Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

zu dem Thema

Potenzreihenkörper

Julia Kronawitter

25. März 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können.
Ordnung spielt in der Geschichte der Mathematik seit jeher eine essentielle Rolle. Allerdings beschäftigten sich die ersten Mathematiker erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts mit Ordnung in Verbindung mit algebraischen Strukturen. Beginnend mit Arbeiten von Hölder, Hahn und Hausdorff, entwickelte sich die Theorie der angeordneten Strukturen. In seinem Werk „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß" zeigte Hölder 1901, dass sich jede archimedisch angeordnete Gruppe in eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen einbetten lässt. Hölder bediente sich dabei der von Dedekind eingeführten Schnitte in $\mathbb{Q}$. Diese These baute Hahn auf nichtarchimedische angeordnete Strukturen aus und konstruierte in diesem Prozess verallgemeinerte Potenzreihenkörper.
Mit derartigen Körpern beschäftigen wir uns in dieser Arbeit. Nach einer kurzen Wiederholung der wichtigsten algebraischen Strukturen erfolgt ein Einblick in die Theorie der angeordneten abelschen Gruppen. Diese werden zur Konstruktion des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers benötigt. Um auf dem verallgemeinerten Potenzreihenkörper Verknüpfungen definieren zu können, spielt die Wohlordnung bestimmter Mengen eine entscheidende Rolle. Die Archimedizität führt zur zentralen Aussage des ersten Kapitels, dem Satz von Hölder.
Im zweiten Teil beschreiben wir die Menge der formalen Potenzreihen mit Exponenten in den natürlichen Zahlen über einem Körper. Eine Erweiterung dieser Menge der formalen Potenzreihe führt uns zum Körper der Laurentreihen, einem Beispiel für einen Potenzreihenkörper.
Basierend auf Arbeiten von Fuchs und Prieß-Crampe wird die Konstruktion formaler Potenzreihen mit Exponenten in einer angeordneten abelschen Gruppe durchgeführt. Diese Potenzreihen bilden, unter bestimmten Voraussetzungen, einen verallgemeinerten Potenzreihenkörper. Abschließend gehen wir auf einige Eigenschaften des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers ein.

Kapitel 2

Notationen

$\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, ...\}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen
K^*	die Menge der Einheiten im Körper K
$\varnothing$	die leere Menge
$x \in A$	x ist Element der Menge A
$A \subseteq B (A \subset B)$	A ist eine (echte) Untermenge von B
$A \cap B, A \cup B$	Durchschnitt, Vereinigung der Mengen A, B
$A \setminus B$	die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$\vert\mathrm{a}\vert$	der absolute Betrag von a
P	der Positivbereich einer Gruppe G
$a \ll b$	a ist unendlich kleiner als b
$a \sim b$	a ist archimedisch äquivalent zu b
$[g]$	die archimedische Klasse von g
Σ	Menge konvexer Untergruppen der angeordneten abelschen Gruppe
C/D	Faktorgruppe

Kapitel 3

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die Ausarbeitung benötigten theoretischen Grundlagen zusammengestellt. Wir betrachten zunächst zentrale algebraische Strukturen und fokussieren uns im weiteren Verlauf auf Gruppen und die Ordnungen, die in ihnen definiert werden können.

3.1 Algebraische Strukturen

Wir beginnen mit der Definition der elementaren algebraischen Strukturen Gruppe, Ring, Körper und Quotientenkörper. Die Vertrautheit mit grundlegenden Begriffen über Mengen und Abbildungen sowie den wichtigen Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird vorausgesetzt. Die folgenden Ausführungen sind orientiert an [SP08] und [Fis08].

3.1.1 Definition
Eine nichtleere Menge G mit der Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G, (a,b) \mapsto a \circ b$, heißt *Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

G1: (Assoziativgesetz) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.

G2: (Neutrales Element) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $1_G \in G$ mit $1_G \circ a = a \circ 1_G = a$ für alle $a \in G$.

G3: (Inverses Element) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element a^{-1} in G mit $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = 1_G$.

Die Gruppe heißt *abelsch*, falls folgendes gilt:

G4: (Kommutativgesetz) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$.

3.1.2 Bemerkung
Wenn $(G, \circ)$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe ist, so wird das Inverse eines Elements

$a \in G$ mit a^{-1} bezeichnet.
Wenn nichts anderes gesagt ist, verwenden wir in abelschen Gruppen als Verknüpfung die Addition. Wir bezeichnen das neutrale Element 0_G als Nullelement und das additiv Inverse $-a$ eines Elements $a \in G$ als negatives Element.

3.1.3 Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen.

3.1.4 Definition

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1_G. Die Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe*, wenn gilt:

U1: $1_G \in U$,

U2: $a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$,

U3: $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$.

3.1.5 Definition

Sei R eine nichtleere Menge und seien $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ bezeichnen wir als *Ring mit Eins*, wenn gilt:

R1: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (deren neutrales Element mit 0_R bezeichnet wird).

R2: Die Multiplikation ist assoziativ: Für $a, b, c \in R$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Das neutrale Element der Multiplikation wird mit 1_R bezeichnet.

R3: (Distributivgesetze) Für alle $a, b, c \in$ R gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ und } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

3.1.6 Bemerkung

Ist die Multiplikation kommutativ, so heißt $(R, +, \cdot)$ *kommutativer Ring mit Eins*.
Anstelle von $(R, +, \cdot)$ sprechen wir vereinfachend von dem Ring R.

3.1.7 Definition

Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$.

(a) Ein Element $a \in R$ heißt *Nullteiler*, falls $a \neq 0$ ist und ein $0 \neq b \in R$ existiert mit $ab = 0$.

(b) Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, falls ein $b \in R$ existiert mit $ab = 1$.

3.1.8 Bemerkung

Falls $a \in R$ eine Einheit ist, existiert das Inverse und es ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen das Inverse mit a^{-1}.

3.1.9 Definition

Ein kommutativer Ring R mit Eins heißt *Integritätsbereich*, falls $R \neq \{0_R\}$ ist und es in R keine Nullteiler gibt.

3.1.10 Definition

Sei K eine nichtleere Menge mit mindestens zwei Elementen und seien $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K. Genau dann ist $(K, +, \cdot)$ ein *Körper*, wenn K ein kommutativer Ring mit Eins ist, sodass jedes Element $0 \neq a \in K$ ein eindeutig bestimmtes multiplikatives Inverses hat.

3.1.11 Satz

Sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren auf $R \times R \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt. Sei $(r, u), (s, v) \in R \times R \setminus \{0\}$. Es gilt, dass $(r, u) \sim (s, v)$ ist genau dann, wenn $rv = su$ ist. Man sieht sofort, dass die Relation reflexiv und symmetrisch ist. Sei $(r, u) \sim (s, v)$ und $(s, v) \sim (t, w)$, also $rv = su$ und $sw = tv$. Wir können nun schreiben:

$$rwv = rvw = suw = swu = tvu = tuv.$$

Nach Voraussetzung ist R ein Integritätsbereich. Da v ungleich null ist, folgt $rw = tu$, so dass $(r, u) \sim (t, w)$ ist. Somit ist $\sim$ transitiv.
Auf $R \times R \setminus \{0\}$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(r, u) + (s, v) = (rv + su, uv),$$

$$(r, u)(s, v) = (rs, uv)$$

Wir setzen $\mathrm{Quot}(R) := (R \times R \setminus \{0\}, \sim)$ und bezeichnen die Äquivalenzklasse von (r, u) mit $\frac{r}{u}$. Nach Definition gilt für $(r_1, u_1), (r_2, u_2) \in \mathrm{Quot}(R)$:

$$\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2} \text{ genau dann, wenn } r_1 u_2 = u_1 r_2 \text{ ist.}$$

Wir definieren die Addition und Multiplikation der Äquivalenzklassen folgendermaßen:

$$\frac{r}{u} + \frac{s}{v} = \frac{rv + su}{uv}$$

$$\frac{r}{u}\frac{s}{v} = \frac{rs}{uv}.$$

Die Menge $(\mathrm{Quot}(R), +, \cdot)$ ist ein Körper, wir nennen ihn den Quotientenkörper von R.

Beweis:

Wir zeigen die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen. Sei $(r_1, u_1), (r_2, u_2), (s_1, v_1), (s_2, v_2) \in R \times R \setminus \{0\}$ und $\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2}$ und $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$. Nach Definition gilt $r_1 u_2 = u_1 r_2$ und $s_1 v_2 = v_1 s_2$. Wir wollen zeigen, dass $\frac{r_1}{u_1} + \frac{s_1}{v_1} \overset{!}{=} \frac{r_2}{u_2} + \frac{s_2}{v_2}$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u_1 v_1 (r_2 v_2 + u_2 s_2) &= u_1 v_1 r_2 v_2 + u_1 v_1 u_2 s_2 = u_1 r_2 v_1 v_2 + u_1 u_2 v_1 s_2 \\ &= r_1 u_2 v_1 v_2 + u_1 u_2 s_1 v_2 = u_2 v_2 (r_1 v_1 + u_1 s_1). \end{aligned}$$

Es gilt also $\frac{r_1 v_1 + u_1 s_1}{u_1 v_1} = \frac{r_2 v_2 + u_2 s_2}{u_2 v_2}$. Somit ist die Addition wohldefiniert.
Die Wohldefiniertheit der Multiplikation folgt analog. Denn für die oben definierten Äquivalenzklassen erhalten wir $u_2 v_2 (r_1 s_1) = u_2 v_2 r_1 s_1 = r_1 u_2 s_1 v_2 = u_1 r_2 v_1 s_2 = u_1 v_1 (r_2 s_2)$ und damit $\frac{r_1 s_1}{u_1 v_1} = \frac{r_2 s_2}{u_2 v_2}$.
Die Menge (Quot(R), $+$) ist eine abelsche Gruppe. Die Assoziativität und Kommutativität sind leicht zu überprüfen. Das neutrale Element der Addition ist $0 = \frac{0}{1}$, das negative Element der Addition ist $-\left(\frac{r}{u}\right) = \frac{-r}{u}$.
Weiter ist (Quot(R), $\cdot$) eine abelsche Gruppe, wobei $\frac{1}{1}$ das neutrale Element und $\left(\frac{r}{u}\right)^{-1} = \frac{u}{r}$ das inverse Element ist.
Das Distributivgesetz kann leicht nachgerechnet werden.
Somit ist der Körper (Quot(R), $+$, $\cdot$) konstruiert. □

3.1.12 Bemerkung
Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

3.1.13 Beispiel
Es gilt $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

3.1.14 Beispiel
Ist D $\subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\mathcal{O}(D)$ der in D holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt $M(D) := \mathrm{Quot}(\mathcal{O}(D)) = \{\frac{f}{g} : f, g \in \mathcal{O}(D),\ g \neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen. Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert.

3.1.15 Satz (Universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers)
Sei R ein Integritätsring. Sei K ein Körper und sei $\varphi\colon R \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann gibt es genau einen Körperhomomorphismus $\Phi\colon \mathrm{Quot}(R) \to K$ mit $\Phi_{|R} = \varphi$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst die Existenz eines derartigen Körperhomomorphismus. Wir definieren

$\Phi\colon \mathrm{Quot}(R) \to K, \frac{a}{b} \mapsto \varphi(a)(\varphi(b))^{-1}$. Da φ injektiv ist, gilt $\varphi(b) \in K^*$ für $b \in R \setminus \{0\}$.
Die Abbildung Φ ist wohldefiniert. Seien $(a,b),(c,d) \in R \times R \setminus \{0\}$ mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Wir wollen zeigen, dass $\varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(c)(\varphi(d))^{-1}$.
Wir wissen nach Definition der Elemente des Quotientenkörpers gilt $ad = cb$ und erhalten $\varphi(ad) = \varphi(cb)$. Da φ ein Homomorphismus ist, gilt $\varphi(a)\varphi(d) = \varphi(c)\varphi(b)$ und damit $\varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \varphi(d)(\varphi(d))^{-1}$.
Die Abbildung Φ ist ein Homomorphismus, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) &= \Phi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \varphi(ad+bc)(\varphi(bd))^{-1}\\ &= \left(\varphi(a)\varphi(d)+\varphi(b)\varphi(c)\right)\left(\varphi(b)\varphi(d)\right)^{-1}\\ &= \left(\varphi(a)\varphi(d)+\varphi(b)\varphi(c)\right)(\varphi(b))^{-1}(\varphi(d))^{-1}\\ &= \varphi(a)(\varphi(b))^{-1}+\varphi(c)(\varphi(d))^{-1} = \Phi\left(\frac{a}{b}\right)+\Phi\left(\frac{c}{d}\right).\end{aligned}$$

Die Abbildung Φ ist ebenso multiplikativ:

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) &= \Phi\left(\frac{ac}{bd}\right) = \varphi(ac)(\varphi(bd))^{-1}\\ &= \left(\varphi(a)\varphi(c)\right)\left(\varphi(b)\varphi(d)\right)^{-1}\\ &= \varphi(a)\varphi(b)^{-1}\varphi(c)\varphi(d)^{-1}\\ &= \Phi\left(\frac{a}{b}\right)\Phi\left(\frac{c}{d}\right).\end{aligned}$$

Weiter gilt $\Phi(1_R) = \Phi\left(\frac{1_R}{1_R}\right) = \varphi(1_R)\varphi(1_R)^{-1} = 1_K$.
Sei $a \in R$, so erhalten wir $\Phi\left(\frac{a}{1}\right) = \varphi(a)\varphi(1_R)^{-1} = \varphi(a)$.
Der Körperhomomorphismus ist eindeutig, denn angenommen es gäbe Φ_1, Φ_2 Körperhomomorphismen mit $\Phi_{1|R} = \Phi_{2|R} = \varphi$. Sei $\frac{a}{b} \in \mathrm{Quot}(R)$ mit $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$. Dann gilt: $\Phi_1\left(\frac{a}{b}\right) = \Phi_1\left(ab^{-1}\right) = \Phi(a)(\Phi(b))^{-1} = \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} = \Phi_2(a)\left(\Phi_2(b)\right)^{-1} = \Phi\left(\frac{a}{b}\right)$. $\square$

3.1.16 Definition

Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* ist ein K-Vektorraum V auf dem zusätzlich eine Multiplikation $(v,w) \mapsto v \cdot w$ definiert ist und für den gilt:

(a) $(V,+,\cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.

(b) Für $v,w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot (v \cdot w) = (\lambda \cdot v) \cdot w = v \cdot (\lambda \cdot w)$

3.2 Angeordnete algebraische Strukturen

3.2.1 Anordnung

3.2.1 Definition
Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn es eine Relation " $\leq$ " auf A gibt, die folgende Eigenschaften für alle $a, b, c \in A$ erfüllt:

T1: (Reflexivität) $a \leq a$,

T2: (Antisymmetrie) Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$,

T3: (Transitivät) Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

Die Relation " $\leq$ " bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als *Anordnung* beziehungsweise *totale Ordnung* bezeichnet, wenn neben T1-T3 die anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4: Für alle $a, b \in A$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$. Dabei gilt $a < b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$ ist.

