Chapitre 13.

REPRESENTATION
PAR DES FONCTIONS NUMERIQUES CONTINUES

En ce qui concerne la théorie des groupes archimédiens, aucune question n'a attiré tant d'attention que la question de la représentation par des groupes de fonctions numériques continues. Dans le chapitre 10, nous avons associé certains espaces topologiques à des f-anneaux et des groupes réticulés commutatifs. Dans ce chapitre, ces espaces nous serviront à représenter des groupes et des f-anneaux archimédiens par des fonctions numériques continues "presque finies", définies sur ces espaces. Dans la première section nous donnerons quelques propriétés des groupes réticulés de fonctions numériques continues "presque finies" qui nous serviront dans la suite.

13.1. Groupes et anneaux réticulés de fonctions continues.

Dans cette section, X désignera toujours un espace topologique.

13.1.1. $C(X)$: Désignons par $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues $f : X \to \mathbb{R}$ comme dans (1.7.1). En définissant $f+g$, $f\vee g$, $f\wedge g$ comme d'habitude par:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) ,$$
$$(f\vee g)(x) = \sup(f(x),g(x)) ,$$
$$(f\wedge g)(x) = \inf(f(x),g(x)) ,$$

$C(X)$ devient un groupe réticulé archimédien. Muni, en plus, de la multiplication

$$(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

$C(X)$ devient un f-anneau archimédien réduit.

L'ensemble $C_b(X)$ des fonction continues bornées $f : X \to \mathbb{R}$ est un sous-groupe solide de $C(X)$.

13.1.2. $E(X)$: Désignons par $E(X)$ l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur des ouverts partout denses de X , c'est-à-dire que $E(X)$ est la réunion des ensembles $C(U)$, où U décrit les ouverts partout denses de X . Deux fonctions dans $E(X)$, disons $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$, sont identifiées si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U \cap V$. Cette identification étant compatible avec l'addition, la multiplication et les opérations de treillis, $E(X)$ est un groupe réticulé archimédien et même un f-anneau.[1]

13.1.3. $\mathcal{D}(X)$: Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la droite réelle achevée. Considérons l'ensemble $\mathcal{D}(X)$ des fonctions continues $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telles que l'ouvert

$$U_g = \{x \in X \mid |g(x)| < +\infty\}$$

soit partout dense dans X ; ces fonctions seront appelées <u>fonctions numériques continues presque finies</u>.

Il y a un plongement canonique de $\mathcal{D}(X)$ dans $E(X)$ donné par $g \mapsto g|U_g$. Ainsi on peut identifier $\mathcal{D}(X)$ à un sous-ensemble de $E(X)$, et on a les inclusions suivantes:

$$C_b(X) \subset C(X) \subset \mathcal{D}(X) \subset E(X) \quad .$$

$\mathcal{D}(X)$ est toujours un sous-treillis de $E(X)$. Mais en général, $\mathcal{D}(X)$ n'est ni additivement ni multiplicativement stable. Si l'on a, par exemple, $f(x) = +\infty$ et $g(x) = -\infty$ pour un $x \in X$ et deux fonctions $f,g \in \mathcal{D}(X)$, il se peut que la fonction $f+g$ - qui est bien définie sur $U_f \cap U_g$ - ne puisse pas être prolongée en une fonction numérique continue en x .

On appelle <u>groupe réticulé de fonctions numériques continues</u>

---

(1) $E(X)$ peut être construit aussi de la manière suivante: l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts partout denses de X est filtrant à droite; car l'intersection de deux ouverts partout denses est encore un ouvert partout dense. Chaque fois que $V \subset U$, on a un homomorphisme injectif de f-anneaux

$$\rho_V^U : C(U) \to C(V) \quad ,$$

à savoir la restriction $\rho_V^U(f) = f|V$. Si $W \subset V \subset U$, on a évidemment $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$, de manière que $(C(U), \rho_V^U)$ pour $V \subset U$ et $U,V \in \mathcal{U}$ est un système inductif de f-anneaux archimédiens. En formant la limite inductive, on obtient justement $E(X)$:

$$E(X) = \varinjlim_{\mathcal{U}} C(U) \quad .$$

presque finies tout sous-ensemble G de $\mathcal{D}(X)$ qui est un sous-groupe réticulé de $\mathcal{E}(X)$ lorsqu'on identifie $\mathcal{D}(X)$ à un sous-ensemble de $\mathcal{E}(X)$ comme ci-dessus.

13.1.4. DEFINITION. Soit U un ouvert partout dense de X et $f : U \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle *support strict de* f l'ensemble

$$s(f) = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\} .$$

L'adhérence de $s(f)$ dans X est appelée *support de* f, notée $\mathrm{supp}(f)$.

Ces deux notions nous serviront pour caractériser la polaire $f^{\perp}$ et la bipolaire $f^{\perp\perp}$ d'une fonction f dans $\mathcal{E}(X)$:

13.1.5. PROPOSITION. *Pour tout* $f \in \mathcal{E}(X)$, *on a*:

$$f^{\perp} = \{h \in \mathcal{E}(X) \mid \mathrm{supp}(f) \cap s(h) = \emptyset\} ,$$

$$f^{\perp\perp} = \{g \in \mathcal{E}(X) \mid \mathrm{supp}(g) \subset \mathrm{supp}(f)\} .$$

Dans ce qui suit, U, V et W désigneront des ouverts partout denses de X. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ donné. Pour une application continue $h : W \to \mathbb{R}$, on a $|f| \wedge |h| = 0$ si et seulement si $s(f) \cap s(h) = \emptyset$. Puisque $s(h)$ est ouvert, on en déduit que $h \in f^{\perp}$ si et seulement si $\mathrm{supp}(f) \cap s(h) = \emptyset$.

Soit $g : V \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $\mathrm{supp}(g) \subset \mathrm{supp}(f)$, alors $\mathrm{supp}(g) \cap s(h) = \emptyset$, ou encore $|g| \wedge |h| = 0$ pour tout $h \in f^{\perp}$ et par conséquent $g \in f^{\perp\perp}$. Réciproquement, soit $g \in f^{\perp\perp}$. Posons $Q = s(f) \cup (X \setminus \mathrm{supp}(f))$. Alors Q est un ouvert partout dense de X. Définissons $h' : Q \to \mathbb{R}$ par

$$h'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \in s(f) , \\ 1 & \text{pour tout } x \notin \mathrm{supp}(f) . \end{cases}$$

Alors $h' \in \mathcal{E}(X)$ et $s(h') = X \setminus \mathrm{supp}(f)$. Cela entraîne que $h' \in f^{\perp}$ et, par suite, $|g| \wedge |h'| = 0$. On en déduit que $\mathrm{supp}(g) \cap s(h') = \emptyset$, c'est-à-dire que $\mathrm{supp}(g) \subset \mathrm{supp}(f)$.

13.1.6. COROLLAIRE. *Un ℓ-sous-groupe* G *est large dans* $\mathcal{E}(X)$ *si, et seulement si, pour tout ouvert* U *de* X, *il y a une fonction non nulle* $g \in G$ *telle que* $\mathrm{supp}(g) \subset \bar{U}$.

Cela résulte immédiatement du théorème (11.1.15) à l'aide de la proposition précédente.

Les espaces extrêmement discontinus, c'est-à-dire les espaces topologiques dans lesquels l'adhérence de tout ouvert est aussi ouverte, ont des propriétés particulièrement agréables en ce qui concerne les fonctions réelles continues:

13.1.7. THEOREME. Soit X un espace topologique extrêmement discontinu. Alors toute application continue $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de X, admet un prolongement continu $\bar{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Par conséquent, $\mathcal{E}(X) = \mathcal{D}(X)$. En outre, $C_b(X)$, $C(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ sont complets et $\mathcal{E}(X)$ est latéralement complet.

