



Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

12. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Mathematische Grundlagen	4
2.1	Angeordnete Gruppen	4
2.1.1	Archimedisch angeordnete Gruppen	6
2.1.2	Kette konvexer Untergruppen	8
2.1.3	Einblick in die Bewertungstheorie	8
2.1.4	Der Hahnsche Einbettungssatz	9
3	Potenzreihenkörper	11
3.1	Der Potenzreihenring	11
3.1.1	Rechnen im Potenzreihenring	12
3.1.2	Eigenschaften des Potenzreihenrings	13
3.2	Der Körper der formalen Laurentreihen	15
3.3	Der Potenzreihenkörper	19
3.3.1	Träger über ganzen Zahlen	19
3.3.2	Träger über angeordneter abelscher Gruppe	19
3.3.3	Addition und Multiplikation im Potenzreihenkörper	20
3.3.4	Algebraische Abgeschlossenheit	20

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können. Der Text ist in drei Hauptteile gegliedert. Als erstes erfolgt ein kleiner Einblick in die Theorie der angeordneten Gruppen, die später zur Konstruktion des Hahnschen Potenzreihenkörpers benötigt werden. Im zweiten Teil werden Eigenschaften des Potenzreihenrings über einem Körper näher beschrieben und verallgemeinert bewiesen wie der Körper der Laurentreihen entsteht. Basierend auf Arbeiten von Fuchs und Priess-Crampe wird die Konstruktion des Potenzreihenkörpers über einer angeordneten Gruppe als Träger durchgeführt.

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die später benötigt werden. Zunächst betrachten wir die wichtigsten Eigenschaften angeordneter Gruppen. Die Kette der konvexen Untergruppen spielt eine wichtige Rolle bei der Anordnungsfähigkeit von Gruppen. Hölders Aussage, archimedisch angeordnete Gruppen lassen sich in die additive Gruppe des \mathbb{R} einbetten, führt uns zur allgemeineren Form: dem Hahnschen Einbettungssatz. Dieser besagt, dass angeordnete abelsche Gruppen auch als Untergruppen eines lexikographisch geordneten reellen Funktionenraums, beispielsweise der Körper der Laurentreihen, verstanden werden können.

Die Theorie der angeordneten Strukturen, in unserem Fall ausschließlich Gruppen, liefert wichtige Erkenntnisse zur späteren Konstruktion des Körpers von formalen Potenzreihen. Die reellen Funktionen die durch Potenzreihen dargestellt werden, sind nicht mehr nur auf den natürlichen Zahlen, sondern jeder angeordneten abelschen Gruppe definierbar, wobei auf die Wohlordnung nicht verzichtet werden kann.

2.1 Angeordnete Gruppen

2.1.1 Definition

Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn die Relation " \leq " folgende Eigenschaften, für alle $a, b, c \in A$ erfüllt.

T1: *Reflexivität* $a \leq a$,

T2: *Antisymmetrie* aus $a \leq b$, $b \leq a$ folgt $a = b$,

T3: *Transitivität* aus $a \leq b$, $b \leq c$ folgt $a \leq c$

" \leq " bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A .

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4: Für alle $a, b \in A$ besteht entweder $a < b$, oder $a = b$, oder $a > b$. [Fuc66]

2.1.2 Definition

Eine *teilweise geordnete Gruppe* G bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,

G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation " \leq ", wie in 2.1.1

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: für $a, b \in G$ gilt aus $a \leq b$ folgt $ca \leq cb$ und $ac \leq bc$ für $\forall c \in G$. [Fuc66]

2.1.3 Definition

Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

2.1.4 Satz

Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei. [PC83]

Beweis:

Klar, denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz [G4] 2.1.2 ergeben. \square

2.1.5 Definition

Genügt eine Teilmenge P einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so nennt man (G, \circ) *anordnungsfähig*.

P1: $0 \cup P \cup -P = G, P \cap -P = \emptyset$

P2: $P \circ P \subseteq P$

P3: P ist normal in G /

Nun beschäftigen wir uns mit der Wohlordnung von total geordneten Gruppen. Diese wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. $G \neq$ versehen mit der Ordnungsrelation \prec .

2.1.6 Definition

Eine angeordnete Menge nennt man *wohlgeordnet*, wenn für jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Das heisst $\exists x \in V$, mit $u \leq v, \forall v \in V$. [Fuc66]

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Die Anordnung der natürlichen Zahlen \mathbb{N} ist eine Wohlordnung. Die Menge \mathbb{Z} ist mit der natürlichen Anordnung " $<$ " total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von \mathbb{Z} nicht nach unten beschränkt sind und somit \mathbb{Z} kein kleinstes Element enthält. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von \mathbb{N} auf \mathbb{Z} .