3.2.2 Definition
Seien A und A' teilweise geordnete Mengen. Eine Abbildung $\varphi\colon A \to A', a \mapsto a'$ wird *Ordnungshomomorphismus* von A nach A' genannt, falls folgende Anforderung erfüllt ist:

(a) (Ordnungstreue) Wenn $a \leq b$ gilt, so folgt $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ für alle $a, b \in A$.

Gilt zusätzlich die folgende Aussage,

(b) (Bijektivität) Für jedes $a' \in A'$ existiert genau ein $a \in A$, mit $a' = \varphi(a)$,

so bezeichnen wir φ als *Ordnungsisomorphismus*. A und A' werden in diesem Fall *ordnungsisomorph*, kurz *o-isomorph* genannt.

3.2.3 Definition
Eine *teilweise geordnete Gruppe* bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Addition,

G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation " $\leq$ ", wie in Definition 3.2.1,

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: Für $a, b \in G$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $c + a \leq c + b$ und $a + c \leq b + c$ für alle $c \in G$.

3.2.4 Definition
Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

3.2.5 Beispiel
Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G ist bezüglich der selben Relation wie G angeordnet.

3.2.6 Beispiel
Wir betrachten die natürliche Ordnung auf den natürlichen, ganzen und reellen Zahlen.

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für $a, b \in \mathbb{N}$, dass $a \leq b$ genau dann gilt, wenn $b - a \in \mathbb{N}_0$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$, dass $a \leq b$ ist, genau dann, wenn $b - a \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Die Gruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist total geordnet bezüglich der Relation " $\leq$ ". Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$, dass $a \leq b$ ist, genau dann, wenn $0 \leq b - a$ gilt.

3.2.7 Bemerkung
Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der Definition einer angeordneten Gruppe. Denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei, so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz G3 in 3.2.3 ergeben. □

3.2.8 Folgerung
Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Gruppe G ist bezüglich der Relation " $\leq$ " angeordnet.

(ii) Eine Teilmenge P einer Gruppe G genügt den folgenden Bedingungen:

P1: $\{0\} \cup P \cup (-P) = G$, $P \cap (-P) = \varnothing$,

P2: $P + P \subseteq P$,

P3: $x + P + (-x) \subseteq P$ für jedes $x \in G$.

Wir nennen P den *Positivbereich* von G.

Beweis:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Wir betrachten die Menge $P = \{x \in G \mid x \geq 0_G\}$. P ist eine Teilmenge von G und man sieht sofort, dass P die Axiome P1-P3 erfüllt.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir wissen, dass die Menge P der Positivbereich von G ist. Wir definieren für $a, b \in G$, dass $b \leq a$ gilt, genau dann, wenn $a - b \in P$. Dies liefert uns nach den Eigenschaften der Menge P eine Anordnung auf G. □

3.2.9 Beispiel
Ist G mit dem Positivbereich P eine angeordnete Gruppe, so ist G auch mit dem Positivbereich $(-P)$ eine angeordnete Gruppe. Die Abbildung $a \mapsto -a$ ist ein Ordnungsisomorphismus.

3.2.2 Wohlordnung

Nun beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Wohlordnung. Diese Eigenschaft wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. Wir definieren wohlgeordnete Mengen wie in [Fuc66, S. 16].

3.2.10 Definition
Eine angeordnete Menge W nennt man *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Es existiert also ein Element $u \in V$ mit $u \leq v$ für alle $v \in V$.

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Dieses Theorem, so stellte sich nach erfolglosen Widerlegungsversuchen zahlreicher Mathematiker heraus, ist äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Lemma von Zorn.
Die natürliche Anordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist beispielsweise eine Wohlordnung. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist mit der natürlichen Anordnung " $\leq$ " total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt sind und somit $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element enthält. Der Wohlordnungssatz besagt, dass jede Menge und daher auch $\mathbb{Z}$ wohlgeordnet werden kann. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

3.2.11 Bemerkung
Ist $W \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat W ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element.

3.2.12 Bemerkung
Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet.

3.2.13 Beispiel
Betrachte folgende Relation " $\preceq$ " auf $\mathbb{Z}$:

$$a \preceq b \text{ genau dann, wenn } |a| \leq |b| \text{ oder } |a| = |b| \text{ und } a \leq b$$

ist. Die Relation " $\preceq$ " ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$ und wir erhalten $0 \preceq -1 \preceq 1 \preceq -2 \preceq 2 \preceq$

$-3 \preceq 3....$

Kapitel 4

Angeordnete abelsche Gruppen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die zur Betrachtung des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers benötigt werden. Nach einer Einführung in die Theorie angeordneter abelscher Gruppen beschäftigen wir uns mit deren Wohlordnung, eine Eigenschaft, die für die Konstruktion des Potenzreihenkörpers unabdingbar ist. Mithilfe der Archimedizität führen wir eine spezielle Art der Anordnung von Gruppen ein. Daran schließt die zentrale Aussage des Kapitels an: der Satz von Hölder. Der Satz besagt, dass archimedische abelsche angeordnete Gruppen in die additive Gruppe von $\mathbb{R}$ eingebettet werden können.
Nachdem wir kurz auf die angeordnete Menge konvexer Untergruppen einer angeordneten abelschen Gruppe eingehen, geben wir einen kurzen Ausblick auf die Bewertungstheorie. Die nachfolgenden Ausführungen sind angelehnt an [Fuc66, S. 21 - 28] und [PC83, S. 1 - 4].

4.0.14 Definition
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist ein Tripel $(G, +, \leq)$, wobei $(G, +)$ eine additiv geschriebene abelsche Gruppe ist, die bezüglich “ $\leq$ ” total geordnet ist.

4.0.15 Notation
Wir verwenden im Kapitel 5 für eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +, \leq)$ vereinfachend die Bezeichnung G.

4.0.16 Beispiel

- Die Menge der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.
- Die Menge der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \leq)$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe.

4.1 Wohlordnung in angeordneten abelschen Gruppen

Die folgenden Aussagen orientieren sich an der Arbeit „A residue theorem for Malcev–Neumann series“ von Guoce Xin ([Xin05]).

4.1.1 Satz
Sei “ $\leq$ ” eine totale Ordnung auf der Menge W. Dann ist W genau dann wohlgeordnet, wenn es keine streng monoton fallende Folge in W gibt.

Beweis:

“ $\Rightarrow$ ” Sei W wohlgeordnet. Angenommen es gibt eine streng monoton fallende Folge von Elementen in W, nämlich $a_1 > a_2 > a_3 > ....$ Damit erhalten wir eine Teilmenge $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, die kein kleinstes Element besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Wohlordnung von W.
“ $\Leftarrow$ ” Es gibt keine streng monoton fallende Folge in W. Angenommen W ist nicht wohlgeordnet. Dann gibt es eine Teilmenge A von W, die kein kleinstes Element enthält. Für ein beliebiges Element $a_1 \in A$ finden wir ein $a_2 \in A$ mit $a_2 < a_1$. Dieses Verfahren lässt sich endlos fortsetzen und wir erhalten eine streng monoton fallende Folge $a_1 > a_2 > a_3 > ...$, Widerspruch. □

4.1.2 Beispiel
Total geordnete endliche Mengen sind wohlgeordnet.

Betrachte nun die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen W_A einer total geordneten Menge A, die nicht zwangsläufig wohlgeordnet ist.

4.1.3 Lemma
Sei $U_n \in W_A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \in W_A$, und für $U_1, U_2 \in W_A$ gilt $U_1 \cup U_2 \in W_A$.

Beweis:

Die erste Aussage ist trivial. Zum Beweis der zweiten Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $U_1 \cup U_2$ sei nicht wohlgeordnet, dann gibt es nach 4.1.1 eine streng monoton fallende Folge $u_1 > u_2 > ...$ in $U_1 \cup U_2$.
Betrachten wir alle Elemente der Teilmenge U_1. Wir können diese, da U_1 total geordnet ist, als Folge $u_{i_1} > u_{i_2}...$ schreiben. Aufgrund der Wohlordnung von U_1 ist die so erhaltene fallende Folge endlich. Die selbe Argumentation wählen wir für U_2 und erhalten die endliche fallende Folge $u_{j_1} > u_{j_2}....$ Aber jedes Element der streng monoton fallenden Folge $u_1 > u_2 > ...$ ist in einer der beiden endlichen Folgen enthalten. Widerspruch! □

Die Menge W_A ist somit unter endlicher Vereinigung und dem Schnitt abzählbar vieler

Elemente abgeschlossen.

4.1.4 Lemma

Wir betrachten eine total geordnete Menge A. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A erfüllt mindestens eine der drei folgenden Eigenschaften:

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine streng monoton wachsende Teilfolge.

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine konstante Teilfolge.

(3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine streng monoton fallende Teilfolge.

Beweis:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle weder die Bedingung (2) noch (3). Wir wollen zeigen, dass sie eine streng monoton wachsende Teilfolge enthält.
Da die Folge nach Voraussetzung keine streng monoton fallende Teilfolge enthält, gibt es ein kleinstes Element a_{i_1}. Andernfalls ließe sich eine streng monoton fallende Teilfolge konstruieren. Es werden alle Folgenglieder a_n mit $a_n = a_{i_1}$ aus $(a_n)_{n\geq 1}$entfernt. Die Folge bleibt unendlich, da es nur endlich viele Folgenelemente nach Voraussetzung gibt, die gleich a_{i_1} sind. In der daraus entstandenen Folge ist jedes Element größer als a_{i_1}. Sie enthält wiederum keine streng monoton fallende oder konstante Teilfolge. Wir wiederholen das durchgeführte Verfahren und konstruieren so die streng monoton wachsende Teilfolge $a_{i_1} < a_{i_2} < ....$

□

Bernhard Hermann Neumann, ein deutsch-englisch-australischer Mathematiker, bewies in seinem Werk „On ordered division rings“ [Neu49, S. 206] die beiden folgenden wichtigen Lemmata, deren volle Bedeutung sich im Hauptteil 5.5 erschließen wird.

4.1.5 Lemma

Die Menge W ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W eine monoton steigende Teilfolge $w_{\tau(1)} \leq w_{\tau(2)} \leq ...$ enthält.

Beweis:

“ $\Rightarrow$ ” Sei die total geordnete Menge W wohlgeordnet. Dann gilt nach Lemma 4.1.4 und mit Satz 4.1.1, dass eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus W entweder eine streng monoton steigende oder konstante Teilfolge enthält. Jede Folge aus W besitzt daher eine monoton steigende Teilfolge.
“ $\Leftarrow$ ” Jede Folge von Elementen aus W enthält eine monoton steigende Teilfolge. Angenommen W sei nicht wohlgeordnet. Nach Satz 4.1.1 existiert somit eine streng monoton fallende Folge in W. Nach Voraussetzung muss jede Folge eine monoton steigende Teilfolge enthalten. Dies führt zu einem Widerspruch, da eine streng monoton fallende Folge keine monoton steigende Teilfolge enthalten kann. □

4.1.6 Lemma (Lemma von B.H. Neumann)
Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe und $V, W \subseteq G$ wohlgeordnet, dann ist $U = V + W$ ebenso wohlgeordnet.

Beweis:

Sei

$$u_1 = v_1 + w_1,\ u_2 = v_2 + w_2\ ..., \text{ mit } v_r \in V, w_r \in W \text{ und } r \in \mathbb{N}$$

eine beliebige Folge von Elementen aus U. Es gibt eine monoton steigende Teilfolge $v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, ...$ mit $v_{\tau(1)} \leq v_{\tau(2)} \leq ...$ in der Menge V. Die entsprechende Folge in W, nämlich $w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, ...$ enthält ebenso eine monoton steigende Teilfolge $w_{\tau(\sigma(1))} \leq w_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Diese beiden Teilfolgen existieren aufgrund der Wohlordnung und nach Lemma 4.1.5. Daraus folgt, es gibt zu der beliebigen Folge von Elementen aus U ebenso eine monoton steigende Teilfolge $u_{\tau(\sigma(1))} \leq u_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Nach Lemma 4.1.5 ist U damit wohlgeordnet. □

4.1.7 Folgerung
Seien V, W wohlgeordnete Teilmengen einer angeordneten abelschen Gruppe G, dann gibt es für ein $g \in G$ nur endlich viele Paare $(v, w) \in V \times W$ mit $v + w = g$.

Beweis:

Angenommen es gäbe unendlich viele paarweise verschiedene $(v_n, w_n) \in V \times W$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass $g = v_n + w_n$ ist. Da V und W wohlgeordnet sind, besitzt weder $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Teilfolge. Die Folge $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält keine konstante Teilfolge, da sie nach Voraussetzung paarweise verschiedene Glieder besitzt. Nach Lemma 4.1.4 hat $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge. Dies ist ein Widerspruch, da g konstant bleiben muss. □

4.2 Archimedisch angeordnete abelsche Gruppen

Erst seit dem Ende des 19. Jahrhunderts kristallisierte sich die hohe Bedeutung angeordneter Strukturen in der Mathematik heraus. Man erkannte, dass das archimedische Axiom unverzichtbar für die nähere Untersuchung dieses Bereichs war. Es spielte unter anderem eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der reellen Zahlen mithilfe des Dedekindschen Schnittes (1872). Genau genommen ermöglicht die archimedische Eigenschaft die Herstellung von Kommutativität und Vollständigkeit.
Wir orientieren uns an dem Kapitel „Angeordnete Gruppen“ in [Fuc66, S. 73 - 93] sowie an Arbeiten von Prieß-Crampe [PC70], [PC83].
Im Folgenden sei G eine angeordnete abelsche Gruppe.

4.2.1 Definition
Der *absolute Betrag* $|a|$ eines Elements a $\in G$ ist definiert als $|a| = \max\{a, -a\}$.

Es gilt die *Dreiecksungleichung*

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \text{ für alle } a, b \in G.$$

Die Ungleichung gilt trivialerweise, wenn beide Elemente das gleiche Vorzeichen haben. Sei also $a < 0$ und $b > 0$. Dann ist $a = -|a|$.
Falls $|a| \leq b$ ist, erhalten wir

$$|a+b| = |-|a|+b| = b - |a| \leq b = |b| \leq |a| + |b|.$$

Falls $|a| > b$ ist, erhalten wir

$$|a+b| = |-|a|+b| = |a| - b \leq |a| \leq |a| + |b|.$$

4.2.2 Definition
G heißt *archimedisch*, wenn es für alle $a, b \in G$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

4.2.3 Definition
Seien $a, b \in G$. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n|a| < |b|.$$

In Zeichen schreiben wir $a \ll b$.

4.2.4 Definition
Die Elemente $a, b \in G$ werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, wenn natürliche Zahlen m und n existieren, so dass

$$|a| < m|b| \text{ und } |b| < n|a| \text{ ist.}$$

In diesem Fall schreiben wir $a \sim b$.