En effet, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application continue définie sur l'ouvert U de X. En posant $f(x) = 0$ pour tout $x \in X \setminus \bar{U}$, on peut supposer que $\bar{U} = X$. Pour tout nombre réel r, soit l'ouvert U_r défini par:

$$U_r = \{x \in U \mid f(x) < r\} \quad .$$

Définissons $\bar{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ par:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \inf \{r \mid x \in \overline{U_r}\} & \text{s'il existe } r \text{ tel que } x \in \overline{U_r} \,, \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour tout $x \in U$, on a $\bar{f}(x) = f(x)$; car si $f(x) = t$, alors $x \in U_r$ pour tout $r > t$, et $x \notin \overline{U_r}$ pour tout $r < t$. Donc $\bar{f}$ prolonge f. Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}$, on a:

$$\{x \in X \mid \bar{f}(x) < t\} = \bigcup_{r<t} \overline{U_r} \ .$$

Puisque X est supposé extrêmement discontinu, $\overline{U_r}$ est ouvert pour tout $r \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que $\{x \in X \mid \bar{f}(x) < t\}$ est ouvert. En outre,

$$\{x \in X \mid \bar{f}(x) \leq t\} = \bigcap_{r>t} \overline{U_r}$$

est fermé en tant qu'intersection d'ensembles fermés. Cela entraîne que $\bar{f}$ est continue. Ainsi l'assertion $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}(X)$ du théorème est démontrée.

Démontrons que $\mathcal{D}(X)$ est complet. Pour cela, soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions non-négatives de $\mathcal{D}(X)$ majorée par $g \in \mathcal{D}(X)$. Pour tout nombre réel r, considérons l'ouvert

$$U_r = \bigcup_\lambda \{x \in X \mid f_\lambda(x) > r\} \quad .$$

Pour tout $x \in X$, posons

$$f(x) = \sup \{r \in \mathbb{R} \mid x \in \overline{U_r}\} \ .$$

La continuité de f résulte du fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{x \in X \mid f(x) > t\} = \bigcup_{r>t} \overline{U_r}$$

est ouvert, puisque l'adhérence de tout ouvert est ouverte et que l'ensemble

$$\{x \in X \mid f(x) \geq t\} = \bigcap_{r<t} \bar{U}_r$$

est fermé. De la définition de $f(x)$, il résulte que $f_\lambda \leq f$ quel que soit λ ; en effet, on a $x \in U_r$ pour tout $r < f_\lambda(x)$ et par conséquent $f(x) = \sup\{r \mid x \in \bar{U}_r\} \geq f_\lambda(x)$. Donc f majore toutes les f_λ. Soit réciproquement $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application continue majorant toutes les f_λ. Considérons $y \in X$. Pour tout $t > t_1 = f_1(y)$, on a:

$$U_t = \bigcup_\lambda \{x \mid f_\lambda(x) > t\} \subset \{x \mid f_1(x) \geq t\} \subset \{x \mid f_1(x) > t_1\} .$$

L'ensemble $\{x \mid f_1(x) \geq t\}$ étant fermé, on conclut que

$$\overline{U_t} \subset \{x \mid f_1(x) > t_1\} .$$

Puisque $f_1(y) = t_1$, on déduit que $y \notin \overline{U_t}$. Par conséquent, $f(y) = \sup\{r \mid y \in \overline{U_r}\} \leq t$ pour tout $t > t_1 = f_1(y)$, d'où $f(y) \leq f_1(y)$. Cela étant vrai pour tout y dans X, nous avons démontré que $f \leq f_1$. Par conséquent, $f = \bigvee_\lambda f_\lambda$. On en déduit aussi que f appartient à $\mathcal{D}(X)$; car en appliquant le raisonnement ci-dessus au majorant g des f_λ à la place de f_1, on trouve $f \leq g \in \mathcal{D}(X)$.

Puisque $C_b(X)$ et $C(X)$ sont des sous-groupes solides de $\mathcal{D}(X)$, on conclut qu'ils sont aussi complets.

Démontrons finalement que $\mathcal{E}(X)$ est latéralement complet. Soient $f_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}$ des fonctions continues deux à deux orthogonales, où les U_λ sont des ouverts partout denses de X. On a alors $s(f_\lambda) \cap s(f_\mu) = \emptyset$ chaque fois que $\lambda \neq \mu$. Soit

$$U = \bigcup_\lambda s(f_\lambda) \cup (X \setminus \overline{\bigcup_\lambda s(f_\lambda)}) .$$

Alors U est un ouvert partout dense de X, et la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} f_\lambda(x) & \text{si } x \in s(f_\lambda) , \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus \overline{\bigcup_\lambda s(f_\lambda)} , \end{cases}$$

est continue et l'on a $f = \bigvee_\lambda f_\lambda$. Par conséquent, $\mathcal{E}(X)$ est latéralement complet.

On remarquera que la démonstration du fait que $E(X)$ est latéralement complet reste valable pour n'importe quel espace topologique X .

13.1.8. <u>REMARQUE</u>. On peut s'assurer sans trop de peine que pour $X = [0,1]$, le groupe réticulé $E(X)$ n'admet pas de sous-groupe solide maximal, c'est-à-dire que $E(X)$ n'admet pas d'homomorphisme réticulé non nul dans $\mathbb{R}$. A fortiori, $E(X)$ n'est pas un produit sous-direct de groupes réels.

13.1.9. <u>REMARQUE</u>. Rappelons qu'une partie fermée A d'un espace topologique X est dit <u>régulière</u> si A est l'adhérence d'un ouvert de X . A toute polaire P de $E(X)$ on peut associer un fermé régulier A_P : l'adhérence de $\bigcup_{f\in P} s(f)$. Réciproquement, l'ensemble $P_A =$ $= \{f\in E(X) \mid supp(f) \subset A\}$ est une polaire de $E(X)$ pour tout fermé régulier A de X . Des raisonnements semblables à ceux dans (13.1.5) montrent qu'on a établi une correspondance bijective entre les polaires de $E(X)$ et les fermés reguliers de X. D'après (11.1.15) cela reste valable si l'on remplace $E(X)$ par n'importe quel de ses ℓ-sous-groupes larges.

Si X est extrêmement discontinu, les fermés reguliers sont exactement les fermés ouverts. Dans ce cas on a donc une correspondance bijective entre les polaires de $E(X)$ et les ouverts fermés dans X .

13.2. <u>Représentation d'un groupe archimédien par des fonctions numériques continues presque finies</u>.

Soit A un groupe réticulé archimédien.

Nous utiliserons l'espace Spec A des sous-groupes premiers de A et certains de ses sous-espaces pour représenter A par des fonctions continues.

Comme d'habitude nous prolongeons l'ordre total sur $\mathbb{R}$ à la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en définissant

$$-\infty \leq r \leq +\infty \quad \text{quel que soit} \quad r\in\overline{\mathbb{R}} ,$$

et nous étendons l'addition partiellement en posant

$$r+(+\infty) = +\infty \quad \text{pour tout} \quad r > -\infty ,$$
$$r+(-\infty) = -\infty \quad \text{pour tout} \quad r < +\infty .$$

13.2.1. <u>DEFINITION</u>. On appelle <u>caractère</u> du groupe réticulé A toute application $\xi : A \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$\xi(a \vee b) = \xi(a) \vee \xi(b)$ quels que soient $a, b \in A$ et

$\xi(a+b) = \xi(a)+\xi(b)$ chaque fois que $\xi(a)+\xi(b)$ est

défini dans $\overline{\mathbb{R}}$.

13.2.2. <u>LEMME</u>. <u>Soit</u> a <u>un élément strictement positif de</u> A <u>et</u> p <u>une valeur de</u> a . <u>Il existe un caractère unique</u> ξ <u>de</u> A <u>tel que</u> $\xi(a) = 1$ <u>et</u> $p = \ker \xi$.

Pour démontrer l'existence d'un tel caractère ξ , on observe qu'il existe un isomorphisme φ de p^*/p dans $\mathbb{R}$ d'après (2.6.6), où p^* désigne le sous-groupe premier couvrant p . Puisque $0 < a \in p^*\backslash p$, on a $\varphi(a+p) \neq 0$. En multipliant φ par un nombre réel convenable, on peut supposer que $\varphi(a+p) = 1$. En définissant

$$\varphi(x+p) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x>0 \pmod{p^*} \\ -\infty & \text{si } x<0 \pmod{p^*} \end{cases} ,$$

on a prolongé φ en un caractère de A/p . L'application ξ composée de l'application canonique $A \to A/p$ et du caractère $\varphi : A/p \to \overline{\mathbb{R}}$ est un caractère de A ayant les propriétés voulues. L'unicité de ξ résulte du fait que tout isomorphisme croissant entre deux sous-groupes de $\mathbb{R}$ est induit par une homothétie (12.2.1).

