Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

9. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

2 Notationen **6**

3 Mathematische Grundlagen **7**
3.1 Algebraische Strukturen . . . 7
3.2 Angeordnete algebraische Strukturen . . . 10
3.2.1 Anordnung . . . 10
3.2.2 Wohlordnung . . . 13

4 Angeordnete abelsche Gruppen **14**
4.1 Wohlordnung in angeordneten abelschen Gruppen . . . 15
4.2 Archimedisch angeordnete abelsche Gruppen . . . 17
4.3 Der Satz von Hölder . . . 19
4.4 Die angeordnete Menge konvexer Untergruppen . . . 22
4.5 Einblick in die Bewertungstheorie . . . 24

5 Potenzreihenkörper **26**
5.1 Formale Potenzreihen . . . 26
5.1.1 Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen . . . 27
5.1.2 Der Ring der formalen Potenzreihen . . . 28
5.1.3 Eigenschaften des Potenzreihenrings . . . 31
5.2 Formale Laurentreihen . . . 32
5.2.1 Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen . . . 33
5.2.2 Der Körper der formalen Laurentreihen . . . 34
5.3 Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper . . . 40
5.3.1 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen . . . 41
5.3.2 Addition und Multiplikation in $K((z^G))$ . . . 42
5.3.3 Der verallgemeinerte Ring der formalen Potenzreihen . . . 44

5.3.4 Das Inverse in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ 47

Kapitel 1

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können.
Ordnung spielt seit jeher eine essentielle Rolle in der Geschichte der Mathematik, aber erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigte man sich mit Ordnung verbunden mit algebraischen Operationen. Derartige Strukturen treten in vielen verschiedenen mathematischen Disziplinen auf. Im 20. Jahrhundert entwickelte sich die Theorie der angeordneten Strukturen, beginnend mit Arbeiten von Hölder, Hahn und Hausdorff. In seinem Werk „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß“ zeigte Hölder 1901, dass sich jede archimedisch angeordnete Gruppe in eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen einbetten lässt. Hölder bediente sich dabei der von Dedekind eingeführten Schnitte in $\mathbb{Q}$. Der österreichische Mathematiker Hans Hahn baute diese Theorie in seinem Werk „Über nichtarchimedische Größensysteme“ auf nichtarchimedisch angeordnete Strukturen aus. Er zeigte, dass diese in Form einer Untergruppe in einen lexikographisch geordneten Funktionenraum eingebettet werden können.
In der vorliegenden Ausarbeitung liegt die Aufmerksamkeit auf der Betrachtung abelscher angeordneter Gruppen. Wenn derartige Gruppen den Definitionsbereich eines lexikographisch geordneten Funktionenraums darstellen, erweist sich dieser als ein Körper. Dabei ist die Wohlordnung des Trägers der Funktionen unverzichtbar.
Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Nach einer kurzen Wiederholung der wichtigsten algebraischen Strukturen erfolgt ein Einblick in die Theorie der angeordneten abelschen Gruppen. Diese benötigen wir später zur Konstruktion des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers. Über die Wohlordnung, führt die Archimedizität zur zentralen Aussage des ersten Kapitels, dem Satz von Hölder. Im zweiten Teil werden Eigenschaften des Rings der formalen Potenzreihen auf den natürlichen Zahlen über einem Körper näher beschrieben. Eine Erweiterung der Menge der formalen Potenzreihe führt uns zum Körper der formalen Potenzreihen auf einer wohlgeordneten Teilmenge der ganzen Zahlen, den Laurentreihen. Basierend auf Arbeiten von Fuchs

und Prieß-Crampe wird die Konstruktion des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers auf einer angeordneten abelschen Gruppe durchgeführt und gezeigt, dass es sich tatsächlich um einen Körper handelt

Kapitel 2

Notationen

$\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen
K^*	die Menge der Einheiten im Körper K
$x \in A$	x ist Element der Menge A
$A \subseteq B (A \subset B)$	A ist eine (echte) Untermenge von B
$A \cap B, A \cup B$	Durchschnitt, Vereinigung der Mengen A, B
$A \setminus B$	die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen
$\varnothing$	die leere Menge
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$\lvert \mathrm{a} \rvert$	der absolute Betrag von a
P, P(G)	der Positivbereich einer Gruppe G
W_G	Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten Menge G
$a \ll b$	a ist unendlich kleiner als b
$a \sim b$	a ist archimedisch äquivalent zu b
$\langle z \rangle$	die von z erzeugte Untergruppe
Σ	die Menge konvexer Untergruppen einer angeordneten abelschen Gruppe

Kapitel 3

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die Ausarbeitung benötigten theoretischen Grundlagen zusammengestellt. Wir betrachten zunächst zentrale algebraische Strukturen und fokussieren uns im weiteren Verlauf auf Gruppen und Ordnungen, die in ihnen definiert werden können.

3.1 Algebraische Strukturen

Wir beginnen mit der Definition der elementaren algebraischen Strukturen Gruppe, Ring, Körper und Quotientenkörper. Die Vertrautheit mit grundlegenden Begriffen über Mengen und Abbildungen sowie den wichtigen Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird vorausgesetzt. Die folgenden Ausführungen sind orientiert an [SP08] und [Fis08].

3.1.1 Definition

Eine nichtleere Menge G mit der Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G, (a,b) \mapsto a \circ b$, heißt *Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

G1: (Assoziativgesetz) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.

G2: (Neutrales Element) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $1_G \in G$ mit $1_G \circ a = a \circ 1_G = a$ für alle $a \in G$.

G3: (Inverses Element) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element a^{-1} in G mit $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = 1_G$.

Die Gruppe heißt *abelsch*, falls folgendes gilt:

G4: (Kommutativgesetz) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$.

3.1.2 Bemerkung

Wenn $(G, \circ)$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe ist, so wird das Inverse eines Elements

$a \in G$ mit a^{-1} bezeichnet.
Wenn nichts anderes gesagt ist, verwenden wir in abelschen Gruppen die Verknüpfung $+$. Wir nennen das neutrale Element 0_G und $-a$ das Inverse zu $a \in G$.

3.1.3 Beispiel
$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen.

3.1.4 Definition
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1_G. Die Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe*, wenn gilt:

U1: $1_G \in U$.

U2: $a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$.

U3: $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$.

3.1.5 Definition
Sei R eine nichtleere Menge und seien $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ bezeichnen wir als *Ring mit Eins*, wenn gilt:

R1: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (deren neutrales Element mit 0_R bezeichnet wird).

R2: Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ: Für $a, b, c \in R$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Das neutrale Element der Multiplikation wird mit 1_R bezeichnet).

R3: (Distributivgesetze) Für alle $a, b, c \in$ R gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ und } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

3.1.6 Bemerkung
Ist die Multiplikation kommutativ, so heißt $(R, +, \cdot)$ *kommutativer Ring mit Eins*. Anstelle von $(R, +, \cdot)$ sprechen wir vereinfachend von dem Ring R.

3.1.7 Definition
Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$.

(a) Ein Element $a \in R$ heißt *Nullteiler*, falls $a \neq 0$ und ein $0 \neq b \in R$ existiert mit $ab = 0$.

(b) Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, falls ein $b \in R$ existiert mit $ab = 1$.

3.1.8 Bemerkung
Falls $a \in R$ eine Einheit ist, existiert das Inverse und es ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen das Inverse mit a^{-1}.

3.1.9 Definition

Ein kommutativer Ring R mit Eins heißt *Integritätsbereich*, falls $R \neq \{0\}$ und es in R keine Nullteiler gibt.

3.1.10 Definition

Sei K eine nichtleere Menge mit mindestens zwei Elementen und seien $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K. Genau dann ist $(K,\ +,\ \cdot)$ ein *Körper*, wenn K ein kommutativer Ring mit Eins ist, sodass jedes Element $0 \neq a \in K$ ein eindeutig bestimmtes multiplikatives Inverses hat.

3.1.11 Satz

Sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren auf $R \times R \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt. Sei $(r,u), (s,v) \in R \times R \setminus \{0\}$. Es gilt, dass $(r,u) \sim (s,v)$ ist genau dann, wenn $rv = su$ ist. Man sieht sofort, dass die Relation reflexiv und symmetrisch ist. Sei $(r,u) \sim (s,v)$ und $(s,v) \sim (t,w)$, also $rv = su$ und $sw = tv$. Wir können nun schreiben:

$$rwv = rvw = suw = swu = tvu = tuv.$$

Nach Voraussetzung ist R ein Integritätsbereich. Da v ungleich null ist, folgt $rw = tu$, so dass $(r,u) \sim (t,w)$ ist. Somit ist $\sim$ transitiv. Auf $R \times R \setminus \{0\}$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(r,u) + (s,v) = (rv + su, uv),$$

$$(r,u)(s,v) = (rs, uv)$$

Wir setzen $\mathrm{Quot}(R) = (R \times R \setminus \{0\}, \sim)$ *und bezeichnen die Äquivalenzklasse von (r,u) mit $\frac{r}{u}$. Nach Definition gilt für $(r,u), (r_1,u_1) \in (R \times R \setminus \{0\}, \sim)$:*

$$\frac{r}{u} = \frac{r_1}{u_1} \text{ genau dann, wenn } ru_1 = ur_1$$

Wir definieren die Addition und Multiplikation der Äquivalenzklassen folgendermaßen:

$$\frac{r}{u} + \frac{s}{v} = \frac{rv + su}{uv}$$

$$\frac{r}{u}\frac{s}{v} = \frac{rs}{uv}$$

$\mathrm{Quot}(R, +, \cdot)$ *ist ein Körper, wir nennen ihn den Quotientenkörper von R.*

Beweis:

Wir zeigen die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen. Sei $(r_1,u_1), (r_2,u_2), (s_1,v_1), (s_2,v_2) \in R \times R \setminus \{0\}$ und $\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2}$ und $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$. Nach Definition gilt $r_1u_2 = u_1r_2$ und $s_1v_2 = v_1s_2$.

Daher erhalten wir:

$$u_1v_1(r_2v_2+u_2s_2)=u_1v_1r_2v_2+u_1v_1u_2s_2=u_1r_2v_1v_2+u_1u_2v_1s_2=r_1u_2v_1v_2+u_1u_2s_1v_2=u_2v_2(r_1v_1+u_1s_1)$$

Es gilt also $\frac{r_2v_2+u_2s_2}{u_2v_2}=\frac{r_1v_1+u_1s_1}{u_1v_1}$. Somit ist die Addition wohldefiniert. Die Wohldefiniertheit der Multiplikation folgt analog. Denn für die oben definierten Äquivalenzklassen erhalten wir $u_2v_2(r_1s_1)=u_2v_2r_1s_1=r_1u_2s_1v_2=u_1r_2v_1s_2=u_1v_1(r_2s_2)$. Die Menge (Quot(R), $+$) ist eine abelsche Gruppe. Die Assoziativität und Kommutativität können leicht nachgerechnet werden. Das neutrale Element der Addition ist $0=\frac{0}{1}$, das negative Element der Addition ist $-\left(\frac{r}{u}\right)=\frac{-r}{u}$. Weiter ist (Quot(R), $\cdot$) eine abelsche Gruppe, wobei $\frac{1}{1}$ das neutrale Element und $\left(\frac{r}{u}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$ das inverse Element ist.
Das Distributivgesetz kann mithilfe der Bruchrechenregeln leicht gezeigt werden. Somit ist der Körper (Quot(R), $+$, $\cdot$) konstruiert. □

3.1.12 Bemerkung
Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

3.1.13 Beispiel
Es gilt Quot($\mathbb{Z}$) $=\mathbb{Q}$.

3.1.14 Beispiel
Ist D $\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\mathcal{O}(D)$ der in D holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt $M(D):=$Quot$(\mathcal{O}(D))=\{\frac{f}{g}:f,g\in\mathcal{O}(D),\ g\neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen. Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert.

3.1.15 Definition
Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* ist ein K-Vektorraum V auf dem zusätzlich eine Multiplikation $(v,w)\mapsto v\cdot w$ definiert ist und für den gilt:

(a) $(V,+,\cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.

(b) Für $v,w\in V$ und $\lambda\in K$ gilt $\lambda(vw)=(\lambda v)w=v(\lambda w)$

3.2 Angeordnete algebraische Strukturen

3.2.1 Anordnung

3.2.1 Definition
Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn es eine Relation " $\leq$ " auf A gibt die folgende Eigenschaften für alle $a,b,c\in A$ erfüllt.

T1: (Reflexivität) $a \leq a$,

T2: (Antisymmetrie) Aus $a \leq b$ und $b \ \leq a$ folgt $a = b$,

T3: (Transitivät) Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

Die Relation " $\leq$ " bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 die anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4: Für alle $a, b \in A$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$. Dabei gilt $a < b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$ ist.

3.2.2 Definition
Seien A und A' teilweise geordnete Mengen. Eine Abbildung $\phi\colon A \to A', a \mapsto a'$ wird *Ordnungshomomorphismus* von A nach A' genannt, falls folgende Anforderung erfüllt ist:

(a) (Ordnungstreue) Wenn $a \leq b$ gilt, so folgt $\phi(a) \leq \phi(b)$ für alle $a, b \in A$.

Gilt zusätzlich die folgende Aussage, so bezeichnen wir ϕ als *Ordnungsisomorphismus*

(b) (Bijektivität) Für jedes $a' \in A'$ existiert genau ein $a \in A$, mit $a' = \phi(a)$.