4.2.5 Folgerung
Für jedes Paar von Elementen $a, b \in G$ gilt genau eine der anschließenden Relationen:

(i) $a \ll b$ (ii) $a \sim b$ (iii) $b \ll a$

Des Weiteren schließen wir aus Definition 4.2.3 und 4.2.4:

(i) Aus $a \ll b$ und $a \sim c$ folgt $c \ll b$,

(ii) Aus $a \ll b$ und $b \sim d$, folgt $a \ll d$,

(iii) Aus $a \ll b$ und $b \ll c$ folgt $a \ll c$,

(iv) Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$,

(v) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Sind alle Elemente von $G \setminus \{0\}$ archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet.*
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne $[g]$ die *archimedische Klasse*, in der das Element $g \in G$ liegt, $[G]$ die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G. Wir definieren auf den archimedischen Klassen die Anordnung: $[g] < [h]$ genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N} n|a| < |b|$ ist.

4.2.6 Lemma
Die archimedische Klasse einer Summe entspricht der archimedischen Klasse des größten Summanden.

Beweis:

Seien $g, h \in G$, wir müssen zeigen, dass $\{g + h] \overset{!}{=} \max([g], [h])$ ist. Sei o.B.d.A. $g \leq h$, dann gilt $h < g + h \leq 2h$. Daraus folgt sofort, dass $[g + h] = [h]$ ist. $\square$

4.3 Der Satz von Hölder

In diesem Abschnitt werden wir einen sehr wichtigen Satz der Theorie angeordneter Strukturen vorstellen, den *Satz von Hölder*. Dieser Satz besagt, dass jede abelsche archimedische angeordnete Gruppe bis auf Isomorphie einer Untergruppe der angeordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen entspricht. Zwar wird der Beweis dieser Aussage in der verwendeten Literatur Otto Hölder ([Hö01]) zugeschrieben, die grundlegenden Ideen dazu lieferte jedoch bereits Bettazi in seinem Werk „Teoria delle grandezze“, 1890 [Lü08, S. 578].
Wir orientieren uns im Folgenden an [Hö01] und [PC83].

4.3.1 Satz
Eine angeordnete abelsche Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie zu einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist.

Beweis:

„ $\Leftarrow$ " Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch angeordnet ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete abelsche Gruppe G gelten muss.
„ $\Rightarrow$ " Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. G besitzt nach 3.2.8 einen Positivbereich P. Nach Voraussetzung erfüllt G die archimedische Eigenschaft. Sei $G \neq \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element der Addition in G ist. Andernfalls wäre G isomorph zu $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, der trivialen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Angenommen der Positivbereich P hat ein kleinstes Element. Es gibt also ein $g \in P$ mit $0_G \leq g$ wobei für jedes $h \in G$ mit $0_G \leq h < g$ folgt, dass $h = 0_G$ gilt. Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem $h \in G$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass $ng \leq h < (n+1)\,g$ gilt. Daher erhalten wir $0_G \leq h + (-n)\,g < (n+1)g - ng = g$. Also gilt, dass $h + (-n)\,g = 0_G$ ist. Infolgedessen ist $G = \langle g \rangle$, wobei $\langle g \rangle$ die von g erzeugte Untergruppe ist, o-isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen bezüglich der Zuordnung $ng \mapsto n$.
Im weiteren Beweis gehen wir davon aus, dass P kein kleinstes Element hat. Es lässt sich also zu jedem $g \in P$ ein $h \in G$ finden, sodass $0 < h < g$ gilt. Wir bezeichnen die Gruppe G dann als *dicht*.
Wir wählen ein Element $\alpha \in P$ beliebig. Für jedes $g \in P$ definieren wir:

$$S_g := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{>0} \mid m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \leq ng\} \subset \mathbb{Q}_{>0}.$$

Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $m\alpha \leq ng \Leftrightarrow mp\alpha \leq npg$. Die Darstellung von $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen hängt also nicht damit zusammen, ob r in S_g enthalten ist.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es einen ordnungstreuen Monomorphismus zu finden, der G auf die additive Gruppe der reellen Zahlen abbildet. Wir zeigen nun folgende Aussagen:

(i) Für alle $g \in P$ gilt $S_g \neq \varnothing$ und $S_g \neq \mathbb{Q}_{>0}$. Für $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $s \in S_g$ mit $r < s$ folgt $r \in S_g$.

(ii) S_g ist nach oben beschränkt für alle $g \in P$. Die Abbildung $\Phi : P \to \mathbb{R}_{>0}, g \mapsto \sup(S_g)$ ist somit wohldefiniert.

(iii) Für alle $g, h \in P$ sind $g \leq h$, $S_g \subseteq S_h$ und $\Phi(g) \leq \Phi(h)$ äquivalent.

(iv) Sei $g, h \in P$ und $r, s \in \mathbb{Q}_{>0}$. Sei $r \in S_g$ und $s \in S_h$ so folgt $r + s \in S_{g+h}$.
Sei $r \notin S_g$ und $s \notin S_h$, so folgt $r + s \notin S_{g+h}$.

(v) Es gilt $\Phi\,(g+h) = \Phi\,(g) + \Phi\,(h)$ für alle $g, h \in P$.

(vi) Φ wird fortgesetzt auf die gesamte Gruppe G durch $\Phi\,(0_G) = 0$ und $\Phi\,(-g) = -\Phi\,(g)$ für alle g $\in P$.

Insgesamt ist Φ ein injektiver Homomorphismus angeordneter abelscher Gruppen und damit ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Zu (i): Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem Element $g \in P$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng > \alpha$. Nach Definition von S_g gilt $\frac{1}{n} \in S_g$ und somit ist S_g nicht leer.
Angenommen $S_g = \mathbb{Q}_{>0}$, dann wäre $n \in S_g$ beziehungsweise $n\alpha \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Seien $r, s \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt $kn < lm$ und, da $s \in S_g$ liegt, erhalten wir $m\alpha \leq ng$ und $kn\alpha \leq lm\alpha \leq lng$. Daraus wiederum folgt: $\frac{kn}{ln} = r \in S_g$.
Zu (ii): Angenommen S_g wäre unbeschränkt, dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in S_g$ mit n $<$ r. Nach (i) folgt daraus $n \in S_g$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $n\alpha \leq g$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Zu (iii): Zunächst beweisen wir die erste Implikation. Sei $g, h \in P$ und es gelte $g \leq h$. Für $r \in S_g$, $r := \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $m\alpha \leq ng$. Da $g \leq h$ ist, folgt $m\alpha \leq nh$ und damit $r \in S_h$. Die zweite Implikation folgt nach Definition von Φ offensichtlich.
Sei $\Phi(g) \leq \Phi(h)$. Angenommen es sei $g > h$. Nach der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(g-h) > 2\alpha$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ möglichst klein mit $m\alpha > nh$. Dieses m existiert aufgrund der Archimedizität von G. Es gilt $\frac{m}{n} \notin S_h$ und $\frac{m}{n} \geq \Phi(h)$. Da m minimal ist, gilt die Ungleichung $(m-1)\alpha \leq nh$ und wir erhalten $(m+1)\alpha \leq nh + 2\alpha < nh + n(g-h) = ng$ und $\frac{m+1}{n} \in S_g$, also $\frac{m+1}{n} \leq \sup(S_g) = \Phi(g)$. Insgesamt ergibt sich $\Phi(h) \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq \Phi(g)$, Widerspruch.
Zu (iv): Sei $r \in S_g, s \in S_h$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $k\alpha < lg$ und $m\alpha \leq nh$. Wir erhalten $kn\alpha \leq lng$ und $lm\alpha \leq lnh$. Somit liegt $r + s = \frac{kn+lm}{ln}$ in der Menge S_{g+h}. Die zweite Aussage folgt analog indem in Obigem " $\leq$ " durch " $>$ " ersetzt wird.
Zu (v): Als erstes zeigen wir, dass $\Phi(g) + \Phi(h)$ eine obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gibt ein $r \in S_{g+h}$ mit $r > \Phi(g) + \Phi(h)$. Wähle $\epsilon = r - \Phi(g) - \Phi(h)$ und wähle s, t $\in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $\Phi(g) < s < \Phi(g) + \frac{\epsilon}{2}$ und $\Phi(h) < t < \Phi(h) + \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt folgt $s + t < \Phi(g) + \Phi(h) + \epsilon = r$. Da $s \notin S_g$ und $t \notin S_h$ gilt $s + t \notin S_{g+h}$ nach (iv). Wir erhalten $s + t \geq \Phi(g+h) \geq r$ und der Widerspruch $r \leq s + t < r$ zeigt, dass ein derartiges r nicht existieren kann.
Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(g) + \Phi(h)$ die kleinste obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gäbe eine kleinere obere Schranke $o \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\epsilon = \Phi(g) + \Phi(h) - o$. Nach Definition der Abbildung gibt es ein $r \in S_g$ mit $r < \Phi(g) - \frac{\epsilon}{2}$ und $s \in S_h$ mit $s < \Phi(h) - \frac{\epsilon}{2}$. Nach (iv) ist $r + s$ in S_{g+h} und daher $r + s \leq o$. Widerspruch, da $r + s > \Phi(g) + \Phi(h) - \epsilon = o$.
Zu (vi): Wir wissen für $g, h > 0_G$ und $g \leq h$ folgt, dass $\Phi(g) \leq \Phi(h)$ ist. Die Aussage gilt offensichtlich, wenn eines der beiden Elemente g oder h gleich Null ist. Sei $g < 0_G$ und $h > 0_G$,

dann folgt die Behauptung nach Definition. Wir betrachten den Fall $g, h < 0_G$ und erhalten:

$$g \leq h \Leftrightarrow -g \geq -h \Leftrightarrow \Phi(-g) \geq \Phi(-h) \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h).$$

Wir zeigen nun $\Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für beliebige $g, h \in G$. Wir beginnen mit dem Fall $g, h < 0_G$. Hier kann auf das bereits Bewiesene zurückgegriffen werden:

$$\Phi(g+h) = -\Phi((-g)+(-h)) = (-\Phi(-g)) + (-\Phi(-h)) = \Phi(g) + \Phi(h).$$

Nun betrachten wir den Fall $g > 0_G$ und $h < 0_G$. Dann gilt entweder $g \geq -h$ oder $g < -h$. Wir beschäftigen uns zunächst mit $g \geq -h$. Dann ist $g + h \geq 0_G$, und nach der bereits gezeigten Aussage folgern wir:

$$\begin{aligned} & \Phi(g+h) + \Phi(-h) = \Phi(g+h-h) = \Phi(g) \\ \Leftrightarrow\quad & \Phi(g+h) - \Phi(h) = \Phi(g) \\ \Leftrightarrow\quad & \Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h). \end{aligned}$$

Sei nun $g < -h$. Dann ist $-g - h > 0$, also $\Phi(g) + \Phi(-g-h) = \Phi(-h)$, was äquivalent zu $\Phi(g) - \Phi(g+h) = -\Phi(h)$ und zu $\Phi(g) + \Phi(h) = \Phi(g+h)$ ist.
Die Gültigkeit im Fall $g, h > 0$ folgt sofort aus der Definition von Φ. Da Φ nach (iii) ordnungserhaltend ist, ist Φ ein ordnungserhaltender Isomorphismus. □

4.3.2 Satz
Sei $(G, +)$ eine Untergruppe der natürlich geordneten additiven Gruppe der reellen Zahlen und $\phi\colon G \to \mathbb{R}$ ein injektiver o-Homomorphismus. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist ϕ ein o-Monomorphismus, also ein injektiver o-Homomorphismus und damit sind mit $0 < g_1,\ g_2 \in G$ auch $\phi(g_1)$ und $\phi(g_2)$ positiv. Angenommen es gilt, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} \neq \frac{g_1}{g_2}$, so gibt es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, die zwischen $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)}$ und $\frac{g_1}{g_2}$ liegt. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} < \frac{m}{n} < \frac{g_1}{g_2}$ ist. Damit folgt, dass $n \cdot g_1 > m \cdot g_2$ und $\phi(n \cdot g_1) < \phi(m \cdot g_2)$ ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Ordnungstreue der Abbildung ϕ. Folglich ist $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} = \frac{g_1}{g_2}$. Wir erhalten, da g_1, g_2 beliebig gewählt sind, auch für alle positiven Elemente $g \in G$, dass die Gleichung $\frac{\phi(g_1)}{g_1} = \frac{\phi(g)}{g}$ erfüllt ist.
Für die negativen Gruppenelemente $g \in G$, mit $g < 0$ und daher $-g > 0$ erhalten wir aufgrund der Homomorphismuseigenschaften $\frac{\phi(g)}{g} = \frac{-\phi(g)}{-g} = \frac{\phi(-g)}{-g} = \frac{\phi(g_1)}{g_1}$. Mit der positiven Konstanten $r := \frac{\phi(g_1)}{g_1}$ ist die Aussage $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$ gezeigt. □

4.3.3 Folgerung
Sei G eine archimedisch angeordnete abelsche Gruppe und sei $g \in G$ mit $g > 0$. Dann gibt es genau einen o-Monomorphismus $\Phi\colon G \to \mathbb{R}$, $g \mapsto 1$.

Beweis:

Nach dem Satz von Hölder 4.3.1 gibt es einen o-Isomorphismus $\varphi\colon G \to U, g \mapsto u$, wobei U eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist.
Weiterhin wissen wir aus Satz 4.3.2, dass es eine reelle positive Zahl r gibt, sodass ein o-Monomorphismus die Form $\phi\colon G \to \mathbb{R}, g \mapsto rg$ hat. Die Konkatenation des o-Isomorphismus und o-Monomorphismus $\Phi := \phi \circ \varphi$ ergibt wiederum einen o-Monomorphismus. Wir wählen für $0 < g \in G$ ein $r := \frac{1}{\varphi(g)}$. Dieser Quotient existiert, da $u \neq 0$ ist und da U eine Untergruppe des Körpers der reellen Zahlen ist, womit das Inverse zu $\varphi(g)$ nämlich $\frac{1}{\varphi(g)}$ eindeutig existiert. Da $\varphi(g)$, da es sich um einen o-Isomorphismus handelt, positiv ist, folgt die Positivität von r. Die Abbildung $\Phi\colon G \to \mathbb{R}, g \mapsto 1_{\mathbb{R}}$, mit $\Phi = \phi \circ \varphi$ ist nach Satz 4.3.2 ein o-Monomorphismus.
Die Eindeutigkeit des o-Monomorphismus der Form $\Phi\colon G \to \mathbb{R}, g \mapsto 1$ folgt direkt aus der Eindeutigkeit des Quotienten $\frac{1}{\varphi(g)}$, welche wir aufgrund der o-Isomorphie zu einer Untergruppe der reellen Zahlen erhalten. □

Die Grundaussage dieses Satzes bewies Hion 1954 in seinem russischsprachigen Werk „ Archimedisch geordnete Ringe“. Er setzte jedoch einen o-Homomorphismus zwischen zwei Untergruppen der additiven angeordneten Gruppe der reellen Zahlen voraus, ebenso wie Fuchs und Prieß-Crampe, die den Satz in ihre Arbeiten mitaufnahmen. Der Satz 4.3.2 impliziert weiterhin die o-Isomorphie zwischen der Gruppe der ordnungserhaltenden Automorphismen der archimedischen Gruppe und einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen. [PC83]

4.4 Die Menge konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um die Menge der konvexen Untergruppen einer angeordneten abelschen Gruppe. Diese spielen in der Theorie der angeordneten Gruppe eine bedeutende Rolle, da sie Kriterien zur Anordnungsfähigkeit von Gruppen liefern. Im Folgenden stellen wir den Zusammenhang zur Archimedizität als weitere Möglichkeit der Ordnung her. So könnte man den späteren Beweis der Wohlordnung einer abzählbar unendlichen Vereinigung wohlgeordneter Mengen (5.3.15) analog unter Verwendung konvexer Untergruppen führen. Untergruppen geordneter Gruppen besitzen eine durch die Gruppenordnung induzierte Ordnung.