2.1.7 Lemma

Ist $M \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat M ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element. [SP08]

Beweis:

Es gilt: \mathbb{Z} ist ein kommutativer nullteilerfreier Ring mit Einselement und somit ein Integritätsbereich. Die Rechenoperationen sind wohldefiniert, wie leicht zu zeigen ist. Sei $M \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge von \mathbb{Z} . Da M nach unten beschränkt ist gibt es ein $a \in M$ sodass für alle $m \in M : a \leq m$. Noch zu zeigen ist, dass a eindeutig bestimmt ist. Dies folgt da \leq eine totale Ordnung auf \mathbb{Z} definiert. Angenommen es gibt ein Element $a' \in M$ mit $a' \neq a$ und $\forall m \in M : a' \leq m$. Dann folgt nach Voraussetzung $a \leq a'$ und $a' \leq a$, und nach Definition einer totalen Ordnung 2.1.2 [T2] $a' = a$, damit Widerspruch zur Voraussetzung. \square

2.1.8 Beispiel

Betrachte die Ordnung: $a < b \Leftrightarrow (|a| \leq |b| \vee |a| = |b|, a > 0)$.

Daher gilt in \mathbb{Z} : $0 < 1 < -1 < 2 < -2 \dots$

Das kleinste Element von \mathbb{Z} in dieser Ordnung entspricht dem Element mit dem kleinsten Index.

2.1.1 Archimedisch angeordnete Gruppen

Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an das Kapitel "Angeordnete Gruppen" (S. 73- 93) in [Fuc66], sowie Arbeiten von Priess- Crampe [PC69], [PC83].

2.1.9 Definition

Eine angeordnete Gruppe $(G, +)$ heisst *archimedisch*, wenn es $\forall a, b \in G$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

2.1.10 Definition

Seien $a, b \in G$, wobei G eine angeordnete Gruppe sei. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn gilt:

$$|a|^n < |b| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.11 Definition

Sei G eine angeordnete Gruppe, und $|a|$ der absolute Betrag eines Elements $a \in G$. Zwei Elemente $a, b \in G$ werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, $a \sim b$, wenn positive Zahlen m und n existieren, so dass: $|a| < |b|^m$ und $|b| < |a|^n$.

2.1.12 Folgerung

Daraus folgt, dass für jedes Paar von Elemente $a, b \in G$ genau eine der anschließenden Relationen gilt:

- (i) $a \ll b$, (ii) $a \sim b$, (iii) $b \ll a$.

Des weiteren schließen wir aus Definition 2.1.10 und 2.1.11:

- (i) aus $a \ll b$ folgt $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx \ \forall x \in G$;
- (ii) aus $a \ll b$ und $a \sim b$ folgt $c \ll b$;
- (iii) aus $a \ll b$ und $b \sim d$, folgt $a \ll d$;
- (iv) aus $a \ll b$ und $b \ll c$ folgt $a \ll c$;
- (v) aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$.

Sind alle Elemente einer Gruppe archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet*.

Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne $[x]$ die *archimedische Klasse* in der das Element $x \in G$ liegt, $[G]$ die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G .

Sind zwei Elemente $a, b \in G$ nicht archimedisch äquivalent, gilt entweder: $\forall n \in \mathbb{N}: n^*|a| < |b|$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$ sodass: $n^*|b| < |a|$.

2.1.13 Satz

Eine angeordnete Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen \mathcal{o} -isomorph ist. Folglich sind alle archimedisch angeordneten Gruppen kommutativ. [Hö01]

Beweis:

" \Leftarrow "Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.

" \Rightarrow " Beweis über archimedische Eigenschaft, o-Isomorphie einer einelementigen Gruppe zu der

Gruppe der ganzen Zahlen ([PC69] S. 8), Kommutativität von G , Dedekindschen Schnitt und Homomorphismus ([Fuc66] S. 75) \square

2.1.2 Kette konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten Gruppe. Untergruppen angeordneter Gruppen besitzen eine durch die teilweise Gruppenordnung induzierte teilweise Ordnung. Wir bezeichnen die Untergruppen als angeordnet, falls die ursprüngliche teilweise Ordnung ebenso eine Anordnung war.