A und A' werden in diesem Fall *ordnungsisomorph*, kurz *o-isomorph* genannt.

3.2.3 Definition
Eine *teilweise geordnete Gruppe* bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,

G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation " $\leq$ ", wie in 3.2.1,

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: Für $a, b \in G$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $ca \leq cb$ und $ac \leq bc$ für alle $c \in G$.

3.2.4 Definition
Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

3.2.5 Beispiel
Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G ist bezüglich der selben Relation wie G angeordnet.

3.2.6 Beispiel
Wir betrachten die natürliche Ordnung auf den natürlichen, ganzen und reellen Zahlen.

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für $a, b \in \mathbb{N}$, dass

$$a \leq b \text{ genau dann gilt, wenn } b - a \in \mathbb{N}_0$$

für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$, dass

$$a \leq b \text{ ist, genau dann, wenn } b - a \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } a = b \text{ gilt.}$$

(c) Die Gruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$a \leq b \text{ ist, genau dann, wenn } 0 \leq b - a \text{ gilt.}$$

3.2.7 Bemerkung
Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus obiger Definition einer angeordneten Gruppe. Denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei, so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz G3 ergeben. □

3.2.8 Bemerkung
Wir nennen P den *Positivbereich* von G.

P1: $\{0\} \cup P \cup -P = G$, $P \cap -P = \varnothing$,

P2: $P \circ P \subseteq P$,

P3: $x + P + (-x) \subseteq P$ für jedes $x \in G$.

Genügt eine Teilmenge $P = \{x \in G | x \geq 1\}$ einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so nennt man $(G, \circ)$ *anordnungsfähig.*

3.2.9 Beispiel
Ist G mit dem Positivbereich P eine angeordnete Gruppe, so ist G auch mit dem Positivbereich $(-P)$ eine angeordnete Gruppe. Die Abbildung $a \mapsto -a$ ist ein Ordnungsisomorphismus.

3.2.2 Wohlordnung

Nun beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Wohlordnung. Diese wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. Wir definieren wohlgeordnete Mengen wie in [Fuc66, S. 16].

3.2.10 Definition

Eine angeordnete Menge W nennt man *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Es existiert also ein Element $u \in V$ mit $u \leq v$ für alle $v \in V$.

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Dieses Theorem, so stellte sich nach erfolglosen Widerlegungsversuchen zahlreicher Mathematiker heraus, ist äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Lemma von Zorn.
Beispielsweise ist die natürliche Anordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist mit der natürlichen Anordnung " $\leq$ " total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt sind und somit $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element enthält. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

3.2.11 Bemerkung

Ist $W \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat W ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element.

3.2.12 Bemerkung

Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet.

3.2.13 Beispiel

Betrachte folgende Relation " $\preceq$ " auf $\mathbb{Z}$:

$$a \preceq b \text{ genau dann, wenn } |a| \leq |b| \text{ oder } |a| = |b| \text{ und } a \leq b$$

ist. Die Relation " $\preceq$ " ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$ und wir erhalten $0 \preceq -1 \preceq 1 \preceq -2 \preceq 2 \preceq -3 \preceq 3 \ldots$.

Kapitel 4

Angeordnete abelsche Gruppen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die zur Betrachtung des Potenzreihenkörpers benötigt werden. Nach einer Einführung in die Theorie angeordneter abelscher Gruppen beschäftigen wir uns mit deren Wohlordnung, eine Eigenschaft, die für die Konstruktion des Potenzreihenkörpers unabdingbar ist. Mithilfe der Archimedizität führen wir eine spezielle Art der Anordnung von Gruppen ein. Die Familie der konvexen Untergruppen führt uns zu Aussagen über die Anordnungsfähigkeit von Gruppen. Daran schließt die zentrale Aussage des Kapitels an: der Satz von Hölder. Der Satz besagt, dass archimedisch angeordnete Gruppen in die additive Gruppe des $\mathbb{R}$ eingebettet werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen sind angelehnt an [Fuc66, S. 21 - 28] und [PC83, S. 1 - 4].

4.0.14 Definition
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist ein Tripel $(G, +, \leq)$, wobei $(G, +)$ eine additiv geschriebene abelsche Gruppe ist, die bezüglich " $\leq$ " total geordnet ist.

4.0.15 Notation
Wir verwenden im Hauptteil 5 für eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +, \leq)$ meist vereinfachend die Bezeichnung G.

4.0.16 Bemerkung
Ist eine abelsche Gruppe G mit dem Positivbereich P angeordnet, so definieren wir $a \leq b$ genau dann, wenn $b - a \in P$ ist für $a, b \in G$.

4.0.17 Beispiel

- Die Menge der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.
- Die Menge der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.

4.1 Wohlordnung in angeordneten abelschen Gruppen

Die folgenden Aussagen orientieren sich an der Arbeit „A residue theorem for Malcev–Neumann series“ von Guoce Xin.

4.1.1 Satz

Sei “ $\leq$ ” eine totale Ordnung auf der Menge W. Dann ist W genau dann wohlgeordnet, wenn es keine streng monoton fallende Folge in W gibt.

Beweis:

“ $\Rightarrow$ ” Sei W wohlgeordnet. Angenommen es gibt eine streng monoton fallende Folge von Elementen in W, nämlich $a_1 > a_2 > a_3 > ....$ Damit erhalten wir eine Teilmenge $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, die kein kleinstes Element besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Wohlordnung von W.
“ $\Leftarrow$ ” Es gibt keine streng monoton fallende Folge in W. Angenommen W ist nicht wohlgeordnet. Dann gibt es eine Teilmenge A von W, die kein kleinstes Element enthält. Für ein beliebiges Element $a_1 \in A$ finden wir ein $a_2 \in A$ mit $a_2 < a_1$. Dieses Verfahren lässt sich endlos fortsetzen und wir erhalten eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > a_3 > ...$, Widerspruch. □

4.1.2 Beispiel

Total geordnete endliche Mengen sind wohlgeordnet.

Betrachte nun die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen W_A einer total geordneten Menge A, die nicht zwangsläufig wohlgeordnet ist.

4.1.3 Lemma

Sei $w_n \in W_A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} w_n \in W_A$, und für $w_1, w_2 \in W_A$ gilt $w_1 \cup w_2 \in W_A$.

Beweis:

Die erste Aussage ist trivial. Zum Beweis der zweiten Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $w_1 \cup w_2$ sei nicht wohlgeordnet, dann gibt es nach 4.1.1 eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > ...$ in $w_1 \cup w_2$.
Betrachten wir alle Elemente der Teilmenge w_1. Wir können diese, da w_1 total geordnet ist, als Folge $a_{i_1} > a_{i_2}...$ schreiben. Aufgrund der Wohlordnung von w_1 ist die so erhaltene fallende Folge endlich. Die selbe Argumentation wählen wir für w_2 und erhalten die endliche fallende Folge $a_{j_1} > a_{j_2}....$ Aber jedes Element der streng monoton fallenden Folge $a_1 > a_2 > ...$ ist in einer der beiden endlichen Folgen enthalten. Widerspruch! □

Die Menge W_A ist somit unter endlicher Vereinigung und dem Schnitt abzählbar vieler Elemente abgeschlossen.

4.1.4 Lemma

Wir betrachten eine total geordnete Menge A. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A erfüllt mindestens eine der drei folgenden Eigenschaften:

(1) $a_1, a_2, ...$ *enthält eine streng monoton wachsende Teilfolge.*

(2) $a_1, a_2, ...$ *enthält eine konstante Teilfolge.*

(3) $a_1, a_2, ...$ *enthält eine streng monoton fallende Teilfolge.*

Beweis:

Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt weder die Bedingung (2) noch (3). Wir wollen zeigen, dass sie eine streng monoton wachsende Teilfolge enthält.
Da die Folge nach Voraussetzung keine streng monoton fallende Teilfolge enthält, gibt es ein kleinstes Element a_{i_1}. Andernfalls ließe sich eine streng monoton fallende Teilfolge konstruieren. Es werden alle Folgenglieder a_n mit $a_n = a_{i_1}$ aus $(a_n)_{n\geq 1}$entfernt. Die Folge bleibt unendlich, da es nur endlich viele Folgenelemente nach Voraussetzung gibt, die gleich a_{i_1} sind. In der daraus entstandenen Folge ist jedes Element größer als a_{i1}. Sie enthält wiederum keine streng monoton fallende oder konstante Teilfolge. In der so entstandenen Folge ist jedes enthaltene Element echt größer als a_{i1}.
Wir wiederholen das durchgeführte Verfahren und konstruieren so die streng monoton wachsende Teilfolge $a_{i1} < a_{i2} < ....$

□

Bernhard Hermann Neumann, ein deutsch-englisch-australischer Mathematiker, bewies in seinem Werk „On ordered division rings" [Neu, S. 206] die beiden folgenden wichtigen Lemmata, deren volle Bedeutung sich im Hauptteil 5.7 erschließen wird.

4.1.5 Lemma

Die Menge W ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W eine monoton steigende Teilfolge $w_{\tau(1)} \leq w_{\tau(2)} \leq ...$ enthält.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei die total geordnete Menge W wohlgeordnet. Dann gilt nach Lemma 4.1.4 und mit Satz 4.1.1, dass eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W entweder eine streng monoton steigende oder konstante Teilfolge enthält. Jede Folge aus W besitzt daher eine monoton steigende Teilfolge.
" $\Leftarrow$ " Jede Folge von Elementen aus W enthält eine monoton steigende Teilfolge. Angenommen W sei nicht wohlgeordnet. Nach Satz 4.1.1 existiert somit eine streng monoton fallende Folge in W. Nach Voraussetzung muss jede Folge eine monoton steigende Teilfolge enthalten. Dies führt zu einem Widerspruch, da eine streng monoton fallende Folge keine monoton steigende Teilfolge enthalten kann. □

Wir bezeichnen die Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten abelschen Gruppe G mit W_G.

4.1.6 Lemma (Lemma von B.H. Neumann)
Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe und $V, W \subseteq G$ wohlgeordnet, dann ist $U = V + W$ ebenso wohlgeordnet.

Beweis:

Sei

$$u_1 = v_1 + w_1,\ u_2 = v_2 + w_2\ ...,\text{ mit } v_r \in V, w_r \in W \text{ und } r \in \mathbb{N}$$

eine beliebige Folge von Elementen aus U. Es gibt eine monoton steigende Teilfolge $v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, ...$ mit $v_{\tau(1)} \leq v_{\tau(2)} \leq ...$ in der Menge V. Die entsprechende Folge in W, nämlich $w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, ...$ enthält ebenso eine monoton steigende Teilfolge $w_{\tau(\sigma(1))} \leq w_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Diese beiden Teilfolgen existieren aufgrund der Wohlordnung und nach Lemma 4.1.5. Daraus folgt, es gibt zu der beliebigen Folge von Elementen aus U ebenso eine monoton steigende Teilfolge $u_{\tau(\sigma(1))} \leq u_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Nach Lemma 4.1.5 ist U damit wohlgeordnet. □

4.1.7 Folgerung
Seien V, W wohlgeordnete Teilmengen einer angeordneten abelschen Gruppe G, dann gibt es für ein $g \in G$ nur endlich viele Paare $(v, w) \in V \times W$ mit $v + w = g$.

Beweis:

Angenommen es gäbe unendlich viele paarweise verschiedene $(v_n, w_n) \in V \times W$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass $g = v_n + w_n$. Da V und W wohlgeordnet sind, besitzt weder $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Teilfolge. Die Folge $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält keine konstante Teilfolge, da sie nach Voraussetzung paarweise verschiedene Glieder besitzt. Nach Satz 4.1.4 hat $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge. Widerspruch, da g konstant bleiben muss. □

4.2 Archimedisch angeordnete abelsche Gruppen

Erst seit dem Ende des 19. Jahrhunderts kristallisierte sich die hohe Bedeutung angeordneter Strukturen in der Mathematik heraus. Man erkannte, dass das archimedische Axiom unverzichtbar für die nähere Untersuchung dieses Bereichs war. Es spielte unter anderem eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der reellen Zahlen mithilfe des Dedekindschen Schnittes (1872). Genau genommen ermöglicht die archimedische Eigenschaft die Herstellung von Kommutativität und Vollständigkeit.
Wir orientieren uns an dem Kapitel „Angeordnete Gruppen“ in [Fuc66, S. 73 - 93], sowie an Arbeiten von Prieß-Crampe [PC70], [PC83].

Im Folgenden sei G eine angeordnete abelsche Gruppe.

4.2.1 Definition
Der *absolute Betrag* $|a|$ eines Elements a $\in G$ ist definiert als $|a| = \max\{a, -a\}$.

Es gilt die *Dreiecksungleichung* für alle $a, b \in G$:

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \text{ für alle } a, b \in G.$$

Die Ungleichung gilt trivialerweise wenn beide Elemente das gleiche Vorzeichen haben. Sei also $a < 0$ und $b > 0$. Dann ist $a = -|a|$.
Falls $|a| \leq b$ ist, erhalten wir

$$|a+b| = |-|a| + b| = b - |a| \leq b = |b| \leq |a| + |b|.$$

Falls $|a| > b$ ist, erhalten wir

$$|a+b| = |-|a| + b| = |a| - b \leq |a| \leq |a| + |b|.$$

4.2.2 Definition
G heißt *archimedisch*, wenn es für alle $a, b \in G$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

4.2.3 Definition
Seien $a, b \in G$. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n|a| < |b|.$$

In Zeichen schreiben wir $a \ll b$.

