Nastold, H.-J.
Math. Annalen 164, 213—218 (1966)

Lokale nichtarchimedische Funktionentheorie

Herrn Gottfried Köthe zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

Hans-Joachim Nastold in Heidelberg

0. Einleitung

In [1], [2] wurde erstmals die lokale Theorie analytischer Räume über einem algebraisch abgeschlossenen nichtarchimedisch vollständig bewerteten Körper k weitgehend analog zur lokalen Theorie der analytischen Räume über $\mathbb{C}$ entwickelt. Durch Untersuchungen von Tate [6] u. a. hat sich gezeigt, daß eine Begründung einer globalen Funktionentheorie über einem nichtarchimedisch vollständig bewerteten Körper k andere Wege zu gehen hat. Die affinoiden Räume zu affinoiden Algebren [3], [5] erwiesen sich als die Bausteine für die in [6] und [4] definierten global-analytischen Räume, welche man als analytische Räume im Sinne von [1] und [2] mit zusätzlicher Struktur auffassen kann. Dabei zeigt die Theorie der affinoiden Algebren, wie sie in [6] und [5] entwickelt wird, weitgehend analoge Züge zur Theorie der affinen Algebren über einem Körper k in der algebraischen Geometrie. Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich aus den Eigenschaften der affinoiden Algebren zusammen mit dem in [5] erörterten Studium des Übergangs von der affinoiden Algebra A zum zugehörigen affinoiden Raum $\mathrm{Sp}(A)$ mühelos die Hauptergebnisse der lokalen Funktionentheorie im nichtarchimedischen Fall, etwa die Kohärenz der Strukturgarbe, die Kohärenz der Idealgarbe, Aussagen über den singulären Ort, die Normalisierung u. a. mehr ergeben, und zwar ganz analog wie in der algebraischen Geometrie. Wir stellen dazu in 1. die benötigten Eigenschaften affinoider Algebren und Räume zusammen. In 2. zeigen wir, daß jeder analytische Raum im Sinne von [1], [2] lokal affinoid und jede kohärente Garbe lokal k-kohärent über einer offenen affinoiden Teilmenge (s. [5], II, § 3) ist, ferner daß man zu jedem Morphismus (= holomorphe Abbildung) $f: X \to Y$ zwischen analytischen Räumen X, Y und jedem Punkt $x \in X$, $y = f(x) \in Y$, offene affinoide Umgebungen $U = U(x) \subset X$ und $V = V(y) \subset Y$ so wählen kann, daß $f(U) \subset V$ und f von einem Algebrahomomorphismus $A_V \to A_U$ der zugehörigen affinoiden Algebren kommt. Damit ergeben sich dann in 3. die oben genannten Resultate zwanglos.

1. Affinoide Algebren und Räume (s. [5])

a) Im folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener nichtarchimedisch vollständig bewerteter Körper. Eine *affinoide Algebra* über k ist ein Quotient

$A = T_n/\mathfrak{a}$ der „freien“ affinoiden Algebra $T_n = \{f \in k[\![X_1, \ldots, X_n]\!];\ f(X) = \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$ mit $a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \to 0\}$, des Ringes der im abgeschlossenen Einheitspolyzylinder $E^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n;\ |x_i| \leqq 1$ für $i = 1, \ldots, n\}$ konvergenten Potenzreihen $f(X)$, nach einem Ideal $\mathfrak{a} \subset T_n$. Nach [6] sind die affinoiden Algebren noethersch, und es gilt für sie ein noethersches Normalisierungslemma: Es gibt ein $T_n \subset A$, so daß A endlicher T_n-Modul ist. Ferner gilt NAGATAs Endlichkeitsbedingung: Ist A eine nullteilerfreie affinoide Algebra und L ein endlich algebraischer Oberkörper von $K = Q(A)$, dem Quotientenkörper von A, so ist die ganze Abschließung $\tilde{A}$ von A in L ein endlicher A-Modul.

