Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen

Von

SIBYLLA PRIESS-CRAMPE

1. Einleitung. Der Satz von HÖLDER [3] besagt, daß sich eine archimedisch angeordnete Gruppe bis auf Isomorphie als eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen auffassen läßt; eine archimedisch angeordnete Gruppe ist also insbesondere abelsch. C.G. CHEHATA [1] hat einen kurzen Beweis dieses Satzes gegeben, indem er gezeigt hat, daß allgemein in einer angeordneten Gruppe die archimedische Klasse des Kommutators zweier Elemente $\neq 0$ stets echt kleiner ist als die größere der archimedischen Klassen der beiden Elemente; und da eine archimedisch angeordnete Gruppe in nur zwei archimedische Klassen zerfällt, ist sie damit abelsch. Das CHEHATAsche Ergebnis legt die Frage nahe, ob man bei einer angeordneten Gruppe die archimedische Klasse des Kommutators zweier Elemente nicht auch durch die kleinere der archimedischen Klassen der beiden Elemente abschätzen kann. Daß man eine solche Abschätzung allgemein für angeordnete Gruppen, d.h. also ohne Voraussetzung von weiteren Struktureigenschaften, nicht erhalten kann, hat CHEHATA anhand eines Beispiels in seiner Arbeit bereits gezeigt.

Wir wollen untersuchen, durch was für Struktureigenschaften angeordnete Gruppen charakterisiert sind, bei denen die archimedische Klasse des Kommutators zweier Elemente $\neq 0$ stets kleiner oder sogar echt kleiner als das Minimum der archimedischen Klassen der beiden Elemente ist.

Wie man einer Arbeit von IWASAWA [4] entnehmen kann, sind angeordnete Gruppen verallgemeinert auflösbar (SN-Gruppen im Sinne von KUROSH [5], S. 182). Die von uns untersuchten Gruppen erweisen sich als SI-Gruppen ([5], S. 182) oder als verallgemeinert nilpotente Gruppen (Z-Gruppen, s. [5], S. 218).

2. Definitionen und bekannte Ergebnisse. Für die folgenden Begriffe sei auf FUCHS [2] und IWASAWA [4] verwiesen. Es sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe. Für $a \in G$ sei $|a| = \mathrm{Max}(a, -a)$. Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen *archimedisch äquivalent*, wenn es natürliche Zahlen n, m mit $n \cdot |a| \geqq |b|$ und $m \cdot |b| \geqq |a|$ gibt. Sind alle Elemente $\neq 0$ einer angeordneten Gruppe archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe archimedisch angeordnet. Mit $[x]$ bezeichnen wir die archimedische Klasse, in der das Element $x \in G$ liegt, und mit $[G]$ die Gesamtheit der archimedischen Klassen von G. Sind zwei Elemente $a, b \in G$ nicht archimedisch äquivalent, so gilt entweder[1])

$$\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} n \cdot |a| < |b| \qquad \text{oder} \qquad \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} n \cdot |b| < |a|.$$

[1]) Zur Abkürzung verwenden wir hier und im folgenden die Zeichen $\wedge$, $\vee$ mit der Bedeutung „für alle“ bzw. „es gibt“.

Durch

$$[a] < [b] \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} n \cdot |a| < |b|$$

kann man $[G]$ anordnen; auf $[G]$ übertragen sich aber im allgemeinen keine algebraischen Struktureigenschaften von G.

Eine *Untergruppe* U von G heißt *konvex*, wenn aus $a \in U$, $x \in G$, $0 < |x| < |a|$ folgt $x \in U$. Jeder archimedischen Klasse $[x]$ kann man zwei konvexe Untergruppen $G^{[x]}$ und $G_{[x]}$ zuordnen:

$$G^{[x]} = \{g \in G \mid [g] \leqq [x]\}, \qquad G_{[x]} = \{g \in G \mid [g] < [x]\}.$$