2.1.14 Definition

Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G nennen wir *konvex*, wenn aus $a \in U$, $x \in G$, mit $0 < |x| < |a|$ folgt $x \in U$. (nach [PC69]) Bezeichne " \sum " die *Kette konvexer Untergruppen* einer angeordneten Gruppe G . \sum besitzt folgende Eigenschaften:

- S1: Gilt $e \in \sum$ und $G \in \sum$ dann gilt, wenn C_λ Untergruppe, dann gilt $\cup C_\lambda$ und $\cap C_\lambda$ liegen in \sum .
- S2: Ist $C \in \sum$ und $g \in \sum$, so ist $g^{-1}Cg \in \sum$
- S3: Sei $D \subset C$ und \sum enthält keine Untergruppe zwischen C und D , so ist D normal in C und C/D ist isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.
- S4: Sei $D \subset C$ und \sum enthält keine Untergruppe zwischen C und D , so erzeugen die Hauptautomorphismen von C/D einen Integritätsbereich $\Phi C/D$ im Endomorphismenring $\Psi\{C/D\}$. Der durch $\Psi\{C/D\}$ und durch die Quadratwurzeln der Hauptautomorphismen erzeugte Körper $\Gamma\{C/D\}$ ist einem Unterkörper der reellen Zahlen isomorph.

2.1.15 Bemerkung

Für konvexe Untergruppen gelten folgende Eigenschaften:

- (a) Eine konvexe Untergruppe ist auch bezüglich der ganzen Gruppe konvex.
- (b) Der Durchschnitt konvexer Untergruppen ist ebenso wieder eine konvexe Untergruppe.

2.1.16 Definition

Ein System \sum aus Untergruppen einer Gruppe G nennen wir *System aller konvexen Untergruppen* einer Anordnung von G , genau dann wenn \sum den obigen Bedingungen S1 - S4 genügt. [Mal48]

2.1.3 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir $(G, +)$, eine angeordnete abelsche Gruppe und eine angeordnete Menge Θ mit einem maximalen Element μ .

2.1.17 Definition

Eine *Bewertung* $\omega(a)$ mit $a \in G$ ist eine Funktion $\omega: G \rightarrow \Theta$, so dass folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$B1: \omega(a) = \mu \Leftrightarrow a = 0,$$

$$B2: \omega(na) = \omega(a) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$B3: \omega(a + b) \geq \min\{\omega(a), \omega(b)\}.$$

Die Gleichheit in der Bedingung (iii) gilt dann, wenn $\omega(a) \neq \omega(b)$. Zwei Bewertungen v, v' auf G mit den Wertemengen Γ, Γ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v'$.

Sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe, dann nennt man die Abbildung $a \mapsto [a]: G \rightarrow [G]$ die *natürliche Bewertung*. [PC83]

2.1.18 Definition

[PC83] Sei K ein Körper, (Θ, \cdot) eine angeordnete abelsche Gruppe und $\bar{\Theta} = \Theta \cup 0$ mit 0 als absorbierendes Element für alle $0 < \gamma \in \Theta$. Eine Abbildung $\omega: K \rightarrow \bar{\Theta}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie 2.1.17 [B1] erfüllt und zusätzlich folgendes gilt:

$$B2': \omega(ab) = \omega(a) \omega(b) \text{ für alle } a, b \in K$$

$$B3': \omega(a + b) \leq \max\{\omega(a), \omega(b)\} \text{ für alle } a, b \in K.$$

Ein Beispiel für eine Bewertung ist die Polordnung meromorpher Funktionen in einem festen Punkt, wie im Hauptteil (Potenzringe/Laurentreihen) 3 3.2.5 noch erörtert wird. Man bezeichnet $\omega: K \rightarrow \bar{\Theta}$ als diskrete Bewertung, falls gilt $\bar{\Theta} = \mathbb{Z}$

2.1.4 Der Hahnsche Einbettungssatz

Wie in den vorherigen Paragraphen ausgeführt sind archimedische Gruppen abelsch und isomorph zu Untergruppen der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Das heißt es gibt einen injektiven monotonen Homomorphismus $f: G \mapsto (\mathbb{R}, +)$. Existiert ein weiterer solcher Homomorphismus, $g: G \mapsto (\mathbb{R}, +)$, dann existiert genau eine reelle Zahl $\lambda > 0$, mit $g(x) = \lambda f(x)$, wobei $x \in G$

2.1.19 Satz

Jede angeordnete abelsche Gruppe ist zu einer Untergruppe eines angeordneten Vektorraumes über \mathbb{Q} ordnungsisomorph.