4.2.4 Definition
Die Elemente $a, b \in G$ werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, wenn natürliche Zahlen m und n existieren, so dass:

$$|a| < m|b| \text{ und } |b| < n|a|.$$

In diesem Fall schreiben wir $a \sim b$.

4.2.5 Folgerung
Für jedes Paar von Elementen $a, b \in G$ gilt genau eine der anschließenden Relationen:

(i) $a \ll b$ (ii) $a \sim b$ (iii) $b \ll a$,

Des Weiteren schließen wir aus Definition 4.2.3 und 4.2.4:

(i) Aus $a \ll b$ und $a \sim c$ folgt $c \ll b$;

(ii) Aus $a \ll b$ und $b \sim d$, folgt $a \ll d$;

(iii) Aus $a \ll b$ und $b \ll c$ folgt $a \ll c$;

(iv) Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$;

(v) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Sind alle Elemente von $G \setminus \{0\}$ archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet*.
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne $[g]$ die *archimedische Klasse* in der das Element $g \in G$ liegt, $[G]$ die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G.

4.3 Der Satz von Hölder

In diesem Abschnitt werden wir einen sehr wichtigen Satz der Theorie angeordneter Strukturen vorstellen, den *Satz von Hölder*. Dieser Satz besagt, dass jede archimedisch angeordnete Gruppe bis auf Isomorphie einer Untergruppe der angeordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen entspricht. Zwar wird der Beweis dieser Aussage in der verwendeten Literatur Otto Hölder (1901)[Hö01] zugeschrieben, die grundlegenden Ideen dazu lieferte jedoch bereits Bettazi in seinem Werk „Teoria delle grandezze“, 1890[Lü08, S. 578].
Wir orientieren uns hierbei an [Hö01] und [PC83].

4.3.1 Satz
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie zu einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist.

Beweis:

“ $\Leftarrow$ ” Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch angeordnet ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.
“ $\Rightarrow$ ” Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. G besitzt also einen Positivbereich P. Nach Voraussetzung erfüllt G die archimedische Eigenschaft. Sei $G \neq \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element der Addition in G ist. Andernfalls wäre G isomorph zu $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, der trivialen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Angenommen der Positivbereich P hat ein kleinstes Element. Es gibt also ein $g \in P$ mit

$0_G \leq g$ wobei für jedes $h \in G$, mit $0_G \leq h \leq g$, folgt, dass $h = 0_G$ gilt. Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem $h \in G$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass $ng \leq h \leq (n+1)\,g$ gilt. Daher erhalten wir $0 \leq h + (-n)\,g \leq (n+1)g - ng = g$. Also gilt, dass $h + (-n)\,g = 0$ ist. Infolgedessen ist $G = \langle g \rangle$, wobei $\langle g \rangle$ die von g erzeugte Untergruppe ist, o-isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen ist bezüglich der Zuordnung $ng \mapsto n$.
Im weiteren Beweis gehen wir davon aus, dass P kein kleinstes Element hat. Es lässt sich also zu jedem $g \in P$ ein $h \in G$ finden, sodass $0 < h < g$ gilt. Wir bezeichnen die Gruppe G dann als *dicht*.
Wir wählen ein Element $\alpha \in P$ beliebig. Für jedes $g \in P$ definieren wir:

$$S_g := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{>0} | m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \leq ng\} \subset \mathbb{Q}_{>0}.$$

Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $m\alpha \leq ng \Leftrightarrow mp\alpha \leq np\alpha$. Die Darstellung von $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen hängt also nicht damit zusammen, ob r in S_g enthalten ist.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es, einen Monomorphismus zu finden, der G auf die additive Gruppe der reellen Zahlen abbildet. Wir zeigen nun folgende Aussagen:

(i) Für alle $g \in P$ gilt $S_g \neq \varnothing$ und $S_g \neq \mathbb{Q}_{>0}$. Für $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $s \in S_g$ mit $r < s$ folgt $r \in S_g$.

(ii) S_g ist nach oben beschränkt für alle $g \in P$. Die Abbildung $\Phi : P \to \mathbb{R}^+, g \mapsto \sup\{S_g\}$ ist somit wohldefiniert.

(iii) Für alle $g, h \in P$ sind $g \leq h$, $S_g \subseteq S_h$ und $\Phi(g) \leq \Phi(h)$ äquivalent.

(iv) Sei $g, h \in P$ und $r, s \in \mathbb{Q}_{>0}$. Sei $r \in S_g$ und $s \in S_h$ so folgt $r + s \in S_{g+h}$.
Sei $r \notin S_g$ und $s \notin S_h$, so folgt $r + s \notin S_{g+h}$.

(v) Es gilt $\Phi\,(g+h) = \Phi\,(g) + \Phi\,(h)$ für alle $g, h \in P$.

(vi) Φ wird fortgesetzt auf die gesamte Gruppe G durch $\Phi\,(0_G) = 0$ und $\Phi\,(-g) = -\Phi\,(g)$ für alle g $\in P$.

Insgesamt ist Φ ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen und damit ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Zu (i): Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem Element $g \in P$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng > \alpha$. Nach Definition von S_g gilt $\frac{1}{n} \in S_g$ und somit ist S_g nicht leer.
Angenommen $S_g = \mathbb{Q}_{>0}$, dann wäre $n \in S_g$ beziehungsweise $n\alpha \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Seien $r, s \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Nach

Voraussetzung gilt $kn < lm$ und da $s \in S_g : m\alpha \leq ng$ und $kn\alpha \leq lm\alpha \leq lng$. Daraus wiederum folgt: $\frac{kn}{ln} = r \in S_g$.
Zu (ii): Angenommen S_g wäre unbeschränkt, dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in S_g$ mit n $<$ r. Nach (i) folgt daraus $n \in S_g$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n\alpha \leq g$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Zu (iii): Zunächst beweisen wir die erste Implikation. Sei $g, h \in P$ und es gelte $g \leq h$. Sei $r \in S_g$, $r := \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir $m\alpha \leq ng$. Da $g \leq h$ ist, folgt $m\alpha \leq nh$ und damit $r \in S_h$. Die zweite Implikation folgt nach Definition von Φ offensichtlich.
Sei $\Phi(g) \leq \Phi(h)$. Angenommen es sei $g > h$. Nach der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(g-h) > 2\alpha$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ möglichst klein mit $m\alpha > nh$. Dieses m existiert, aufgrund der Archimedizität von G. Es gilt $\frac{m}{n} \notin S_h$ und $\frac{m}{n} \geq \Phi(h)$. Da m minimal ist, gilt die Ungleichung $(m-1)\alpha \leq nh$ und wir erhalten $(m+1)\alpha \leq nh + 2\alpha < nh + n(g-h) = ng$ und $\frac{m+1}{n} \in S_g$, also $\frac{m+1}{n} \leq \sup(S_g) = \Phi(g)$. Insgesamt ergibt sich $\Phi(h) \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq \Phi(g)$, Widerspruch.
Zu (iv): Sei $r \in S_g, s \in S_h$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $k\alpha < lg$ und $m\alpha \leq nh$. Wir erhalten $kn\alpha \leq lng$ und $lm\alpha \leq lnh$. Somit liegt $r + s = \frac{kn+lm}{ln}$ in der Menge S_{g+h}. Die zweite Aussage folgt analog indem in Obigem " $\leq$ " durch " $>$ " ersetzt wird.
Zu (v): Als erstes zeigen wir, dass $\Phi(g)+\Phi(h)$ eine obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gibt ein $r \in S_{g+h}$ mit $r > \Phi(g)+\Phi(h)$. Wähle $\epsilon = r - \Phi(g) - \Phi(h)$ und wähle s, t $\in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $\Phi(g) < s < \Phi(g) + \frac{\epsilon}{2}$ und $\Phi(h) < t < \Phi(h) + \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt folgt $s + t < \Phi(g) + \Phi(h) + \epsilon = r$. Da $s \notin S_g$ und $t \notin S_h$ gilt $s + t \notin S_{g+h}$ nach (iv). Wir erhalten $s + t \geq \Phi(g+h) \geq r$ und der Widerspruch $r \leq s + t < r$ zeigt, dass ein derartiges r nicht existieren kann.
Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(g) + \Phi(h)$ die kleinste obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gäbe eine kleinere obere Schranke $o \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\epsilon = \Phi(g) + \Phi(h) - o$. Nach Definition der Abbildung gibt es ein $r \in S_g$ mit $r < \Phi(g) - \frac{\epsilon}{2}$ und $s \in S_h$ mit $s < \Phi(h) - \frac{\epsilon}{2}$. Nach (iv) ist $r + s$ in S_{g+h} und daher $r + s \leq o$. Widerspruch, da $r + s > \Phi(g) + \Phi(h) - \epsilon = o$.
Zu (vi): Falls $g, h > 0_G$ ist haben wir bereit gezeigt, dass aus $g \leq h$ folgt, dass $\Phi(g) \leq \Phi(h)$ ist. Die Aussage gilt offensichtlich, wenn eines der beiden Elemente g oder h gleich Null ist. Sei $g < 0_G$ und $h > 0_G$, dann folgt die Behauptung nach Definition. Die Behauptung bleibt für $g, h < 0_G$ zu zeigen. Wir erhalten

$$g \leq h \Leftrightarrow -g \geq -h \Leftrightarrow \Phi(-g) \geq \Phi(-h) \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h).$$

Wir zeigen nun $\Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für beliebige $g, h \in G$. Wir beginnen mit dem Fall $g, h < 0_G$. Hier kann auf das bereits Bewiesene zurückgegriffen werden:

$$\Phi(g+h) = -\Phi((-g)+(-h)) = (-\Phi(-g)) + (-\Phi(-h)) = \Phi(g) + \Phi(h).$$

Nun betrachten wir den Fall $g > 0_G$ und $h < 0_G$. Dann gilt entweder $g \geq -h$ oder $g < -h$. Wir beschäftigen uns zunächst mit $g \geq -h$. Dann ist $g + h \geq 0_G$, und nach der bereits gezeigten Aussage folgern wir:

$$\Phi(g+h) + \Phi(-h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) - \Phi(h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h).$$

Sei nun $g < -h$. Dann ist $-g - h > 0$, also $\Phi(g) + \Phi(-g-h) = \Phi(-h)$, was äquivalent zu $\Phi(g) - \Phi(g+h) = -\Phi(h)$ und zu $\Phi(g) + \Phi(h) = \Phi(g+h)$ ist.
Die Gültigkeit im Fall $g, h > 0$ folgt sofort aus der Definition von Φ. Da Φ nach (iii) ordnungserhaltend ist, ist Φ ein ordnungserhaltender Isomorphismus. $\square$

4.3.2 Satz
Sei $(G, +)$ eine Untergruppe der natürlich geordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen und $\phi : G \to \mathbb{R}$ ein injektiver o-Homomorphismus. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist ϕ ein injektiver o-Homomorphismus und damit sind mit $0 < g_1, g_2 \in G$ auch $\phi(g_1)$ und $\phi(g_2)$ positiv. Angenommen es gilt, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} \neq \frac{g_1}{g_2}$, so gibt es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, die zwischen $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)}$ und $\frac{g_1}{g_2}$ liegt. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} < \frac{m}{n} < \frac{g_1}{g_2}$ ist. Damit folgt, dass $n \cdot g_1 > m \cdot g_2$ und $\phi(n \cdot g_1) < \phi(m \cdot g_2)$ ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Ordnungstreue der Abbildung ϕ. Folglich ist $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} = \frac{g_1}{g_2}$. Wir erhalten somit auch für alle positiven Elemente $g \in G$, dass die Gleichung $\frac{\phi(g_1)}{g_1} = \frac{\phi(g)}{g}$ erfüllt ist.
Für die negativen Gruppenelemente $g \in G$, mit $g < 0$ und daher $-g > 0$ erhalten wir aufgrund der Homomorphismuseigenschaften $\frac{\phi(g)}{g} = \frac{(-)\cdot\phi(g)}{(-)\cdot g} = \frac{\phi(-g)}{-g} = \frac{\phi(g_1)}{g_1}$. Mit der positiven Konstanten $r = \frac{\Phi(g_1)}{g_1}$ ist die Aussage $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$ gezeigt. $\square$

Die Grundaussage dieses Satzes bewies Hion 1954 in seinem russischsprachigen Werk „Archimedisch geordnete Ringe“. Er setzte jedoch einen o-Homomorphismus zwischen zwei Untergruppen der additiven angeordneten Gruppe der reellen Zahlen voraus, ebenso wie Fuchs und Prieß-Crampe, die den Satz in ihre Arbeiten mitaufnahmen. Der Satz 4.3.2 impliziert weiterhin die o-Isomorphie zwischen der Gruppe der ordnungserhaltenden Automorphismen der archimedischen Gruppe und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen. [PC83]

4.4 Die angeordnete Menge konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten abelschen Gruppe. Wir benötigen einige Eigenschaften dieser Menge an speziellen Untergruppen für den Nachweis des Inversen im verallgemeinerten Potenzreihenkörper. Untergruppen geordneter Gruppen besitzen eine durch die Gruppenordnung induzierte Ordnung.

