

zu B1' : Klar nach Definition.

zu B2' : Sei $f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$, mit $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Dann ist v(f) $= n_0$ und v(g) $= m_0$. Damit gilt, dass $v(f) + v(g) = n_0 + m_0$ entspricht.
Sei

$$v(fg) = v(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{n=m+k} a_m b_k z^n) \stackrel{!}{=} v(f) + v(g),$$

wobei $a_m = 0$ für $m < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$. Betrachte $n < n_0 + m_0$. Nach Voraussetzung folgt entweder $a_m = 0$, oder $b_k = 0$ und somit ist auch das Produkt $a_m b_k = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Sei $n = n_0 + m_0$. Das Produkt $a_{n_0} b_{m_0}$ ist ungleich Null und daher erhalten wir, dass $v(fg) = n_0 + m_0 = v(f) + v(g)$ ist.

zu B3' : Wenn f, g wie oben definiert sind, erhalten wir für $v(f+g)$ die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} v(f+g) &= v\left(\sum_{n=\min\{n_0,m_0\}}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\right) \\ &= \min\{n_0, m_0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{v(f), v(g)\} \end{aligned}$$

□

Wie wir in 4.2.10 gezeigt haben, ist der Körper der Laurentreihen eine Obermenge des Rings der Potenzreihen $K[[z]]$. Nachdem wir auf $K((z))$ bereits eine Bewertung definiert haben, weisen wir nach, dass es sich auch bei $K[[z]]$ um einen diskreten Bewertungsring 4.2.15 handelt.

4.2.15 Satz

$K[[z]]$ ist ein diskreter Bewertungsring.

Beweis:

Wie im vorherigen Satz gezeigt, existiert auf dem Körper der Laurentreihen eine diskrete Bewertung. Wie wir in 4.2.10 bewiesen haben, ist der Quotientenkörper von $K[[z]]$ dieser Körper der Laurentreihen. Nach 4.1.6 folgt, $K[[z]]$ besitzt genau ein maximales Ideal nämlich $\mathfrak{m} = (z)$. Für eine Potenzreihe f die in $K[[z]]$ keine Einheit ist nimmt der konstante Term den Wert 0 an und wir erhalten, dass $a_0 = 0$ ist. Somit lässt sich jede derartige Potenzreihe schreiben als $f = z\widetilde{f}$, wobei $\widetilde{f}$ die umindizierte Potenzreihe bezeichnet.
Die Nullteilerfreiheit folgt wie in 4.1.11 ausführlicher gezeigt. Sei $0 \neq f, g \in K[[z]]$ und wir definieren der Einfachheit halber $c_n := a_i b_j \neq 0$. Für die Produktreihe fg erhalten wir, ab den Indizes i, j, dass $a_i,\ b_j \neq 0$ ist. Der Hauptidealring $K[[z]]$ ist noethersch , denn jedes Ideal ist erzeugt von z^j, wobei j der kleinste Index ist, ab dem die Koeffizienten c_n der Potenzreihen ungleich 0 in dem Ideal sind. Für das maximale Ideal muss gelten, dass es von einem Element erzeugt wird, für das gilt $a_0 = 0$. Andernfalls wäre die entsprechende Potenzreihe eine Einheit und würde somit ganz $K[[z]]$ erzeugen. Nach Definition des diskreten Bewertungsring 2.2.6 gilt die Behauptung. □

Damit folgt, dass $K[[z]]$ isomorph zu einem, wie in Punkt 3 beschriebenen Bewertungsring $A := 0 \cup \{x \in K * | v(x) \geqslant 0\}$ ist.
Wie in obigem Beweis 4.2.15 gezeigt, gilt: $(z) \subset (z^2) \subset (z)^3 \subset (z)^4 \subset ....$

4.3 Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper

Die Grundlagen zur Konstruktion eines Körpers über sehr allgemein definierten formalen Potenzreihen untersuchte Hahn 1907 in seiner Arbeit „Über nichtarchimedische Größensysteme“. Hahn formulierte als einer der ersten Mathematiker Potenzreihen mit verallgemeinerten Exponenten aus einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, wie beispielsweise:

$$f = 1 + z^{log2} + z^{log3} + z^{log4} + ...$$
$$g = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}z^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{8}z^{\frac{7}{8}} + ... + z + \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + ... + 2z^2 + ...$$

Die einzige, unverzichtbare Bedingung, die Hahn an diese verallgemeinerten Potenzreihen stellte, war die Wohldefiniertheit des Trägers der verallgemeinerten Potenzreihe. Im Laufe des Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes konnte er zeigen, dass die nach ihm benannten Potenzreihen nicht nur eine Gruppe, wie ursprünglich angenommen, bilden.
Während seiner Beschäftigung mit Hilberts siebzehntem Problem untersuchte er die Hahnschen Potenzreihen hinsichtlich ihrer Körpereigenschaften. Neben Hahn beschäftigten sich auch die beiden Mathematiker Neumann und Mal'cev mit den von Hahn konstruierten Reihen und deren Einbettung in einen Körper.
Wir fokussieren unsere Betrachtungen auf verallgemeinerte Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen und die algebraischen Strukturen die wir auf ihnen definieren können.