2.1.20 Satz

Jeder angeordnete Vektorraum G über $K(x)$, wobei $K(x)$ der rationale Funktionenkörper, ist einem Unterraum des lexikographisch geordneten Funktionenraums $W(G)$ o-isomorph.

2.1.21 Satz

[PC83] (Hahnscher Einbettungssatz, Hahn 1907) Eine angeordnete abelsche Gruppe A lässt sich ordnungstreu in die Hahn-Gruppe $H(\Gamma, \mathbb{R})$ einbinden, wobei $\Gamma = [A] \setminus \{0\}$.

Kapitel 3

Potenzreihenkörper

Bevor wir mit der allgemeinen Untersuchung von Potenzreihenkörpern beginnen, wird in diesem Kapitel ein wichtiges Beispiel von Ringen eingeführt. Zunächst wird die Menge der formalen Potenzreihen definiert und nachgewiesen, dass es sich bezüglich komponentweiser Addition und Faltung um einen Ring handelt. Als Beispiel eines Potenzreihenkörpers betrachten wir den Körper der Laurentreihen genauer, der dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht. Die genauere Analyse der Eigenschaften des Trägers der Elemente des Körpers der Laurentreihen zeigt, dass dieser auch über einer angeordneten Gruppe definiert sein kann und trotzdem ein Körper durch Einbettung des Ringes entsteht. Der dadurch entstandene Körper, wird als *Potenzreihenkörper* bezeichnet.

3.1 Der Potenzreihenring

Allgemein ist ein Ring folgendermaßen definiert:

3.1.1 Definition

[Fis08] Sei R eine nichtleere Menge und seien $\oplus : R \times R \rightarrow R$ und $\odot : R \times R \rightarrow R$ zwei Verknüpfungen auf R . Das Tripel (R, \oplus, \odot)

R1: (R, \oplus) ist eine abelsche Gruppe,

R2: (R, \odot) ist ein Monoid,

R3: (Distributivgesetze) Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Das neutrale Element bezüglich der Addition wird mit 0_R , das neutrale Element bezüglich der Multiplikation mit 1_R bezeichnet. Wir betrachten im Folgenden nur den Ring der formalen

Potenzreihen $K[[z]]$ über einem beliebigen Körper K . Hervorzuheben ist, dass z keine Variable, die für eine Zahl steht, repräsentiert, sondern eine Unbestimmte darstellt. Daraus ergibt sich die Irrelevanz von Konvergenzfragen in der Theorie der formalen Potenzreihenringe und -körper. Mit $K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}$ wird die Menge der formalen Potenzreihen in z über K bezeichnet. $K[[z]]$ ist ein Ring bezüglich der Addition und Multiplikation, wie in 3.1.1 bewiesen wird.

3.1.1 Rechnen im Potenzreihenring

Im Folgenden werden Addition und Multiplikation in $K[[z]]$ definiert sowie durch einen Nachweis der Ringaxiome 3.1.1 (R1-R3) gezeigt, dass $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen ist.

Formale Potenzreihen werden komponentenweise addiert:

$$+ : K[[z]] \times K[[z]] \rightarrow K[[z]] , \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen erfolgt durch die sogenannte Faltung: $\cdot : K[[z]] \times K[[z]] \rightarrow K[[z]] : \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) z^n$

Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$. Das *neutrale Element der Addition* 0_R ist die Nullreihe. Sei $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n$, wobei $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt:
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Wir bezeichnen $-f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$ als das *Inverse der Addition*.

Es gilt: $f(x) + (-f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n) z^n = 0_R$. Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe. Darunter verstehen wir diejenige Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind: $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n$, wobei $a_0 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Damit folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j \cdot b_k) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Für das *Inverse der Multiplikation* muss für zwei Potenzreihen $f, g \in K[[z]]$ nach Definition gelten:

$$fg = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \stackrel{!}{=} 1$$

Folglich muss $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0}$ erfüllt sein. Außerdem folgt für die restlichen Koeffizientenwerte:

$$\sum_{j+k=n} (a_j b_k) = \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Die Koeffizienten b_n werden rekursiv durch diese Gleichungen definiert und die so entstandene Potenzreihe ist die Inverse.

3.1.2 Eigenschaften des Potenzreihenrings

Zunächst betrachten wir die Einheiten im Potenzreihenring bevor für die Erweiterung des Potenzreihenrings zu einem Körper wichtige Folgerungen bewiesen werden.

3.1.2 Satz

Sei $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist eine formale Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann eine Einheit, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Beweis:

" \Leftarrow " Beweis über Induktion.

Sei $a_0 \neq 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \stackrel{!}{=} 1$.