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe, U eine Untergruppe und $g \in G$. Wir untersuchen nun die bezüglich der Inklusion linear angeordnete Menge Σ konvexer Untergruppen von G. Wir orientieren unsere Ausführungen an [Fuc66, S. 81 - 83] und [PC83, S. 3].

4.4.1 Definition

Eine Untergruppe U von G nennen wir *konvex*, wenn aus $a \in U$ und $x \in G$, mit $0 < |x| < |a|$, folgt, dass $x \in U$ ist.

Σ bezeichne nun die *Menge konvexer Untergruppen* von G.

4.4.2 Definition

Sei $C, D \in \Sigma$. Wenn $D \subset C$ und Σ keine weitere Untergruppe zwischen C und D enthält, nennen wir das Paar $C,\ D$ *Sprung* in Σ und bezeichnen es mit $D \prec C$.

4.4.3 Lemma

Σ ist bezüglich Inklusion total geordnet.

Beweis:

Man sieht leicht, dass die Inklusion eine Ordnung auf Σ ist. Wir zeigen nun die Totalität dieser Ordnung. Angenommen es gäbe $C, D \in \Sigma$, sodass weder $C \subset D$ noch $D \subset C$ noch $C = D$ gilt. O.B.d.A existiert für alle $c \in C$ ein $d \in D$ mit $0 < |c| < |d|$ aufgrund der Anordnung von G. Wegen der Konvexität von D folgt, dass c in D liegt. Da dadurch C eine Teilmenge von D wäre, ist dies ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

4.4.4 Satz

Die Menge der konvexen Untergruppen Σ besitzt folgende Eigenschaften:

- *S1: Die Vereinigung und der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen aus Σ liegen wieder in Σ.*
- *S2: Sei $D \prec C$ in Σ, so ist C/D isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.*

Beweis:

Zu S1: Seien $C, D \in \Sigma$. Nach Lemma 4.4.3 ist Σ bezüglich Inklusion angeordnet. Sei o.B.d.A $D \subseteq C$. Der Schnitt $C \cap D$ entspricht daher D. Die Untergruppe D ist konvex nach Voraussetzung. Ebenso gilt $C \cup D = C$ und C ist auch eine konvexe Untergruppe nach Voraussetzung. Damit folgt unmittelbar, dass sowohl der Schnitt konvexer Untergruppen als auch die Vereinigung wieder angeordnet und konvex sind.
Zu S2: Nach dem Korrespondenzsatz [Fis08] entsprechen die Untergruppen von C/D bijektiv den Untergruppen von C, die D enthalten. Die Ordnung auf C/D ist die induzierte Ordnung.

Damit überträgt der Isomorphismus ebenfalls die Konvexitätseigenschaft. Angenommen die Faktorgruppe C/D enthält nicht nur die trivialen konvexen Untergruppen $0_{C/D}$ und C/D. Dann gibt es eine konvexe Untergruppe H in C/D mit $D \subset H \subset C/D$. Auf Grund des Isomorphismus gibt eine konvexe Untergruppe H' in G mit $D \subset H' \subset C$. Da C, D ein Sprung ist, gibt es aber zwischen C und D keine weiteren Untergruppen. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. D ist das neutrale Element der Faktorgruppe C/D.
Angenommen C/D wäre nicht archimedisch geordnet. Sei $0_G \neq g \in G$, dann gibt es ein Element $h \in C/D$ sodass, $ng < h$ ist für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Wie vorher gezeigt enthält C/D nur die trivialen konvexen Untergruppen. Also muss $g = 0_{C/D}$ sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und wir sehen, dass die Faktorgruppe archimedisch angeordnet ist. Der Satz von Hölder 4.3.1 liefert nun, dass C/D isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist. □

4.5 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +)$ und eine angeordnete Menge Θ mit 0 als kleinstem Element. Die Ausführungen sind orientiert an dem Kapitel „Archimedische Klassen, Bewertungen und Bedingungen für die Anordnungsfähigkeit von Gruppen“ in [PC83, S. 9 - 11].

4.5.1 Definition

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. Die surjektive Funktion $v \colon G \to \Theta$ wird als *Bewertung* bezeichnet, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

B1: $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in G$,

B2: $v(a) = -v(a)$ für alle $a \in G$,

B3: $v(a + b) \leq \max\{(v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in G$.

Die Gleichheit in der Bedingung [B3] gilt dann, wenn $v(a) \neq v(b)$ ist.
Zwei Bewertungen v, v' auf G mit den Wertemengen Θ, Θ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma \colon \Theta \to \Theta'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v$ ist.
Sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe. Wir bezeichnen die archimedische Klasse, in der das Element $a \in G$ liegt mit $[a]$. Die Gesamtheit der archimedischen Klassen von G nennen wir $[G]$. Die Abbildung $G \to [G], a \mapsto [a]$, ist eine Bewertung (dabei ist $[0]$ das kleinste Element) und wird als *natürliche Bewertung* bezeichnet.

4.5.2 Definition

Sei K ein Körper, $(G, +)$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\overline{G} = G \cup \{\infty\}$, mit $g < \infty$

für alle $g \in G$. Eine Abbildung $v\colon K \to \overline{G}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

B1': $v(a) = \infty$ genau dann, wenn $a = 0$ ist,

B2': $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K$,

B3': $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Man bezeichnet $v\colon K \to \overline{G}$ als *diskrete Bewertung*, falls $G = \mathbb{Z}$ ist.

4.5.3 Definition
Ist (K, v) ein bewerteter Körper, so ist $A = \{a \in K\colon v(a) \geq 0_G\}$ ein *Bewertungsring von v.*

4.5.4 Definition
Ein Unterring A eines Körpers K wird als *Bewertungsring* bezeichnet, wenn $a \in A$ oder $a^{-1} \in A$ für jedes $a \in K$ gilt.

4.5.5 Bemerkung
Ist (K, v) ein bewerteter Körper, dann ist der Bewertungsring von v ein Bewertungsring.

4.5.6 Definition
Ein Integritätsring R heißt *diskreter Bewertungsring*, falls es auf dem Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ von R eine Bewertung $v : \mathrm{Quot}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gibt, sodass R der Bewertungsring von v ist.

Eine weitere, äquivalente, Definition eines diskreten Bewertungsrings findet man in [Neu92, S. 126].

4.5.7 Bemerkung
Ein Integritätsring ist genau dann ein *diskreter Bewertungsring*, wenn er ein Hauptidealring mit einem einzigen maximalen Ideal ist.

Kapitel 5

Potenzreihenkörper

Die aus der Analysis bekannten Potenzreihen stellen ein bekanntes und wichtiges Werkzeug dar. In mathematischen Gebieten wie der Kombinatorik, Automaten- und Kontrolltheorie ermöglichen sie sowohl eine kompakte Darstellung von Summenformeln, als auch deren Auffindung. Potenzreihen können ebenso über den Weg der Algebra definiert werden anhand der Folge ihrer Koeffizienten. In der algebraische Sichtweise wird grundsätzlich auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet. Dadurch kann auf beliebigen Körpern und Ringen gearbeitet werden. Die sogenannten formalen Potenzreihen in einer Unbekannte z mit Exponenten in den natürlichen Zahlen, deren Koeffizienten in einem beliebigen Körper K liegen, bilden einen Ring $K[[z]]$. Aufbauend darauf stellen wir einen Zusammenhang zu den in der Funktionentheorie häufig verwendeten Laurentreihen her. Der Ring der formalen Potenzreihen ist ein Integritätsring. Daraus folgt, dass dieser in einen kleinsten Körper eingebettet werden kann. Dieser Quotientenkörper von $K[[z]]$ entspricht genau dem Körper $K((z))$, den die Laurentreihen formen.
Potenzreihen bilden somit algebraische Strukturen, deren Beschaffenheit von den Eigenschaften der Menge der Exponenten der Reihen abhängt. Daher stellt sich die Frage, ob die formalen Potenzreihen weiter verallgemeinert werden können und welche Voraussetzungen der Träger erfüllen muss, damit diese allgemeinen formalen Potenzreihen einen Körper ergeben.

5.1 Formale Potenzreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den formalen Potenzreihen mit Exponenten in den natürlichen Zahlen. Wir definieren die Verknüpfungen zwischen formalen Potenzreihen und zeigen, welche algebraischen Strukturen die Menge der formalen Potenzreihen bildet.

5.1.1 Definition

Eine *formale Potenzreihe* über dem Körper K ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to K$, $n \mapsto a_n$.

5.1.2 Bemerkung zur Notation

Wir werden formale Potenzreihen im Folgenden immer als Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^1 + a_2 z^2 + ... \tag{5.1}$$

schreiben mit $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Anstelle von $f(z)$ schreiben wir vereinfachend f, da wir die Unbestimmte immer mit z bezeichnen.

5.1.3 Beispiel

Wichtige Beispiele für formale Potenzreihen aus der Analysis sind Exponential-, Sinus- und Kosinusreihe:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + ... \\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - ... \\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - ...
\end{aligned}$$

5.1.4 Bemerkung

In formalen Potenzreihen müssen nicht alle Potenzen der Unbestimmten explizit auftreten. Die Koeffizienten der nicht auftretenden Potenzen sind 0 und die Potenzen werden deshalb weggelassen.

5.1.1 Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen

Wir bezeichnen die Menge der formalen Potenzreihen in z mit Exponenten in $\mathbb{N}_0$ über einem Körper K mit

$$K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}.$$

Wir nehmen folgende Rechenregeln für die Unbestimmte z an.

5.1.5 Lemma

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe und seien $g_1, g_2 \in G$, dann gilt:

(i) $z^{g_1} \cdot z^{g_2} = z^{g_1+g_2}$

(ii) $z^{0_G} = 1_K$

5.1.6 Definition

Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei formale Potenzreihen über K. Wir definieren ihre *Summe* $f+g$ folgendermaßen:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$$

Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen f, g erfolgt durch die sogenannte Faltung:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0\right) z_n \end{aligned}$$

5.1.2 Der Ring der formalen Potenzreihen

5.1.7 Satz

Die Menge $(K[[z]], +, \cdot)$ *ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.*

Beweis:

Wir weisen die Ringaxiome, wie in 3.1.5 definiert, nach.
Die Assoziativität und Kommutativität der Addition lassen sich leicht nachprüfen.
Das *neutrale Element der Addition* 0_K ist die Nullreihe $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $b_n = 0$ für alle n $\in \mathbb{N}_0$. Für $f = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n)z^n$ ist $-f = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)z^n$ das *Negative Element der Addition.*
$(K[[z]], +)$ ist daher eine abelsche Gruppe. Die Assoziativität der Multiplikation rechnen wir nach.
Seien $f, g, h \in K[[z]]$ mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ und $h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot h) &= f \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} b_j c_k\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+j+k=n} a_l b_j c_k\right) z^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) z^n\right) \cdot h \\ &= (f \cdot g) \cdot h. \end{aligned}$$

Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe 1_K. Darunter verstehen wir diejenige Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind. Die

Multiplikation ist kommutativ, denn die Addition und Multiplikation in dem Körper K sind kommutativ. Es gilt

$$\begin{aligned}
f \cdot (g+h) &= f \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j (b_k + c_k) \right) z^n \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k + \sum_{j+k=n} a_j c_k \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j b_k z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_j c_k z^n \\
&= f \cdot g + f \cdot h,
\end{aligned}$$

wobei $(*)$ aufgrund der Distributivität in K folgt. Somit gilt das Distributivgesetz.

□

Wir zeigen zunächst, dass zu einer formale Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann die inverse Potenzreihe existiert, wenn $a_0 \neq 0$.

5.1.8 Satz

Sei $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist eine formale Potenzreihe $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann eine Einheit, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Beweis:

„ $\Leftarrow$ " Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und es gelte $a_0 \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass es eine Potenzreihe $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ gibt, sodass

$$f \cdot g = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \overset{!}{=} 1$$

ist.

Der Beweis erfolgt durch Induktion.

Sei $n = 0$, dann ist $\sum_{n=0} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n = \sum\limits_{j+k=0} (a_j b_k) z^0 = a_0 b_0 1_K = a_0 b_0$. Für b_0 muss die Gleichung $a_0 b_0 = 1$ erfüllt sein. Da a_0 ungleich null ist, besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$.

Nach Induktionsvoraussetzung existieren alle $b_0, ..., b_{n-1}$ und sind bereits bestimmt. Damit zeigen wir die Induktionsbehauptung, dass b_n existiert und eindeutig definiert ist.

Für den n-ten Koeffizienten des Produkts ergibt sich $0 = a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$. Da a_0 ungleich 0 ist, existiert die Lösung für b_n. Sie ist eindeutig bestimmt durch

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j+k=n,\ j>0} a_jb_k.$$

Damit existiert ein eindeutiges Inverses zu f und f ist eine Einheit.
„ $\Rightarrow$ " Es gilt $\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_jz^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_kz^k\right) = 1$.
Nach Definition 3.1.7 folgt, dass die $\sum_{j+k=n} a_jb_k = 0$ sein muss für $n > 0$ und damit $a_0b_0 = 1$ gelten muss. Somit muss a_0 ungleich 0 sein. □

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind deren konstanter Term ungleich 0 ist. In diesem Fall können wir die inverse Potenzreihe konstruieren.