4.3.1 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen

Wir haben bisher ausschließlich formale Reihen betrachtet, die auf einer wohlgeordneten Teilmenge der ganzen Zahlen definiert waren. In Satz 4.2.7 haben wir gezeigt, dass die Wohldefiniertheit der Multiplikation mit der Wohlordnung des Trägers der Laurentreihe zusammenhängt.
Im Folgenden betrachten wir allgemeinere Arten von Mengen, nämlich die bereits in dem vorherigen Kapitel 3 vorgestellten angeordneten abelschen Gruppen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass auf angeordneten abelschen Gruppen definierte Potenzreihen, unter der Voraussetzung der Wohlordnung des Trägers, addiert und multipliziert werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66, S. 194 - 199], [Hah, S. 601 - 655] und [PC83, S. 49 - 64].

Wir bezeichnen mit G im Folgenden immer eine angeordnete abelsche Gruppe in additiver Schreibweise.

4.3.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe über dem Körper K auf der angeordneten abelschen Gruppe G* ist eine Abbildung $f\colon G \to K, g \mapsto a_g$ wobei ein $h \in G$ existiert, sodass $f(g) = 0$ für alle $g < h$.

4.3.2 Definition
Der *Träger* einer formalen Potenzreihe f auf einer angeordneten abelschen Gruppe G über einem Körper K ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{supp}(f) = \{g \in G | a_g 0 \neq 0\}$$

Wir stellen die in 4.3.1 definierte formale Potenzreihe im Folgenden meist nicht mehr in Funktionsschreibweise, sondern als Reihe dar. Aus diesem Grund präsentieren wir diese gebräuchlichere Definition einer formalen Potenzreihe.

4.3.3 Definition
Sei K ein Körper und G eine angeordnete abelsche Gruppe. Die Reihe

$$\sum_{g \in G} a_g z^g, \ \text{mit} a_g \in K, \ \text{deren Träger } \operatorname{supp}(f) \text{ wohlgeordnet ist,}$$

wird als *formale Potenzreihe auf einer angeordnet abelschen Gruppe* bezeichnet.

4.3.4 Notation
Wir werden im Folgenden, wenn wir von formalen Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen über einem Körper sprechen, diese vereinfachend als *formale Potenzreihen* bezeich-

nen.

Wir bezeichnen die Menge aller formalen Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe G über dem Körper K folgendermaßen:

$$K\left(\left(z^G\right)\right) = \{\sum_{g\in G} a_g z^g |\ \mathrm{supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet}\}$$

4.3.2 Definition der Addition und Multiplikation in $K((z^G))$

In diesem Abschnitt definieren wir die Verknüpfungen auf $K((z^G))$. Wir gehen dabei ähnlich wie in Teil 4.2.1 vor. Wir müssen berücksichtigen, dass die Verknüpfungen nur dann wohldefiniert sind, wenn die Wohlordnung des Trägers erhalten bleibt.

4.3.5 Definition
Seien $f, g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, mit $f = \sum_{g\in g} a_g z^g$ und $h = \sum_{g\in G} b_g z^g$, wobei $a_g, b_g \in K)$ und $\mathrm{supp}(f)$, $\mathrm{supp}(g)$ wohlgeordnet.
Die Summe zweier formaler Potenzreihen f, g

$$\begin{aligned} f + h &= \sum_{g\in g} a_g z^g + \sum_{g\in G} b_g z^g \\ &= \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g\right) z^g \end{aligned}$$

ist gegeben durch die Addition der Koeffizientenfolgen.

4.3.6 Satz
Die in 4.3.5 definierte Addition zweier formaler Potenzreihen $f, g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist wohldefiniert und die Summe $f + h$ ist wieder eine formale Potenzreihe.