13.2.3. <u>CONSTRUCTION</u>. A l'aide de l'axiome de Zorn choisissons une famille orthogonale maximale $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, c'est-à-dire une famille maximale parmi les familles d'éléments de A strictement positifs et deux à deux orthogonaux.

Pour tout λ , soit X_λ l'espace $\mathrm{val}(e_\lambda)$ des valeurs de e_λ . Soit $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Puisque les e_λ , $\lambda \in \Lambda$, sont deux à deux orthogonaux, les X_λ , $\lambda \in \Lambda$, sont deux à deux disjoints. Chaque X_λ est compact d'après (10.2.5) et ouvert dans X , puisque $X_\lambda = X \cap S(e_\lambda)$. Par conséquent, X est un espace localement compact.

Pour tout $x \in X_\lambda$, soit ξ_x l'unique caractère de A tel que $\xi_x(e_\lambda) = 1$ et $\ker \xi_x = x$ (cf. 13.2.2).

Pour tout élément a de A , définissons $\hat{a} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ par

$$\hat{a}(x) = \xi_x(a) \quad \text{quel que soit } x \in X .$$

Notons que $\hat{e}_\lambda$ est la fonction caractéristique de X_λ . On a:

13.2.4. <u>THEOREME</u>. <u>Pour tout élément</u> a <u>de</u> A , <u>l'ensemble</u>

$$U_a = \{\chi\in X \mid \hat{a}(\chi)\in\mathbb{R}\}$$

<u>est un ouvert partout dense de</u> X <u>et l'application</u> $\hat{a} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ <u>est continue. L'application</u>

$$a \mapsto \hat{a} : A \to \mathcal{D}(X) \subset \mathcal{E}(X)$$

<u>est un isomorphisme de</u> A <u>sur un groupe réticulé</u> $\hat{A}$ <u>de fonctions numériques continues presque finies. De plus</u> $\hat{A}$ <u>est un sous-groupe large de</u> $\mathcal{E}(X)$, <u>et l'application</u> $a \mapsto \hat{a} : A \to \mathcal{E}(X)$ <u>conserve les bornes supérieures et inférieures quelconques qui existent dans</u> A .

La démonstration du théorème procède par étapes:

(a) Pour tout élément a de A et tout entier positif n , l'ensemble

$$U_{n,\lambda}(a) = \{\chi\in X_\lambda \mid a < ne_\lambda \pmod{\chi}\}$$

est ouvert dans X .

En effet, $U_{n,\lambda}(a) = X_\lambda \cap S((ne_\lambda - a)_+)$. Donc $U_{n,\lambda}(a)$ est ouvert dans X_λ . Puisque X_λ est ouvert dans X , il en est de même de $U_{n,\lambda}(a)$.

(b) L'ensemble U_a défini dans l'énoncé du théorème est ouvert dans X puisque U_a n'est rien d'autre que $\bigcup\limits_{n,\lambda} U_{n,\lambda}(a)$. De plus, U_a est partout dense dans Spec A . En effet, U_a contient toutes les valeurs χ de e_λ telles que $a\in\chi^*$. L'intersection de la famille de ces valeurs étant $e_\lambda^\perp$ d'après (11.1.4), on en déduit que $\cap\{\chi \mid \chi\in U_a\} \subset e_\lambda^\perp$. Cela étant vrai pour tout $\lambda\in\Lambda$ et l'intersection de la famille des $e_\lambda^\perp$, $\lambda\in\Lambda$, étant nulle, on a $\cap\{\chi \mid \chi\in U_a\} = \{0\}$; donc U_a est partout dense dans Spec A (cf. 10.1.8).

(c) La fonction $\hat{a} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue. Pour cela il suffit de montrer que pour tout nombre rationnel $q = \frac{n}{m}$, les ensembles

$$V = \{\chi\in X \mid \hat{a}(\chi) < q\} \quad \text{et} \quad W = \{\chi\in X \mid \hat{a}(\chi) > q\}$$

sont ouverts. Posons $V_\lambda = V\cap X_\lambda = \{\chi\in X_\lambda \mid \hat{a}(\chi) < q\}$. Notons que pour tout $\chi\in X_\lambda$, la relation $\hat{a}(\chi) < \frac{n}{m}$ peut s'écrire $m\xi_\chi(a) < n\xi_\chi(e_\lambda)$, ou encore $\xi_\chi(ma) < \xi_\chi(ne_\lambda)$. Mais cela est équivalent à $ma < ne_\lambda \pmod{\chi}$. Donc:

$$V_\lambda = \{\chi\in X_\lambda \mid ma < ne_\lambda \pmod{\chi}\} = U_{n,\lambda}(ma) \quad ,$$

et ce dernier ensemble est ouvert dans X d'après la partie (a) de la démonstration. Donc $V = \bigcup\limits_\lambda V_\lambda$ est ouvert dans X . De la même manière on démontre que W est ouvert.

(d) L'application $a \mapsto \hat{a}$ est un homomorphisme du groupe réticulé A dans $E(X)$, car quels que soient $a,b\in A$ et $\chi \in U_a \cap U_b$, on a:

$$(a+b)\hat{}\,(\chi) = \xi_\chi(a+b) = \xi_\chi(a)+\xi_\chi(b) = \hat{a}(\chi)+\hat{b}(\chi) ,$$

$$(a\vee b)\hat{}\,(\chi) = \xi_\chi(a\vee b) = \xi_\chi(a)\vee\xi_\chi(b) = \hat{a}(\chi)\vee\hat{b}(\chi) ;$$

donc $(a+b)\hat{} = \hat{a}+\hat{b}$ et $(a\vee b)\hat{} = \hat{a}\vee\hat{b}$.

L'application $a \mapsto \hat{a}$ est injective; car si $\hat{a}=0$, alors $\hat{a}(\chi) = = \xi_\chi(a) = 0$ pour tout $\chi\in U_a$, c'est-à-dire que $a\in\chi$ pour tout $\chi\in U_a$. Or, U_a étant partout dense dans Spec A d'après (b), on en déduit que $a=0$.

(e) Finalement, $\hat{A} = \{\hat{a}\,|\,a\in A\}$ est un sous-groupe large de $E(X)$. En effet, pour tout ouvert U de X, il existe un élément a dans A tel que $S(a)\cap X \subset U$; si pour un $\chi\in X$, on a $\hat{a}(\chi) \neq 0$, alors $\xi_\chi(a) \neq 0$, c'est-à-dire que $a\notin\chi$ et, par suite, $\chi \in S(a)\cap X$. Donc $\mathrm{supp}(\hat{a}) \subset \bar{U}$. D'après (13.1.6) cela implique l'assertion.

A l'aide de (12.1.12) on voit maintenant que l'application $a \mapsto \hat{a} : A \to E(X)$ conserve les bornes supérieures et inférieures quelconques qui existent dans A.

Cela achève la démonstration du théorème.

13.2.5. <u>COROLLAIRE</u>. <u>Soit</u> A <u>un groupe réticulé archimédien possédant une unité faible</u> e. <u>Soit</u> X <u>l'espace compact des valeurs de</u> e. <u>Alors</u> A <u>est isomorphe à un groupe réticulé</u> $\hat{A} \subset \mathcal{D}(X)$ <u>de fonctions numériques continues presque finies définies sur</u> X, <u>de sorte que la fonction constante égale à</u> 1 <u>corresponde à</u> e.

En effet, l'unité faible e constitue à elle seul une famille orthogonale maximale. Le corollaire est donc une conséquence immédiate du théorème (13.2.4); la fonction constante $\hat{e}=1$ correspond à l'unité faible e.