5.1.9 Korollar

Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ *und* $a_0 \neq 0$. *Die Koeffizienten der inversen Potenzreihe* $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_kz^k$ *sind rekursiv definiert durch*

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \textit{und} \qquad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j+k=n,\ j>0} a_jb_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

siehe Rückrichtung im Beweis 5.1.8.

□

5.1.10 Beispiel

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $0 \neq q \in \mathbb{R}$ beliebig und $f = \sum_{n=0}^{\infty} q^nz^n \in \mathbb{R}[[z]]$. Wir bestimmen die inverse Potenzreihe $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_nz^n$. Dazu wenden wir die Formel aus 5.1.9 an:

$b_0 = \frac{1}{a_0} = 1,$

$b_1 = -a_1b_0 = -q,$

$b_2 = -(a_1b_1 + a_2b_0) = -\left(-q^2 + q^2\right) = 0,$

...

$b_n = -(a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) = -\left(-q^{n-1}(-q) + q^n\right) = 0.$

für alle $n \geq 3$ folgt induktiv, dass ebenso $b_n = 0$ gilt. Die inverse Potenzreihe zu f ist $g := b_0 + b_1z = 1 - qz$.
Für $q = 1$ entspricht f der geometrischen Reihe. Diese konvergiert bekanntlich für $|z| < 1$ und es gilt $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

5.1.3 Eigenschaften des Potenzreihenrings

Wir beweisen zunächst, dass $K[[z]]$ ein Integritätsring und damit nullteilerfrei ist. Wir wissen also, dass der Ring $K[[z]]$ in einen kleinsten Körper, den Quotientenkörper, eingebettet werden kann. Anschließend betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Menge der konvergenten Potenzreihen im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

5.1.11 Satz
Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.
Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$f \cdot g \quad = \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 0.$$

Nach Definition der Multiplikation gilt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei nun o.B.d.A. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \neq 0$. Wir zeigen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gleich null ist. Es soll also kein Index n existieren, für den $b_n \neq 0$ ist. Wir beweisen mithilfe von Induktion, dass $b_n = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n = 0$ und sei j der erste Index, sodass $a_j \neq 0$ gilt. Man hat

$$\sum_{i+k=j} a_i b_k = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + ... + a_j b_0 = a_j b_0 \overset{\text{Vor.}}{=} 0.$$

Da $a_j \neq 0$ ist, muss $b_0 = 0$ gelten.
Angenommen die Behauptung gilt für alle Indizes $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq n-1$. Dann gilt $b_0, ..., b_{n-1} = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i+k=j+n} a_i b_k \quad &= \quad a_0 b_{j+n} + a_1 b_{j+(n-1)} + ... + a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + ... + a_{j+n} b_0 \\ &= \quad a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + ... + a_{j+n} b_0 = a_j b_n \overset{\text{Vor.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Da $a_j \neq 0$ ist folgt $b_n = 0$. $\square$

Nun werden konvergente Potenzreihen über dem Körper $\mathbb{C}$ betrachtet.

5.1.12 Definition
Eine Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ heißt *konvergent*, wenn es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$ gibt, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ als Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Das heißt, die Folge $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k {z_0}^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen ist konvergent, und man schreibt für den Limes $s = \lim_{n\to\infty} s_n$:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \tag{5.2}$$

Auf der Menge D der Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ konvergiert, wird somit eine Abbildung $z_0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ definiert. Wir nennen D den *Konvergenzbereich*. Wir bezeichnen die größte Zahl $r \in \mathbb{R}_{geq0} \cup \infty$, für welche die Potenzreihe für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < r$ konvergiert, als *Konvergenzradius*. Mit $D(0,r)$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte in der offenen Kugel um 0 mit Radius r, für die die Potenzreihe konvergiert.

5.1.13 Bemerkung
Sei $\mathbb{C}\{z\}$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{C}\{z\}$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[z]]$.

Beweis:

Es reicht für $\mathbb{C}\{z\}$ zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.
Betrachte zwei konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2. Innerhalb des Radius $\min\{r_1, r_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen und somit auch die Summe der beiden Potenzreihen. Das Produkt konvergiert innerhalb des Radius r mit $r \geq \min\{r_1, r_2\}$, denn beide Reihen konvergieren absolut. Das Cauchyprodukt existiert, da die Menge der konvergenten Potenzreihen eine Teilmenge des Rings der formalen Potenzreihen ist, auf dem das Cauchyprodukt eindeutig definiert ist. Nach dem großen Umordnungssatz konvergiert auch das Cauchyprodukt mit Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$. □

Im nächsten Teil können wir zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht. Auf diesen werden wir später näher eingehen.

5.2 Formale Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen. Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit wird jedoch auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet und nur formale Laurentreihen, also Laurentreihen in einer Unbestimmten z behandelt. Wir orientieren uns dabei an [Lü08, S. 563 - 572].

5.2.1 Definition
Eine *formale Laurentreihe* über dem Körper K ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto a_n$, wobei ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $f(n) = 0$ ist für alle $n < k$.

5.2.2 Notation
Wir werden Laurentreihen im Folgenden meist als Reihe der Form

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, n \geq k \text{ und } a_n \in K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

schreiben. Dabei bezeichnet $\sum_{n=k}^{-1} a_n z^n$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

5.2.3 Definition
Der *Träger* einer Laurentreihe $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \in K((z))$ ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}.$$

5.2.4 Bemerkung
Unter einem Träger einer Laurentreihe versteht man den Definitionsbereich der Funktion, die durch die Laurentreihe dargestellt wird.

5.2.1 Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen

Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da andernfalls die Multiplikation nicht definiert werden kann. Wir bezeichnen die Menge der formalen Laurentreihen in z auf $\mathbb{Z}$ über K mit

$$K((z)) = \{\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K, k \in \mathbb{Z}\}$$

Die Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen erfolgt analog zur Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen.

5.2.5 Definition
Zwei Laurentreihen $f, g \in K((z))$, mit $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n$, werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert:

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=min(-k,-m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n. \tag{5.3}$$

Die Multiplikation erfolgt durch Faltung der Laurentreihen.

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-m-k}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j)\, z^n. \tag{5.4}$$

5.2.6 Bemerkung

Die Multiplikation formaler Laurentreihen ist unter der Bedingung wohldefiniert, dass formale Laurentreihen höchstens endliche viele Terme mit negativen Exponenten besitzen.
Diese Forderung ist unverzichtbar, denn andernfalls wäre die Summe $\sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j)$ in 5.4 unendlich und das Produkt somit nicht bestimmbar.

5.2.7 Satz

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe. Dann ist der Träger der Laurentreihe ist wohlgeordnet.

Beweis:

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe. Es gilt $\mathrm{supp}(f)$ ist eine Teilmenge der ganzen Zahlen. Nach Definition einer formalen Laurentreihe ist $\mathrm{supp}(f)$ nach unten beschränkt. Daraus folgt mithilfe von 3.2.11 die Behauptung. □

5.2.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Menge der formalen Laurentreihen $K((z))$ und weisen deren Körperstruktur nach. Auf diesen Ergebnissen aufbauend stellen wir die Verbindung zwischen dem Körper der Laurentreihen und dem zuvor behandelten Ring der formalen Potenzreihen her. Bezugnehmend auf 5.1.13 betrachten wir aus Gründen der Vollständigkeit die Menge der konvergenten Laurentreihen.
Abschließend konstruieren wir mithilfe der Wohlordnung des Trägers eine Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen und stellen den bewertungstheoretischen Zusammenhang zu dem Ring der formalen Potenzreihen her.

5.2.8 Satz

Die Menge $(K((z)), +\cdot)$ ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.

Beweis:

Es genügt das Nachrechnen der Ringaxiome. Das neutrale Element der Addition ist die Nullreihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_n = 0$ für alle $n \geq k$. Das neutrale Element der Multiplikation ist die Einsreihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_0 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $0 \neq n \geq k$. Der Beweis der verbleibenden Bedingungen verläuft ähnlich zu 5.1.7. □

5.2.9 Satz
$(K((z)),+\cdot)$ ist mit der definierten Addition und Multiplikation ein Körper.

Beweis:

Sei $0 \neq f \in K((z))$ und $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$, mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$. Wir wissen bereits $K((z))$ ist ein kommutativer Ring. Wir definieren das Inverse $g \in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so entstandene Laurentreihe invers zu f ist. Die Konstruktion von g läuft ähnlich zur Konstruktion der inversen Potenzreihe in Satz 5.1.9.
Setze $g = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_n = 0_K$ für alle $n < -m$ und $b_{-m} = \frac{1}{a_m}$. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $b_{-m}, ..., b_{-m+l-1}$ bereits definiert. Wir wählen

$$b_{-m+l} = -\frac{1}{a_m} \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n}.$$

Nach Definition der Multiplikation in $K((z))$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} b_l a_l &= \sum_{n=m-m}^{\infty} \sum_{k+j=n} (a_k \cdot b_j)\, z^n \\ &= \sum_{n=-m}^{-m+l} b_n a_{l-n}. \end{aligned}$$

Für $l = 0$ folgt $b_0 a_0 = b_{-m} a_m = 1$. Es bleibt der Fall $l > 0$ zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} b_l a_l &= \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n} + b_{-m+l} a_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $gf = 1_K$ und da $K((z))$, wie bereits gezeigt, ein kommutativer Ring ist, folgt $fg = 1_K$. Wir können zu jedem Element $f \neq 0$ aus $K((z))$ folglich ein Inverses konstruieren, womit $K((z))$ ein Körper ist. $\square$

Mithilfe von 3.1.11 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

5.2.10 Satz
Es gilt $K((z)) = \mathrm{Quot}(K[[z]])$.

Beweis:

Nach Konstruktion von $K((z))$ ist klar, dass $K[[z]] \subseteq K((z))$. Betrachte die Abbildung:

$$\Phi : K((z)) \to \ \mathrm{Quot}\,(K[[z]])$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} & \text{, falls } m < 0 \\ \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{1} & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert. Denn ist $m \geq 0$, so entspricht der Hauptteil der Laurentreihe der Nullreihe und die Reihe liegt somit in $K[[z]]$. Für den Fall $m \leq 0$ existiert ein eindeutiges $g \in K[[z]] \subseteq \mathrm{Quot}K[[z]]$ und wir können $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = z^{-m} g$ schreiben.
Wir weisen nach, dass Φ ein Körperisomorphismus ist. Damit wir die Fallunterscheidung nach unserer Definition der Abbildung Φ nicht explizit durchführen müssen, setzen wir $z^{-k} = 1$ in beiden Äquivalenzklassen von 5.5 falls $k \geq 0$ ist. Durch diese Vereinfachung müssen wir den unteren Fall in 5.5 nicht gesondert formulieren. Sei $m \leq l$:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)\right) &= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}(a_n + b_n) z^n}{z^{-m}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} + \frac{z^{-m}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}{z^{-m}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} + \frac{z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}{z^{-l}} \\
&= \Phi\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) + \Phi\left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)
\end{aligned}$$

Damit ist Φ bezüglich der Addition ein Homomorphismus. Nun betrachten wir die Multiplikation. Aufgrund der oben getroffenen Vereinfachung gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)\right) &= \frac{z^{-m-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)}{z^{-m-l}} \\
&= \frac{\left(z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)}{z^{-m}z^{-l}} \\
&= \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} \cdot \frac{z^{-l}\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n}{z^{-l}} \\
&= \Phi\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \Phi\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right)
\end{aligned}$$

Der Kern der Abbildung besteht aus dem Element 0_K und da Φ ein Homomorphismus ist, erhalten wir die Injektivität.
Wir zeigen, dass der Homomorphismus auch surjektiv ist. Sei $m, l \geq 0$ und $q = \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n} \in \mathrm{Quot}(K[[z]])$ mit $\sum_{n=l} b_n z^n \neq 0$.
Die Reihe $\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n$ kann deswegen in die Gestalt $z^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_0 \neq 0$ gebracht werden.

Nach Satz 5.1.8 kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ invertiert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} q &= \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n} \\ &= \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n} \\ &= \frac{\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{-1}}{z^l} \\ &= \Phi\left(z^{-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen sofort, dass $(z^{-l}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{-1} \in K((z))$ ist. Der Homomorphismus ist folglich bijektiv und die Behauptung ist gezeigt. □

Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung von K um das transzendente Element z dar. Im Folgenden beschränken wir uns, aufgrund der Konvergenzbetrachtung, erneut auf den Körper $\mathbb{C}$.

5.2.11 Definition

Eine Laurentreihe $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn deren Haupt- und Nebenteil in z_0 konvergieren.

5.2.12 Bemerkung

Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ und $R \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ für alle z mit $r \leq |z| \leq R$.

5.2.13 Satz

Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\{z\}$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\{z\}$.

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

Zwischenbehauptung: In $\mathbb{C}\{z\}$ sind genau die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ invertierbar, für die $a_0 \neq 0$ gilt.