Finde entsprechendes $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.

Für b_0 muss gelten $a_0 b_0 = 1$. Da gilt $a_0 \neq 0$ besitzt sie eine eindeutige Lösung, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$.

Angenommen $\exists b_k$ mit $k < n$ sodass alle $c_m := a_j * b_k, 1 \leq m < n$ gleich 0 sind.

Für den n -ten Koeffizienten ergibt sich $0 \stackrel{\text{def}}{=} c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

Bis auf b_n sind alle Werte festgelegt. Da $a_0 \neq 0$ ist die Lösung für b_n eindeutig.

" \Rightarrow " Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = 1$. Zu zeigen ist: $a_0 \neq 0$.

Es folgt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für $n > 0$ und $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$ □

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind deren konstanter Term ungleich 0 ist.

3.1.3 Satz

Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.

Seien $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n) x^n$ und $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (b_n) x^n$ mit

$$f(x) \cdot g(x) = \sum a_n z^n \cdot \sum b_n z^n = 0.$$

Nach Definition der Multiplikation gilt also

$$\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei nun o.B.d.A. $\sum a_n z^n \neq 0$. Zu zeigen ist: $\sum b_n z^n = 0$. Dazu zeigen wir, dass kein Index n existiert für den $b_n = 0$ und somit: $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1} = 0 \Rightarrow b_n = 0], \forall n \in \mathbb{N}$ Sei k der erste Index sodass $a_k \neq 0$ gilt.

$$\sum_{k+l=k} a_k b_l = \sum_{k+0=k} a_k b_0 = 0$$

Damit gilt $b_0 = 0$. Seien jetzt $b_0 \dots b_{n-1} = 0$. Mit $\sum_{k+l=n+l} a_k b_{n-k} = a_l b_n = 0$. Es folgt daher auch $b_n = 0$. \square

3.1.4 Satz

Betrachte $\mathbb{C}\langle T \rangle$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper \mathbb{C} . $\mathbb{C}\langle T \rangle$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[x]]$.

Beweis:

Wir haben bereits in 3.1.3 gezeigt, dass $\mathbb{C}[[z]]$ ein Integritätsring ist. Nun bleibt für $\mathbb{C}\langle T \rangle$ noch zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.

Betrachte zwei konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2 . Innerhalb des $\min\{r_1, r_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen und somit auch die Summe der beiden Potenzreihen. Das Produkt besitzt denselben Konvergenzradius, da beide Reihen im Radius $\min\{r_1, r_2\}$ absolut konvergieren und somit nach dem großen Umordnungssatz auch das Cauchyprodukt gegen den gleichen Wert. \square

3.1.5 Satz

Die Menge $\text{Quot}(R) := \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \in R \times (R \setminus 0) : \tilde{a}\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b}\}$ mit R Integritätsring ist zusammen mit der

Addition $\text{Quot}(R) \times \text{Quot}(R) \rightarrow \text{Quot}(R), (x, y) \mapsto x + y,$

und der Multiplikation: $\text{Quot}(R) \times \text{Quot}(R) \rightarrow \text{Quot}(R), (x, y) \mapsto x \cdot y$ ein Körper.

Man bezeichnet ihn als Quotientenkörper von R . [Fis08]

Beweis:

Es genügt die Körperaxiome nachzurechnen. (siehe [Fis08] S. 173) \square

Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

3.1.6 Beispiel

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\Theta(D)$ der in G holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt

$\Phi(D) := \text{Quot}(\Theta(D)) = \{\frac{f}{g} : f, g \in \Theta(D), g \neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen. Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert, sind also damit Definitionslücken in g .

3.1.7 Satz

$K[[z]]$ ist ein diskreter Bewertungsring.¹

Beweis:

Nach 3.1.2 folgt $K[[z]]$ besitzt genau ein maximales Ideal nämlich $\mathfrak{m} = (z)$. Für eine Potenzreihe P , mit $P \notin K[[z]]^*$ gilt $a_0 = 0$. Somit lässt sich jede derartige Potenzreihe schreiben als $P = T\tilde{P}$, wobei \tilde{P} die umindizierte Potenzreihe bezeichnet.

Die Nullteilerfreiheit folgt wie in 3.1.3 ausführlicher gezeigt, denn:

Für die Produktreihe FG , wobei $F, G \in K[[z]]$ und F, G von Null verschieden, gilt, dass ab den Indizes i, j gilt $a_i, b_j \neq 0$ und somit $c_n := a_i b_j \neq 0$.