In Iwasawa [4] (s. auch Fuchs [2]) sind die folgenden wichtigen Eigenschaften dieser Untergruppen bewiesen: Jeder innere Automorphismus $g \mapsto g^x$ von G ist ein die Anordnung erhaltender Automorphismus *(o-Automorphismus)* und induziert eine o-Bijektion $[g] \mapsto [g^x]$ von $[G]$. Damit weist man nach (s. z.B. Fuchs [2], S. 79), daß $G_{[x]}$ maximaler konvexer Normalteiler der Untergruppe $G^{[x]}$ ist; die Faktorgruppe $G^{[x]}/G_{[x]}$ zerfällt also in nur zwei archimedische Klassen und ist daher abelsch. Die Menge $\mathfrak{U}$ der konvexen Untergruppen von G ist bezüglich der Inklusion eine angeordnete Menge: für jede Untergruppe $U \in \mathfrak{U}$ gilt $U = \bigcup_{x \in U} G^{[x]}$. Konvexe Untergruppen $V \subset U$, zwischen denen keine weiteren Untergruppen aus $\mathfrak{U}$ liegen, lassen sich für ein geeignetes $[x] \in [G]$ als $G^{[x]}$ bzw. $G_{[x]}$ darstellen, folglich ist dann V normal in U und die Faktorgruppe U/V abelsch. Die Menge der konvexen Untergruppen einer angeordneten Gruppe bildet also im Sinne von Kurosh (s. [5], S. 171 und S. 182) ein normales System mit abelschen Faktoren, und eine angeordnete Gruppe ist daher eine SN-Gruppe. $\mathfrak{U}$ braucht im allgemeinen nicht wohlgeordnet zu sein (lexikographische Produkte). Erfüllt aber $[G]$ die Minimalbedingung oder Maximalbedingung, so sind die Untergruppen $G^{[x]}$, $G_{[x]}$ und damit auch alle konvexen Untergruppen normal in G (s. etwa Iwasawa [4]); $\mathfrak{U}$ ist dann ein System invarianter Untergruppen mit abelschen Faktoren (s. Kurosh [5], S. 172, 182) und die zugehörige Gruppe also eine SI-Gruppe.

3. Angeordnete *SI*- und *Z*-Gruppen. Wir wollen nun eine Antwort auf das in der Einleitung für diese Arbeit gestellte Problem geben:

Den Kommutator zweier Elemente $a, b \in G$ bezeichnen wir mit $a \circ b$. Wie Kurosh ([5], S. 218) nennen wir ein invariantes System von Untergruppen mit zentralen Faktoren zentral und die zugehörige Gruppe dann eine Z-Gruppe. Die Größenbeziehungen zwischen den archimedischen Klassen der Kommutatoren $a \circ b$ und den archimedischen Klassen $[a]$, $[b]$ lassen sich folgendermaßen durch Eigenschaften der Menge $\mathfrak{U}$ der konvexen Untergruppen von G charakterisieren:

Satz.

(1) $\bigwedge_{a,b \in G} [a \circ b] \leqq \mathrm{Min}([a], [b]) \Leftrightarrow$

$\mathfrak{U}$ *ist ein invariantes System mit abelschen Faktoren.*

(2) $\bigwedge_{a,b \in G \setminus \{0\}} [a \circ b] < \mathrm{Min}([a], [b]) \Leftrightarrow$

$\mathfrak{U}$ *ist ein zentrales System.*

Beweis. Für jede angeordnete Gruppe ist $\mathfrak{U}$ ein normales System mit abelschen Faktoren, und in jeder angeordneten Gruppe gilt für die archimedischen Klassen ihrer Kommutatoren

$$\bigwedge_{a,b\in G\setminus\{0\}} [a\circ b] < \mathrm{Max}([a],[b]).$$

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die unter (1) und (2) zusätzlich geforderten Eigenschaften damit äquivalent sind, daß im Falle (1) jede konvexe Untergruppe normal ist und im Falle (2) jede Faktorgruppe der Form $G^{[x]}/G_{[x]}$ im Zentrum von $G/G_{[x]}$ liegt.

Zu (1): Es genügt, konvexe Untergruppen der Form $G^{[x]}$ zu betrachten, da sich jede konvexe Untergruppe als mengenmäßige Vereinigung solcher Untergruppen darstellen läßt. In jeder angeordneten Gruppe gilt

$$(*) \qquad \bigwedge_{a,b\in G} [a+b] \leqq \mathrm{Max}([a],[b]).$$

Setzt man nun die linke Seite von (1) voraus, so erhält man für $u\in G^{[x]}$ wegen $u^y = u + u\circ y$ nach $(*)$

$$\bigwedge_{y\in G} [u^y] \leqq \mathrm{Max}([u],[u\circ y]) \leqq [x]$$

und damit die Normalität von $G^{[x]}$.

Nimmt man umgekehrt an, daß konvexe Untergruppen normal sind, so gilt insbesondere $a^b\in G^{[a]}$ und $-b^a\in G^{[b]}$, wegen $a\circ b = -a + a^b = -b^a + b$ nach $(*)$ also