Beweis:

Zunächst konstruieren wir formal das Inverse, wie wir es in Satz 5.1.9 bereits durchgeführt haben. Es bleibt zu zeigen, dass diese inverse Potenzreihe konvergiert. Sei eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben. Wir können ohne Beschränkung der

Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, also $|a_n| \leq a$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, denn:
Nach Definition der Konvergenz formaler Potenzreihen gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$, sodass die Reihe $f = \sum a_n {z_0}^n$ konvergiert.
Die Folge $(|a_n||{z_0}^n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist somit eine Nullfolge und daher beschränkt. Nach dem Lemma von Abel [Ebe13, S. 46]konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ für $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < |z_0|$ auf $D\,(0, |z_0|)$. Wähle $q = \frac{\zeta}{z_0}$. Wir erhalten, dass

$$\overline{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = f$$

konvergent ist. Aus dieser Gleichheit folgt, dass wir die Beschränktheit der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ annehmen können. Nun bestimmen wir das Inverse ähnlich wie in 5.1.9 und zeigen, dass die Koeffizientenfolge wieder beschränkt ist, woraus die Konvergenz der inversen Potenzreihe folgt. Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ größer 1 ist und es sei ohne Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Inversen wie wir sie in Satz 5.1.9 konstruiert haben. Es gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Wir zeigen, dass $|b_n|$ durch ein Vielfaches von a^n beschränkt ist. Ist dies gezeigt, können wir eine positive untere Schranke des Konvergenzradius angeben. Wir wählen $C \in R$ mit $1 < C > \frac{a}{a-1}$. Mithilfe von Induktion beweisen wir, dass

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

ist. Die Ungleichung ist für b_0 nach Konstruktion des Inversen 5.1.9 erfüllt.
Die Abschätzung gelte für b_n. Als Abschätzung für den Koeffizienten b_{n+1} erhalten wir, dass

$$|b_{n+1}| = |-\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq a \sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq a\ C^n \ \sum_{k=1}^{n+1} a^k$$
$$\leq a\ C^n\ \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (a\ C)^{n+1}$$

gilt. □

Wie in Satz 5.2.10 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Des weiteren bleibt zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist. Dies wurde bereits in 5.1.13 für formale Potenzreihen gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Laurentreihen f, g ist ebenso konvergent. Um dies zu zeigen reicht es den Nebenteil zu betrachten. Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multipliziere man diese so mit den Potenzen von z, dass man eine konvergente Potenzreihe erhält und geht wie in 5.1.13 vor. Nun definieren wir wie in 5.2.10 die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}_L\{z\} \to \mathrm{Quot}(\mathbb{C}\{z\})$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} \frac{z^{-m}\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{z^{-m}} & \text{, falls } m < 0 \\ \frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n}{1} & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Der Satz 5.2.10 liefert die Isomorphie der Abbildung Φ. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Nun versuchen wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 5.2.3 der Laurentreihe $\mathrm{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$.

5.2.14 Satz

Die Abbildung $v\colon K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $v(f) = \min(\mathrm{supp}(f))$ ist eine diskrete Bewertung, wobei wir $v(\varnothing) = \infty$ setzen.

Beweis:

Klar: Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt und damit das Bild $v(f) = \min(\mathrm{supp}(f))$ ist. Nach Definition 4.5.2 sind für den Körper $K((z))$ und die angeordnete abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ noch B1'-B3' nachzuweisen.

zu B1' : Klar nach Definition.

zu B2' : Sei $f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$, mit $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Dann ist $v(f) = n_0$ und $v(g) = m_0$. Damit gilt, dass $v(f) + v(g) = n_0 + m_0$ entspricht.
Wir wollen zeigen, dass das Bild von fg unter der Abbildung

$$v(fg) = v(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m+k=n} a_m b_k z^n) \stackrel{!}{=} v(f) + v(g),$$

ist, wobei $a_m = 0$ für $m < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$ gilt. Wir betrachten $n < n_0 + m_0$. Nach Voraussetzung folgt entweder $a_m = 0$, oder $b_k = 0$ und somit ist auch das Produkt $a_m b_k = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Sei $n = n_0 + m_0$. Das Produkt $a_{n_0} b_{m_0}$ ist ungleich Null und daher erhalten wir, dass $v(fg) = n_0 + m_0 = v(f) + v(g)$ ist.

zu B3' : Wenn f, g wie oben definiert sind, erhalten wir für $v(f+g)$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} v\,(f+g) &= v\left(\sum_{n=\min\{n_0,m_0\}}^{\infty}(a_n+b_n)z^n\right) \\ &\geq \min\{n_0, m_0\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \min\{v(f), v(g)\} \end{aligned}$$

□

Wie wir in 5.2.10 gezeigt haben, ist der Körper der Laurentreihen eine Obermenge des Rings der Potenzreihen $K[[z]]$. Nachdem wir auf $K((z))$ bereits eine Bewertung definiert haben, weisen wir nach, dass es sich auch bei $K[[z]]$ um einen diskreten Bewertungsring 5.2.15 handelt.

5.2.15 Satz
$K[[z]]$ *ist ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis:

Der Ring der formalen Potenzreihen $K[[z]]$ ist der Bewertungsring der Bewertung $v\colon K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Denn nach Definition des Bewertungsrings besteht dieser aus den Elementen des Körpers K deren Bewertung größer gleich dem Nullelement der Gruppe ist. Die Elemente in $K((z))$ mit $v(a) \geq 0_{\mathbb{Z}}$ sind genau die Elemente aus $K[[z]] \subseteq K((z))$. Da $K((z)) = \mathrm{Quot}(K[[z]])$ ist, gilt die Behauptung.

□

5.3 Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper

Die Grundlagen zur Konstruktion eines Körpers über sehr allgemein definierten formalen Potenzreihen untersuchte Hahn 1907 in seiner Arbeit „Über nichtarchimedische Größensysteme“. Hahn formulierte als einer der ersten Mathematiker Potenzreihen mit verallgemeinerten Exponenten aus einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, wie beispielsweise:

$$f = 1 + z^{\log 2} + z^{\log 3} + z^{\log 4} + \ldots$$
$$g = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}z^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{8}z^{\frac{7}{8}} + \ldots + z + \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + \ldots + 2z^2 + \ldots$$

Die einzige, unverzichtbare Bedingung, die Hahn an diese verallgemeinerten Potenzreihen stellte, war die Wohlordnung des Trägers der verallgemeinerten Potenzreihe. Im Laufe des Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes konnte er zeigen, dass die nach ihm benannten Potenzreihen nicht nur eine Gruppe, wie ursprünglich angenommen, bilden, sondern einen Körper.
Während seiner Beschäftigung mit Hilberts siebzehntem Problem untersuchte er die Hahnschen

Potenzreihen hinsichtlich ihrer Körpereigenschaften. Neben Hahn beschäftigten sich auch die beiden Mathematiker Neumann und Mal'cev mit den von Hahn konstruierten Reihen und deren Einbettung in einen Körper.
Wir fokussieren unsere Betrachtungen auf verallgemeinerte Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen und die algebraischen Strukturen, die wir auf ihnen definieren können.

5.3.1 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen

Wir haben bisher ausschließlich formale Reihen betrachtet, deren Exponenten Elemente einer wohlgeordneten Teilmenge der ganzen Zahlen waren. In Satz 5.2.7 haben wir gezeigt, dass die Wohldefiniertheit der Multiplikation mit der Wohlordnung des Trägers der Laurentreihe zusammenhängt.
Im Folgenden betrachten wir nicht mehr nur Teilmengen der ganzen Zahlen, sondern die bereits in dem vorherigen Kapitel 4 vorgestellten angeordneten abelschen Gruppen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass Potenzreihen mit Exponenten in einer angeordneten abelschen Gruppen, unter der Voraussetzung der Wohlordnung des Trägers, addiert und multipliziert werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66, S. 194 - 199], [Hah, S. 601 - 655] und [PC83, S. 49 - 64].

Wir bezeichnen im Folgenden mit K einen Körper und mit G eine angeordnete abelsche Gruppe in additiver Schreibweise.

5.3.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe über K mit Exponenten in G* ist eine Abbildung $f\colon G \to K, g \mapsto a_g$, wobei $\operatorname{supp}(f) = f^{-1}(K^*)$ wohlgeordnet ist.

5.3.2 Definition
Der *Träger* einer formalen Potenzreihe f mit Exponenten in G über K ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{supp}(f) = \{g \in G |\ a_g \neq 0\}$$

Wir stellen die in 5.3.1 definierte formale Potenzreihe im Folgenden meist nicht mehr in Funktionsschreibweise, sondern als Reihe dar. Aus diesem Grund präsentieren wir diese gebräuchlichere Definition einer formalen Potenzreihe.

5.3.3 Definition
Die Reihe

$$\sum_{g\in G} a_g z^g, \text{ mit } a_g \in K, \text{ deren Träger } \operatorname{supp}(f) \text{ wohlgeordnet ist,}$$

wird als *formale Potenzreihe mit Exponenten in einer angeordneten abelschen Gruppe* bezeichnet.

5.3.4 Notation
Wenn wir ab jetzt von formalen Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen über einem Körper sprechen, bezeichnen wir diese vereinfachend als *formale Potenzreihen.*

Wir bezeichnen die Menge aller formalen Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe G über dem Körper K mit

$$K\left(\left(z^G\right)\right) = \{f := \sum_{g\in G} a_g z^g |\ a_g \in K,\ \text{supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet}\}$$

5.3.2 Addition und Multiplikation in $K((z^G))$

In diesem Abschnitt definieren wir die Verknüpfungen auf $K((z^G))$. Wir gehen dabei ähnlich wie in Teil 5.2.1 vor. Wir müssen berücksichtigen, dass die Verknüpfungen nur dann wohldefiniert sind, wenn die Wohlordnung des Trägers erhalten bleibt.

5.3.5 Definition
Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, mit $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$ und $h = \sum_{g\in G} b_g z^g$.
Die Summe zweier formaler Potenzreihen f, g ist definiert durch die Addition der Koeffizientenfolgen:

$$f + h \quad = \quad \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} b_g z^g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, z^g$$

5.3.6 Satz
Die in 5.3.5 definierte Addition zweier formaler Potenzreihen $f, g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist wohldefiniert und die Summe $f + h$ ist wieder eine formale Potenzreihe.

Beweis:

Wir zeigen, dass der Träger der Summe $f + h$ wohlgeordnet ist. Es gilt offensichtlich $\text{supp}(f + h) \subseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(h)$. Nach Lemma 4.1.3 ist die Vereinigung zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet. Die Definition der Wohlordnung besagt, dass jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wiederum wohlgeordnet ist.
Nach Voraussetzung sind $\text{supp}(f) = \{g \in G | a_g \neq 0\}$ und $\text{supp}(h) = \{g \in G | b_g \neq 0\}$ wohlgeordnet. Daraus folgt die Behauptung. □

5.3.7 Definition
Sei $\lambda \in K$ und $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der formalen Potenzreihe f mit dem Körperelement

λ ist definiert durch:

$$\lambda f = \lambda \left(\sum_{g \in G} a_g z^g \right) = \sum_{g \in G} \lambda a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$$

Bevor wir die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen definieren können, benötigen wir etwas Vorarbeit.
Sei $f,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Wir betrachten zunächst die multiplikative Verknüpfung einzelner Monome.

5.3.8 Definition
Seien $a_{g_1} z^{g_1}, b_{g_2} z^{g_2} \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der Monome ist nach den Potenzgesetzen definiert als

$$a_{g_1} z^{g_1} \cdot b_{g_2} z^{g_2} = a_{g_1} b_{g_2} z^{g_1 + g_2}$$

5.3.9 Bemerkung
Wir haben die obige Definition der Multiplikation zweier Monome bereits, ohne explizite Nennung, für die Definition der Multiplikation formaler Laurentreihen und Potenzreihen verwendet.

Die distributive Fortsetzung der Multiplikation von Monomen führt zur Definition der Multiplikation in $K\left(\left(z^G\right)\right)$. Wir erhalten das Produkt als Summe über der Summe des Produkts der einzelnen Koeffizienten.

5.3.10 Definition
Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen f, h erfolgt durch Faltung:

$$\begin{aligned} \cdot : f \cdot h &= \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1} \cdot \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2} \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{g_1 + g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} z^g. \end{aligned}$$

5.3.11 Satz
Die oben definierte Multiplikation zweier formaler Potenzreihen $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist wohldefiniert. Das Produkt fh ist ebenso eine formale Potenzreihe in $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wir untergliedern den Beweis und zeigen zunächst, dass für alle $g \in G$ die Summe $\sum_{g_1 + g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2}$ existiert und endlich ist. Die Summe existiert, wenn die Träger $\operatorname{supp}(f)$ und $\operatorname{supp}(h)$ nicht leer

sind. Andernfalls erhalten wir die leere Summe. Der Träger der Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}$ kann reduziert werden auf die Elemente $g = g_1+g_2$ für die gilt, dass $g_1 \in \operatorname{supp}(f)$ und $g_2 \in \operatorname{supp}(h)$ ist. Andernfalls wäre a_{g_1} oder b_{g_2} gleich null und das Produkt somit ebenso null. Da G eine angeordnete abelsche Gruppe ist und $g_1, g_2 \in G$ sind, ist aufgrund der Abgeschlossenheit der Addition $g = g_1 + g_2 \in G$. Die Existenz der Summe ist nachgewiesen. Die Summanden der Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}$ sind ungleich null für alle $g_1 \in \operatorname{supp}(f)$ und $g_2 \in \operatorname{supp}(h)$.
Die Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}$ ist endlich, wenn es nur endlich viele Darstellungen für $g \in G$ in der Form $g = g_1 + g_2$ gibt, wobei $g_1 \in \operatorname{supp}\ (f)$ und $g_2 \in \operatorname{supp}(h)$. Nach Voraussetzung sind sowohl $\operatorname{supp}(f)$ als auch $\operatorname{supp}(h)$ wohlgeordnet. Die Gruppe G ist angeordnet abelsch und wir können die Folgerung aus dem Lemma von Neumann 4.1.7 anwenden. Die Aussage ist somit bewiesen.
Nun bleibt zu zeigen, dass der Träger des Produkts $\operatorname{supp}(fh)$ wohlgeordnet ist. Nach obiger Argumentation ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{supp}(fh)$ in der Summe der Träger, $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(h)$, enthalten ist.
Nach Voraussetzung sind $\operatorname{supp}(f)$ und $\operatorname{supp}(h)$ wohlgeordnet. Die Summe $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(h)$ ist nach dem Lemma von Neumann 4.1.6 wohlgeordnet. Jede angeordnete Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet laut der Definition einer Wohlordnung. Die Mengen $\operatorname{supp}(f)$, $\operatorname{supp}(h)$ sind als Teilmengen der angeordneten Gruppe G angeordnet. Die Summe $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(h)$ ist aufgrund der Abgeschlossenheit der Addition in G ebenso eine angeordnete Teilmenge von G. Daher gilt, dass $\operatorname{supp}(fh)$, als angeordnete Teilmenge einer wohlgeordneten Menge (siehe Bemerkung 3.2.12), wohlgeordnet ist.
Somit ist die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ wohldefiniert und das Produkt fh liegt in $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

□

Insgesamt erhalten wir, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation abgeschlossen ist. [Hah, Seite 601ff], [Neu, S. 210- 213].