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir untersuchen nun die, bezüglich der Inklusion linear angeordnete Menge konvexer Untergruppen von G. Wir orientieren unsere Ausführungen an [Fuc66, S. 81 - 83] und [PC83, S. 3].

4.4.1 Definition
Eine Untergruppe U von G nennen wir *konvex*, wenn aus $u \in U$ und $g \in G$ mit $0 < |x| < |u|$ folgt, dass $g \in U$ ist.

4.4.2 Satz
Eine angeordnete abelsche Gruppe G ist genau dann archimedisch, wenn sie nur die trivialen konvexen Untergruppen, nämlich $\{0_G\}$ *und sich selbst, besitzt.*

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Angenommen es gibt eine nichttriviale konvexe Untergruppe U von G. Dann gibt es nach Voraussetzung für alle Elemente $g \in G$ mit $g > u$ für alle $u \in U$, ein $v \in U$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $nv > g$ ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit der Untergruppe gilt $nv \in U$. Wir erhalten also $U = G$. Widerspruch!
" $\Leftarrow$ " Angenommen G sei nicht archimedisch. Sei $0 < g < h$ mit $g, h \in G$, dann gilt für alle $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ dass $ng \leq h$ ist und damit $ng \in G$. Die von g erzeugte konvexe Untergruppe $\langle g \rangle$ ist ungleich G und wir erhalten somit $\langle g \rangle = \{0_G\}$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

Σ bezeichne nun die *Menge konvexer Untergruppen* von G.

4.4.3 Definition
Sei $C, D \in \Sigma$. Wenn $D \subset C$ und Σ keine weitere Untergruppe zwischen C und D enthält, nennen wir das Paar $C,\ D$ *Sprung* in Σ und bezeichnen es mit $D \prec C$.

4.4.4 Lemma
Σ *ist bezüglich Inklusion total geordnet.*

Beweis:

Man sieht leicht, dass die Inklusion eine Ordnung auf Σ ist. Wir zeigen nun die Totalität dieser Ordnung. Angenommen es gäbe $C, D \in \Sigma$, sodass weder $C \subset D$ noch $D \subset C$ noch $C = D$ gilt. O.B.d.A. existiert für alle $c \in C$ ein $d \in D$ mit $0 < |c| < |d|$ aufgrund der Anordnung von G. Wegen der Konvexität von D folgt, dass c in D liegt. Da dadurch C eine Teilmenge von D wäre, ist dies ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

4.4.5 Satz
Die Menge der konvexen Untergruppen Σ *besitzt folgende Eigenschaften:*

S1: Die Vereinigung und der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen aus Σ liegen wieder in Σ.

S2: Sei $D \prec C$ in Σ, so ist C/D isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.

Beweis:

Zu S1: Seien $C, D \in \Sigma$. Nach Lemma 4.4.4 ist Σ bezüglich Inklusion angeordnet. Sei o.B.d.A. $D \subseteq C$. Der Schnitt $C \cap D$ entspricht daher D. Die Untergruppe D ist konvex nach Voraussetzung. Ebenso gilt $C \cup D = C$ und C ist auch eine konvexe Untergruppe nach Voraussetzung. Damit folgt unmittelbar, dass sowohl der Schnitt konvexer Untergruppen als auch die Vereinigung wieder angeordnet und konvex sind.
Zu S2: Nach einer Version des Korrespondenzsatzes für Gruppen [SP08][S. 146] entsprechen die Untergruppen von C/D bijektiv den Untergruppen von C, die D enthalten. Die Ordnung auf C/D ist die induzierte Ordnung. Zwischen den Nebenklassen gelte $c_1 + D \leq c_2 + D$ genau dann, wenn $c_1' \leq c_2'$ ist für gewisse $c_1' \in c_1 + D$ und $c_2' \in c_2 + D$. Damit überträgt der Isomorphismus ebenfalls die Konvexitätseigenschaft. Angenommen die Faktorgruppe C/D enthält nicht nur die trivialen konvexen Untergruppen $0_{C/D}$ und C/D. Dann gibt es eine konvexe Untergruppe H in C/D mit $D \subset H \subset C/D$. Auf Grund des Isomorphismus gibt es eine konvexe Untergruppe H' in G mit $D \subset H' \subset C$. Da C, D ein Sprung ist, gibt es aber zwischen C und D keine weiteren konvexen Untergruppen. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. D ist das neutrale Element der Faktorgruppe C/D.
Da C/D eine angeordnete abelsche Gruppe mit der induzierten Ordnung ist, erhalten wir nach Satz 4.4.2, dass C/D archimedisch angeordnet ist.
Der Satz von Hölder 4.3.1 liefert nun, dass C/D isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist. □

4.5 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir eine angeordnete abelsche Gruppe G und eine angeordnete Menge Θ mit 0 als kleinstem Element. Die Ausführungen sind orientiert an dem Kapitel „Archimedische Klassen, Bewertungen und Bedingungen für die Anordnungsfähigkeit von Gruppen“ in [PC83, S. 9 - 11].

4.5.1 Definition

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe. Die surjektive Funktion $v\colon G \to \Theta$ wird als *Bewertung* bezeichnet, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

B1: $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in G$,

B2: $v(a) = -v(a)$ für alle $a \in G$,

B3: $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in G$.

Die Gleichheit in der Bedingung [B3] gilt dann, wenn $v(a) \neq v(b)$ ist.
Zwei Bewertungen v, v' auf G mit den Wertemengen Θ, Θ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma\colon \Theta \rightarrow \Theta'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v$ ist.

4.5.2 Beispiel

Die Abbildung $G \rightarrow [G], a \mapsto [a]$, ist eine Bewertung und wird als *natürliche Bewertung* bezeichnet, wobei [0] das kleinste Element ist.

4.5.3 Definition

Sei K ein Körper, G eine angeordnete abelsche Gruppe und $\overline{G} = G \cup \{\infty\}$ mit $g < \infty$ für alle $g \in G$. Eine Abbildung $v\colon K \rightarrow \overline{G}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

B1': $v(a) = \infty$ genau dann, wenn $a = 0$ ist,

B2': $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K$,

B3': $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Man bezeichnet $v\colon K \rightarrow \overline{G}$ als *diskrete Bewertung*, falls $G = \mathbb{Z}$ ist.

4.5.4 Definition

Ist (K, v) ein bewerteter Körper, so ist $A = \{a \in K\colon v(a) \geq 0_G\}$ ein *Bewertungsring von v.*

4.5.5 Definition

Ein Unterring A eines Körpers K wird als *Bewertungsring* bezeichnet, wenn $a \in A$ oder $a^{-1} \in A$ für jedes $a \in K$ gilt.

4.5.6 Definition

Ein Integritätsring R heißt *diskreter Bewertungsring*, falls es auf dem Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ von R eine Bewertung $v : \mathrm{Quot}(R) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gibt, sodass R der Bewertungsring von v ist.

Eine weitere, äquivalente Definition eines diskreten Bewertungsrings findet man in [Neu92, S. 126].

4.5.7 Bemerkung

Ein Integritätsring ist genau dann ein *diskreter Bewertungsring*, wenn er ein Hauptidealring mit einem einzigen maximalen Ideal ist.

Kapitel 5

Potenzreihenkörper

Die aus der Analysis bekannten Potenzreihen stellen ein bekanntes und wichtiges mathematisches Werkzeug dar. In Gebieten wie der Kombinatorik, Automaten- und Kontrolltheorie ermöglichen sie sowohl eine kompakte Darstellung von Summenformeln als auch deren Auffindung. Potenzreihen können ebenso über den Weg der Algebra definiert werden anhand der Folge ihrer Koeffizienten. Die algebraische Sichtweise verzichtet grundsätzlich auf Konvergenzbetrachtungen. Dadurch kann auf beliebigen Körpern und Ringen gearbeitet werden. Die sogenannten formalen Potenzreihen in einer Unbekannte z mit Exponenten in den natürlichen Zahlen, deren Koeffizienten in einem beliebigen Körper K liegen, bilden einen Ring $K[[z]]$. Aufbauend darauf stellen wir einen Zusammenhang zu den, in der Funktionentheorie häufig verwendeten Laurentreihen her. Der Ring der formalen Potenzreihen ist ein Integritätsring. Daraus folgt, dass dieser in einen kleinsten Körper eingebettet werden kann. Dieser Quotientenkörper von $K[[z]]$ entspricht genau dem Körper $K((z))$, den die Laurentreihen formen.

Potenzreihen bilden somit algebraische Strukturen, deren Beschaffenheit von den Eigenschaften der Menge der Exponenten der Reihen abhängt. Daher stellt sich die Frage, ob die formalen Potenzreihen weiter verallgemeinert werden können und welche Voraussetzungen diese Menge erfüllen muss, damit diese allgemeinen formalen Potenzreihen einen Körper ergeben.

5.1 Formale Potenzreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den formalen Potenzreihen mit Exponenten in den natürlichen Zahlen. Wir definieren die Verknüpfungen zwischen formalen Potenzreihen und zeigen, welche algebraischen Strukturen die Menge der formalen Potenzreihen bildet.

5.1.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe* über dem Körper K ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to K$, $n \mapsto a_n$.

5.1.2 Bemerkung zur Notation
Wir werden formale Potenzreihen im Folgenden immer als Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... \tag{5.1}$$

schreiben mit $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Anstelle von $f(z)$ schreiben wir vereinfachend f, da wir die Unbestimmte immer mit z bezeichnen.

5.1.3 Beispiel
Wichtige Beispiele für formale Potenzreihen aus der Analysis sind Exponential-, Sinus- und Kosinusreihe:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + ..., \\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - ..., \\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - ....
\end{aligned}$$

5.1.4 Bemerkung
In formalen Potenzreihen müssen nicht alle Potenzen der Unbestimmten explizit auftreten. Die Koeffizienten der nicht auftretenden Potenzen sind 0 und die Potenzen werden deshalb weggelassen.

5.1.1 Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen

Wir bezeichnen die Menge der formalen Potenzreihen in z mit Exponenten in $\mathbb{N}_0$ über einem Körper K mit

$$K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}.$$

5.1.5 Definition
Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei formale Potenzreihen über K. Wir definieren ihre *Summe* $f + g$ folgendermaßen:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

5.1.6 Definition
Sei $\lambda \in K$ und $f \in K[[z]]$. Das Produkt der formalen Potenzreihe f mit dem Körperelement

λ ist definiert durch:

$$\lambda \cdot f = \lambda \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n \in K[[z]].$$

5.1.7 Definition
Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen f, g erfolgt durch die sogenannte Faltung:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) z^n \end{aligned}$$

Für die Unbestimmte z gelten die Potenzgesetze.

5.1.8 Bemerkung (Potenzgesetze)
Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe und seien $g_1, g_2 \in G$, dann gilt:

(i) $z^{g_1} \cdot z^{g_2} = z^{g_1 + g_2}$

(ii) $z^{0_G} = 1_K$

5.1.2 Der Ring der formalen Potenzreihen

5.1.9 Satz
Die Menge $(K[[z]], +, \cdot)$ *ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.*

Beweis:

Wir weisen die Ringaxiome, wie in 3.1.5 definiert, nach.
Die Assoziativität und Kommutativität der Addition lassen sich leicht nachprüfen.
Das *neutrale Element der Addition* 0_K ist die Nullreihe $0_K := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $b_n = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Für $f = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) z^n$ ist $-f = \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) z^n$ das *negative Element der Addition.*
$(K[[z]], +)$ ist daher eine abelsche Gruppe.
Die Assoziativität der Multiplikation rechnen wir nach. Seien $f, g, h \in K[[z]]$ mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ und $h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f\cdot(g\cdot h) &= f\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} b_j c_k\right) z^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+j+k=n} a_l b_j c_k\right) z^n\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+j=n} a_l b_j\right) z^n\right)\cdot h\\
&= (f\cdot g)\cdot h.
\end{aligned}
$$

Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe 1_K. Darunter verstehen wir diejenige Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind. Die Multiplikation ist kommutativ, denn die Addition und Multiplikation in dem Körper K sind kommutativ. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f\cdot(g+h) &= f\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(b_n+c_n)\, z^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} a_j\,(b_k+c_k)\right) z^n\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} a_j b_k + \sum_{j+k=n} a_j c_k\right) z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j+k=n} a_j b_k z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j+k=n} a_j c_k z^n\\
&= f\cdot g + f\cdot h,
\end{aligned}
$$

wobei $(*)$ aufgrund der Distributivität in K folgt. Somit gilt das Distributivgesetz.

□

5.1.10 Bemerkung

Der Ring $K[[z]]$ bildet mit den in 5.1.5, 5.1.6 und 5.1.7 definierten Verknüpfungen eine K-Algebra.

Wir zeigen zunächst, dass zu einer formale Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann die inverse Potenzreihe existiert, wenn $a_0 \neq 0$.

5.1.11 Satz

Die formale Potenzreihe $f \in K[[z]]$ mit $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist genau dann eine Einheit, wenn

$a_0 \neq 0$ ist.

Beweis:

“ $\Leftarrow$ ” Sei $f \in K[[z]]$ mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und es gelte $a_0 \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass es eine Potenzreihe $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ in $K[[z]]$ gibt, sodass

$$f \cdot g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k)\, z^n \overset{!}{=} 1$$

ist.
Der Beweis erfolgt durch Induktion.
Sei $n = 0$, dann ist $1 \overset{!}{=} \sum_{n=0} \sum_{j+k=n} (a_j b_k)\, z^n = \sum_{j+k=0} (a_j b_k)\, z^0 = a_0 b_0 1_K = a_0 b_0$. Da a_0 ungleich null ist, besitzt die Gleichung $a_0 b_0 = 1$ eine eindeutige Lösung, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$.
Wir nehmen an, dass die Koeffizienten $b_0, ..., b_{n-1}$ existieren und eindeutig bestimmt sind. Mithilfe dieser Annahme zeigen wir die Induktionsbehauptung, dass b_n existiert und eindeutig definiert ist.
Für den n-ten Koeffizienten des Produkts ergibt sich $0 = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$. Da a_0 ungleich 0 ist, existiert die Lösung für b_n. Sie ist eindeutig bestimmt durch

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j+k=n,\ j>0} a_j b_k.$$

Damit existiert ein eindeutiges Inverses zu f und f ist eine Einheit.
“ $\Rightarrow$ ” Es gilt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 1$.
Nach Definition 3.1.7 folgt, dass $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ sein muss für $n > 0$ und damit $a_0 b_0 = 1$ gilt. Somit muss a_0 ungleich 0 sein. □

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind, deren konstanter Term ungleich 0 ist. In diesem Fall können wir die inverse Potenzreihe konstruieren.