Beweis:

Wir zeigen, dass der Träger der Summe $f + h$ wohlgeordnet ist. Es gilt offensichtlich $\mathrm{supp}(f + h) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(h)$. Nach Lemma 3.1.3 ist die Vereinigung zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet. Die Definition der Wohlordnung besagt, dass jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wiederum wohlgeordnet ist.
Nach Voraussetzung sind $\mathrm{supp}(f) = \{g \in G | a_g 0 \neq 0\}$ und $\mathrm{supp}(h) = \{g \in G | b_g 0 \neq 0\}$ wohlgeordnet. Das kleinste Element von $\mathrm{supp}(f + h)$ existiert und es gilt

$$\min\left(\mathrm{supp}\left(f + h\right)\right) = \min\{\min\left(\mathrm{supp}(f)\right), \min\left(\mathrm{supp}(h)\right)\}.$$

Somit ist $f + g$ eine formale Potenzreihe. $\square$

4.3.7 Definition
Sei $\lambda \in K$ und $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der formalen Potenzreihe f mit dem Körperelement λ ist definiert durch:

$$\lambda f = \lambda \left(\sum_{g \in g} a_g z^g \right) = \sum_{g \in g} \lambda a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$$

Bevor wir die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen definieren können, benötigen wir etwas Vorarbeit.
Sei $f,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Wir betrachten zunächst die multiplikative Verknüpfung einzelner Monome.

4.3.8 Definition
Seien $a_{g_1} z^{g_1}, b_{g_2} z^{g_2} \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der Monome ist nach den Potenzgesetzen definiert als

$$a_{g_1} z^{g_1} \cdot b_{g_2} z^{g_2} = a_{g_1} b_{g_2} z^{g_1 + g_2}$$

Die distributive Fortsetzung der Multiplikation von Monomen führt zur Definition der Multiplikation in $K\left(\left(z^G\right)\right)$. Wir erhalten das Produkt als Summe über der Summe des Produkts der einzelnen Koeffizienten.

4.3.9 Definition

$$\text{Sei } F = \sum_{a \in \Gamma} \Phi_a z^a \text{ und } G = \sum_{a \in \Gamma} \Psi_a z^a \text{ wobei } \Phi_a, \Psi_a \in K.$$

$$\cdot : H := F \cdot G = \sum_{a \in \Gamma} \sum_{a_1 + a_2 = a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a. \tag{4.7}$$

Um eine Aussage treffen zu können, ob dieses Produkt wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass der Träger des Produkts wohlgeordnet ist. Beachte, dass $\operatorname{supp}(F \cdot G) \subseteq \operatorname{supp}(F) + \operatorname{supp}(G)$. Die Summe $\sum_{a_1 + a_2 = a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2}$ kann reduziert werden auf $a_1 \in$ supp(F) und $a_2 \in$ supp(G), da ansonsten der Summand null ist.
Nach Voraussetzung sind sowohl supp(F), als auch $\operatorname{supp}(G)$ wohlgeordnet. Die so entstandene Menge von Elementen aus Γ ist also selbst wohlgeordnet. Nach dem Lemma von B.H. Neumann 3.1.6 ist damit $\operatorname{supp}(F) + \operatorname{supp}(G)$ wohlgeordnet. Es ist bekannt, dass $\operatorname{supp}(F \cdot G) \subseteq \operatorname{supp}(F)$ + $\operatorname{supp}(G)$ und jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wieder wohlgeordnet nach der Definition der Wohlordnung (2.3.10). Da jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, ist diese Teilmenge selbst wohlgeordnet. Wir erhalten die Wohlordnung des Trägers der Produktreihe $\operatorname{supp}(F \cdot G)$. Wir behaupten weiter, dass die Summe $\sum_{a_1 + a_2 = a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a$ (siehe

4.7) endlich ist. Es gibt also nur eine endliche Anzahl von Paaren a_1, a_2, sodass $a_1 + a_2$ ein vorgegebenes Element a $\in \Gamma$ ergibt. Die Folgerung aus dem Lemma von Neumann 3.1.7 führt direkt zu dieser Aussage.

Wir haben gezeigt, dass eine Darstellung von a als Summe von $a_1 + a_2$ nur auf endlich viele Arten möglich ist, wenn Träger der beiden zu multiplizierenden Potenzreihen wohlgeordnet sind. Der Koeffizient Λ von z^a sei dann gegeben durch:

$$\Lambda_a = \Phi_{a_{1_1}}\Psi_{a_{2_1}} + \Phi_{a_{1_2}}\Psi_{a_{2_2}} + ... + \Phi_{a_{1_n}}\Psi_{a_{2_n}}$$

Λ_a sei null, wenn es für a keine Darstellung als Summe der Elemente der Träger von F und G gibt.

Das Produkt zweier formaler Potenzreihen auf Γ über K ist somit wohldefiniert; der Träger der erhaltenen formalen Potenzreihe wohlgeordnet und der entstandene Koeffizient Λ liegt, als endliche Summe des Produkts zweier Körperelemente Φ und Ψ, ebenfalls im Körper K.

Damit ist $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation abgeschlossen. [Hah, Seite 601ff], [Neu, S. 210- 213].