5.3.12 Beispiel
Bei der Reihe $F := z^{\frac{-1}{p}} + z^{\frac{-1}{p^2}} + z^{\frac{-1}{p^3}} ...$, mit $p \neq 0$ handelt es sich um eine formale Potenzreihe über einem beliebigen Körper, da der Träger $\{\frac{-1}{p}, \frac{-1}{p^2}, \frac{-1}{p^3}, ...\}$ wohlgeordnet ist.

5.3.3 Der verallgemeinerte Ring der formalen Potenzreihen

Wir haben bisher die Addition und Multiplikation auf $K\left(\left(z^G\right)\right)$ definiert. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein kommutativer Ring über K ist.
In der verwendeten Literatur ([PC83], [Fuc66]) findet sich die multiplikative Schreibweise der angeordneten Gruppe G. Die multiplikative Schreibweise ermöglicht eine noch allgemeinere Definition der Multiplikation zum Beispiel mithilfe von Faktorsystemen. Auf Basis dieser Definition konnte B.H. Neumann 1949 Schiefkörper von formalen Potenzreihen konstruieren.

Im Fall einer additiv geschriebenen angeordneten abelschen Gruppe erhalten wir den direkten Bezug zu dem beschriebenen Laurentreihenkörper und dem darin eingebetteten Potenzreihenring. Dieser entsteht, wenn es sich bei der angeordneten abelschen Gruppe um $\mathbb{Z}$ handelt.

5.3.13 Satz
$K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist ein kommutativer Ring über K.

Beweis:

Seien im Folgenden f, h, k $\in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit

$$f = \sum_{g\in G} a_g z^g, \qquad h = \sum_{g\in G} b_g z^g, \qquad k = \sum_{g\in G} c_g z^g.$$

Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.

- *Assoziativität:* Für alle $f, h, k \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ gilt nach Definition der Addition:

$$\begin{aligned} f + (h + k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \left(\sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g\right) \\ &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} \left(b_g + c_g\right) z^g \\ &= \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g + c_g\right) z^g \\ &= \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g\right) z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g \\ &= (f + h) + k. \end{aligned}$$

- *Neutrales Element der Addition:* Bezeichne 0_K das neutrale Element der Addition $0_K = \sum_{g\in G} a_g z^g$, wobei ähnlich wie in 5.1.1 gilt $a_g = 0$ für alle $g \in G$. Der Träger von 0_K ist die leere Menge, welche nach Definition wohlgeordnet ist.

- *Negatives Element der Addition:* Zu jedem Gruppenelement f gibt es ein negatives Element der Addition $-f = \sum_{g\in G} -a_g z^g$, wobei $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(-f)$, mit $f + (-f) = 0_K$.

- *Kommutativität:* Die Addition ist kommutativ, denn es gilt

$$\begin{aligned} f + h &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} b_g z^g = \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g\right) z^g \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{g\in G} \left(b_g + a_g\right) z^g = \sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} a_g z^g \\ &= h + f. \end{aligned}$$

Die Gleichheit in (*) gilt, da K ein Körper ist und $a_g, b_g \in K$ sind.

Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist ein kommutatives Monoid bezüglich der oben definierten Multiplikation.

- *Assoziativität:*

$$\begin{aligned} f \cdot (h \cdot k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g \cdot \left(\sum_{g\in G} b_g z^g \cdot \sum_{g\in G} c_g z^g\right) \\ &= \sum_{g\in G} a_g z^g \cdot \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} \left(b_{g_1} \cdot c_{g_2}\right) z^g \\ &= \sum_{g\in G} \sum_{g_3+g_1+g_2=g} a_{g_3} b_{g_1} c_{g_2} z^g \\ &= \left(\sum_{g\in G} \sum_{g_3+g_1=g} a_{g_3} b_{g_1} z^g\right) \sum_{g\in G} c_g z^g \\ &= \left(\sum_{g\in G} a_g z^g \cdot \sum_{g\in G} b_g z^g\right) \cdot \sum_{g\in G} c_g z^g \\ &= (fh)\, k. \end{aligned}$$

- *Kommutativität:* Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Es gilt

$$fh = \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2} z^g = \sum_{g\in G} \sum_{g_2+g_1=g} b_{g_2} a_{g_1} z^g = hf$$

  Die Gleichheit folgt unmittelbar aus der Kommutativität von G und der Kommutativität der Multiplikation im Körper K.

Es reicht ein Distributivgesetz nachzuweisen, da die Multiplikation in K kommutativ ist. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f \cdot (h+k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g \left(\sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g \right) \\
&= \sum_{g\in G} a_g z^g \left(\sum_{g\in G} (b_g + c_g)\, z^g \right) \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}(b_{g_2} + c_{g_2}) z^g \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2} + a_{g_1} c_{g_2} z^g \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2} z^g + \sum_{g\in G} \sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} c_{g_2} z^g \\
&= fh + fk.
\end{aligned}
$$

In den Beweis der Distributivgesetze fließen die im Körper K gültige Distributivität, die Rechengesetze für die Unbestimmte 5.1.5, beziehungsweise die Kommutativität der angeordneten abelschen Gruppe G mit ein. □

5.3.4 Das Inverse in $K\left(\left(z^G\right)\right)$

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.
In diesem Abschnitt orientieren wir uns an [Fuc66, S. 196- 198] und [Neu, S. 210- 213]. Wir benötigen etwas Vorarbeit, bevor wir zeigen können, dass zu jeder formalen Potenzreihe, die ungleich Null ist, ein Inverses existiert und die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein Körper ist.

5.3.14 Satz
Jede formale Potenzreihe $0 \neq f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ lässt sich in eindeutiger Weise als

$$f = \lambda \cdot z^g \cdot (1_K + h) \ \ \textit{mit}\ \lambda \in K,\ \ g \in G,\ \ h \in K\left(\left(z^G\right)\right),\ \ \textit{und}\ \min\left(\operatorname{supp}(h)\right) > 0$$

darstellen, wobei $g = \min(\operatorname{supp}(f))$ ist.

Beweis:

Sei $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{supp}(f)$ wohlgeordnet. Nach Definition der Wohlordnung existiert ein kleinstes Element $\gamma \in G$ in $\operatorname{supp}(f)$ mit $\gamma = \min(\operatorname{supp}(f))$. Da G eine angeordnete abelsche Gruppe ist, existiert für jedes Element ein additives Inverses.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f &= z^{\gamma} \sum_{g\in G} a_g z^{g-\gamma} \\ &= z^{\gamma} \left(1_K a_{\gamma} + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} a_g z^{g-\gamma} \right) \\ &\overset{(*)}{=} z^{\gamma}\, a_{\gamma} \left(1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} \frac{a_g}{{a_{\gamma}}^{-1}} z^{g-\gamma} \right) \\ &= z^{\gamma}\, a_{\gamma} \left(1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} b_{g-\gamma} z^{g-\gamma} \right), \end{aligned}$$

mit $b_{g-\gamma} = \frac{a_g}{{a_\gamma}^{-1}}$.
Es gilt weiterhin $g - \gamma > 0$ für alle $g \in \operatorname{supp}(f) \setminus \{\gamma\}$, da $\gamma = \min(\operatorname{supp}(f))$. Wir erhalten die Positivität des Trägers der entstandenen formalen Potenzreihe $h = \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} b_{g-\gamma} z^{g-\gamma}$. Die Darstellung ist eindeutig. Denn sowohl $\gamma = \min(\operatorname{supp}(f))$ als auch a_γ sind nach Definition der formalen Potenzreihe f eindeutig bestimmt. Angenommen es gäbe ein $h' \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, mit $h' \neq h$, dann gelte

$$\begin{aligned} & f = a_\gamma z^\gamma \left(1_K + h\right) = a_\gamma z^\gamma \left(1_K + h'\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left(1_K + h\right) = \left(1_K + h'\right) \\ \Leftrightarrow\ & h = h'. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und wir erhalten die Eindeutigkeit der Darstellung.

□

5.3.15 Lemma
Sei $\sum_{g\in G} a_g z^g = f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ *mit* $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. *Die unendliche Reihe*

$$\begin{aligned} h &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G} a_g z^g \right)^n \end{aligned}$$

ist für beliebige Körperelemente λ_n *wohldefiniert und liegt in* $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wir unterteilen den Beweis in zwei Blöcke. Die unendliche Reihe h, wie im Lemma definiert, liegt genau dann in $K\left(\left(z^G\right)\right)$, wenn ihr Träger wohlgeordnet ist. Der Träger $\operatorname{supp}(h)$ ist eine

Teilmenge der Vereinigung der Träger $\mathrm{supp}(f^n)$. Es genügt nachzuweisen, dass

1. die Vereinigung der Träger, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{supp}(f^n)$, wohlgeordnet ist,
2. für ein festes $\gamma \in G$ gibt es nur endliche viele $n \in \mathbb{N}$, sodass $(f^n)_\gamma \neq 0$ ist. Wir schreiben $(f^n)_\gamma = \left(\sum_{g\in G}\sum_{g_1+...+g_n=g} a_{g_1}a_{g_2}...a_{g_n}z^g\right)_\gamma = \sum_{g_1+...+g_n=\gamma} a_{g_1}a_{g_2}...a_{g_n}z^\gamma$

zu 1.: Die Bedingung ist erfüllt, wenn es keine streng monoton fallende Folge

$$u_1 = g_{11}+g_{12}+...+g_{1n_1} > u_2 = g_{21}+g_{22}+...+g_{2n_2} > ... > u_i = g_{i1}+g_{i2}+...+g_{in_i} > ..., \quad (5.7)$$

mit $g_{ik} \in \mathrm{supp}(f)$, gibt. Angenommen es gäbe eine derartige Folge in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f^n)$. Da G insbesondere eine angeordnete Gruppe ist, können die $g_ik \in G$ angeordnet werden. Wir können ein maximales Element, $\max(g_{ik})$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ bestimmen. Nach Definition einer konvexen Untergruppe und da $\min\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f^n)\right) > 0$ ist, gilt in G offensichtlich, dass

$$\langle u_i\rangle = \langle \max_k (g_{ik})\rangle$$

besteht.
Der Träger der formalen Potenzreihe f ist nach Voraussetzung wohlgeordnet. Betrachte die Menge der von $a \in \mathrm{supp}(f)$ erzeugten Untergruppe $\langle a\rangle$. Aufgrund der Wohlordnung von $\mathrm{supp}(f)$ existiert eine kleinste Untergruppe U von G. Wir wählen die Untergruppe U möglichst klein.
Offensichtlich gilt wegen der Konvexitätseigenschaft,

$$\langle u_1\rangle \supseteq \langle u_2\rangle \supseteq ... \supseteq \langle u_i\rangle \supseteq ....$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass

$$\langle u_i\rangle = U \qquad \text{für } (i = 1, 2, ...)$$

ist. Wir wählen nun aus jeder Folge von g_{ik_i} ein $g_i{}^*$, sodass $\langle g_{ik_i}\rangle = \langle u_i\rangle = U$ gilt. Es können mehrere $g \in \mathrm{supp}(f)$ existieren, die die Gleichheit $\langle g\rangle = U$ erfüllen. Aufgrund der Wohlordnung des Trägers $\mathrm{supp}(f)$ gibt es unter diesen Elementen, bezüglich der Anordnung von G, ein kleinstes, wir bezeichnen es mit g^*. Es gilt $g^* \leq g_1{}^* \leq u_1$, wobei $\langle g^*\rangle = \langle g_1{}^*\rangle = \langle u_1\rangle = U$. Die erste Ungleichung erhalten wir aufgrund der Minimalität von g^*. Die zweite Ungleichung folgt aus der Definition von u_1.
Aufgrund der Eigenschaften von konvexen Untergruppen einer angeordneten Gruppe existiert ein $p \in \mathbb{N}$, sodass $u_1 \leq pg^*$ und da $u_1 > u_2 > ... > u_i > ...$ gilt