5.1.12 Korollar

Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $a_0 \neq 0$. Die Koeffizienten der inversen Potenzreihe $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ sind rekursiv definiert durch

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \textit{und} \qquad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j+k=n,\ j>0} a_j b_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

siehe Rückrichtung im Beweis 5.1.11.

□

5.1.13 Beispiel

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $0 \neq q \in \mathbb{R}$ beliebig und $f = \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n \in \mathbb{R}[[z]]$. Wir bestimmen die inverse Potenzreihe $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Dazu wenden wir die Formel aus 5.1.12 an:

$b_0 = \frac{1}{q^0} = 1,$

$b_1 = -q^1 b_0 = -q,$

$b_2 = -\left(q^1 b_1 + q^2 b_0\right) = -\left(-q^2 + q^2\right) = 0,$

...

$b_n = -\left(q^1 b_{n-1} + q^2 b_{n-2} + ... + q^{n-1} b_1 + q^n b_0\right) = -\left(-q^{n-1}(-q) + q^n\right) = 0.$

Für alle $n \geq 3$ folgt induktiv, dass ebenso $b_n = 0$ gilt. Die inverse Potenzreihe zu f ist $g := b_0 + b_1 z = 1 - qz$.
Für $q = 1$ entspricht f der geometrischen Reihe. Diese konvergiert bekanntlich für $|z| < 1$ und es gilt $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

5.1.3 Eigenschaften des Potenzreihenrings

Wir beweisen zunächst, dass $K[[z]]$ ein Integritätsring und damit nullteilerfrei ist. Daraus erhalten wir die Einbettbarkeit von $K[[z]]$ in einen kleinsten Körper, den Quotientenkörper. Anschließend betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Ring der formalen Potenzreihen und der Menge der konvergenten Potenzreihen im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

5.1.14 Satz

Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.
Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$f \cdot g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 0.$$

Nach Definition der Multiplikation gilt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei nun o.B.d.A. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \neq 0$. Wir zeigen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gleich null ist. Es soll also kein Index n existieren, für den $b_n \neq 0$ ist. Wir beweisen mithilfe von Induktion,

dass $b_n = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei $n = 0$ und sei j der erste Index, sodass $a_j \neq 0$ gilt. Man hat

$$\sum_{i+k=j} a_i b_k = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + ... + a_j b_0 = a_j b_0 \overset{\text{Vor.}}{=} 0.$$

Da $a_j \neq 0$ ist, muss $b_0 = 0$ gelten.
Angenommen die Behauptung gilt für alle Indizes $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq n-1$. Dann gilt $b_0, ..., b_{n-1} = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i+k=j+n} a_i b_k &= a_0 b_{j+n} + a_1 b_{j+(n-1)} + ... + a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + ... + a_{j+n} b_0 \\ &= a_j b_n + a_{j+1} b_{n-1} + ... + a_{j+n} b_0 = a_j b_n \overset{\text{Vor.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Da $a_j \neq 0$ ist folgt $b_n = 0$. □

Nun werden konvergente Potenzreihen über dem Körper $\mathbb{C}$ betrachtet.

5.1.15 Definition

Eine Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ heißt *konvergent*, wenn es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$ gibt, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ als Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert.
Das heißt, die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wobei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k {z_0}^k$ ist, konvergiert, und man schreibt für den Limes $s = \lim_{n \to \infty} s_n$:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n \tag{5.2}$$

Auf der Menge D der Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ konvergiert, wird somit eine Abbildung $z_0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ definiert. Wir nennen D den *Konvergenzbereich*.
Wir bezeichnen $R = R(f) = \sup\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ konvergiert}\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ als *Konvergenzradius*. Ist $R(f) > 0$, so heißt die Reihe konvergent, ist $R(f) = 0$, so heißt sie divergent. Insbesondere konvergiert f auf der offenen Kugel $B(0, R(f))$ absolut.

5.1.16 Bemerkung

Sei $\mathbb{C}\{z\}$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{C}\{z\}$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[z]]$.

Beweis:

Das neutrale Element der Addition $0_{\mathbb{C}}$ und das neutrale Element der Multiplikation $1_{\mathbb{C}}$ sind trivialerweise konvergent und liegen in $\mathbb{C}\{z\}$. Es reicht, für $\mathbb{C}\{z\}$ zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.

Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergente Potenzreihen. Die Summe $f + g$ ist ebenfalls eine konvergente Potenzreihe mit $R(f + g) \geq \min\{R(f), R(g)\}$.
Da beide Potenzreihen f, g im Inneren ihres Konvergenzradius absolut konvergieren, kann das Cauchyprodukt bestimmt werden und das Produkt konvergiert absolut mit $R(fg) \geq \min\{R(f), R(g)\}$. □

5.1.17 Satz

In $\mathbb{C}\{z\}$ sind genau die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ invertierbar, für die $a_0 \neq 0$ gilt.

Beweis:

Zunächst konstruieren wir formal das Inverse, wie wir es in Satz 5.1.12 bereits durchgeführt haben. Es bleibt zu zeigen, dass diese inverse Potenzreihe konvergiert. Sei eine konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, also $|a_n| \leq a$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, denn:
Nach Definition der Konvergenz formaler Potenzreihen gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$, sodass die Reihe $f(z_0) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0{}^n$ konvergiert. Die Folge $(|a_n||z_0{}^n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist somit eine Nullfolge und daher beschränkt. Wähle $q = \frac{\zeta}{z_0}$. Wir erhalten, dass

$$\overline{f}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z_0{}^n) \left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = f(\zeta)$$

konvergent ist. Aus dieser Gleichheit folgt, dass wir die Beschränktheit der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ annehmen können. Nun bestimmen wir das Inverse ähnlich wie in 5.1.12 und geben eine positive untere Schranke an den Konvergenzradius an, woraus die Konvergenz der inversen Potenzreihe folgt. Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ größer 1 ist und es sei ohne Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Inversen wie wir sie in Satz 5.1.12 konstruiert haben. Es gilt:

$$b_n = -\sum_{j+k=n,\ j>0} a_j b_k.$$

Wir zeigen, dass $|b_n|$ durch ein Vielfaches von a^n beschränkt ist. Ist dies gezeigt, können wir eine positive untere Schranke des Konvergenzradius angeben. Wir wählen $C \in R$ mit $C > \max\{\frac{a}{a-1}, 1\}$. Mithilfe von Induktion beweisen wir, dass

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

ist. Wir wissen nach Konstruktion des Inversen 5.1.12 und den oben getroffenen Annahmen, dass $b_0 = \frac{1}{a_0} = 1 < a$ ist. Damit ist die Ungleichung für b_0 erfüllt.
Die Abschätzung gelte für b_n. Als Abschätzung für den Koeffizienten b_{n+1} erhalten wir, dass

$$
\begin{aligned}
|b_{n+1}| &= |-\sum_{j+k=n+1,\ j>0} a_j b_k| \leq \sum_{j+k=n+1,\ j>0} |a_j||b_k| \leq a \sum_{j+k=n+1,\ j>0} (Ca)^k \\
&\leq a\ C^n \sum_{k=0}^{n} a^k \leq a\ C^n\ \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (a\ C)^{n+1}
\end{aligned}
$$

gilt. □

Im Verlauf des nächsten Teils können wir zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht. Wir gehen zunächst auf formale Laurentreihen ein.

5.2 Formale Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen.

Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit verzichten wir weitgehend auf Konvergenzbetrachtungen und behandeln formale Laurentreihen aus algebraischer Sichtweise. Wir orientieren uns dabei an [Lü08, S. 563 - 572].

5.2.1 Definition

Eine *formale Laurentreihe* über dem Körper K ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto a_n$, wobei ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $f(n) = 0$ ist für alle $n < k$.

5.2.2 Notation

Wir werden Laurentreihen im Folgenden meist als Reihen der Form

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ und } a_n \in K \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

schreiben. Dabei bezeichnet $\sum_{n=k}^{-1} a_n z^n$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

5.2.3 Definition

Der *Träger* einer Laurentreihe $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}.$$

5.2.4 Bemerkung
Unter einem Träger einer Laurentreihe versteht man den Definitionsbereich der Funktion, die durch die Laurentreihe dargestellt wird.

5.2.1 Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen

Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da andernfalls die Multiplikation nicht definiert werden kann. Wir bezeichnen die Menge der formalen Laurentreihen in z mit Exponenten in $\mathbb{Z}$ über dem Körper K mit

$$K((z)) = \{\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Addition und Multiplikation formaler Laurentreihen erfolgt analog zur Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen.

5.2.5 Definition
Zwei Laurentreihen $f, g \in K((z))$ mit $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n$ werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=min(k,m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n. \tag{5.3}$$

5.2.6 Definition
Sei $\lambda \in K$ und $f \in K\left((z)\right)$. Das Produkt der formalen Potenzreihe f mit dem Körperelement λ ist definiert durch:

$$\lambda \cdot f = \lambda \cdot \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=m}^{\infty} \lambda \cdot a_n z^n \in K\left((z)\right).$$

5.2.7 Definition
Die Multiplikation erfolgt durch Faltung der Laurentreihen.

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=m+k}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(a_i \cdot b_j\right) z^n. \tag{5.4}$$

5.2.8 Bemerkung
Die Multiplikation formaler Laurentreihen ist unter der Bedingung wohldefiniert, dass formale Laurentreihen höchstens endliche viele Terme mit negativen Exponenten besitzen. Diese Forderung ist unverzichtbar, denn andernfalls wäre die Summe $\sum_{i+j=n} \left(a_i \cdot b_j\right)$ in 5.4 unendlich und das Produkt somit nicht bestimmbar.

5.2.9 Satz
Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe. Dann ist der Träger der Laurentreihe wohlgeordnet.

Beweis:

Sei $f \in K((z))$ eine formale Laurentreihe. Es gilt $\mathrm{supp}(f)$ ist eine Teilmenge der ganzen Zahlen. Nach Definition einer formalen Laurentreihe ist $\mathrm{supp}(f)$ nach unten beschränkt. Daraus folgt mithilfe von 3.2.11 die Behauptung. $\square$

5.2.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Menge der formalen Laurentreihen $K((z))$ und weisen deren Körperstruktur nach. Auf diesen Ergebnissen aufbauend stellen wir die Verbindung zwischen dem Körper der Laurentreihen und dem zuvor behandelten Ring der formalen Potenzreihen her. Bezugnehmend auf 5.1.16 betrachten wir aus Gründen der Vollständigkeit die Menge der konvergenten Laurentreihen.
Abschließend konstruieren wir mithilfe der Wohlordnung des Trägers eine Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen und stellen den bewertungstheoretischen Zusammenhang zu dem Ring der formalen Potenzreihen her.

5.2.10 Satz
Die Menge $(K((z)), +, \cdot)$ ist mit obigen Verknüpfungen ein kommutativer Ring.

Beweis:

Es genügt das Nachrechnen der Ringaxiome. Das neutrale Element der Addition ist die Nullreihe $0_K := \sum_{n=k}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_n = 0$ für alle $n \geq k$. Das neutrale Element der Multiplikation ist die Einsreihe $1_K := \sum_{n=k}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_0 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $0 \neq n \geq k$. Der Beweis der verbleibenden Bedingungen verläuft ähnlich zu 5.1.9. $\square$

5.2.11 Bemerkung
Der Ring $K((z))$ bildet mit den in 5.2.5, 5.2.6 und 5.2.7 definierten Verknüpfungen eine K-Algebra.

5.2.12 Satz
$(K((z)), +, \cdot)$ ist mit der definierten Addition und Multiplikation ein Körper.

Beweis:

Sei $0 \neq f \in K((z))$ und $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_m \neq 0$. Wir definieren das Inverse $g \in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so entstandene Laurentreihe invers zu f ist. Die Konstruktion von g läuft ähnlich zur Konstruktion der inversen Potenzreihe in Satz 5.1.12.

Setze $g = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_n = 0_K$ für alle $n < -m$ und $b_{-m} = \frac{1}{a_m}$. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $b_{-m}, ..., b_{-m+l-1}$ bereits definiert. Wir wählen

$$b_{-m+l} = -\frac{1}{a_m} \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n}.$$

Nach Definition der Multiplikation in $K((z))$ erhalten wir für den Koeffizienten des Produkts gf bei z^l somit:

$$\begin{aligned}(ba)_l &= \sum_{k+j=l} (a_k \cdot b_j) \\ &= \sum_{n=-m}^{-m+l} b_n a_{l-n}.\end{aligned}$$

Für $l = 0$ folgt $b_0 a_0 = b_{-m} a_m = 1$. Es bleibt der Fall $l > 0$ zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}(ba)_l &= \sum_{n=-m}^{-m+l-1} b_n a_{l-n} + b_{-m+l} a_m \\ &= 0.\end{aligned}$$

Also ist $gf = 1_K$ und da $K((z))$, wie bereits gezeigt, ein kommutativer Ring ist, folgt $fg = 1_K$. Wir können zu jedem Element $f \neq 0$ aus $K((z))$ folglich ein Inverses konstruieren, womit $K((z))$ ein Körper ist. □

Mithilfe von 3.1.11 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

5.2.13 Satz
Es gilt $K((z)) = \mathrm{Quot}(K[[z]])$.

Beweis:

Wir definieren zunächst die naheliegende Abbildung $\phi\colon K[[z]] \to K((z)), f \mapsto f$. Wie leicht zu sehen ist, handelt es sich bei der Abbildung ϕ um einen injektiven Homomorphismus. Wir wissen bereits nach Satz 5.2.12, dass $K((z))$ ein Körper ist und $K[[z]]$ ist, wie in 5.1.14 gezeigt, ein Integritätsring. Nach der universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers (3.1.15) gibt es genau einen injektiven Körperhomomorphismus

$$\Phi\colon \mathrm{Quot}(K[[z]]) \to K((z)), \quad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m} \mapsto \sum_{k=n-m}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} z^k, \text{ sodass } \Phi_{|K[[z]]} = \phi \text{ ist.}$$

Wir zeigen nun die Surjektivität der Abbildung Φ und erhalten somit die Isomorphieeigenschaft. Sei $f \in K((z))$ mit $\gamma = \min(\mathrm{supp}(f)) < 0$. Die Laurentreihe $f = \sum_{n=\gamma} a_n z^n$ kann man nach 5.1.8 als $a_\gamma z^\gamma \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)$, wobei $b_n = \frac{a_n}{a_\gamma}$ ist, schreiben. Man sieht sofort, dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in K[[z]]$ ist. Da $a_\gamma z^\gamma$ nach Voraussetzung ungleich null und ein Körperelement ist, können wir $a_\gamma z^\gamma = \frac{1}{(a_\gamma)^{-1} z^{-\gamma}}$ schreiben mit $(a_\gamma)^{-1} z^{-\gamma} \in K[[z]]$. Dieser Quotient ist für $\gamma \in G$ eindeutig. Jede Laurentreihe lässt sich daher in eindeutiger Weise als Quotient zweier Potenzreihen darstellen. Die Abbildung Φ ist damit surjektiv und die Behauptung ist gezeigt.