$$[a\circ b] \leqq \mathrm{Max}([-a],[a^b]) = [a],$$

wie auch

$$[a\circ b] \leqq \mathrm{Max}([-b^a],[b]) = [b]$$

und daher

$$[a\circ b] \leqq \mathrm{Min}([a],[b]).$$

Zu (2): Unter Voraussetzung der linken Seite von (2) erhält man

$$\bigwedge_{\substack{x,b\in G\\ x\neq 0}} [x\circ b] < [x],$$

nach Definition von $G_{[x]}$ also

$$\bigwedge_{b\in G} x\circ b \in G_{[x]},$$

und daher ist für jedes $x\in G$ die Faktorgruppe $G^{[x]}/G_{[x]}$ im Zentrum von $G/G_{[x]}$ enthalten. Ist umgekehrt $\mathfrak{U}$ zentral, so liegt $G^{[a]}/G_{[a]}$ im Zentrum von $G/G_{[a]}$ und $G^{[b]}/G_{[b]}$ im Zentrum von $G/G_{[b]}$. Es ist also $a\circ b$ wie auch $-(a\circ b) = b\circ a$ ein Element von $G_{[a]}\cap G_{[b]}$, und das besagt gerade

$$[a\circ b] < \mathrm{Min}([a],[b]).$$

Eine angeordnete Gruppe mit nur endlich vielen archimedischen Klassen ist auflösbar, und erfüllen die Kommutatoren einer solchen Gruppe die in der Aussage (2) des Satzes angegebene Ungleichung, so ist die Gruppe sogar nilpotent. Aus den Ergebnissen von IWASAWA [4] folgt (s. Abschnitt 2), daß die Menge $\mathfrak{U}$ der konvexen

Untergruppen einer angeordneten Gruppe mit nur endlich vielen archimedischen Klassen stets ein invariantes System ist. Es kann also nur angeordnete Gruppen mit unendlich vielen archimedischen Klassen geben, für die $\mathfrak{U}$ nicht invariant ist. Das von CHEHATA in [1] gebrachte Beispiel ist eine solche Gruppe. Wegen der Äquivalenz $[a^x] < [a] \Leftrightarrow [a^{-x}] > [a]$ ist die Invarianz von $\mathfrak{U}$ damit gleichwertig, daß konjugierte Elemente in G stets archimedisch äquivalent sind. Das CHEHATAsche Beispiel ist also gleichzeitig ein Beispiel dafür, daß im allgemeinen in einer angeordneten Gruppe konjugierte Elemente nicht archimedisch äquivalent zu sein brauchen.

Wir zeigen nun an einer Klasse von Beispielen, daß es angeordnete Gruppen gibt, für welche $\mathfrak{U}$ invariant und nicht zentral ist, und zwar gibt es hier Beispiele von Gruppen mit endlich wie unendlich vielen archimedischen Klassen. Es sei $(A, +)$ eine angeordnete abelsche teilbare Gruppe und $(B, \cdot)$ eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe der positiven rationalen Zahlen. Die Elemente von B wirken als o-Automorphismen auf A. Wir bilden die zerfallende Erweiterung G von A durch B. Eine Anordnung über $G = \{ba \mid b \in B, a \in A\}$ erklären wir durch den Positivbereich $P(G) = \{ba \in G \mid b > 1 \text{ oder } (b = 1 \text{ und } a \geqq 0)\}$. Die Gruppe G ist also eine lexikographische Erweiterung (FUCHS [2]) von A durch B. Außer den archimedischen Klassen von A enthält G mindestens noch die archimedische Klasse $[ba]$ mit $1 \neq b \in B$; das sind aber auch alle archimedischen Klassen von G, da A konvex und normal in G ist. G zerfällt damit in endlich oder unendlich viele archimedische Klassen, je nachdem, ob das für A der Fall ist. Der Kommutator von zwei Elementen aus $[ba]$ liegt in einer echt kleineren archimedischen Klasse als $[ba]$. Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{U}$ invariant, aber nicht zentral ist, sind also nur die archimedischen Klassen von Kommutatoren der Form $g_1 \circ a$ mit $g_1 = b_1 a_1 \in [ba]$ zu berechnen. Man erhält $[g_1 \circ a] = [a]$, folglich $[g_1 \circ a] = \operatorname{Min}([g_1], [a])$. Daher ist G eine angeordnete Gruppe mit einem invarianten und nicht zentralen System konvexer Untergruppen.

Literaturverzeichnis

[1] C. G. CHEHATA, On a theorem on ordered groups. Proc. Glasgow Math. Ass. 4, 16–21 (1959/60).

[2] L. FUCHS, Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Göttingen 1966.

[3] O. HÖLDER, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Ber. Verh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig math.-phys. Kl. 53, 1–64 (1901).

[4] K. IWASAWA, On linearly ordered groups. J. Math. Soc. Japan 1, 1–9 (1948).

[5] A. G. KUROSH, The Theory of Groups, Vol. II. New York 1960.

Eingegangen am 13. 9. 1969 *)

Anschrift des Autors:

Sibylle Prieß-Crampe
Mathematisches Institut der Universität Tübingen
D-74 Tübingen

*) Eine Neufassung ging am 6. 3. 1970 ein.