$K[[z]]$ ist noethersch, da $K[[z]]$ ein Hauptidealring, denn jedes Ideal $\neq 0$ ist erzeugt von z^j , wobei j der kleinste Index ist, ab dem die Koeffizienten c_n der Potenzreihen $\neq 0$

in dem Ideal sind. Denn für das maximale Ideal muss gelten, dass es von einem Element erzeugt wird für das gilt: $a_0 = 0$.

Andernfalls wäre die entsprechende Potenzreihe eine Einheit und würde somit ganz $K[[z]]$ erzeugen. \square

Damit folgt, dass $K[[z]]$ isomorph zu einem, wie in Punkt 2 beschriebenen Bewertungsring $A := 0 \cup \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ist.

Wie in obigem Beweis 3.1.7 gezeigt, gilt: $(z) \subset (z^2) \subset (z^3) \subset (z^4) \subset \dots$

3.1.8 Satz

Ist R ein diskreter Bewertungsring, so ist $\text{Quot}(R)$ ein diskret bewerteter Körper mit der Bewertung $v(a/b) = v(a) - v(b)$.

Nach 3.2.3 können wir jetzt zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen, dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht, auf den wir später näher eingehen werden. Anschließend definieren wir eine entsprechende Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen.

3.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen. Wir bezeichnen mit $K((z))$ die Menge aller Abbildungen f von \mathbb{Z} in einen kommutativen Körper K , für die es ein Element $x \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $f(y) = 0$ für alle $y < x$. Wenn wir von K sprechen ist im Folgenden immer ein kommutativer Körper gemeint.

Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit wird jedoch auf

¹<https://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/fileadmin/mathematik/downloads/2012AlgKurven.pdf>

Konvergenzbetrachtungen verzichtet und nur formale Laurentreihen, also Laurentreihen in einer Unbestimmten z behandelt.

3.2.1 Definition

Eine Laurentreihe ist eine Reihe $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei K ein kommutativer Körper ist. Dabei bezeichnet $\sum_{n=1}^k a_{-n} z^{-n}$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da ansonsten die Multiplikation nicht definiert werden kann. Der Träger der Laurentreihe, also der Definitionsbereich der Funktion, die die Laurentreihe darstellt, ist folgendermaßen definiert: $\text{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$. Zwei Laurentreihen werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert.

$$+ : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=\min(-k,-m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Wie bereits erwähnt besitzen formale Laurentreihen nur endliche viele Terme mit negativen Exponenten, das bedeutet der Hauptteil besteht aus nur endlich vielen Summanden. Dadurch kann das Produkt zweier solcher Reihen durch Faltung definiert werden.

Eine derartige Darstellung existiert, da $K((z))$ als Quotientenkörper von $K[[z]]$ definiert ist, wie in 3.2.3 gezeigt wird.

Da jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 \neq 0$ invertierbar in $K[[z]]$, dem Ring der formalen Potenzreihen, ist, wird der Quotient $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m}$ bis auf eine Potenz von z im Nenner gekürzt.

$$\cdot : \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-m-k}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i + b_j) z^n. \text{ [Lü08]}$$

3.2.2 Satz

Sei K ein kommutativer Körper, und bezeichne $K((z))$ den Körper der formalen Laurentreihen. Dann ist $K((z))$ tatsächlich ein Körper. [Lü08]

Beweis:

Sei $f \in K((z))$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{Z}$ sodass die Potenzsumme mit Startwert i für alle Indizes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > i$ ungleich, für alle $n < i$ gleich Null ist. Um zu zeigen, dass $K((z))$ ein Körper ist muss zu jedem Element von $K((z))$ ein Inverses existieren. Wir definieren $g \in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so definierte Laurentreihe invers zu f ist. Setze $g(n) := 0$ für alle $n < -i$ und $g(-i) := f(i)^{-1}$. Sei $w \in \mathbb{N}$ und $g(-i) \dots g(-i+w-1)$ bereits definiert. Dann gilt nach Definition der Multiplikation in $K((z))$ und für $g(-i+w) := -f(i)^{-1} \sum_{m=-i}^{-i+w-1} g(m) f(w-m) :$

$$(gf)(w) = \sum_{n=i-i}^{\infty} \sum_{k+l=n} (a_k + b_l) z^n = \sum_{n=-i}^{-i+w} g(n) f(w-n).$$

Im Fall $w < 0$ ist die Summe $f(w-n)$ für $-i \leq n \leq -i+w$ leer. <für $w = 0$ folgt $gf(0) = g(-i)f(i) = 1$. Es bleibt der Fall $w > 0$ zu berücksichtigen:

$$(gf)(w) = \sum_{n=-i}^{-i+w-1} g(n)f(w-n) + g(-i+w)f(i) \stackrel{\text{defvong}}{=} 0$$

Also ist $gf = 1$ und aufgrund der Kommutativität folgt $fg = 1$, womit $K((z))$ ein Körper ist. \square

Mithilfe von 3.1.5 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

3.2.3 Satz

Es gilt $\mathbb{K}((z)) = \text{Quot}(K[[z]])$.