b) Einer affinoiden Algebra A über k läßt sich ein analytischer Raum $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Sp}^a(A)$ wie in [5], II, 2.2 zuordnen. Dazu wird auf $|\mathrm{Sp}^a(A)| = \{x \subset A;\ x$ maximales Ideal in $A\}$ eine Topologie, und über einer Basis dieser Topologie, bestehend etwa aus den speziellen affinoiden Teilbereichen ([6] und [5], I, § 6), in natürlicher Weise eine Prägarbe definiert, deren assoziierte Garbe auf X $\mathcal{O}_X$ ist. Ein solcher Raum $\mathrm{Sp}^a(A)$ heißt *affinoider Raum.* Ist $A \cong T_n/\mathfrak{a}$, so läßt sich $\mathrm{Sp}^a(A)$ darstellen als abgeschlossener analytischer Unterraum des analytischen Raumes $(E^n, \mathcal{O}_{E^n})$, des abgeschlossenen Einheitspolyzylinders in k^n, aufgefaßt als offener analytischer Unterraum von k^n: Es ist mit $X = N(\mathfrak{a}) = \{x \in E^n;\ f(x) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}\} \subset E^n$, der Nullstellenmenge des Ideals $\mathfrak{a} \subset T_n$, $\mathrm{Sp}^a(A) = (X, \mathcal{O}_E/\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_E|_X)$. Die Fasern der Strukturgarben $\mathcal{O}_X$ der so definierten affinoiden Räume sind lokale analytische Algebren über k, d. h. Quotienten von konvergenten Potenzreihenringen über k, die affinoiden Räume also analytischen Räume über k im Sinne von [1], [2]. Wir gehen hier nicht auf deren zusätzliche Struktur als G-geringte Räume im Sinne von [4] ein.

Allgemein ist für $B = A/\mathfrak{a}$, A, B affinoide Algebren, $\mathrm{Sp}^a(B) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ abgeschlossener analytischer Teilraum von $\mathrm{Sp}^a(A) = (X, \mathcal{O}_X)$ mit $Y = N(\mathfrak{a}) = \{x \in X;\ f(x) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}\}$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_X|_Y$ [5], II, 2.5.1.

c) Ist M ein endlicher A-Modul, A eine affinoide Algebra, so ordnet man M eine auf dem affinoiden Raum $\mathrm{Sp}^a(A) = (X, \mathcal{O}_X)$ kohärente Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln folgendermaßen zu: A und M bezeichne auch die zugehörigen konstanten Garben von Ringen und Moduln auf X, dann sei $\tilde{M}^a = M \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X$. $\tilde{M}^a$ ist, wie wir in 3. sehen werden, eine kohärente Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln, und wir nennen solche Garben, die von einem endlichen A-Modul M kommen, *k-kohärent.* Der Funktor $M \longrightarrow \tilde{M}^a$ ist treu und exakt [5], II, 3.1.2, denn für jedes $x \in |\mathrm{Sp}^a(A)|$ ist $\mathcal{O}_{X,x}$ treuflach über A_x, dem nach dem maximalen Ideal $x \subset A$ lokalisierten Ring.

d) Ist $x \in |\mathrm{Sp}^a(A)|$, $A_x \to \mathcal{O}_{X,x}$ die kanonische Injektion der Faser A_x des affinen Schemas zu A in die Faser $\mathcal{O}_{X,x}$ des zugehörigen affinoiden Raumes, $\mathfrak{p} \subset A_x$ ein Primideal und $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_x$ ein Primideal „über $\mathfrak{p}$“, so ist nach [5], III, 3.3. $(A_x)_\mathfrak{p}$ regulär genau dann, wenn $(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{P}$ regulär ist. Mit den Serreschen Kriterien ergibt sich daraus wie in [5], III, § 3: A_x ist reduziert bzw. normal genau dann, wenn $\mathcal{O}_x$ reduziert bzw. normal ist. Eine weitere Folgerung, die sich leicht durch Normalisierung ergibt, ist die folgende: Ist A_x nullteilerfrei, so ist $\mathcal{O}_x$ äquidimensional, d. h. für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_x$ ist $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = \dim \mathcal{O}_x = \dim A_x$.