4.3.10 Beispiel

Bei der Reihe $F := z^{\frac{-1}{p}} + z^{\frac{-1}{p^2}} + z^{\frac{-1}{p^3}}...$ handelt es sich um eine formale Potenzreihe über einem beliebigen Körper, da der Träger $\{\frac{-1}{p}, \frac{-1}{p^2}, \frac{-1}{p^3}, ...\}$ wohlgeordnet ist.

4.3.3 Der verallgemeinerte Ring der formalen Potenzreihen

Auf $K\left(\left(z^G\right)\right)$, der Menge der formalen Potenzreihen auf der additiven, angeordneten abelschen Γ über dem Körper K haben wir nun die Addition und Multiplikation definiert. In der verwendeten Literatur ([PC83], [Fuc66]) findet sich die multiplikative Schreibweise der angeordneten Gruppe Γ, da diese eine noch allgemeinere Definition der Multiplikation zum Beispiel mithilfe von Faktorsystemen ermöglicht. Auf Basis dieser Definition konnte B.H. Neumann 1949 Schiefkörper von formalen Potenzreihen konstruieren. Diese lieferten wichtige Beispiele zur Einordnung der projektiven Ebenen. Im Fall einer additiv geschriebenen, abelschen, angeordneten Gruppe erhalten wir den direkten Bezug zu dem anfangs beschriebenen Laurentreihenkörper und dem darin eingebetteten Potenzreihenring. Diese entstehen für den Fall, dass es sich bei der angeordneten, abelschen Gruppe um $\mathbb{Z}$ respektive $\mathbb{N}_0$ handelt. Wir zeigen zunächst, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein Ring über K ist.

4.3.11 Satz

$K\left(\left(z^G\right)\right)$ *ist ein Ring über K.*

Beweis:

Es gilt $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.

- *Assoziativität:* Für alle $F, G, H \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ gilt nach Definition der Addition:

$$F + (G + H) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \left(\sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a\right) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Lambda_a)\, z^a$$

$$= \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a + \Lambda_a)\, z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a)\, z^a + \sum_{a\in G} \Lambda_a z^a.$$

- *Neutrales Element der Addition:* Bezeichne e das neutrale Element der Addition $e := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a$, wobei ähnlich wie in 4.1.1 gilt $\Phi_a = 0$ für alle $a \in \Gamma$. Der Träger von e ist die leere Menge, welche nach Definition wohlgeordnet ist.

- *Inverses Element der Addition:* Zu jedem Gruppenelement F gibt es ein inverses Element der Addition $-F := \sum_{a\in\Gamma} -\Phi_a z^a$, wobei $\mathrm{supp}(F) = \mathrm{supp}(-F)$, mit $F + F^{-1} = e$.

- *Kommutativität:* $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist abelsch, da K ein Körper ist und nach Definition der Addition gilt:

$$F + G = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a)\, z^a \overset{\Phi,\Psi\in K}{=}$$

$$\sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Phi_a)\, z^a = \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a = G + F.$$

Die oben definierte Multiplikation in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist kommutativ, wie sich leicht sehen lässt, da für $F, G \in \mathrm{K}[[z^\Gamma]]$ mit $F := \sum_{a_1\in\Gamma} \Phi_{a1} z^{a_1}$ und $G := \sum_{a_2\in\Gamma} \Phi_{a2} z^{a_2}$ gilt:

$$FG = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_2+a_1=a} \Phi_{a_2} \Psi_{a_1} z^a = GF$$

Die Gleichheit folgt unmittelbar aus der Kommutativität von Γ und der Kommutativität der Multiplikation im Körper K.
Des weiteren können wir die Assoziativität der Multiplikation nachweisen. Seien F, G, H $\in \mathrm{K}[[z^\Gamma]]$ mit:

$$F := \sum_{a_1\in\Gamma} \Phi_{a1} z^{a_1}$$

$$G := \sum_{a_2\in\Gamma} \Psi_{a2} z^{a_2}$$

$$H := \sum_{a_3\in\Gamma} \Phi_{a3} z^{a_3}$$

Zur Bildung des Produkts $(F \cdot G) \cdot H$ beziehungsweise $F \cdot (G \cdot H)$ gilt die Instruktion des Index

a des gesuchten Koeffizienten Ω auf sämtliche Weisen als Summe $a_1 + a_2 + a_3$, beispielsweise:

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = ... = a_{1n} + a_{2n} + a_{3n}.$$

Dann hat der Koeffizient Ω die Form:

$$\Phi_{a_{11}}\Psi_{a_{21}}\Lambda_{a_{31}} + \Phi_{a_{12}}\Psi_{a_{22}}\Lambda_{a_{32}} + ... + \Phi_{a_{1n}}\Psi_{a_{2n}}\Lambda_{a_{3n}}.$$