$$u_i \leq pg^* \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der Kommutativität der Gruppe G kann die Darstellung der Folge u_i auf die beiden folgenden Fälle eingeschränkt werden

$$u_i = {g_i}^* \qquad\qquad u_i = v_i + {g_i}^*,$$

wobei v_i bestimmte Summen von g_{ik} bezeichnen. Die Elemente ${g_i}^*$ sind Elemente des Trägers. Nach Definition der Wohlordnung gibt es keine streng monoton fallende Folge unter den ${g_i}^*$. Aus diesem Grund und da die Folge $(u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Annahme streng monoton fallend ist, existieren nur endlich viele u_i der ersten Form.
Folglich muss eine streng monoton fallende Folge v_i existieren: $v_{i1} > v_{i2} > ... > v_{ij} > ....$ Diese Folge hat die selbe Form wie 5.7. Wir erhalten mit der gleichen Argumentation, dass $\langle v_i \rangle = U$ ist. Wir wissen, dass $v_i \leq u_i$ ist, da $u_i = v_i + {g_i}^*$ gilt. Wir können also wieder eine natürliche Zahl $q = p - 1$ finden, sodass $v_i \leq qa^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wir haben aus u_i eine Folge konstruiert, die ebenso $\langle v_i \rangle = U$ und $v_i \leq (p-1)\, g^*$ erfüllt. Dies widerspricht jedoch der Minimalitätseigenschaft von U. Die Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(F^n)$ muss somit wohlgeordnet sein.
Nach Definition 3.2.10 und Bemerkung 3.2.12 ist $\operatorname{supp}(h)$, als Teilmenge der wohlgeordneten Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}(f^n)$, wohlgeordnet.
zu 2.: Wir nehmen nun an, es existieren für jedes festgehaltene Element der angeordneten abelschen Gruppe G unendlich viele ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$g = g_{i1} + g_{i2} + ... + g_{in_i},\ i \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } n_1 < n_2 < ... < n_i < ... \text{ und } g_{ik} \in \operatorname{supp}(f).$$

Die Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(f^n)$ ist wohlgeordnet. Somit existiert ein kleinstes Element g der oben definierten Form. Nach Lemma 4.1.4 enthält die Folge $(g_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge, die wir gleich indizieren:

$$g_{11} \leq ... \leq g_{i1} \leq ....$$

Die Folge $g_{i2} + ... + g_{in_i}$ ist, mit $i \in \mathbb{N}$, konstant. Damit muss die durch $(g_i)' = g_{i2} + ... + g_{in_i},\ i \in \mathbb{N}$ bestimmte Folge nicht wachsend und aufgrund der Wohlordnung der Vereinigung der Träger somit konstant. Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $(g_{j+m})' = (g_j)' = g'$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit liegt g' in der Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(F^n)$, für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $g' < g$, da $g' = -(g_{i1}) + g$ und $g_{i1} > 1_G$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von g. Damit existieren nur endlich viele ganze Zahlen n für die der Koeffizient der formalen Potenzreihe $(a^n)_g \neq 0$ ist. □

5.3.16 Bemerkung
Die in Lemma 5.3.15 definierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G}^{\infty} a_g z^g\right)^n$ mit $\lambda_n \in K$ und $f := \sum_{g\in G}^{\infty} a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$ liegt in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ und kann folgendermaßen umgeschrieben

werden:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\cdot(f)^n &= \lambda_0 f^0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cdot f^n\\ &= \lambda_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cdot f^n.\end{aligned}$$

Diese Darstellung erinnert für $\lambda_0 = 1_K$ an die geometrische Reihe.

5.3.17 Definition

Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0,\ \min(\operatorname{supp}(h)) > 0$. Wir bezeichnen die Menge aller $1_K + f$ mit Υ und multiplizieren Elemente aus Υ folgendermaßen

$$(1_K + f)\cdot(1_K + h) = 1_K + (f + h + fh)$$

5.3.18 Lemma

Sei $1_K + f \in \Upsilon$, *mit* $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ *und* $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. *Das Element*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-f)^n = 1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$$

liegt in Υ *und ist invers zu* $1_K + f$.

Beweis:

Sei $\mathfrak{f} := 1_K + f \in \Upsilon$, mit $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ und $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist nach Satz 5.3.13 ein kommutativer Ring. Es gilt somit $-f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Der Träger der formalen Potenzreihe $-f$ entspricht dem Träger von f und es gilt $\min(\operatorname{supp}(-f)) > 0$. Nach Lemma 5.3.15 gilt, dass $\overline{f} = \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist. Der Träger von $\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ ist in der Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(-f^n)$ enthalten. Der Träger $\operatorname{supp}(f^n)$ ist positiv für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Vereinigung positiver Mengen ist ebenfalls positiv und es folgt, dass der Träger der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ positiv ist. Wir erhalten also, dass $\bar{\mathfrak{f}} := 1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ in Υ liegt. Die

Verknüpfung der beiden Gruppenelemente $\mathfrak{f}$ und $\bar{\mathfrak{f}}$ hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{f}} &= (1_K + f)\left(1_K + \overline{f}\right) \\
&= 1_K + \left(f + \overline{f} + f \cdot \overline{f}\right) \\
&= 1_K + \left(\sum_{g \in G} a_g z^g + \sum_{n=1}^{\infty} (-f)^n + \left(\sum_{g \in G} a_g z^g\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-f)^n\right)\right) \\
&= 1_K + \left(\sum_{g \in G} a_g z^g + (-f)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-f)^n + \left(-(-f) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-f)^n\right)\right) \\
&= 1_K + \left(\sum_{n=2}^{\infty} (-f)^n + \left(-\sum_{n=2}^{\infty} (-f)^n\right)\right) \\
&= 1_K + 0_K = 1_K
\end{aligned}$$

□

5.3.19 Bemerkung

Sei $1_K + f \in \Upsilon$, dann ist $1_K + f$ invertierbar mit dem Inversen $\sum_{n=0}^{\infty} (-f)^n$.

Mithilfe dieser Erkenntnis und Lemma 5.3.14 sind wir nun in der Lage den zentralen Satz der Ausarbeitung zu beweisen.

5.3.20 Satz

Die formalen Potenzreihen auf einer angeordneten Gruppe G über einem Körper K bilden einen Körper $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wie oben gezeigt, kann jedes Element $f \neq 0$ des Ringes $K\left(\left(z^G\right)\right)$ in der Form $f = \lambda \cdot z^g \cdot (1_K + h)$ geschrieben werden, mit $\lambda \in K^*, g \in G,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, wobei $\min(\operatorname{supp}(h)) > 0$. Wir bezeichnen mit $1_K + \overline{h}$ das Inverse von $1_K + h$ in der Gruppe Υ. Da $\lambda \in K^*$ ist, handelt es sich um eine Einheit und es existiert ein Inverses, welches wir mit λ^{-1} bezeichnen. Da g ein Element der angeordneten, abelschen, additiv geschriebenen Gruppe G ist, gibt es auch zu g ein inverses Element, das wir $-g$ nennen. Mit selbiger Argumentation wie oben wissen wir, dass das Element $k := \left(1_K + \overline{h}\right) z^{-g} \lambda^{-1}$ in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ liegt. Nach den Rechengesetzen für die Unbestimmte 5.1.5 und den definierten Rechenoperationen in dem Potenzreihenring $K\left(\left(z^G\right)\right)$

erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} f \cdot k &= (\lambda \cdot z^g (1_K + h)) \cdot \left(\left(1_K + \overline{f}\right) z^{-g}\lambda^{-1}\right) \\ &= \left(\lambda \cdot z^g z^{-g}\lambda^{-1}\right) = \left(\lambda z^{g-g}\lambda^{-1}\right) = \left(\lambda\lambda^{-1}\right) \\ &= 1_K \end{aligned}$$

□

5.3.21 Beispiel
Sei G eine archimedisch angeordnete Gruppe. Nach dem Satz von Hölder 4.3.1 lässt sich G in die Gruppe der additiven reellen Zahlen einbetten. Somit lässt sich $K\left(\left(z^G\right)\right)$ einbetten in $K\left(\left(z^{\mathbb{R}}\right)\right)$.

5.3.22 Beispiel
Es gilt $K\left(\left(z^{\mathbb{Z}}\right)\right) = K\left((z)\right)$

Wir können nun die bewertungstheoretischen Aussagen, die wir in dem Körper der formalen Laurentreihen bewiesen haben, auf den verallgemeinerten Potenzreihenkörper ausweiten.

5.3.23 Satz
Die Abbildung $v\colon K\left(\left(z^G\right)\right) \to G \cup \{\infty\},\ f \mapsto \min(\mathrm{supp}(f))$ *mit* $v(\varnothing) = \infty$ *ist eine Bewertung auf* $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Die Abbildung ist surjektiv, denn zu jedem Gruppenelement existiert eine formale Potenzreihe $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit diesem Startwert, sodass $v(f) = \min\left(\mathrm{supp}(f)\right)$ gilt. Wir weisen nun die Eigenschaften B1'-B3' aus Definition 4.5.2 nach.

zu B1' Klar nach Definition.

zu B2' Sei $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$ und $h = \sum_{g\in G} b_g z^g$, mit $g_1 = \min(\mathrm{supp}(f))$ und $g_2 = \min(\mathrm{supp}(h))$. Dann ist $v(f) = g_1$ und $v(h) = g_2$. Damit gilt, dass $v(f) + v(h) = g_1 + g_2$ entspricht. Wir wollen zeigen, dass das Bild von fh unter der Abbildung

$$v(fh) = v(\sum_{g\in G} \sum_{k+j=g} a_k b_j z^g) \overset{!}{=} v(f) + v(h),$$

ist, wobei $a_k = 0$ für $k < g_1$ und $b_j = 0$ für $j < g_2$ ist.
Wir betrachten zunächst $g < g_1 + g_2$. Nach Voraussetzung ist entweder $a_k = 0$, oder

$b_j = 0$ und wir erhalten $a_k b_j = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{g_1} \neq 0$ und $b_{g_2} \neq 0$.
Sei nun $g = g_1 + g_2$. Das Produkt $a_{g_1} b_{g_2}$ ist ungleich Null und daher erhalten wir, dass $v(fg) = g_1 + g_2 = v(f) + v(h)$ ist.

zu B3' : Wenn f, h wie oben definiert sind, erhalten wir für $v(f + h)$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} v(f+h) &= v\left(\sum_{g=\min\{g_1,g_2\}}^{\infty} (a_g + b_g) z^g\right) \\ &\leq \min\{g_1, g_2\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{v(f), v(h)\} \end{aligned}$$

□

5.3.24 Satz
Die Menge $K[[z^G]] = \{f \in K\left(\left(z^G\right)\right) \mid \operatorname{supp}(f) \geq 0\}$ *ist ein Bewertungsring von* v.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $K[[z^G]]$ und der Definition eines Bewertungsrings 4.5.3. □

5.3.25 Beispiel
Es gilt $K[[z^{\mathbb{Z}}]] = K[[z]]$.

Hier schließt sich der Kreis zu dem, zu Beginn des Kapitels, betrachteten Potenzreihenring $K[[z]]$ und dem Laurentreihenkörper $K((z))$. Die Menge der ganzen Zahlen ist eine angeordnete abelsche additive Gruppe. Über einem beliebigen Körper K wissen wir nun, dass der Laurentreihenkörper mit $G = \mathbb{Z}$ ein Beispiel für einen formalen Potenzreihenkörper darstellt.

Literaturverzeichnis

[Car48] Carruth, Philip W.: Generalized Power Series Fields. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), May, Nr. 3, S. 548 – 559

[Ebe13] Ebeling, W.: *Funktionentheorie, Differentialtopologie und Singularitäten: Eine Einführung mit Ausblicken.* Vieweg+Teubner Verlag, 2013

[Fis08] Fischer, Gerd: *Lehrbuch der Algebra.* 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008

[Fuc66] Fuchs, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966

[Hö01] In: Hölder, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß.* Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1 – 64

[Hah] In: Hahn, Hans: *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*

[Hul12] Hulek, Klaus: *Elementare algebraische Geometrie.* Wiesbaden : Springer Spektrum, Vieweg und Teubner Verlag, 2012

[Jä99] Jänich, K.: *Funktionentheorie: eine Einführung.* Springer, 1999 (Springer-Lehrbuch)

[Lü08] In: Lüneburg, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1.* Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507 – 577

[Neu] Neumann, Bernhard H.: On ordered division rings. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 66, Nr. 1, S. 202 – 252

[Neu92] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992

[PC70] Priess-Crampe, Sibylla: Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen. In: *Archiv der Mathematik* 21 (1970), Nr. 1, S. 362 – 365

[PC83] Priess-Crampe, Sibylla: *Angeordnete Strukturen.* Springer-Verlag, 1983

[Rib92] RIBENBOIM, Paulo: Noetherian rings of generalized power series. In: *Journal of pure and applied algebra* 79 (1992), Nr. 3, S. 293 – 312

[SP08] SCHULZE-PILLOT, Rainer: *Einfuehrung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[Tar12] TARAZ, Anusch: *Diskrete Mathematik - Grundlagen und Methoden*. Basel : Birkhäuser, 2012