□

Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung von K um das transzendente Element z dar. Im Folgenden beschränken wir uns, im Sinne der Konvergenzbetrachtung, erneut auf den Körper $\mathbb{C}$.

5.2.14 Definition

Eine Laurentreihe $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn ihr Haupt- und Nebenteil in z_0 konvergieren.

5.2.15 Bemerkung

Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=k}^{-1} a_n z^n$ und $R \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ für alle z mit $r \leq |z| \leq R$.

5.2.16 Satz

Die Menge der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\{z\}$ bildet einen Körper

Beweis:

Die Nullreihe $0_{\mathbb{C}}$ und die Einsreihe $1_{\mathbb{C}}$ sind trivialerweise konvergent und entsprechen dem neutralen Element der Addition beziehungsweise Multiplikation in $\mathbb{C}_L\{z\}$.
Wir zeigen nun, dass zu jedem Element $f \in \mathbb{C}_L\{z\}$ mit $f \neq 0$ ein Inverses existiert und ebenso konvergiert. Da $\mathbb{C}_L\{z\}$ offensichtlich eine Teilmenge von $\mathbb{C}((z))$ ist, liegt f in $\mathbb{C}((z))$ und nach 5.2.12 existiert ein eindeutiges Inverses. Wir zeigen nun, dass das Inverse ebenso konvergiert und damit in $\mathbb{C}_L\{z\}$ liegt.
Wir können jede Laurentreihe $f \in \mathbb{C}_L\{z\}$ mit nichtleerem Hauptteil schreiben als $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = z^m g$ wobei $g \in K[[z]]$ ist. Da f konvergent ist und der Faktor z^m konstant ist, konvergiert g. Wir haben in Satz 5.1.16 bereits gezeigt, dass ein Inverses zu g existiert und konvergiert. Da weiterhin ein inverses Element zu z^m, nämlich z^{-m} existiert, können wir die zu f inverse Laurentreihe definieren als $f^{-1} = (z^m g)^{-1} = g^{-1} z^{-m}$ und es gilt $ff^{-1} = z^m g g^{-1} z^{-m} = 1_K$. Da g^{-1} nach 5.1.16 konvergiert und z^{-m} konstant ist, konvergiert f^{-1} ebenso.
Des weiteren bleibt zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist. Da der Hauptteil nach Definition einer Laurentreihe endlich ist, reicht es den Nebenteil zu betrachten. Die Konvergenz der Summe und des Produkts formaler Potenzreihen wurde bereits in 5.1.16 gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Lau-

rentreihen f, g ist damit ebenso konvergent.
Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multipliziere man diese so mit den Potenzen von z, dass man eine konvergente Potenzreihe erhält. Sei $f, h \in \mathbb{C}_L\{z\}$ mit $f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$ und $h = \sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n\right) &= \left(z^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) \cdot \left(z^l \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n\right) \\ &= z^m z^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \end{aligned}$$

Wir erhalten ein Produkt konvergenter Potenzreihen und gehen wie in 5.1.16 vor. Das Produkt konvergenter Laurentreihen konvergiert also innerhalb eines Radius nur nicht im Punkt 0.

□

5.2.17 Satz
Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\{z\}$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\{z\}$.

Beweis:

Wir haben in 5.1.17 bereits gezeigt, dass das Inverse zu einer Potenzreihe aus $\mathbb{C}\{z\}$ wieder konvergiert und in $\mathbb{C}\{z\}$ liegt.
Wie in Satz 5.2.13 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Nun gehen wir wie in 5.2.13 vor und erhalten die Isomorphie der beiden Körper. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Nun versuchen wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung zu finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 5.2.3 der Laurentreihe $\mathrm{supp}(f)$.

5.2.18 Satz
Die Abbildung $v\colon K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $v(f) = \min(\mathrm{supp}(f))$ ist eine diskrete Bewertung, wobei wir $\min(\varnothing) = \infty$ setzen.

Beweis:

Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt. Zu jedem $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ existiert also eine formale Laurentreihe $f \in K((z))$, sodass $v(f) = \min(\mathrm{supp}(f)) = n$ ist. Nach Definition 4.5.3 sind für den Körper $K((z))$ und die angeordnete abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ noch die Axiome B1'-B3' nachzuweisen.

zu B1' : Klar nach Definition.

zu B2' : Sei $f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$ mit $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Dann ist $v(f) = n_0$ und $v(g) = m_0$. Damit gilt, dass $v(f) + v(g) = n_0 + m_0$ entspricht.
Wir wollen zeigen, dass das Bild von fg unter der Abbildung

$$v(fg) = v(\sum_{n=n_0+m_0} \sum_{j+k=n} a_j b_k z^n) \stackrel{!}{=} v(f) + v(g),$$

ist, wobei $a_j = 0$ für $j < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$ gilt. Wir erhalten nach Definition des Produkts zweier Laurentreihen sofort $v(fg) = n_0 + m_0 = v(f) + v(g)$.

zu B3' : Wenn f, g wie oben definiert sind, erhalten wir für $v(f+g)$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} v\left(f+g\right) &= v\left(\sum_{n=\min\{n_0,m_0\}}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\right) \\ &\geq \min\{n_0, m_0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{v(f), v(g)\} \end{aligned}$$

□

Wie wir in 5.2.13 gezeigt haben, ist der Körper der Laurentreihen eine Obermenge des Rings der Potenzreihen $K[[z]]$. Nachdem wir auf $K((z))$ bereits eine Bewertung definiert haben, weisen wir nach, dass es sich bei $K[[z]]$ um einen diskreten Bewertungsring 5.2.19 handelt.

5.2.19 Satz
$K[[z]]$ *ist ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis:

Der Ring der formalen Potenzreihen $K[[z]]$ ist der Bewertungsring der Bewertung $v\colon K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Denn nach Definition des Bewertungsrings besteht dieser aus den Elementen des Körpers K deren Bewertung größer gleich dem Nullelement der Gruppe ist. Die Elemente in $K((z))$ mit $v(a) \geq 0_{\mathbb{Z}}$ sind genau die Elemente aus $K[[z]] \subseteq K((z))$. Da $K((z)) = \mathrm{Quot}(K[[z]])$ nach 5.2.13 ist, gilt die Behauptung.

□

5.3 Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper

Die Grundlagen zur Konstruktion eines Körpers über sehr allgemein definierten formalen Potenzreihen untersuchte Hahn 1907 in seiner Arbeit „Über nichtarchimedische Größensysteme". Hahn formulierte als einer der ersten Mathematiker Potenzreihen mit verallgemeinerten

Exponenten aus einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, wie beispielsweise:

$$f = 1 + z^{\log 2} + z^{\log 3} + z^{\log 4} + ...$$
$$g = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}z^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{8}z^{\frac{7}{8}} + ... + z + \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + ... + 2z^2 + ...$$

Die einzige, unverzichtbare Bedingung, die Hahn an diese verallgemeinerten Potenzreihen stellte, war die Wohlordnung des Trägers der verallgemeinerten Potenzreihe. Im Laufe des Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes konnte er zeigen, dass die nach ihm benannten Potenzreihen nicht nur eine Gruppe, wie ursprünglich angenommen, bilden, sondern einen Körper, einen verallgemeinerten Potenzreihenkörper.
Neben Hahn beschäftigten sich auch die beiden Mathematiker Neumann und Mal'cev mit den von Hahn konstruierten Reihen und deren Einbettung in einen Körper.
Wir fokussieren unsere Betrachtungen auf verallgemeinerte Potenzreihen mit Exponenten in angeordneten abelschen Gruppen und die algebraischen Strukturen, die wir auf ihnen definieren können.

5.3.1 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen

Wir haben bisher ausschließlich formale Reihen betrachtet, deren Exponenten Elemente einer wohlgeordneten Teilmenge der ganzen Zahlen waren. In Satz 5.2.9 haben wir gezeigt, dass die Wohldefiniertheit der Multiplikation mit der Wohlordnung des Trägers der Laurentreihe zusammenhängt.
Im Folgenden betrachten wir nicht mehr nur Teilmengen der ganzen Zahlen, sondern die bereits in dem vorherigen Kapitel 4 vorgestellten angeordneten abelschen Gruppen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass Potenzreihen mit Exponenten in einer angeordneten abelschen Gruppe, unter der Voraussetzung der Wohlordnung des Trägers, addiert und multipliziert werden können.
Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66, S. 194 - 199], [Hah95, S. 601 - 655], [Ucs63, S. 6 - 20] und [PC83, S. 49 - 64].

Wir bezeichnen im Folgenden mit K einen Körper und mit G eine angeordnete abelsche Gruppe in additiver Schreibweise.

5.3.1 Definition
Eine *formale Potenzreihe über K mit Exponenten in G* ist eine Abbildung $f\colon G \to K,\ g \mapsto a_g$, wobei $\operatorname{supp}(f) := f^{-1}(K^*)$ wohlgeordnet ist.

5.3.2 Definition
Der *Träger* einer formalen Potenzreihe f mit Exponenten in G über K ist folgendermaßen

definiert:

$$\operatorname{supp}(f) := \{g \in G|\ a_g \neq 0\}$$

Wir stellen die in 5.3.1 definierte formale Potenzreihe im Folgenden meist nicht mehr in Funktionsschreibweise, sondern als Reihe dar. Aus diesem Grund präsentieren wir diese gebräuchlichere Definition einer formalen Potenzreihe mit Exponenten in einer angeordneten abelschen Gruppe.

5.3.3 Definition
Die Reihe

$$f = \sum_{g \in G} a_g z^g, \text{ mit } a_g \in K, \text{ deren Träger } \operatorname{supp}(f) \text{ wohlgeordnet ist,}$$

wird als *formale Potenzreihe mit Exponenten in einer angeordneten abelschen Gruppe* bezeichnet.

5.3.4 Notation
Wenn wir ab jetzt von formalen Potenzreihen mit Exponenten in angeordneten abelschen Gruppen über einem Körper sprechen, bezeichnen wir diese vereinfachend als *formale Potenzreihen.*

Wir bezeichnen die Menge aller formalen Potenzreihen mit

$$K\left(\left(z^G\right)\right) = \{f := \sum_{g \in G} a_g z^g|\ a_g \in K,\ \operatorname{supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet}\}.$$

5.3.2 Addition und Multiplikation in $K((z^G))$

In diesem Abschnitt definieren wir die Verknüpfungen auf $K((z^G))$. Wir gehen dabei ähnlich wie in Teil 5.2.1 vor. Wir müssen berücksichtigen, dass die Verknüpfungen nur dann wohldefiniert sind, wenn die Wohlordnung des Trägers erhalten bleibt.

5.3.5 Definition
Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g \in G} a_g z^g$ und $h = \sum_{g \in G} b_g z^g$.
Die Summe zweier formaler Potenzreihen f, h ist definiert durch die Addition der Koeffizientenfolgen:

$$f + h \quad = \quad \sum_{g \in G} a_g z^g + \sum_{g \in G} b_g z^g = \sum_{g \in G} \left(a_g + b_g\right) z^g.$$

5.3.6 Satz

Die in 5.3.5 definierte Addition zweier formaler Potenzreihen $f, g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist wohldefiniert und die Summe $f+h$ ist wieder eine formale Potenzreihe.

Beweis:

Wir zeigen, dass der Träger der Summe $f+h$ wohlgeordnet ist. Es gilt offensichtlich $\operatorname{supp}(f+h) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(h)$. Nach Lemma 4.1.3 ist die Vereinigung zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet. Die Definition der Wohlordnung besagt, dass jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wiederum wohlgeordnet ist.
Nach Voraussetzung sind $\operatorname{supp}(f) = \{g \in G | a_g \neq 0\}$ und $\operatorname{supp}(h) = \{g \in G | b_g \neq 0\}$ wohlgeordnet. Daraus folgt die Behauptung. □

5.3.7 Definition
Sei $\lambda \in K$ und $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der formalen Potenzreihe f mit dem Körperelement λ ist definiert durch:

$$\lambda \cdot f = \lambda \cdot \left(\sum_{g \in G} a_g z^g\right) = \sum_{g \in G} \lambda a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right).$$

Bevor wir die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen definieren können, benötigen wir etwas Vorarbeit.
Sei $f,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Wir betrachten zunächst die multiplikative Verknüpfung einzelner Monome.

5.3.8 Definition
Seien $a_{g_1} z^{g_1}, b_{g_2} z^{g_2} \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Das Produkt der Monome ist nach den Potenzgesetzen (5.1.8) folgendermaßen definiert:

$$a_{g_1} z^{g_1} \cdot b_{g_2} z^{g_2} = a_{g_1} b_{g_2} z^{g_1+g_2}.$$

5.3.9 Bemerkung
Wir haben die obige Definition der Multiplikation zweier Monome bereits, ohne explizite Nennung, für die Definition der Multiplikation formaler Laurentreihen und Potenzreihen verwendet.

Die distributive Fortsetzung der Multiplikation von Monomen führt zur Definition der Multiplikation in $K\left(\left(z^G\right)\right)$. Wir erhalten das Produkt als Summe über der Summe des Produkts der einzelnen Koeffizienten.

5.3.10 Definition
Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1}$ und $h = \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2}$. Die Multiplikation

zweier formaler Potenzreihen f, h erfolgt durch Faltung:

$$f \cdot h \quad = \quad \sum_{g_1 \in G} a_{g_1} z^{g_1} \cdot \sum_{g_2 \in G} b_{g_2} z^{g_2} = \sum_{g \in G} \sum_{g_1 + g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} z^g. \tag{5.5}$$

5.3.11 Satz

Die in 5.5 definierte Multiplikation zweier formaler Potenzreihen $f, h \in K\left((z^G)\right)$ ist wohldefiniert. Das Produkt fh ist ebenso eine formale Potenzreihe in $K\left((z^G)\right)$.