Falls keine Darstellung von a als Summe der Elemente der Träger der Potenzreihen F, G, H existiert, ist Ω gleich null.
In $K\left(\left(z^G\right)\right)$ gelten die Distributivgesetze, denn:

(i)

$$F \cdot (G + H) := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a \left(\sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a\right) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a \left(\sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Lambda_a) z^a\right) =$$

$$\sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} (\Psi + \Lambda)_{a_2} z^a = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} (\Psi_{a_2} + \Lambda_{a_2}) z^a =$$

$$\sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a + \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Lambda_{a_2} z^a = FG + FH$$

(ii)

$$(F + G) \cdot H = \left(\sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a\right) \cdot \sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a = \left(\sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a\right) \cdot \sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a =$$

$$\sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a \cdot \left(\sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a\right) = F \cdot H + G \cdot H$$

In den Beweis der Distributivgesetze und die Gültigkeit der Gleichheit fließen die im Körper K gültige Kommutativität der Multiplikation, die Potenzgesetze, beziehungsweise die Kommutativität der angeordneten abelschen Gruppe Γ mit ein. So gilt für alle a, b $\in \Gamma$, dass:

$$z^a \cdot z^b = z^{a+b} = z^{b+a} = z^b \cdot z^a.$$

□

4.3.4 Die Konstruktion des Inversen in $K\left(\left(z^G\right)\right)$

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66, S. 196- 198] und [Neu, S. 210- 213] vor. Wir zeigen zunächst, dass die unendliche Summe des Produkts aus einem beliebigen Körperelement mit einem Element des formalen Potenzreihenrings, mit positivem Träger wohldefiniert ist und wieder in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ liegt. Dieses Element spielt eine wichtige Rolle zur Konstruktion eines Inversen. Wir definieren die folgende Reihe:

$$\overline{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot F^n, \text{ mit } F \in K\left(\left(z^G\right)\right), \text{ wobei } \min\left(\operatorname{supp}\left(F\right)\right) > 0, \lambda_n \in K^*.$$

Wieso λ eine Einheit und der kleinste Exponent der Unbestimmten z, für das der zugehörige Koeffizient ungleich null ist, positiv sein muss, klären wir im Folgenden. Die Potenzreihe $\overline{F}$ kann umgeschrieben werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n \cdot F\right)^n = \lambda_0 F^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n \cdot F\right)^n = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n \cdot F\right)^n.$$

Diese Darstellung erinnert für $\lambda_0 = e$, wobei e das neutrale Element der angeordneten abelschen Gruppe Γ ist, an die geometrische Reihe. Jedes Element $G \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ besitzt eine äquivalente Darstellung durch das Vielfache der Summe des neutralen Gruppenelements und einer formalen Potenzreihe deren Träger positiv ist. Denn für jede formale Potenzreihe $G \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $G := \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\infty} \Psi_\gamma z^\gamma$ ist $\operatorname{supp}(G)$ wohlgeordnet und es existiert damit ein kleinstes Element $g \in G$ mit $g = \min(\operatorname{supp(G)})$. Da Γ eine angeordnete abelsche Gruppe ist und damit für jedes Element ein additives Inverses existiert, lässt sich G folgendermaßen schreiben

$$G = z^g \sum_{\gamma\in\Gamma} \Psi_\gamma z^{\gamma-g}$$

$$= z^g \left(e\Psi_g + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{g\}} \Psi_\gamma z^{\gamma-g}\right) = z^g\ \Psi_g \left(e + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{g\}} \frac{\Psi_\gamma}{{\Psi_g}^{-1}} z^{\gamma-g}\right)$$

, wobei $\operatorname{supp}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{g\}} \frac{\Psi_\gamma}{{\Psi_g}^{-1}} z^{\gamma-g}\right) \geq 0$ ist. Das Inverse zu b_g existiert, da der Koeffizient im Körper K liegt und da für g als Minimum des Trägers von G gelten muss, $\Psi_g \neq 0$. Nach dieser Argumentation ist klar ersichtlich, dass sich jede beliebige formale Potenzreihe G aus $K\left(\left(z^G\right)\right)$ für $\lambda \in K,\ g \in \Gamma,\ F \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, wobei $\min\left(\operatorname{supp}\left(F\right)\right) > 0$ darstellen lässt.