Beweis:

Nach Konstruktion von $K((z))$ ist klar, dass $K[[z]] \subseteq K((z))$. Da weiter jede Laurentreihe $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ die Gestalt $\frac{g}{z^m}$ wobei $g \in K[[z]]$ und $m \in \mathbb{N}$ so ist $K((z))$ der Quotientenkörper (siehe 3.1.5) von $K[[z]]$ \square

Für $K((z))$ gilt, dass der Körper nur Reihen mit Hauptteilen aus endlich vielen Summanden enthält. $K((z))$ ist definiert wie in 3.2.3 gezeigt als der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen. Jede Potenzreihe $\sum_{n \geq k} a_n z^n$ mit $a_0 \neq 0$ ist invertierbar in $K[[z]]$. Die Elemente können durch Quotienten dargestellt werden, bei denen alles bis auf eine Potenz von z aus dem Nenner gekürzt wird. Aus $\sum n \subseteq k a_n z^n = z^k \sum n \subseteq 0 a_{n+k} z^n$ folgt, dass der Hauptteil aus endlich vielen negativen Koeffizienten besteht.

Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung um das transzendente Element z dar.

3.2.4 Satz

Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\langle z \rangle$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\langle z \rangle$.

Beweis:

Wie in Beweis 3.1.1 konstruieren wir das formale Inverse zu einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\langle T \rangle$ mit $a_0 \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass auch dieses Inverse konvergiert. Nach Voraussetzung konvergiert f und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in f beschränkt ist, also $|a_n| \leq a, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$. Betrachte $f(z_0) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergente Laurentreihe mit $|z_0| > 0$. Da $f(z_0)$ konvergent, ist die Folge $(a_n |z_0|)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und für die Potenzreihe gilt:

$$\bar{f}(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \frac{z}{z_0}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \text{ mit } \omega := \frac{z}{z_0}$$

Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge a_n größer 1 ist und es sei ohne Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge b_n der inversen wie in 3.1.1. Es

gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

Indem wir zeigen, dass $|b_n|$ beschränkt ist durch ein Vielfaches von a^n geben wir eine positive untere Schranke an den Konvergenzradius an und zeigen somit das Inverse konvergiert. Wir zeigen mithilfe von Induktion, es existiert ein $C > 1$ mit $C \in \mathbb{R}$ sodass:

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

Nach Konstruktion des Inversen 3.1.1 ist die Ungleichung für b_0 erfüllt. Gelte die Abschätzung für b_n . Wähle $C := \frac{a}{a-1}$. Dann gilt:

$$|b_{n+1}| = \left| -\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| |b_{n+1-k}| \leq a \sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq aC^n \sum_{k=1}^{n+1} a^k \leq aC^n \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (aC)^{n+1}.$$

Wie in 3.2.3 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Des weiteren ist noch zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist, dies wurde bereits in 3.1.4 für Potenzreihen gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Laurentreihen f, g ist natürlich wieder konvergent, man muss nur den Nebenteil betrachten. Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multipliziere man diese so mit den Potenzen von z , dass man eine konvergente Potenzreihe erhält und geht wie in 3.1.4 vor. Nun definieren wir wie in 3.2.3 die Ab-

$$\text{bildung } \Phi : \mathbb{C}_L\langle z \rangle \rightarrow \text{Quot}(\mathbb{C}\langle z \rangle) \quad \sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} [(z^m \sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n, z^m)], & \text{wenn } m < 0, \\ [\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n, 1], & \text{wenn } m > 0. \end{cases}$$

Wie in 3.2.3 bereits gezeigt, handelt es sich um einen Isomorphismus und die Behauptung ist somit bewiesen. \square

Wie in 3.1.7 gezeigt, ist $K[[z]]$ ein diskreter Bewertungsring und der kleinste vorkommende Exponent eines Monoms liefert die Bewertung einer Potenzreihe. Der Quotientenkörper eines diskreten Bewertungsringes besitzt ebenso eine Bewertung 3.1.8. So können wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 3.2 der Laurentreihe $\text{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$. Nach 2.1.18 suchen wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus (nach B3 2.1.18). Betrachte $\min\{\text{supp}(f)\}$, eindeutig bestimmt durch den kleinsten Index n_0 der Laurentreihe ab dem der Koeffizient $a_{n_0} \neq 0$. Die Menge all dieser Elemente bildet eine angeordnete abelsche Gruppe Ψ und es gibt einen Isomorphismus von $\psi : \Psi \rightarrow \mathbb{Z}$.