Beweis:

Seien $f, h \in K\left((z^G)\right)$. Wir untergliedern den Beweis und zeigen zunächst, dass für alle $g \in G$ die Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ endlich ist.
Die Summe $\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2}$ ist endlich, wenn es nur endlich viele Darstellungen für $g \in G$ in der Form $g = g_1 + g_2$ gibt, wobei $g_1 \in \operatorname{supp}(f)$ und $g_2 \in \operatorname{supp}(h)$. Nach Voraussetzung sind sowohl $\operatorname{supp}(f)$ als auch $\operatorname{supp}(h)$ wohlgeordnet. Die Gruppe G ist angeordnet abelsch und wir können die Folgerung aus dem Lemma von Neumann (4.1.7) anwenden. Die Aussage ist somit bewiesen.
Nun bleibt zu zeigen, dass der Träger des Produkts $\operatorname{supp}(fh)$ wohlgeordnet ist. Nach obiger Argumentation ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{supp}(fh)$ in der Summe der Träger, $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(h)$, enthalten ist.
Die Mengen $\operatorname{supp}(f)$ und $\operatorname{supp}(h)$ sind als Teilmengen der angeordneten Gruppe G angeordnet. Die Summe $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(h)$ ist aufgrund der Abgeschlossenheit der Addition in G ebenso eine angeordnete Teilmenge von G. Nach Voraussetzung sind $\operatorname{supp}(f)$ und $\operatorname{supp}(h)$ wohlgeordnet. Die Summe $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(h)$ ist nach dem Lemma von Neumann 4.1.6 wohlgeordnet. Jede angeordnete Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet laut der Definition einer Wohlordnung. Daher gilt, dass $\operatorname{supp}(fh)$ als angeordnete Teilmenge einer wohlgeordneten Menge (siehe Bemerkung 3.2.12) wohlgeordnet ist.
Somit ist die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen $f, h \in K\left((z^G)\right)$ wohldefiniert und das Produkt fh liegt in $K\left((z^G)\right)$.

$\square$

Insgesamt erhalten wir, dass $K\left((z^G)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation abgeschlossen ist ([Hah95, Seite 601ff], [Neu49, S. 210- 213]).

5.3.12 Beispiel

Sei $G = \mathbb{Q}$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Bei der Reihe $f := z^{\frac{-1}{p}} + z^{\frac{-1}{p^2}} + z^{\frac{-1}{p^3}} ...$ mit $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ handelt es sich um eine formale Potenzreihe über einem beliebigen Körper, da der Träger $\{\frac{-1}{p}, \frac{-1}{p^2}, \frac{-1}{p^3}, ...\}$ mit $\min(\operatorname{supp}(f)) \geq -1$ wohlgeordnet ist.

5.3.3 Der verallgemeinerte Ring der formalen Potenzreihen

Wir haben bisher die Addition und Multiplikation auf $K\left(\left(z^G\right)\right)$ definiert. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein kommutativer Ring über K ist.
In der verwendeten Hauptliteratur ([PC83], [Fuc66]) findet sich die multiplikative Schreibweise der angeordneten Gruppe G. Die multiplikative Schreibweise ermöglicht eine noch allgemeinere Definition der Multiplikation mithilfe von Faktorsystemen. Auf Basis dieser Definition konnte B.H. Neumann 1949 Schiefkörper von formalen Potenzreihen konstruieren.
Im Fall einer additiv geschriebenen angeordneten abelschen Gruppe erhalten wir den direkten Bezug zu dem beschriebenen Laurentreihenkörper und dem darin eingebetteten Potenzreihenring. Dieser entsteht, wenn es sich bei der angeordneten abelschen Gruppe um $\mathbb{Z}$ handelt.

5.3.13 Satz
Die Menge $\left(K\left(\left(z^G\right)\right),+,\cdot\right)$ *ist ein kommutativer Ring über* K.

Beweis:

Seien im Folgenden f, h, k $\in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit

$$f = \sum_{g\in G} a_g z^g, \qquad h = \sum_{g\in G} b_g z^g, \qquad k = \sum_{g\in G} c_g z^g.$$

Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.

- *Assoziativität:* Für alle $f,h,k \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ gilt nach Definition der Addition:

$$\begin{aligned} f+(h+k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \left(\sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g\right) \\ &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} \left(b_g + c_g\right) z^g \\ &= \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g + c_g\right) z^g \\ &= \sum_{g\in G} \left(a_g + b_g\right) z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g \\ &= (f+h)+k. \end{aligned}$$

- *Neutrales Element der Addition:* Bezeichne 0_K das neutrale Element der Addition $0_K = \sum_{g\in G} a_g z^g$, wobei ähnlich wie in 5.1.1 gilt $a_g = 0$ für alle $g \in G$. Der Träger von 0_K ist die leere Menge, welche nach Definition wohlgeordnet ist.

- *Negatives Element der Addition:* Zu jedem Gruppenelement f gibt es ein negatives

Element der Addition $-f = \sum_{g\in G} -a_g z^g$ mit $f + (-f) = 0_K$, wobei $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(-f)$.

- *Kommutativität:* Die Addition ist kommutativ, denn es gilt

$$\begin{aligned} f+h &= \sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{g\in G} b_g z^g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, z^g \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{g\in G} (b_g + a_g)\, z^g = \sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} a_g z^g \\ &= h + f. \end{aligned}$$

Die Gleichheit in $(*)$ gilt, da K ein Körper ist und $a_g, b_g \in K$ sind.

Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist ein kommutatives Monoid bezüglich der oben definierten Multiplikation.

- *Assoziativität:*

$$\begin{aligned} f\cdot(h\cdot k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g \cdot \left(\sum_{g\in G} b_g z^g \cdot \sum_{g\in G} c_g z^g\right) \\ &= \sum_{g\in G} a_g z^g \cdot \left(\sum_{g\in G}\sum_{g_1+g_2=g} (b_{g_1}\cdot c_{g_2})\, z^g\right) \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{g_0+g_1+g_2=g} a_{g_0} b_{g_1} c_{g_2} z^g \\ &= \left(\sum_{g\in G}\sum_{g_0+g_1=g} a_{g_0} b_{g_1} z^g\right) \sum_{g\in G} c_g z^g \\ &= \left(\sum_{g\in G} a_g z^g \cdot \sum_{g\in G} b_g z^g\right) \cdot \sum_{g\in G} c_g z^g \\ &= (fh)\, k. \end{aligned}$$

- *Kommutativität:* Seien $f, h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Es gilt

$$fh = \sum_{g\in G}\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1} b_{g_2} z^g = \sum_{g\in G}\sum_{g_2+g_1=g} b_{g_2} a_{g_1} z^g = hf.$$

Die Gleichheit folgt unmittelbar aus der Kommutativität von G und der Kommutativität der Multiplikation im Körper K.

Es reicht ein Distributivgesetz nachzuweisen, da die Multiplikation in K kommutativ ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f\cdot(h+k) &= \sum_{g\in G} a_g z^g \left(\sum_{g\in G} b_g z^g + \sum_{g\in G} c_g z^g\right)\\
&= \sum_{g\in G} a_g z^g \left(\sum_{g\in G} (b_g + c_g)\, z^g\right)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}(b_{g_2}+c_{g_2}) z^g\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{g_1+g_2=g} (a_{g_1}b_{g_2}+a_{g_1}c_{g_2})\, z^g\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}z^g + \sum_{g\in G}\sum_{g_1+g_2=g} a_{g_1}c_{g_2}z^g\\
&= fh + fk.
\end{aligned}
$$

In den Beweis der Distributivgesetze fließen die im Körper K gültige Distributivität, die Rechengesetze für die Unbestimmte 5.1.8 , beziehungsweise die Kommutativität der angeordneten abelschen Gruppe G mit ein. □

5.3.4 Das Inverse in $K\left(\left(z^G\right)\right)$

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring bildet.
Wir benötigen etwas Vorarbeit, bevor wir zeigen können, dass zu jeder formalen Potenzreihe, die ungleich Null ist, ein Inverses existiert und die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein Körper ist.
In diesem Abschnitt orientieren wir uns an [Fuc66, S. 196- 198] und [Neu49, S. 210- 213].

5.3.14 Satz
Jede formale Potenzreihe $0 \neq f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ lässt sich in eindeutiger Weise als

$$f = \lambda \cdot z^g \cdot (1_K + h) \;\; \textit{mit}\; \lambda \in K^*,\; g \in G,\; h \in K\left(\left(z^G\right)\right) \;\; \textit{und}\; \min(\operatorname{supp}(h)) > 0$$

darstellen, wobei $g = \min(\operatorname{supp}(f))$ ist.

Beweis:

Sei $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $f = \sum_{g\in G} a_g z^g$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{supp}(f)$ wohlgeordnet. Nach Definition der Wohlordnung existiert ein kleinstes Element $\gamma \in G$ in $\operatorname{supp}(f)$ mit $\gamma = \min(\operatorname{supp}(f))$. Da G eine angeordnete abelsche Gruppe ist, existiert für jedes Element ein additives Inverses. Es gilt:

$$\begin{aligned} f &= z^{\gamma} \sum_{g\in G} a_g z^{g-\gamma} \\ &= z^{\gamma} \left(a_{\gamma} 1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} a_g z^{g-\gamma} \right) \\ &= z^{\gamma}\, a_{\gamma} \left(1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} \frac{a_g}{a_{\gamma}} z^{g-\gamma} \right) \\ &= z^{\gamma}\, a_{\gamma} \left(1_K + \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} b_{g-\gamma} z^{g-\gamma} \right), \end{aligned}$$

mit $b_{g-\gamma} = \frac{a_g}{a_\gamma}$.
Es gilt weiterhin $g-\gamma > 0$ für alle $g \in \mathrm{supp}(f)\setminus\{\gamma\}$, da $\gamma = \min(\mathrm{supp}(f))$. Wir erhalten die Positivität des Trägers der entstandenen formalen Potenzreihe $h = \sum_{g\in G\setminus\{\gamma\}} b_{g-\gamma} z^{g-\gamma}$. Die Darstellung ist eindeutig. Denn sowohl $\gamma = \min(\mathrm{supp}(f))$ als auch a_γ sind nach Definition der formalen Potenzreihe f eindeutig bestimmt. Angenommen es gäbe ein $h' \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $h' \neq h$, dann würde gelten:

$$\begin{aligned} & f = a_\gamma z^\gamma (1_K + h) = a_\gamma z^\gamma \left(1_K + h'\right) \\ \Leftrightarrow\quad & (1_K + h) = \left(1_K + h'\right) \\ \Leftrightarrow\quad & h = h'. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und wir erhalten die Eindeutigkeit der Darstellung. □

5.3.15 Lemma

Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe mit Positivbereich P und sei $U \subseteq P$ wohlgeordnet. Dann ist $\mathfrak{U} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU$ ebenfalls wohlgeordnet.

Beweis:

Angenommen $\mathfrak{U}$ sei nicht wohlgeordnet. Dann existiert eine streng monoton fallende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{U}$ mit $u_n \in \mathfrak{U}$ für $n \in \mathbb{N}$, die wir folgendermaßen schreiben:

$$u_1 = g_{11}+g_{12}+...+g_{1n_1} > u_2 = g_{21}+g_{22}+...+g_{2n_2} > ... > u_i = g_{i1}+g_{i2}+...+g_{in_i} > ..., \tag{5.6}$$

wobei $g_{ik} \in U$ ist. Da $U \subseteq G$ und G eine angeordnete Gruppe ist, können die $g_{ik} \in G$ angeordnet werden.
Wir können ein maximales Element $g_i{}^* := \max_k (g_{ik})$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ bestimmen. Da U wohlgeordnet ist, gibt es unter den $g_i{}^*$ ein kleinstes Element g^*.

Nach Voraussetzung ist $g > 0$ für jedes $g \in U$. Wir betrachten nun die archimedischen Klassen der angeordneten abelschen Gruppe G und bezeichnen mit $[u_i]$ die archimedische Klasse von $u_i \in G$. Weil jedes $g \in U$ positiv ist und weil jedes u_i eine endliche Summe von Elementen aus U ist, können wir Lemma 4.2.6 anwenden und erhalten, dass in der angeordneten abelschen Gruppe G

$$[u_i] = [\max_k (g_{ik})]$$

gilt.
Wir erhalten also, dass $[u_i] = [g_i{}^*]$ für $i = 1, 2, ...$ ist und $[g^*] = \min_{i \in \mathbb{N}}([u_i])$. Die Folge $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und wir wissen, dass es unter den Elementen g_{ik} aufgrund der Wohlordnung von U ein kleinstes gibt. Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $[u_n] = [u_{n+1}] = [u_{n+m}] = [g^*]$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist.
Das bedeutet also wir können jeder streng monoton fallenden Folge $(u'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{U}$ ein Element $g^{*\prime}$ aus U zuordnen, sodass ab einem bestimmten Index i_0, die archimedische Klasse von $g^{*\prime}$ der archimedischen Klasse von u'_i entspricht. Da U nach Voraussetzung wohlgeordnet ist, gibt es unter den diesen Folgen zugeordneten Elementen ein kleinstes Element.
Wir nehmen an für unsere Folge $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist g^* das kleinste Element unter den $g^{*\prime}$.

Wir können somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$[u_i] = [g^*] \qquad \text{für } (i = 1, 2, ...)$$

gilt. Es sei $\mathfrak{g}$ das kleinste Element in U, das in $[g^*]$ liegt. Wir erhalten für dieses $\mathfrak{g}$, dass $\mathfrak{g} \leq g^* \leq u_1$ ist, wobei $[\mathfrak{g}] = [g^*] = [u_1]$.
Aufgrund der Archimedizität existiert ein $p \in \mathbb{N}$, sodass $u_1 \leq p\mathfrak{g}$ und da $u_1 > u_2 > ... > u_i > ...$ gilt

$$u_i \leq p\mathfrak{g} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wir wählen diese natürliche Zahl p so klein wie möglich.
Jeder streng monoton fallenden Folge $(u'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $[\mathfrak{g}] = [u_i]$ wird auf diese Weise eine natürliche Zahl p' zugeordnet. Da die natürlichen Zahlen wohlgeordnet sind, existiert eine unter den dadurch auftretenden natürlichen Zahlen kleinste Zahl $\overline{p}$. Wir nehmen an, dass die streng monoton fallende Folge $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so gewählt ist, dass wir ihr diese kleinste Zahl $\overline{p}$ zuordnen können. Aufgrund der Kommutativität der Gruppe G kann die Darstellung eines Folgenelements u_i auf die beiden folgenden Fälle eingeschränkt werden

$$(*) \quad u_i = g_i{}^* \qquad\qquad (**) \quad u_i = v_i + g_i{}^*,$$

wobei $v_i \in \mathfrak{U}$ gilt. Die Elemente $g_i{}^*$ sind Elemente von U. Nach Definition der Wohlordnung gibt es keine streng monoton fallende Folge unter den $g_i{}^*$. Aus diesem Grund und da die

Folge $(u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Annahme streng monoton fallend ist, existieren nur endlich viele u_i der ersten Form.

Folglich muss eine streng monoton fallende Teilfolge $\left(u_{\phi(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ von $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existieren, sodass alle Elemente wie in $(**)$ dargestellt werden können. Wiederum gilt nach Definition der Wohlordnung, dass es keine streng monoton fallende Folge unter den ${g_{\phi(i)}}^*$ gibt. Deswegen muss $\left(v_{\phi(i)}\right)$ eine streng monoton fallende Teilfolge $({v'}_i)$ enthalten.
Diese Folge hat die selbe Form wie 5.6. Wir erhalten mit der gleichen Argumentation, dass $[{v'}_i] = [g^*]$ ist. Wir wissen, dass $v_i = u_i - {g_i}^*$ und daher $v_i \leq u_i$ ist. Weiterhin gilt $u_i < \overline{p}\mathfrak{g}$ und wir können eine natürliche Zahl $q = \overline{p} - 1$ finden, sodass $v_i \leq q\mathfrak{g}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Dies ist ein Widerspruch zu unserer Wahl der Folge $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Folglich ist $\mathfrak{U}$ wohlgeordnet.