2. Analytische Räume

a) Wir betrachten im folgenden analytische Räume im Sinne von [1], [2] über einem algebraisch abgeschlossenen nichtarchimedisch vollständig bewerteten Körper k. Es gilt: Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein analytischer Raum über k und $x \in X$ ein Punkt, so gibt es beliebig kleine Umgebungen $U = U(x)$ von x und affinoide Algebren A_U über k, so daß $(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong \mathrm{Sp}^a(A_U)$ ist.

Beweis: Nach Definition der analytischen Räume ist über einer Umgebung V von x $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ isomorph einer abgeschlossenen analytischen Teilmenge eines Polyzylinders P um den Nullpunkt des k^n, die durch endlich viele in P holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ definiert wird als $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $Y = N(f_1, \ldots, f_k) = \{x \in P; f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} \subset P$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_P/(f_1, \ldots, f_k) \cdot \mathcal{O}_P|_Y$. Nun lassen sich die in der Umgebung P von 0 holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ in einem Polyzylinder $Q \subset P$ in dort konvergente Potenzreihen mit Mittelpunkt 0 entwickeln. Nach einer Streckung von 0 aus kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $Q = E^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n; |x_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n\}$ und der offene Teilraum $Q \cap Y$ von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ die durch $f_1, \ldots, f_k$ definierte abgeschlossene analytische Teilmenge von $(E^n, \mathcal{O}_{E^n})$ ist, wobei die $f_1, \ldots, f_k$ sich als in ganz E^n konvergente Potenzreihen um 0 darstellen lassen. Dann ist mit den Bezeichnungen von 1. $f_1, \ldots, f_k \in T_n$ und mit $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_k) \subset T_n$ und $A = T_n/\mathfrak{a}$ nach 1. b) $\mathrm{Sp}^a(A) = (N, \mathcal{O}_N)$ mit $N = N(\mathfrak{a}) \subset E^n$ und $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}_E/\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_E|_N$ (s. 1.), und somit der offene Teilraum $Q \cap Y$ von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ isomorph $\mathrm{Sp}^a(A)$, w. z. z. w.

b) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein analytischer Raum und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so gibt es zu jedem $x \in X$ beliebig kleine Umgebungen $U = U(x)$, so daß $(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong \mathrm{Sp}^a(A_U)$, dem affinoiden Raum zu einer affinoiden Algebra A_U, ist, und, für einen endlichen A_U-Modul M_U, $\mathcal{M}|_U \cong \tilde{M}_U^a$ im Sinne von 1. c) ist.

Beweis: Eine kohärente Garbe $\mathcal{M}$ ist lokal Kokern eines $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus: $\mathcal{O}_X^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{M} \to 0$. α wird eindeutig bestimmt durch diejenigen Schnitte von $\mathcal{O}_X^p$, die man als Bilder bei α der Schnitte $e_1 = \underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{q}$, $e_2 = \underbrace{(0, 1, 0, \ldots, 0)}_{q}, \ldots, e_q = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1)}_{q}$ von $\mathcal{O}_X^q$ erhält. Nun werden diese Schnitte $\alpha(e_i)$ von $\mathcal{O}_X^p$ jeweils gegeben durch ein p-tupel holomorpher Funktionen. Betrachtet man wie unter a) eine lokale Einbettung von $(X, \mathcal{O}_X)$ in einer Umgebung $V(x)$ in den k^n, so kommen diese in einer Umgebung von 0 auf $(Y, \mathcal{O}_Y)$ holomorphen Funktionen jeweils von etwa in P holomorphen Funktionen des einbettenden Raumes. Man kann daher Q im obigen Beweis noch so wählen, daß auch deren Potenzreihenentwicklungen um 0 in ganz Q konvergieren. Der auf $N = \mathrm{Sp}^a(A)$ verpflanzte $\mathcal{O}_N$-Homomorphismus $\mathcal{O}_N^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_N^p$ wird daher durch eine Matrix von Funktionen aus der affinoiden Algebra A definiert. Betrachtet man nun den durch dieselbe Matrix definierten A-Homomorphismus $A^q \xrightarrow{\beta} A^p$, so ist dieser gerade so gewählt, daß über N das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^q & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X^p \\ \wr\| & & \wr\| \\ A^q \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} & A^p \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X \end{array}$$

kommutativ ist. Ist nun $M = \mathrm{Koker}(\beta): A^q \xrightarrow{\beta} A^p \to M \to 0$, so folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_X^q & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X^p & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow 0 \\ \wr\| & & \wr\| & & & \\ A^q \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} & A^p \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \longrightarrow & M \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen (1. c)): Über N ist $\mathcal{M} \simeq M \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X$.