$$G = \lambda \cdot z^g \cdot (e + F)$$

Wir assozieren jetzt mit jedem Element $F := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a$ des formalen Potenzreihenrings ein Symbol $e + F$ und betrachten die Menge Υ aller $\mathfrak{F} = e + F$ mit e als neutrales Element von Γ, $F \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ und $\min\left(\operatorname{supp}\left(F\right)\right) > 0$. Diese Menge Υ ist eine Gruppe bezüglich der folgenden Verknüpfung

$$\left(e + F\right)\left(e + G\right) = e + \left(F + G + FG\right)$$

, wobei die Operationen zwischen den Ringelementen der Addition und Multiplikation in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ entsprechen. Die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation ist aus deren Definition klar ersichtlich. Das neutrale Element von Υ ist e. Mithilfe der geometrischen Reihe konstruieren wir das Inverse zu jedem Gruppenelement $\mathfrak{F}$ und zeigen in 4.3.12, dass dieses wohldefiniert ist und ein Element des Potenzreihenrings. Nach Definition der geometrischen Reihe gilt:

$$\frac{1}{e-F} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} F^n$$

oder in äquivalenter Darstellung:

$$\frac{1}{e+F} == e + \sum_{n=1}^{\infty} (-F)^n.$$

Man sieht sofort, dass für jedes Gruppenelement $e+F$ die Reihe $e + \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$ invers ist. Wir müssen allerdings noch zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$ im formalen Potenzreihenring $K\left(\left(z^G\right)\right)$ liegt.

4.3.12 Lemma

Sei $F \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $min\left(supp\left(F\right)\right) > 0$, dann liegt für beliebige Körperelemente λ_n die unendliche Reihe

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F^n$$

in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ und ist wohldefiniert.

Beweis:

Das Element liegt im Potenzreihenring, wenn der die Vereinigung der Träger supp(F^n) wohlgeordnet ist in der Anordnung von G und es für jedes Element des Trägers $a \in$ supp(F)nur endliche viele ganze Zahlen n gibt, sodass der a-te mit n potenzierte Koeffizient ungleich null ist.

Die erste Bedingung gilt als erfüllt wenn es keine unendlich abfallende Folge gibt

$$[u_1 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n1} > u_2 = a_{21} + a_{22} + ... + a_{2n2} > ... > u_i = a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{ini}, \quad (4.8)$$

mit $(a_{ik} \neq 0)$. Wir bezeichnen mit $a_i{}^* = max(a_{ik})$ das Maximum über allen k. Offensichtlich entspricht die von u_i erzeugte konvexe Untergruppe, wir bezeichnen sie mit $\langle u_i \rangle$, der von dem größten Element $max_k\left(a_{ik}\right)$ konvexen Untergruppe. Die anderen Summanden von u_i sind nach Definition des Maximums kleiner als dieses und liegen aufgrund der Konvexität der Untergruppe in dieser. Also gilt die Gleichheit$\langle u_i \rangle = \langle \max\left(a_{ik}\right) \rangle$. Da der Träger supp$(F^n)$ wohlgeordnet ist, gibt es unter den erzeugten Untergruppen aller Elemente des Trägers eine kleinste Untergruppe U von Γ. Die konstruierte Folge 4.8 ist so gewählt, dass die kleinste

Untergruppe möglichst klein ist. Damit bleibt die Ordnung der Folgenglieder auch für die davon erzeugten konvexen Untergruppen erhalten:

$$\langle u_1 \rangle \supseteq \langle u_2 \rangle \supseteq ... \supseteq \langle u_i \rangle \supseteq ...$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die von u_i, wobei i natürliche Zahlen sind, erzeugten konvexen Untergruppen die gesamte Untergruppe erzeugt. Wir wählen nun aus jeder Folge von a_{iki} ein $a_i{}^*$, sodass die von diesem Element erzeugte konvexe Untergruppe den von u_i erzeugten konvexen Untergruppen, eventuell unter weglassen endlich vieler Elemente der Folge, entspricht. Diese ist, wie oben ohne Beschränkung angenommen, ganz U. Da unsere Elemente a aus dem Träger der Potenzreihe stammen, kann es zwar mehrere geben, die ganz U erzeugen, allerdings aufgrund der Wohlordnung des Trägers nur ein kleinstes, nennen wir es a^*. Die von a^*, $a_1{}^*$ und u_1 erzeugten konvexen Untergruppen sind nach Annahme gleich. Für die erzeugenden Element gilt jedoch, da a^* das kleinste erzeugende Element ist und u_1 den Summanden $a_1{}^*$ enthält, die folgende Ungleichung bezüglich der Anordnung von G:

$$a^* \leq a_1{}^* \leq u_1$$

Aufgrund der Eigenschaften von konvexen Untergruppe einer angeordneten Gruppe existiert ein $p \in \mathbb{N}$ sodass $u_1 \leq pa^*$ und da $u_1 > u_2 > ... > u_i > ...$ gilt $u_i \leq pa^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir wählen p kleinstmöglich. Jedes Element unserer anfangs gewählten Folge u_i kann in einer der folgenden Formen geschrieben werden, wobei v_i Summen aus Elementen von a_{ik} sind:

$$u_i = a_i{}^* \qquad\qquad u_i = v_i + a_i{}^*$$

Da Γ abelsch ist folgt aus diesen beiden Fällen ebenso: $u_i = a_i{}^* + v_i$. Die Elemente $a_i{}^*$ sind Elemente des Trägers und da dieser wohlgeordnet ist, gibt es keine unendlich abnehmende Folge von $a_i{}^*$ und damit existieren nur endlich viele u_i der ersten Form. Da nach Voraussetzung u_i eine unendlich abnehmende Folge ist muss eine unendlich abnehmende Folge v_i existieren: $v_{i1} > v_{i2} > ... > v_{ij} > ....$ Diese Folge hat die selbe Form wie 4.8 und die von v_i erzeugte konvexe Untergruppe entspricht der minimalen von u_i erzeugten konvexen Untergruppe, da $v_i \leq u_i$. Wir können also wieder eine natürliche Zahl q finden, sodass $v_i \leq q\ a^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Diese natürliche Zahl q ist kleiner gleich dem vorher gewählten p, da $v_i \leq u_i$ und $u_i \leq p\ a^*$. Daraus folgt also, dass eine Folge v_i aus u_i konstruiert werden kann, was ein Widerspruch zur Wahl unserer Folge und der Minimaleigenschaft darstellt. Die Vereinigung der Träger $\text{supp}(F^n)$ muss somit wohlgeordnet sein.

Der erste Teil des Lemmas ist bewiesen. Wir nehmen nun an es existieren für jedes festgehaltene Element der angeordneten abelschen Gruppe Γ existieren unendlich viele ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$,sodass

$$a = a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in},\ i \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } n_1 < n_2 < ... < n_i < ... \text{ und } a_{ik} \in \text{supp}(F)$$

da die Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(F^n)$ wohlgeordnet ist existiert ein kleinstes Element a der oben definierten Form. Da $\operatorname{supp}(F^n)$ wohlgeordnet ist, enthält die Folge $(a_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ nach 3.1.4 eine nichtabnehmende unendliche Teilfolge, die wir gleich indizieren:

$$a_{11} \leq a_{i1} \leq ... \leq a_{i1} \leq ...$$

und wir nehmen deshalb an, dass $(a_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ nicht wachsend ist. Damit muss die durch $(a_i)' = -(a_{i1}) + a = a_{i2} + ... + a_{in_i}$, $i \in \mathbb{N}$ bestimmte Folge nicht wachsend und aufgrund der Wohlordnung der Vereinigung der Träger somit konstant sein. Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $(a_{j+m})' = (a_j)' = a'$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit liegt a' in der Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(F^n)$, für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $a' < a$, da $a' = -(a_{i1}) + a$ und $a_{i1} > e$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von a. Damit existieren nur endlich viele ganze Zahlen n für die $(\Phi^n)_n \neq 0$ ist. □

Das Lemma liefert uns die gewünschte Aussage, $\sum_{n=1}^{\infty}(F)^n$ liegt im formalen Potenzreihenring $K\left(\left(z^G\right)\right)$. Also enthält der Potenzreihenring ebenso $\overline{F} := \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$, weil die negative formale Potenzreihe $(-F)$ die Voraussetzungen des Lemmas für $\lambda_n = 1$ erfüllt, $\min(\operatorname{supp}(-F)) > 0$. Wir wissen also, dass für ein Element $\mathfrak{F} := e + F$, mit $F \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ der Gruppe Υ ein Element $\overline{\mathfrak{F}} := e + \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$ in Υ existiert, sodass das Produkt der beiden Gruppenelemente die folgende Form hat:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}} \\
&= (e+F)\left(e+\overline{F}\right) \\
&= e + \left(F + \overline{F} + F \cdot \overline{F}\right) \\
&= e + \left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a + \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n + \left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n\right)\right) \\
&= e + \left(\sum_{n=2}^{\infty}(-F)^n + \left(-\sum_{n=2}^{\infty}(-F)^n\right)\right) \\
&= e + e = e \\
&= e + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n + \sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n\right) \cdot \left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\right)\right) \\
&= \left(e+\overline{F}\right)(e+F) \\
&= \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}
\end{aligned}$$

Die Menge Υ stellt also tatsächlich eine Gruppe dar und wir finden zu jedem Element ein Inverses. Mithilfe dieser Erkenntnisse sind wir nun in der Lage den zentralen Satz der Ausarbeitung zu beweisen.