Si e est même une unité forte, les valeurs de A sont exactement les ℓ-idéaux maximaux. Pour tout élément a de A, il y a un entier positif n tel que $|a| < n\cdot e$; par conséquent, lá fonction $\hat{a}$ associée à l'élément a est bornée en valeur absolue par n. Ainsi nous avons:

13.2.6. <u>COROLLAIRE</u>. <u>Soit</u> A <u>un groupe réticulé archimédien qui admet une unité forte</u>. <u>Soit</u> μA <u>l'espace compact des</u> ℓ<u>-idéaux maximaux de</u> A. <u>Alors</u> A <u>est isomorphe à un sous-groupe large contenant la fonc-</u>

<u>tion constante</u> 1 <u>du groupe réticulé</u> $C(\mu A)$ <u>des fonctions réelles continues définies sur</u> μA .

Maintenant nous allons déduire du théorème (13.2.4) une représentation de A comme sous-groupe large de $E(\mathrm{Spec}\ A)$: Prenons les hypothèses et les notations de la construction (13.2.3), et posons $Y = \bigcup_\lambda S(e_\lambda)$. Les $S(e_\lambda)$ étant ouverts dans Spec A , il en est de même de Y . Puisque $X_\lambda = \mathrm{val}(e_\lambda) \subset S(e_\lambda)$, on a $X \subset Y$. Rappelons que, pour tout λ , on a une rétraction continue $M_\lambda : S(e_\lambda) \to \mathrm{val}(e_\lambda) = X_\lambda$ qui à tout $y \in S(e_\lambda)$ associe l'unique valeur $x = My$ de e_λ qui contient y (cf. 10.2.5). Puisque les $S(e_\lambda)$ sont des ouverts deux à deux disjoints, la réunion de ces applications M_λ donne une rétraction continue $M : Y \to X$. Ainsi nous pouvons associer à tout élément a de A , l'ouvert

$$V_a = M^{-1}(U_a)$$

et la fonction réelle continue

$$\tilde{a} = \hat{a} \circ M : V_a \to \mathbb{R} \quad .$$

Puisque M est une rétraction, on a $U_a \subset V_a$. D'après (13.2.4), U_a est partout dense dans Spec(A) ; à fortiori V_a est partout dense dans Spec A . Cela montre que $\tilde{a}$ appartient à $E(\mathrm{Spec}\ A)$. En utilisant le fait que $a \mapsto \hat{a}$ est un homomorphisme injectif d'après (13.2.4), on vérifie facilement que $a \mapsto \tilde{a}$ est un homomorphisme injectif du groupe réticulé A dans $E(\mathrm{Spec}\ A)$. Il reste à montrer que $\tilde{A} = \{\tilde{a} \mid a \in A\}$ est large dans $E(\mathrm{Spec}\ A)$. Pour cela prenons un ouvert non vide U de Spec A . Alors $U \cap X$ est un ouvert de X qui n'est pas vide puisque X est partout dense dans Spec A . Puisque $\hat{A}$ est large dans $E(X)$, il y a un élément $0 \neq a \in A$ tel que $\mathrm{supp}(\hat{a})$ soit contenu dans l'adhérence de $U \cap X$ par rapport à X . Il s'ensuit que le support de $\tilde{a}$ est contenu dans l'adhérence de l'ouvert $M^{-1}(U \cap X)$ de Spec A . Or, $M^{-1}(U \cap X) \subset U$ puisque U est ouvert. Donc $\mathrm{supp}(\tilde{a}) \subset \bar{U}$. D'après (13.1.6.), cela démontre que A est large dans $E(\mathrm{Spec}\ A)$. Nous avons:

13.2.7. <u>PROPOSITION</u>. <u>Tout groupe réticulé archimédien</u> A <u>est isomorphe à un</u> ℓ-<u>sous-groupe large du groupe réticulé</u> $E(\mathrm{Spec}\ A)$.

13.3. Représentation des orthomorphismes et des f-anneaux archimédiens par des fonctions numériques continues.

Le théorème suivant montre qu'une représentation d'un groupe réticulé archimédien par des fonctions numériques continues comme dans la section 13.2 s'accompagne d'une représentation des orthomorphismes d'un tel groupe. Il montre aussi que dans un certain sens, tout orthomorphisme est une homothétie, généralisant ainsi le fait que tout orthomorphisme d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est une homothétie (12.2.1). En plus, ce théorème fournit une nouvelle démonstration du théorème (12.2.2) qui affirme que les orthomorphismes forment un f-anneau archimédien.

13.3.1. THEOREME. *Soit X un espace topologique et A un ℓ-sous-groupe large de $\mathcal{E}(X)$. Soit*

$$R = \{g\in\mathcal{E}(X)\,|\,g\cdot A\subset A\}\quad .$$

Alors R est un ℓ-sous-anneau de $\mathcal{E}(X)$; pour tout $g\in R$, l'homothétie $\eta_g : f\mapsto g\cdot f$ est un orthomorphisme de A, et tout orthomorphisme de A est de cette forme. L'application $g\mapsto\eta_g$ est un isomorphisme de R sur le f-anneau $\mathrm{Orth}(A)$ des orthomorphismes de A.

Puisque $\mathcal{E}(X)$ est un f-anneau, toutes les assertions du théorème sont immédiates à l'exception de l'injectivité et de la surjectivité de $g\mapsto\eta_g$. Pour démontrer l'injectivité, prenons un élément $g>0$ de R. Puisque A est large dans $\mathcal{E}(X)$, le sous-groupe solide de $\mathcal{E}(X)$ engendré par g contient un élément non nul de A, c'est-à-dire qu'il existe $f>0$ dans A et un entier n tel que $f<ng$. Il s'ensuit que $\eta_g(f) = g\cdot f \neq 0$ et, par suite, $\eta_g\neq 0$.

Il reste à montrer que, pour un orthomorphisme positif φ de A arbitrairement choisi, il existe une fonction $\hat{\varphi}\in\mathcal{E}(X)$ telle que $\varphi = \eta_{\hat{\varphi}}$. Pour cela choisissons à l'aide de l'axiome de Zorn une famille orthogonale maximale $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A. Désignons par U_λ et V_λ des ouverts partout denses de X sur lesquels les fonctions e_λ et $\varphi(e_\lambda)$ sont définies, respectivement. Pour tout $\lambda\in\Lambda$, soit

$$s(e_\lambda) = \{x\in U_\lambda\,|\,e_\lambda(x)\neq 0\}\quad .$$

Les $s(e_\lambda)$ sont des ouverts deux à deux disjoints puisque les e_λ sont mutuellement orthogonaux. La réunion des $s(e_\lambda)$ est partout dense dans X ; en effet, si U était un ouvert non vide de X disjoint de tous les $s(e_\lambda)$, il y aurait d'après (13.1.6) une fonction non nulle $f \in A_+$ telle que $\operatorname{supp}(f) \subset \bar{U}$ et cette fonction f serait orthogonale à tous les e_λ , ce qui est contraire à la maximalité de la famille orthogonale $(e_\lambda)_\lambda$.

Posons $w(e_\lambda) = V_\lambda \cap s(e_\lambda)$. Alors $w(e_\lambda)$ est un ouvert partout dense de $s(e_\lambda)$. La réunion

$$W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} w(e_\lambda)$$

est un ouvert partout dense de X d'après le raisonnement précédent. Maintenant nous pouvons définir

$$\hat{\varphi} : W \to \mathbb{R}$$

de la manière suivante: Pour tout $x \in w(e_\lambda)$ soit

$$(*) \qquad \hat{\varphi}(x) = \frac{\varphi(e_\lambda)(x)}{e_\lambda(x)}$$

$\hat{\varphi}$ est continue; car sur chaque ouvert $w(e_\lambda)$ la fonction $\hat{\varphi}$ est le quotient des fonctions continues $\varphi(e_\lambda)$ et e_λ , la deuxième n'étant pas nulle. Donc $\hat{\varphi} \in E(X)$.

Vérifions que pour tout λ , on a $\varphi(e_\lambda)(x) = \hat{\varphi}(x) \cdot e_\lambda(x)$ presque partout sur W . Si $x \in w(e_\lambda)$, ceci est vrai d'après la définition (*). Si $x \in W \setminus \overline{w(e_\lambda)}$, on a d'une part $e_\lambda(x) = 0$ et d'autre part $\varphi(e_\lambda)(x) = 0$ puisque $\varphi(e_\lambda) \in e_\lambda^{\perp\perp}$. Ainsi nous avons $\varphi(e_\lambda) = \eta_{\hat{\varphi}}(e_\lambda)$ pour tout λ . D'après (12.2.9) on peut conclure que les deux orthomorphismes φ et $\eta_{\hat{\varphi}}$ de A sont égaux.