3.2.5 Satz

Betrachte die Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$, mit $a_{n_0} \neq 0$. Die Abbildung $v : K((z)) \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $v(f) = n_0$ ist eine diskrete Bewertung.

Beweis:

Klar: Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt und damit $v(f) = \min\{\{(\text{supp}(f))\}\}$. Nach 2.1.18 sind noch (B1-B3') nachzuweisen mit der angeordneten abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ als Bildmenge.

zu B1 : Klar nach Definition.

zu B2 : Sei $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$. Dann ist $v(f) = n_0$ und $v(g) = m_0$. Damit gilt: $v(f) + v(g) = n_0 + m_0$.

$v(f * g) = v(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{n=m+k} a_m b_k z^n) =$, wobei $a_m = 0$ für $m < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$. Betrachte $n < n_0 + m_0$. Da $n = m + k$ folgt $m < n_0$ oder $k < m_0$. Nach Voraussetzung folgt entweder $a_m = 0$ oder $b_k = 0$ und somit ist auch das Produkt $a_m b_k = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Sei $n = n_0 + m_0$. Das Produkt $a_{n_0} b_{m_0} \neq 0$ und daher $v(fg) = n_0 + m_0$.

zu B3 : Für $v(f+g)$ gilt, wenn f, g wie oben definiert: $v(f + g) = v\left(\sum_{n=\min\{n_0, m_0\}}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\right) = \min\{n_0, m_0\} \leq \max\{n_0, m_0\} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v(f), v(g)\}$.

□

3.3 Der Potenzreihenkörper

3.3.1 Träger über ganzen Zahlen

Betrachte wieder den Körper der formalen Laurentreihen über dem Körper K . Wie in 3.2 definiert ist T eine Teilmenge der ganzen Zahlen und da für jede Teilmenge ein Minimum existieren, ist T wohlgeordnet nach 2.1.6. Die Wohlordnung des Trägers ist eine Voraussetzung zur Definition der Multiplikation im Körper $K((z))$.

3.3.2 Träger über angeordneter abelscher Gruppe

Wir haben im vorherigen Kapitel festgestellt, dass die bisher betrachteten Potenzreihen immer auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N} (Potenzreihenring $K[[z]]$) oder den ganzen Zahlen \mathbb{Z} (Laurentreihenkörper $K((z))$) definiert waren. In 3.3.1 wurde gezeigt, dass die Mengen auf denen wir Potenzreihenringe definieren können eine bestimmte unverzichtbare Eigenschaft innewohnt, die Wohlordnung. Im Folgenden betrachten wir bestimmte Arten von Mengen, nämlich die bereits in dem vorherigen Kapitel 2 vorgestellten angeordneten Gruppen. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66].

Sei G eine angeordnete Gruppe und K ein Körper.

3.3.1 Definition

$\Phi := \sum_{a \in G} \Phi_a a$ mit $(\Phi_a \in F)$, wobei $\text{supp}(\Phi) = [a \in G | \Phi_a \neq 0]$ wohlgeordnet sei bezüglich der Anordnung von G . Φ nennt man eine formale Potenzreihe auf G über K .

3.3.3 Addition und Multiplikation im Potenzreihenkörper

3.3.4 Algebraische Abgeschlossenheit

Literaturverzeichnis

- [Fis08] FISCHER, Gerd: *Lehrbuch der Algebra*. 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008
- [Fuc66] FUCHS, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*. Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966
- [Hö01] In: HÖLDER, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß*. Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1–64
- [Lü08] In: LÜNEBURG, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1*. Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507–577
- [Mal48] In: MALZEW: *Über geordnete Gruppen*. Hayk : Akad. HAYK CCCP, 1948, S. 1499;1501
- [PC69] PRIESS-CRAMPE, Sibylla: *Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen*. link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F01220929.pdf. Version: 1969
- [PC83] PRIESS-CRAMPE, Sibylla: *Angeordnete Strukturen*. Springer-Verlag, 1983
- [SP08] SCHULZE-PILLOT, Rainer: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008