□

5.3.16 Lemma
Sei $\sum_{g\in G} a_g z^g =: f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ *mit* $\min(\mathrm{supp}(f)) > 0$. *Die* ***unendliche Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G} a_g z^g\right)^n$$

ist für beliebige Körperelemente $\lambda_n \in K$ *wohldefiniert und liegt in* $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der unendlichen Reihe.
Für $\sum_{g\in G} a_g z^g =: f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $\min(\mathrm{supp}(f)) > 0$ kann $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G} a_g z^g\right)^n$ für $\lambda_n \in K$ definiert werden, wenn für ein $\gamma \in \mathrm{supp}(f)$ der Koeffizient von z^γ in f^n nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ ungleich null ist. Wir bezeichnen diesen Koeffizienten von f^n bei z^γ mit $(f^n)_\gamma$.
Sei $U := \mathrm{supp}(f)$ und γ ein Element von unendlich vielen der Mengen nU mit $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen aus Lemma 5.3.15, dass $\mathfrak{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU$ wohlgeordnet ist.
Angenommen es gibt ein Element $\gamma \in G$, sodass $(f^n)_\gamma$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ungleich null ist. Wir wählen als γ das kleinste der Elemente, die in unendlich vielen der Mengen nU, $n \in \mathbb{N}$ liegen. Es gibt also unendlich viele Darstellungen von γ als Summe von Elementen aus U. Wir ordnen diese Darstellungen nach wachsender Länge $\gamma = \gamma_{i1} + \gamma_{i2} + \gamma_{i3} + ... + \gamma_{in_i}$ mit $\gamma_{ij} \in U$ und $n_1 < n_2 < ....$ Die Folge $(\gamma_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ enthält eine monoton wachsende Teilfolge, da U wohlgeordnet ist.
Wir nehmen an, dass $(\gamma_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Die durch ${\gamma'}_i = -\gamma_{i1} + \gamma$ bestimmte Folge ist also fallend und weil $\mathfrak{U}$ wohlgeordnet ist und keine streng monoton fallende Folge existiert, ist $({\gamma'}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ab einem bestimmten Index konstant. Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit ${\gamma'}_{j+m} = {\gamma'}_j = \gamma'$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Das Element γ' liegt somit in $\mathfrak{U}$ und daher in unendlich

vielen der Mengen nU, $n \in \mathbb{N}$.
Nach Definition von γ' und weil $\gamma_{i1} > 0_G$ ist, wissen wir, dass $\gamma' < \gamma$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur minimalen Wahl von γ. Es gilt also nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$, dass $(f^n)_\gamma \neq 0$ ist. Die unendliche Reihe ist somit wohldefiniert.
Es bleibt zu zeigen, dass die unendliche Reihe in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ liegt. Ihr Träger ist eine Teilmenge von $\mathfrak{U}$. Nach Lemma 5.3.15 ist $\operatorname{supp}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f^n\right)$ wohlgeordnet. Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G} a_g z^g\right)^n \in K\left(\left(z^G\right)\right).$$

□

5.3.17 Bemerkung

Die in Lemma 5.3.16 definierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{g\in G}^{\infty} a_g z^g\right)^n$ mit $\lambda_n \in K$ und $f := \sum_{g\in G}^{\infty} a_g z^g \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$ kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot (f)^n &= \lambda_0 f^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot f^n \\ &= \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot f^n.\end{aligned}$$

5.3.18 Definition

Sei $\Upsilon := \{1_K + f \mid f \in K\left(\left(z^G\right)\right) \text{ und } \min(\operatorname{supp}(f)) > 0\}$. Für $f', h' \in \Upsilon$ gilt:

$$\left(f'h'\right) := (1_K + f) \cdot (1_K + h) = 1_K + (f + h + fh).$$

5.3.19 Lemma

Sei $1_K + f \in \Upsilon$ *mit* $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ *und* $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. *Das Element*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-f)^n = 1_K + \sum_{n=1}^{\infty} (-f)^n$$

liegt in Υ *und ist invers zu* $1_K + f$.

Beweis:

Sei $\mathfrak{f} := 1_K + f \in \Upsilon$ mit $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ und $\min(\operatorname{supp}(f)) > 0$. Die Menge $K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist nach Satz 5.3.13 ein kommutativer Ring. Es gilt somit $(-f) \in K\left(\left(z^G\right)\right)$. Der Träger der formalen Potenzreihe $(-f)$ entspricht dem Träger von f und es gilt $\min(\operatorname{supp}(-f)) > 0$. Nach Lemma 5.3.16 gilt, dass $\overline{f} := \sum_{n=1}^{\infty} (-f)^n \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ist. Der Träger von $\overline{f}$ ist in der Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}((-f)^n)$ enthalten. Der Träger $\operatorname{supp}(f^n)$ ist positiv für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die

Vereinigung positiver Mengen ist ebenfalls positiv und es folgt, dass der Träger der Reihe $\overline{f}$ positiv ist. Wir erhalten also, dass $\bar{\mathfrak{f}} := 1_K + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n$ in Υ liegt. Die Verknüpfung der beiden Gruppenelemente $\mathfrak{f}$ und $\bar{\mathfrak{f}}$ hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{f}} &= (1_K + f)\left(1_K + \overline{f}\right) \\
&= 1_K + \left(f + \overline{f} + f \cdot \overline{f}\right) \\
&= 1_K + \left(\sum_{g\in G} a_g z^g + \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n + \left(\sum_{g\in G} a_g z^g\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n\right)\right) \\
&= 1_K + \left(\sum_{g\in G} a_g z^g + (-f)^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-f)^n + \left(-(-f) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-f)^n\right)\right) \\
&= 1_K + \left(\sum_{n=2}^{\infty}(-f)^n + \left(-\sum_{n=2}^{\infty}(-f)^n\right)\right) \\
&= 1_K + 0_K = 1_K.
\end{aligned}$$

□

Mithilfe dieser Erkenntnis und Lemma 5.3.14 sind wir nun in der Lage, den zentralen Satz der Ausarbeitung zu beweisen.

5.3.20 Satz
$\left(K\left(\left(z^G\right)\right), +, \cdot\right)$ *ist mit der definierten Addition und Multiplikation ein Körper.*

Beweis:

Wir wissen bereits, dass $K\left(\left(z^G\right)\right)$ nach 5.3.13 ein kommutativer Ring ist. Es genügt zu zeigen, dass zu jedem $0 \neq f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ ein Inverses existiert. Wie in Lemma 5.3.14 gezeigt, kann jedes Element $f \neq 0$ des Ringes $K\left(\left(z^G\right)\right)$ in der Form $f = \lambda \cdot z^g \cdot (1_K + h)$ geschrieben werden mit $\lambda \in K^*, g \in G,\ h \in K\left(\left(z^G\right)\right)$, wobei $\min(\operatorname{supp}(h)) > 0$ ist. Wir bezeichnen mit $1_K + \overline{h}$ das Inverse von $1_K + h$ in der Gruppe Υ.
Da $\lambda \in K^*$ ist, handelt es sich um eine Einheit und es existiert ein eindeutiges Inverses, welches wir mit λ^{-1} bezeichnen. Da g ein Element der angeordneten, abelschen, additiv geschriebenen Gruppe G ist, gibt es auch zu g ein negatives Element, das wir $-g$ nennen. Mit selbiger Argumentation wie in Lemma 5.3.14 wissen wir, dass das Element $k := \left(1_K + \overline{h}\right) z^{-g}\lambda^{-1}$ in $K\left(\left(z^G\right)\right)$ liegt. Nach den Rechengesetzen für die Unbestimmte 5.1.8 und den definierten Rechenoperationen in dem Potenzreihenring $K\left(\left(z^G\right)\right)$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
f \cdot k &= \left(\lambda \cdot z^g \left(1_K + h\right)\right) \cdot \left(\left(1_K + \overline{h}\right) z^{-g} \lambda^{-1}\right) \\
&= \left(\lambda \cdot z^g z^{-g} \lambda^{-1}\right) = \left(\lambda z^{g-g} \lambda^{-1}\right) = \left(\lambda \lambda^{-1}\right) \\
&= 1_K.
\end{aligned}
$$

□

5.3.21 Beispiel
Sei G eine archimedisch angeordnete Gruppe. Nach dem Satz von Hölder 4.3.1 lässt sich G in die Gruppe der additiven reellen Zahlen einbetten. Somit lässt sich $K\left(\left(z^G\right)\right)$ in $K\left(\left(z^{\mathbb{R}}\right)\right)$ einbetten.

5.3.22 Beispiel
Es gilt $K\left(\left(z^{\mathbb{Z}}\right)\right) = K\left((z)\right)$

Wir können nun die bewertungstheoretischen Aussagen, die wir in dem Körper der formalen Laurentreihen bewiesen haben, auf den verallgemeinerten Potenzreihenkörper ausweiten.

5.3.23 Satz
Die Abbildung $v\colon K\left(\left(z^G\right)\right) \to G \cup \{\infty\}$, $f \mapsto \min(\operatorname{supp}(f))$ *mit* $\min(\varnothing) = \infty$ *ist eine Bewertung auf* $K\left(\left(z^G\right)\right)$.

Beweis:

Die Abbildung ist surjektiv, denn zu jedem Gruppenelement existiert eine formale Potenzreihe $f \in K\left(\left(z^G\right)\right)$ mit diesem Startwert, sodass $v(f) = \min\left(\operatorname{supp}(f)\right)$ gilt. Wir weisen nun die Eigenschaften B1'-B3' aus Definition 4.5.3 nach.

zu B1': Klar nach Definition.

zu B2': Sei $f = \sum_{g \in G} a_g z^g$ und $h = \sum_{g \in G} b_g z^g$ mit $g_1 = \min(\operatorname{supp}(f))$ und $g_2 = \min(\operatorname{supp}(h))$. Dann ist $v(f) = g_1$ und $v(h) = g_2$. Damit gilt, dass $v(f) + v(h) = g_1 + g_2$ entspricht. Wir wollen zeigen, dass das Bild von fh unter der Abbildung

$$
v(fh) = v\left(\sum_{g \in G} \sum_{k+j=g} a_k b_j z^g\right) \stackrel{!}{=} v(f) + v(h),
$$

ist, wobei $a_k = 0$ für $k < g_1$ und $b_j = 0$ für $j < g_2$ ist.
Wir betrachten zunächst $g < g_1 + g_2$. Nach Voraussetzung ist entweder $a_k = 0$, oder $b_j = 0$ und wir erhalten $a_k b_j = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{g_1} \neq 0$ und $b_{g_2} \neq 0$. Damit ist $v(fh) = \min(\operatorname{supp}(fh)) \geq g_1 + g_2$

Sei nun $g = g_1 + g_2$. Die Summe $\sum_{k+j=g_1+g_2} a_k b_j z^{g_1+g_2} = a_{g_1} b_{g_2} z^{g_1+g_2}$ ist ungleich Null und daher erhalten wir, dass $v(fh) = g_1 + g_2 = v(f) + v(h)$ ist.

zu B3' : Wenn f, h wie oben definiert sind, erhalten wir für $v(f+h)$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} v\,(f+h) &= v\left(\sum_{g=\min\{g_1,g_2\}}^{\infty} (a_g + b_g) z^g\right) \\ &\geq \min\{g_1, g_2\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \min\{v(f), v(h)\} \end{aligned}$$

□

5.3.24 Satz
Die Menge $K[[z^G]] := \{f \in K\left(\left(z^G\right)\right) \mid \operatorname{supp}(f) \geq 0\}$ *ist ein Bewertungsring von* v.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $K[[z^G]]$ und der Definition eines Bewertungsrings 4.5.4. □

5.3.25 Beispiel
Es gilt $K[[z^{\mathbb{Z}}]] = K[[z]]$.

Hier schließt sich der Kreis zu dem, zu Beginn des Kapitels betrachteten Potenzreihenring $K[[z]]$ und dem Laurentreihenkörper $K((z))$. Die Menge der ganzen Zahlen ist eine angeordnete abelsche additive Gruppe. Über einem beliebigen Körper K wissen wir nun, dass der Laurentreihenkörper mit $G = \mathbb{Z}$ ein Beispiel für einen verallgemeinerten Potenzreihenkörper darstellt.

Literaturverzeichnis

[Car48] CARRUTH, Philip W.: Generalized Power Series Fields. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), May, Nr. 3, S. 548 – 559

[Ebe13] EBELING, Wolfgang: *Funktionentheorie, Differentialtopologie und Singularitäten: Eine Einführung mit Ausblicken.* Vieweg+Teubner Verlag, 2013

[Fis08] FISCHER, Gerd: *Lehrbuch der Algebra.* 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008

[Fuc66] FUCHS, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966

[Hö01] In: HÖLDER, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß.* Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1 – 64

[Hah95] HAHN, Hans: Über die nichtarchimedischen Größensysteme. In: SCHMETTERER, Leopold (Hrsg.) ; SIGMUND, Karl (Hrsg.): *Hans Hahn Gesammelte Abhandlungen Band 1/Hans Hahn Collected Works Volume 1.* Springer Vienna, 1995, S. 439–499

[Hul12] HULEK, Klaus: *Elementare algebraische Geometrie.* Wiesbaden : Springer Spektrum, Vieweg und Teubner Verlag, 2012

[Jä99] JÄNICH, Klaus: *Funktionentheorie: eine Einführung.* Springer, 1999 (Springer-Lehrbuch)

[Lü08] In: LÜNEBURG, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1.* Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507 – 577

[Neu49] NEUMANN, Bernhard H.: On ordered division rings. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 66 (1949), Nr. 1, S. 202 – 252

[Neu92] NEUKIRCH, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992

[PC70] Priess-Crampe, Sibylla: Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen. In: *Archiv der Mathematik* 21 (1970), Nr. 1, S. 362 – 365

[PC83] Priess-Crampe, Sibylla: *Angeordnete Strukturen*. Springer-Verlag, 1983

[Pic75] Pickert, Günther: *Projektive Ebenen*. 2. Auflage. Berlin/Heidelberg/New York : Springer, 1975

[Rib92] Ribenboim, Paulo: Noetherian rings of generalized power series. In: *Journal of pure and applied algebra* 79 (1992), Nr. 3, S. 293 – 312

[SP08] Schulze-Pillot, Rainer: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[Tar12] Taraz, Anusch: *Diskrete Mathematik - Grundlagen und Methoden*. Basel : Birkhäuser, 2012

[Ucs63] Ucsnay, Peter: *Formales Rechnen in Potenzreihenkörpern*. Mathematisches Institut der Universität, 1963 (Bonner mathematische Schriften)

[Xin05] Xin, Guoce: A residue theorem for Malcev–Neumann series. In: *Advances in Applied Mathematics* 35 (2005), Nr. 3, S. 271 – 293