4.3.13 Satz

Die formalen Potenzreihen auf einer angeordneten Gruppe Γ über einem Körper K bilden einen Körper $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wie oben gezeigt, kann jedes Element $G \neq 0$ des Ringes $K\left(\left(z^G\right)\right)$ in der Form $G = \lambda \cdot z^g \cdot (e + F)$ geschrieben werden, mit $\lambda \in K^*, g \in \Gamma,\ F \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, wobei $\min(\operatorname{supp}(F)) > 0$. Wir bezeichnen mit $e + \overline{F}$ das Inverse von $e + F$ in der Gruppe Υ. Mit selbiger Argumentation wie oben wissen wir $H := \left(e + \overline{F}\right) z^{-g} \lambda^{-1} \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Da $\lambda \in K^*$ liegt, handelt es sich um eine Einheit und es existiert ein Inverses, welches wir mit λ^{-1} bezeichnen. Da g ein Element unserer angeordneten, abelschen, additiv geschriebenen Gruppe Γ ist, gibt es auch zu g ein inverses Element, das wir $-g$ nennen. Nach den Potenzgesetzen und den definierten Rechenoperationen in dem Potenzreihenring $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ergibt sich, dass

$$
\begin{gathered}
G \cdot H \\
= (\lambda \cdot z^g (e + F)) \cdot \left(\left(e + \overline{F}\right) z^{-g} \lambda^{-1}\right) \\
= \left(\lambda \cdot z^g z^{-g} \lambda^{-1}\right) = \left(\lambda z^{g-g} \lambda^{-1}\right) = \left(\lambda \lambda^{-1}\right) \\
= e \\
= \left(e + \overline{F}\right) z^{-g} \lambda^{-1} \cdot \lambda z^g (e + F) \\
= H \cdot G
\end{gathered}
$$

Offensichtlich erweist sich e als Einselement von $K\left(\left(z^G\right)\right)$ □

Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe mit wohlgeordnetem Träger formen über einem Körper K somit den Körper der formalen Potenzreihen $K\left(\left(z^G\right)\right)$.
Die Grundsteine dieser Theorie wurden von Hans Hahn 1907 in seinem Beweis, dass formale Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe über $\mathbb{R}$ einen Körper bilden gelegt. Neumann verallgemeinerte Hahns Ergebnisse und zeigte, dass formale Potenzreihen auf einer multiplikativen Gruppe in der nicht-kommutativen Sichtweise einen Schiefkörper formen. Im Laufe der Jahre konnte die Theorie der formalen Potenzreihen, als Verallgemeinerung der Laurentreihen und Pusieuxreihen, immer weiter ausgebaut werden.
Hier schließt sich der Kreis zu dem, zu Beginn des Kapitels, betrachteten Potenzreihenring $K[[z]]$ und dem Laurentreihenkörper $K((z))$. Die Menge der ganzen Zahlen ist eine angeordnete abelsche additive Gruppe. Über einem beliebigen Körper K wissen wir nun, dass der Laurentreihenkörper mit $\Gamma = \mathbb{Z}$ ein Beispiel für einen formalen Potenzreihenkörper darstellt.

Literaturverzeichnis

[Car48] Carruth, Philip W.: Generalized Power Series Fields. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), May, Nr. 3, S. 548 – 559

[Fis08] Fischer, Gerd: *Lehrbuch der Algebra.* 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008

[Fuc66] Fuchs, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966

[Hö01] In: Hölder, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß.* Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1 – 64

[Hah] In: Hahn, Hans: *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*

[Hul12] Hulek, Klaus: *Elementare algebraische Geometrie.* Wiesbaden : Springer Spektrum, Vieweg und Teubner Verlag, 2012

[Jä99] Jänich, K.: *Funktionentheorie: eine Einführung.* Springer, 1999 (Springer-Lehrbuch)

[Lü08] In: Lüneburg, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1.* Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507 – 577

[Neu] Neumann, Bernhard H.: On ordered division rings. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 66, Nr. 1, S. 202 – 252

[Neu92] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992

[PC70] Priess-Crampe, Sibylla: Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen. In: *Archiv der Mathematik* 21 (1970), Nr. 1, S. 362 – 365

[PC83] Priess-Crampe, Sibylla: *Angeordnete Strukturen.* Springer-Verlag, 1983

[Rib92] Ribenboim, Paulo: Noetherian rings of generalized power series. In: *Journal of pure and applied algebra* 79 (1992), Nr. 3, S. 293 – 312

[SP08] Schulze-Pillot, Rainer: *Einfuehrung in Algebra und Zahlentheorie.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[Tar12] Taraz, Anusch: *Diskrete Mathematik - Grundlagen und Methoden.* Basel : Birkhäuser, 2012