13.3.2. ADDENDUM. (a) Si la fonction constante 1 appartient à A , cette fonction à elle seule forme une famille orthogonale maximale. En prenant $e_\lambda = 1$ dans la formule (*) de la démonstration précédente, on voit que la fonction $\hat{\varphi}$ représentant un orthomorphisme φ est donnée par $\hat{\varphi} = \varphi(1)$.

(b) Si, en plus des hypothèses de (13.3.1), on suppose que $A \subset \mathcal{D}(X)$ [resp. $A \subset C(X)$] et que pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$, alors $\operatorname{Orth}(A) \subset \mathcal{D}(X)$ [resp. $\operatorname{Orth}(A) \subset C(X)$] .

Démontrons l'assertion (b) dans le cas où $A \subset C(X)$: Soit φ un orthomorphisme positif de A . Pour n'importe quel élément x de X nous pouvons choisir $f \in A_+$ tel que $f(x) > 0$. On peut trouver une famille orthogonale maximale $(f_\lambda)_\lambda$ contenant f . En faisant la construction de la fonction $\hat{\varphi}$ avec la famille $(f_\lambda)_\lambda$ à la place des e_λ dans (13.3.1), on trouve que $\hat{\varphi}$ est bien définie et continue en x.

(c) La preuve de (13.3.1) démontre en effet l'assertion suivante: Soit G un sous-groupe large de $E(X)$, et $\varphi : G \to E(X)$ un homomorphisme tel que $f \wedge h = 0$ implique $f \wedge \varphi(h) = 0$ quels que soient $f,h \in G$. Alors il existe $g \in E(X)$ tel que $\varphi(f) = g \cdot f$ pour tout $f \in G$.

Nous appliquons le théorème (13.3.1) à la représentation des f-anneaux archimédiens.

13.3.3. LEMME. Soit A un f-anneau archimédien ayant un élément unité e. Soit X un espace topologique et $a \mapsto \hat{a}$ un isomorphisme du groupe réticulé sous-jacent de A sur un ℓ-sous-groupe large $\hat{A}$ de $E(X)$ tel que $\hat{e}$ soit la fonction constante égale à 1. Alors $\hat{A}$ est un ℓ-sous-anneau de $E(X)$ et $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de f-anneaux.

En associant à tout élément a de A l'homothétie $\lambda_a : b \mapsto ab$ de A, on a un isomorphisme des f-anneaux A et $\mathrm{Orth}(A)$ d'après (12.3.13). Tout orthomorphisme φ de A induit un orthomorphisme de $\hat{A}$ que nous désignerons aussi par φ : $\varphi(\hat{a}) = \widehat{\varphi(a)}$. D'après (13.3.1), il y a un isomorphisme de $\mathrm{Orth}(A)$ sur un ℓ-sous-anneau R de $E(X)$. D'après (13.3.2.a) la fonction $\hat{\varphi}$ représentant l'orthomorphisme φ est égale à $\varphi(1) = \varphi(\hat{e}) = \widehat{\varphi(e)}$. Pour $\varphi = \lambda_a$ on obtient $\hat{\lambda}_a = \widehat{\lambda_a(e)} = \widehat{ae} = \hat{a}$. Ainsi nous avons démontré que l'application $a \mapsto \hat{a}$ est l'application composée des isomorphismes de f-anneaux:

$$A \xrightarrow{a \mapsto \lambda_a} \mathrm{Orth}(A) \cong \mathrm{Orth}(\hat{A}) \xrightarrow{\varphi \mapsto \hat{\varphi}} \hat{A}$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

13.3.4. THEOREME. Soit A un f-anneau archimédien unitaire et X l'espace compact des valeurs de l'élément unité. Alors A est isomorphe à un anneau réticulé $\hat{A} \subset \mathcal{D}(X)$ de fonctions numériques continues presque finies sur X de sorte que $\hat{A}$ soit large dans $E(X)$.

En effet, l'élément unité e de l'anneau A est une unité faible du groupe réticulé sous-jacent. D'après (13.2.5) il y a un isomorphisme du groupe réticulé A sur un sous-groupe réticulé $\hat{A} \subset \mathcal{D}(X)$ tel que la fonction représentant e soit égale à la fonction constante 1 ; de plus, $\hat{A}$ est large dans $E(X)$. D'après le lemme (13.3.3), $\hat{A}$ est un sous-anneau de $E(X)$ et l'isomorphisme de A sur $\hat{A}$ est un isomorphisme de f-anneaux.

13.3.5. COROLLAIRE. Tout f-anneau archimédien réduit A peut être représenté par un f-anneau de fonctions numériques continues presque finies, définies sur un espace compact X ; de plus, X peut être choisi de manière que $\hat{A}$ soit large dans $E(X)$.

En effet, A peut être considéré comme un sous-anneau large d'un f-anneau archimédien unitaire (cf. 12.3.8).

Le lemme suivant montre que l'espace X de valeurs de l'élément unité dans (13.3.4) peut être remplacé par l'espace μA des ℓ-idéaux maximaux de A .

13.3.6. LEMME. Pour un f-anneau unitaire A (non nécessairement archimédien) l'espace μA des ℓ-idéaux maximaux est homéomorphe à l'espace X des valeurs de l'élément unité e .

D'après (10.2.5), l'application M qui à tout sous-groupe premier p ne contenant pas l'élément unité e associe l'unique valeur $x = Mp$ de e qui contient p est une rétraction continue. Aucun ℓ-idéal maximal ne contient e ; la restriction $M|_{\mu A}$ est donc une application continue de μA dans X . Si p et p' sont des ℓ-idéaux maximaux distincts, alors $p+p' = A$; il n'y donc aucune valeur de e contenant à la fois p et p' ; donc $Mp \neq Mp'$. D'autre part, si x est une valeur de e , il y a un sous-groupe premier minimal p contenu dans x . Puisque p est aussi un ℓ-idéal d'après (9.1.2), il y a un ℓ-idéal maximal m contenant p . On a nécessairement $m \subset x$, donc $Mm = x$. Ainsi nous avons démontré que l'application continue $M|_{\mu A} : \mu A \to X$ est bijective. Puisque μA et X sont compacts, elle est un homéomorphisme.

13.3.7. PROPOSITION. Tout f-anneau archimédien unitaire A est isomorphe à un ℓ-sous-anneau large de $E(\mathrm{Spec}\ A)$.

En effet, d'après (13.3.4) et (13.3.6) on a un isomorphisme $a \mapsto \hat{a}$ de A sur un ℓ-sous-anneau large de $E(\mu A)$. D'après (10.2.3), on a une rétraction continue $M : \mathrm{Spec}\ A \to \mu A$. Si U_a désigne l'ouvert partout dense de μA sur lequel la fonction réelle $\hat{a}$ est définie, on pose $V_a = M^{-1}U_a$, et on définit $\tilde{a} : V_a \to \mathbb{R}$ par $\tilde{a} = \hat{a} \circ M$. On démontre de la même manière que dans (13.2.7) que $a \mapsto \tilde{a}$ est un homomorphisme du f-anneau A sur un sous-anneau large de $E(\mathrm{Spec}\ A)$.

13.4. Représentation sur l'espace de Stone.

Soit A un groupe réticulé ou un f-anneau réduit archimédien et σA son espace de Stone, c'est-à-dire l'espace des idéaux maximaux de l'algèbre de Boole des polaires de A (cf. 10.3.7 et 8). L'espace σA est extrêmement discontinu. D'après (13.1.7), on a $\mathcal{E}(\sigma A) = \mathcal{D}(\sigma A)$, c'est-à-dire que toute fonction continue $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert partout dense de σA, peut être prolongée en une fonction continue $\bar{f} : \sigma A \to \overline{\mathbb{R}}$. De plus, $\mathcal{D}(\sigma A)$ est un groupe (et un f-anneau) complet et latéralement complet. Par ces propriétés il est souhaitable de représenter A dans $\mathcal{D}(\sigma A)$. Cela s'accomplit à l'aide de la fonction continue $k : \sigma A \to \mathrm{Spec}^* A$ du lemme (10.3.11). Le résultat donne, en fait, une nouvelle démonstration de l'existence du complété d'un groupe archimédien (cf. sec. 11.3).