c) Ganz analog erhält man mit lokaler Einbettung und Beschränkung auf Polyzylinder, in welchen die Potenzreihenentwicklungen der eine holomorphe Abbildung darstellenden holomorphen Funktionen konvergieren: Zu einem Morphismus $f: X \to Y$ zwischen analytischen Räumen X, Y und Punkten $x \in X$, $y = f(x) \in Y$ gibt es affinoide Umgebungen $U = U(x) \subset X$ und $V = V(y) \subset Y$, so daß $f(U) \subset V$ und $f|_U: U \to V$ zu einem Algebrahomomorphismus $A_V \to A_U$ der zugehörigen affinoiden Algebren gehört. Ist f endlich in x, so kann man weiter U, V so wählen, daß A_U endlich über A_V ist.

3. Lokale analytische Geometrie

Wir beweisen nun mit 1. und 2. einige Resultate aus der lokalen Theorie.

a) *Kohärenz der Strukturgarbe.* Dazu ist folgendes zu zeigen: Ist über einem offenen $U \subset X$ ein $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\mathcal{O}_X^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X$ gegeben, so ist dessen Kern $\mathcal{K}: 0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{O}_X^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X$, von endlichem Typ. Dies ist eine lokale Aussage. Nun kann man aber wie in 2. b) zu jedem $x \in U$ eine passende affinoide Umgebung $W \subset U$ zu der affinoiden Algebra A so wählen, daß über W der obige $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\mathcal{O}_X^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X$ von einer A-linearen Abbildung $A^p \xrightarrow{\beta} A$ kommt, d. h. so daß über W das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^p & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X \\ \wr\| & & \wr\| \\ A^p \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} & A \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X \end{array}$$

kommutativ ist. Ist nun aber K der Kern von $\beta: 0 \to K \to A^p \to A$, so ist K endlicher A-Modul (da A noethersch ist) und aus der Kommutativität des

Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathscr{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^p & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X \\ & & & \wr\| & & \wr\| \\ 0 \longrightarrow & K \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \longrightarrow & A^p \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} & A \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X \end{array}$$

mit exakten Zeilen (1. c)) ergibt sich über W $\mathscr{K} \simeq K \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X$. Nun hat man aber eine exakte Folge $A^p \to K \to 0$, und daraus erhält man $A^p \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X \to K \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X \to 0$ exakt, d. h. $\mathcal{O}_X^p \to \mathscr{K} \to 0$ ist über W exakt. Da es zu jedem $x \in U$ ein solches W gibt, ist $\mathscr{K}$ tatsächlich von endlichem Typ.

b) *Kohärenz der Idealgarbe.* Diese Aussage reduziert sich auf die folgende: Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein analytischer Raum, so ist die Idealgarbe $\mathscr{N} \subset \mathcal{O}_X$, bestehend aus den nilpotenten Elementen von $\mathcal{O}_X$, kohärent.

Beweis: Die Aussage ist lokal, also kann man nach 2. a) ohne Einschränkung $(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Sp}^a(A)$ annehmen. Sei $\mathfrak{n} \subset A$ das Nilradikal von A. Jedenfalls ist $\mathfrak{n} \cdot \mathcal{O}_X \subset \mathscr{N}$. Andererseits ist $A/\mathfrak{n}$ eine reduzierte affinoide Algebra, also nach 1. b) bis 1. d) $\mathrm{Sp}^a(A/\mathfrak{n}) = (X, \mathcal{O}_X/\mathfrak{n} \cdot \mathcal{O}_X)$ ein reduzierter analytischer Raum. Somit ist $\mathscr{N} = \mathfrak{n} \cdot \mathcal{O}_X = \mathfrak{n} \underset{A}{\otimes} \mathcal{O}_X$. Da A noethersch ist, gibt es nun eine exakte Folge $A^p \to A^q \to \mathfrak{n} \to 0$, und daraus erhält man durch Tensorproduktbildung eine exakte Folge $\mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X^q \to \mathscr{N} \to 0$. $\mathscr{N}$ ist also als Kokern eines $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus zwischen kohärenten Garben selbst kohärent.