13.4.1. THEOREME. *Pour tout groupe réticulé archimédien* A [*pour tout f-anneau archimédien réduit* A], *il existe un isomorphisme* $a \mapsto \check{a}$ *de* A *sur un* ℓ*-sous-groupe* [*un* ℓ*-sous-anneau*] *large* $\check{A}$ *du groupe réticulé* [*du f-anneau*] $\mathcal{D}(\sigma A)$ *des fonctions numériques continues presque finies sur l'espace de Stone* σA .

Soit d'abord A un groupe réticulé archimédien ou un f-anneau archimédien unitaire. D'après les propositions (13.2.7) et (13.3.7), il y a un isomorphisme $a \mapsto \tilde{a}$ de A sur un ℓ-sous-groupe [ℓ-sous-anneau] large A de $\mathcal{E}(\mathrm{Spec}\, A)$. Pour tout $a \in A$, soit V_a un ouvert partout dense de $\mathrm{Spec}\, A$ sur lequel la fonction réelle $\tilde{a}$ est définie. Posons

$$W_a = k^{-1}(V_a) \quad .$$

D'après le lemme (10.3.11), W_a est un ouvert partout dense de σA. Définissons

$$\check{a} : W_a \to \mathbb{R} \quad \text{par} \quad \check{a} = \tilde{a} \circ k \quad .$$

Puisque $\tilde{a}$ et k sont continues, il en est de même de $\check{a}$; par conséquent, $\check{a}$ appartient à $\mathcal{E}(\sigma A)$ et nous avons une application

$$a \mapsto \check{a} : A \to \mathcal{E}(\sigma A) \quad .$$

On vérifie facilement que cette application est un homomorphisme de groupes réticulés [un homomorphisme de f-anneaux]. Pour l'injectivité, montrons que $\check{a} \neq 0$ pour tout $a \neq 0$. En effet, si $a \neq 0$, alors $\tilde{a} \neq 0$, c'est-à-dire que l'ensemble $s(\tilde{a})$ des $p \in V_a$ tels que $\tilde{a}(p) \neq 0$ est un ouvert non vide de Spec A . Puisque $k(\sigma A)$ est partout dense dans Spec^*A , on a $k(\sigma A)\cap s(\tilde{a}) \neq \emptyset$, et pour tout $x\in\sigma A$ tel que $k(x) \in s(\tilde{a})$, on a $\check{a}(x) = \tilde{a}(k(x)) \neq 0$.

Il reste à démontrer que $\check{A} = \{\check{a}\,|\,a\in A\}$ est large dans $E(\sigma A)$. Soit donc W un ouvert non vide de σA ; on peut supposer que $W = s(a^{\perp\perp})$. D'après (13.1.6), il suffit de montrer que $\mathrm{supp}(\check{a}) \subset \bar{W}$. Or, $a^{\perp\perp}$ appartient à x pour tout $x\notin W$; donc $a\in k(x)$ pour tout $x\notin W$ et, par suite $\check{a}(x) = \tilde{a}(k(x)) = 0$ pour tout $x\notin W$. Donc $\mathrm{supp}(\check{a}) \subset \bar{W}$.

Ainsi nous avons démontré que A est isomorphe à un ℓ-sous-groupe [un ℓ-sous-anneau] large de $E(\sigma A)$.

Il reste à considérer le cas d'un f-anneau archimédien réduit non unitaire. Alors A peut être plongé comme ℓ-sous-anneau large dans un f-anneau archimédien unitaire A' d'après (12.3.8) et celui-ci peut être représenté comme ℓ-sous-anneau large de $E(\sigma A')$ d'après ce qui précède. Or, si A est large dans A' , les algèbres de Boole de A et A' respectivement, sont isomorphes d'après (11.1.15). Donc σA et $\sigma A'$ sont homéomorphes. Cela achève la démonstration du théorème.

Donnons une application du théorème précédent aux groupes complets. Soit d'abord A un groupe archimédien divisible. Comme dans le théorème précédent, on peut représenter A par un ℓ-sous-groupe large A de $\mathcal{D}(X)$, où X est un espace compact extrêmement discontinu. Tout sous-groupe solide non réduit à zéro de $\mathcal{D}(X)$, en particulier tout sous-groupe solide engendré par une fonction $f>0$, $f\in\mathcal{D}(X)$, contient donc un élément strictement positif g de A . Il y a donc un entier n tel que $g\leq nf$, ou encore $\frac{1}{n}\,g \leq f$. Puisque A est divisible, $\frac{1}{n}\,g \in A$. Ainsi nous avons démontré que A est dense dans $\mathcal{D}(X)$. D'après (13.1.7), $\mathcal{D}(X)$ est complet. D'après (11.3.8), on peut trouver un complété de A en prenant le sous-groupe solide de $\mathcal{D}(X)$ engendré par A . Si A est déjà complet, A est donc un sous-groupe solide de $\mathcal{D}(X)$. Ainsi nous avons démontré:

13.4.2. <u>COROLLAIRE</u>. <u>Un groupe réticulé divisible est complet si, et seulement si, il est isomorphe à un sous-groupe solide de</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>pour un certain espace compact extrêmement discontinu</u> X .

Soit maintenant A divisible, complet et latéralement complet. Représentons A comme sous-groupe solide large A de $\mathcal{D}(X)$, où X est un espace compact extrêmement discontinu. Montrons que $A = \mathcal{D}(X)$.

Soit $f \in \mathcal{D}(X)_+$ quelconque. Choisissons une famille orthogonale (g_λ) dans A maximale parmi les familles orthogonales (g_λ) telles que $g_\lambda(x) = f(x)$ ou $g_\lambda(x) = 0$ pour tout x, quel que soit λ. Soit $g = \bigvee g_\lambda$. Puisque A est latéralement complet, on a $g \in A$. Supposons que $g < f$. Posons $h = f - g > 0$. Pour tout x, on a $h(x) = f(x) - g(x) = f(x)$ ou $= 0$. Puisque A est dense dans $\mathcal{D}(X)$, on peut trouver un $a \in A$ tel que $0 < a \le h$. Il y a un n tel que l'ouvert $U = \{x \in X \mid 0 < h(x) < na(x)\}$ soit non vide. Soit V un ouvert compact contenu dans U et posons

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin V, \\ h(x) = f(x) & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

Alors $b \le na$. Donc $b \in A$, puisque A est solide. Puisque b est orthogonal à tous les g_λ, la famille (g_λ) n'était pas maximale dans le sens voulu contrairement à l'hypothèse. Donc $f = g \in A$. Ainsi nous avons:

13.4.3. <u>COROLLAIRE</u>. <u>Un groupe réticulé divisible est complet et latéralement complet si, et seulement si, il est isomorphe à</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>pour un certain espace compact extrêmement discontinu</u> X.

Un groupe archimédien A est dit <u>essentiellement fermé</u> s'il n'admet pas d'extension essentielle archimédienne propre. Puisque $\mathcal{D}(\sigma A)$ est une extension essentielle de A d'après (13.4.1), un groupe archimédien essentiellement fermé A est isomorphe à $\mathcal{D}(\sigma A)$. Réciproquement, soit X un espace compact extrêmement discontinu. Montrons que $\mathcal{D}(X)$ est essentiellement fermé. En effet, soit A une extension essentielle archimédienne de $\mathcal{D}(X)$. Puisque $\mathcal{D}(\sigma A)$ est une extension essentielle de A, $\mathcal{D}(\sigma A)$ est aussi une extension essentielle de $\mathcal{D}(X)$. Puisque $\mathcal{D}(X)$ est complet, latéralement complet et divisible, le raisonnement précédent (13.4.3) démontre, que $\mathcal{D}(X)$ est égal à $\mathcal{D}(\sigma A)$, d'où l'on tire que A est isomorphe à $\mathcal{D}(\sigma A)$. Ainsi nous avons:

13.4.4. <u>COROLLAIRE</u>. <u>Un groupe archimédien est essentiellement fermé si, et seulement si, il est isomorphe à</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>pour un espace compact extrêmement discontinu</u> X.

13.4.5. La représentation sur l'espace de Stone est unique dans le sens suivant: Soit A un groupe réticulé archimédien. Soient X et Y deux espaces compacts extrêmement discontinus et $a \mapsto a^\alpha$, $a \mapsto a^\beta$

deux homomorphismes injectifs de A sur des sous-groupes larges de $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}(Y)$, respectivement. Alors il existe un homéomorphisme $\eta : X \to Y$ et $f \in \mathcal{D}(X)$ tels que, pour tout $a \in A$:

$$a^{\beta}(\eta x) = f(x) \cdot a^{\alpha}(x)$$

pour tous les $x \in X$ pour lesquels le produit $f(x) \cdot a^{\alpha}(x)$ est défini. Si, de plus, A est un f-anneau et si $a \mapsto a^{\alpha}$ et $a \mapsto a^{\beta}$ sont des homomorphismes de f-anneaux, alors

$$a^{\beta}(\eta x) = a^{\alpha}(x)$$

quels que soient $x \in X$ et $a \in A$.

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce résultat. Elle résulte de deux observations: Puisque A est isomorphe à un sous-groupe large de $\mathcal{D}(X)$ et de $\mathcal{D}(Y)$, l'algèbre de Boole $P(A)$ des polaires est isomorphe à $P(\mathcal{D}(X))$ et à $P(\mathcal{D}(Y))$ d'après (11.1.15). Donc $P(\mathcal{D}(X))$ et $P(\mathcal{D}(Y))$ sont isomorphes. Or, $P(\mathcal{D}(X))$ est isomorphe à l'algèbre de Boole des ouverts fermés de X d'après (13.1.9). Donc $X \cong \sigma P(\mathcal{D}(X)) \cong \sigma P(\mathcal{D}(Y)) \cong Y$. Deuxièmement ou utilise (13.3.2c).

13.5. Représentation des groupes archimédiens singuliers.

Dans cette section nous montrons que tout groupe archimédien singulier (pour la définition voir la section 11.2) peut être représenté par des fonctions continues à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}$, où

$$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}} .$$

Fixons d'abord quelques notations: Soit X un espace topologique. Désignons par $\mathcal{E}(X,\mathbb{Z})$ le ℓ-sous-groupe de $\mathcal{E}(X)$ formé par les fonctions continues $f : U_f \to \mathbb{Z}$ définies sur un ouvert dense U_f de X. Par $\mathcal{D}(X,\mathbb{Z})$ on désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{E}(X,\mathbb{Z})$ qui admettent un prolongement continu $\bar{f} : X \to \overline{\mathbb{Z}}$. Finalement, $C(X,\mathbb{Z})$ désigne le groupe réticulé des fonctions continues $f : X \to \mathbb{Z}$ et $C_k(X,\mathbb{Z})$ celui des fonctions continues $f : X \to \mathbb{Z}$ à supports compacts. Dans tous ces groupes réticulés, les fonctions qui ne prennent que les valeurs 0 et 1 sont des éléments singuliers. Ainsi on a:

13.5.1. PROPOSITION. *$\mathcal{E}(X,\mathbb{Z})$, $C(X,\mathbb{Z})$ et $C_k(X,\mathbb{Z})$ sont des groupes singuliers.*

Soit, réciproquement, A un groupe réticulé archimédien singulier et S l'ensemble des éléments singuliers de A. Soit X l'ensemble des valeurs des éléments singuliers:

$$X = \bigcup_{s\in S} \mathrm{val}(s) .$$

Alors X est un sous-espace de $\mathrm{Spec}\, A$.

13.5.2. PROPOSITION. *L'espace $X = \bigcup_{s\in S} \mathrm{val}(s)$ admet une base d'ouverts compacts; plus précisément, les ouverts compacts de X sont exactement les ensembles de la forme $\mathrm{val}(s)$, $s\in S$.*

En effet, d'après (10.2.5), $\mathrm{val}(s)$ est compact. D'autre part, tout sous-groupe premier ne contenant pas un élément singulier s est premier minimal (11.2.11). Donc $\mathrm{val}(s) = S(s)$, et $S(s)$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}\, A$ et, par suite, dans X. Montrons que les ensembles de la forme $\mathrm{val}(s)$ avec $s\in S$ forment une base de l'espace X. On sait que les ensembles de la forme $S_X(a) = S(a)\cap X$, $a\in A_+$, forment une base de X. Or,

$$S(a)\cap X = \bigcup_{s\in S} (S(a)\cap \mathrm{val}(s)) = \bigcup_{s\in S} (S(a)\cap S(s)) =$$

$$= \bigcup_{s\in S} S(a\wedge s) \quad \text{d'après } (10.1.1.v).$$

Si $a\wedge s$ est différent de 0, alors $a\wedge s$ est singulier, puisque majoré par l'élément singulier s. Cela établit l'assertion.

Finalement soit K un ouvert compact de X. Alors K est la réunion d'une famille d'ouverts de base, $K = \bigcup_{s\in T} \mathrm{val}(s)$, où T est une certaine partie de S. Puisque K est compact, T peut être choisi fini. Donc $K = \bigcup_{s\in T} \mathrm{val}(s) = \bigcup_{s\in T} S(s) = S(\bigvee_{s\in T} s)$. Comme $t = \bigvee_{s\in T} s$ est aussi singulier, on a bien $K = \mathrm{val}(t)$ avec $t\in S$.

13.5.3. THEOREME. *Soit A un groupe réticulé archimédien singulier. Il y a un espace topologique X qui possède une base d'ouverts compacts et un isomorphisme $a \mapsto \hat{a}$ sur un groupe réticulé $\hat{A} \subset \mathcal{D}(X,\overline{\mathbb{Z}})$ de fonctions continues $f : X \to \overline{\mathbb{Z}}$, presque finies, de sorte qu'aux éléments singuliers de A correspondent exactement les fonctions caractéristiques des ouverts compacts de X; en particulier, $C_k(X,\mathbb{Z}) \subset \hat{A}$.*

Soit X l'espace des valeurs des éléments singuliers de A comme dans la prosposition précédente. Pour tout $x\in X$, choisissons un élément singulier $s \notin \chi$. Soit ξ_χ l'unique caractère de A tel que $\ker \xi_\chi = \chi$ et $\xi_\chi(s) = 1$ (cf. 13.2.2). Puisque $s+\chi$ couvre χ dans A/χ d'après (11.2.8), ξ_χ ne prend que des valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}$. De plus, ξ_χ ne dépend pas de l'élément singulier s . En effet, si t est un autre élément singulier non contenu dans χ , alors $t+\chi$ couvre aussi χ dans A/χ , d'où $s+\chi = t+\chi$.

A tout élément $a \in A$, on associe une fonction $\hat{a} : X \to \overline{\mathbb{Z}}$ en définissant $\hat{a}(\chi) = \xi_\chi(a)$ quel que soit $\chi \in X$.

De la construction, il découle immédiatement que pour tout élément singulier s , la fonction $\hat{s}$ est la fonction caractéristique de l'ouvert compact $\mathrm{val}(s)$. Puisque tout ouvert compact de X est de cette forme, les fonctions caractéristiques des ouverts compacts de X sont toutes de la forme $\hat{s}$ avec $s \in S$.

Nous omettons les démonstrations du fait que $\hat{a} \in \mathcal{D}(X, \mathbb{Z})$ et que $a \mapsto \hat{a}$ est un homomorphisme injectif de groupes réticulés. Ces démonstrations sont pratiquement identiques aux démonstrations correspondantes du théorème (13.2.4).