c) Da nach 2. a) jeder analytische Raum lokal affinoid ist, ergeben sich die bekannten *Aussagen über den singulären, den nicht-normalen und den nicht-reduzierten Ort* eines analytischen Raumes mit 1. d) aus den in [5], III, 2.7.1 bewiesenen Aussagen über singulären, nicht-normalen und nicht-reduzierten Ort *des Schemas* zu einer affinoiden Algebra und den daraus sich ergebenden Aussagen über affinoide Räume [5], III, 3.4.1, 3.5.2, 3.6.3. und 3.6.4.

d) Ebenso ergibt sich die *Normalisierung* eines analytischen Raumes aus der in [5], III, § 4 auseinandergesetzten Normalisierung der affinoiden Räume. Die letztere benützt Nagatas Endlichkeitsbedingung für affinoide Algebren (1. a)) und 1. d).

e) Als letztes Beispiel beweisen wir: Ist der analytische Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ reduziert und irreduzibel in x und $\dim_x X = n$, d. h. ist $\mathcal{O}_{X,x}$ nullteilerfrei und von der Dimension n, so existiert eine Umgebung $U(x)$ von x, so daß für $y \in U(x)$ $\mathcal{O}_{X,y}$ äquidimensional (s. 1. d)) und $\dim \mathcal{O}_{X,y} = n$ ist.

Beweis: Nach 3. c) gibt es eine affinoide Umgebung U von x zur affinoiden Algebra A, so daß $\mathcal{O}_X|_U$ reduziert ist. Folglich ist auch A reduziert [5], III, 3.3.7, also das Nullideal in A $(0) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ der minimalen Primideale $\mathfrak{p}_i$. Das maximale Ideal $x \subset A$ zum Punkte x enthält nun, da nach Voraussetzung $A_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ nullteilerfrei ist, genau eines der $\mathfrak{p}_i$, etwa $x \supset \mathfrak{p}_1$, $x \not\supset \mathfrak{p}_2, \ldots, \not\supset \mathfrak{p}_n$. Nun sei $U(x) = \{y \in \mathrm{Sp}^a(A); y \not\supset \mathfrak{p}_2, \ldots, \not\supset \mathfrak{p}_n\}$. $U(x)$ ist in $\mathrm{Sp}^a(A)$ Zariski-offen, also um so mehr offen, und $x \in U(x)$. Für $y \in U(x)$ ist nun aber A_y nullteilerfrei, und da $A = T_n/\mathfrak{a}$, und in dem regulären T_n alle Ketten von Primidealen zwischen den gelifteten Idealen x' und $\mathfrak{p}_1'$ und y' und $\mathfrak{p}_1'$ dieselbe Länge haben [5], I, § 5, ist $\dim A_y = n$. Daraus folgt aber nach 1. d): $\mathcal{O}_{X,y}$ ist äquidimensional und $\dim \mathcal{O}_{X,y} = n$.

Literatur

[1] Abhyankar, S.: Local Analytic Geometry. New York and London: Academic Press 1964.
[2] Cartan, H.: Sém. École Normale Sup. 13 année 1960/61.
[3] Grauert, H., u. R. Remmert: Nichtarchimedische Funktionentheorie. Erscheint demnächst im Weierstrass-Festband. Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.
[4] Kiehl, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Erscheint demnächst.
[5] Nastold, H.-J.: Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie. Erscheint demnächst in Math. Z.
[6] Tate, J.: Rigid analytic spaces. Private notes reproduced by I.H.E.S.

(Eingegangen am 29. August 1965)