13.5.4. COROLLAIRE. *Un groupe réticulé A est engendré par ses éléments singuliers en tant que sous-groupe solide si, et seulement si, il existe un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts tel que A soit isomorphe à $C_k(X, \mathbb{Z})$.*

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. D'après le théorème précédent il suffit de montrer qu'un groupe réticulé engendré par ses éléments singuliers en tant que sous-groupe solide est archimédien. Supposons par l'absurde qu'il existe des éléments a et b dans A tels que $e < a^n < b$ pour tout $n > 0$. (A n'étant pas supposé commutatif à priori, nous adoptons la notation multiplicative.) Puisque A est singulier, il existe un élément singulier s majoré par a , et puisque A est engendré par ses éléments singuliers en tant que sous-groupe solide, il existe un élément singulier t tel que $b < t^k$ pour un certain k . Donc $s^n < t^k$ pour tout entier n . Soit M un sous-groupe premier ne contenant pas s . D'après (11.2.8), sM couvre M dans $G(M)$; de même, tM couvre M . Donc $tM = sM$ et $t^kM < s^{k+1}M$ ce qui est absurde.

Cette section se termine par une caractérisation des groupes singuliers complets.

13.5.5. LEMME. *Si le groupe archimédien singulier A est complet,*

<u>l'espace</u> X <u>des valeurs des éléments singuliers est extrêmement discontinu</u>.

En effet, soit U un ouvert de X et montrons que $\bar{U}$ est aussi ouvert. Remarquons que $U = \bigcup_{t\in T} \mathrm{val}(t)$ pour une certaine partie T de S. Soit

$$V = \bigcup_{t\in T^{\perp}\cap S} \mathrm{val}(t) \ , \quad W = \bigcup_{t\in T^{\perp\perp}\cap S} \mathrm{val}(t) \ .$$

Puisque $T^{\perp}$ et $T^{\perp\perp}$ sont orthogonaux, V et W sont des ouverts disjoints. Pour un élément singulier quelconque s on a $s = v+w$ avec $v\in T^{\perp}$ et $w\in T^{\perp\perp}$. De plus, v et w sont singuliers (ou nuls) puisqu'ils sont majorées par s. Donc $\mathrm{val}(s) = S(s) = S(v)\cup S(w) = \mathrm{val}(v)\cup \mathrm{val}(w) \subset V\cup W$. Il s'ensuit que $X = V\cup W$. D'autre part $U\subset W$, puisque $T \subset T^{\perp\perp}\cap S$; et V est le plus grand ouvert de X disjoint de U, d'où $\bar{U} = X\setminus V = W$.

13.5.6. <u>THEOREME</u>. <u>Pour un groupe réticulé</u> A, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u>:

(i) A <u>est singulier et complet</u>.

(ii) <u>Il y a un espace localement compact extrêmement discontinu</u> X <u>tel que</u> A <u>soit isomorphe à un sous-groupe solide de</u> $\mathcal{D}(X,\mathbb{Z})$ <u>qui contient</u> $C_k(X,\mathbb{Z})$.

(iii) <u>Il y a un espace topologique extrêmement discontinu</u> X <u>tel que</u> A <u>soit isomorphe à un sous-groupe solide de</u> $\mathcal{D}(X,\mathbb{Z})$.

Toute fonction $f\in C_k(X,\mathbb{Z})$ est une combinaison linéaire à coëfficients entiers d'éléments singuliers. Donc (i) implique (ii) d'après le lemme précédent et le théorème (13.5.3). Evidemment, (ii) implique (iii). Finalement, (iii) implique (i), puisque $\mathcal{D}(X,\mathbb{Z})$ est singulier et stable pour les bornes supérieures et inférieures dans $\mathcal{D}(X)$, et puisque $\mathcal{D}(X)$ est complet pour X extrêmement discontinu.

<u>Note du Chapitre 13</u>

Les débuts de la théorie des espaces vectoriels réticulés et, par suite, de la théorie des groupes réticulés ont été très fortement marqués par les théories spectrales de l'analyse. Il nous semble indiqué de donner un aperçu de ce point de départ:

Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur auto-adjoint sur H. D'après un théorème classique, l'opérateur T possède une <u>résolution spectrale</u>; il s'agit là d'une famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de projecteurs de H qui satisfait les conditions suivantes:

$$(*) \quad \begin{aligned} &E_\lambda E_\mu = E_\lambda \quad \text{si} \quad \lambda \leq \mu ,\\ &E_\mu = \lim_{\lambda\to\mu-0} E_\lambda , \quad \lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0 , \quad \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = I , \end{aligned}$$

où I désigne l'opérateur identique. Et pour T on a la représentation intégrale suivante:

$$T = \int \lambda dE_\lambda .$$

On s'était posé la question de savoir quel était le cadre axiomatique approprié qui permettait de démontrer ce théorème spectral et, plus généralement, de développer le calcul des opérateurs. Simultanément, en 1936, H. FREUDENTHAL et S.W.P. STEEN ont proposé des solutions semblables dont l'idée clef est la suivante:

Soit A une algèbre réelle complètement réticulée qui admet un élément unité I qui de plus est une unité faible. Sur A on introduit une notion de convergence en définissant qu'une suite (T_n) converge vers T, s'il existe $R\in A$ tel que pour tout $\varepsilon>0$ il existe un entier naturel N de manière que $|T_n-T| < \varepsilon R$ pour tout $n\geq N$. Pour $T\in A$, on pose:

$$E_\lambda = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (I\wedge n(T-\lambda I))$$

quel que soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors la famille des E_λ vérifie les propriétés $(*)$ et on a la représentation intégrale

$$T = \int \lambda dE_\lambda$$

comme auparavant. Ici l'intégrale est définie comme l'intégrale de Riemann-Stieltjes en utilisant la notion de convergence définie ci-dessus.

Ce théorème implique le théorème de représentation intégrale des opérateurs sur un espace de Hilbert. En effet, si T est un opérateur borné auto-adjoint, l'algèbre d'opérateurs A engendrée par T, fermée pour la topologie forte, est complètement réticulée, le cône positif de A étant formé par les opérateurs positifs. Si T n'est pas borné, un raisonnement auxiliaire donne le résultat. On trouvera un exposé détaillé de ce sujet dans le livre de VULIKH [2].

Bientôt, M.H. STONE [2], H. NAKANO [6] et d'autres ont remarqué que la résolution spectrale $(*)$ d'un élément T d'une algèbre réticulée peut être décrite aussi par une fonction numérique définie sur un espace topologique convenablement choisi. Si l'on choisit comme espace topologique un sous-espace du spectre, la fonction numérique f représentant T est donnée par $f(x) = \sup\{\lambda \mid E_\lambda \notin x\}$. Il s'est avéré que la représentation par des fonctions numériques continues était mieux adaptée aux besoins de la théorie des groupes et anneaux réticulés que la représentation intégrale. Un grand nombre de travaux sur cette question suivirent.

Signalons les travaux de YOSIDA [1], NAKANO [6], OGASAWARA [3], MAEDA et OGASAWARA [1], AMEMIYA [1], D.G. JOHNSON et KIST [1] sur la représentation des espaces vectoriels archimédiens; on trouvera une présentation très détaillée de la question dans le livre de LUXEMBURG et ZAANEN [1]. En ce qui concerne les algèbres réelles archimédiennes, citons YOSIDA et NAKAYAMA [1], VERNIKOFF, KREIN et TOVBIN [1], NAKANO [5], BRAINERD [1, 2, 4, 6]. PAPERT [1] a donné un théorème de représentation pour les groupes archimédiens en général. Pour les f-anneaux archimédiens, D.G. JOHNSON [2] et J. KIST [1] ont utilisé l'espace des ℓ-idéaux maximaux. Une discussion détaillée de la représentation sur l'espace de Stone et de son unicité aussi bien pour les groupes que pour les f-anneaux archimédiens est présentée par BERNAU [2]. La représentation des orthomorphismes par des fonctions numériques continues est due à CONRAD et DIEM [1], ainsi qu'à BIGARD et KEIMEL [1]. La représentation des groupes archimédiens singuliers a été étudiée par WOLFENSTEIN [7], [8].

L'utilisation de caractères dans la démonstration du théorème de représentation pour les groupes archimédiens est suggérée implicitement par CHAMBLESS [2], explicitement par SCHAEFER [1].

Sur les propriétés de groupes de fonctions continues $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ il y a une vaste bibliographie qui dépasse le cadre de ce livre. On pourra consulter le livre de GILLMAN et JERISON [1] à ce sujet. Indiquons seulement que NAKANO [4] et STONE [3] indépendamment ont caractérisé les espaces topologiques X pour lesquels $\mathcal{C}(X)$ est complet ou σ-complet.