Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie

WS 2010/11 **Blatt 14**

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl und $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ mit $a_n \in \{0, \ldots, p-1\}$.

(a) Zeigen Sie: Sind die a_n periodisch, so ist $a \in \mathbb{Q}$.

(b) Berechnen Sie $1 + 2 \cdot 3 + 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4 + \cdots \in \widehat{\mathbb{Z}}_3$.

(c) Zeigen Sie: Jede Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid m$ ist Teiler von $p^n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(d) Bestimmen Sie die $a \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, für welche die a_n periodisch sind.

(e) Zeigen Sie: a liegt genau dann in $\mathbb{Z}_p$, wenn eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß die a_n für $n \geqslant k$ periodisch sind.

(f) Berechnen Sie $\frac{3}{4}$ als Reihe in $\mathbb{Z}_5$.

(g) Sei $a \in \widehat{\mathbb{Z}}_5$ mit $a^2 = -1$ (Skript S. 87). Zeigen Sie, daß die Reihenglieder a_n nicht periodisch sind.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper, $R := k[x]$, und $K = k(x)$ der Quotientenkörper von R. Ferner sei $k[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n \in k$. Addition und Multiplikation sind wie bei konvergenten Potenzreihen definiert. Zeigen Sie:

(a) $k[[x]] \cong \varprojlim R/(x^n)$.

(b) Für $a_0 \neq 0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $k[[x]]$ invertierbar. Berechnen Sie $(1+x)^{-1}$ in $k[[x]]$.

(c) Die Elemente des Quotientenkörpers $k((x))$ von $k[[x]]$ können als Reihen der Form $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n x^n$ für ein $k \in \mathbb{N}$ aufgefaßt werden.

(d) $k[[x]]$ ist ein diskreter Bewertungsbereich mit Primelement x. Geben Sie die zugehörige diskrete Bewertung $v\colon k((x)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ explizit an.

(e) Für $\lambda \in k$ und $a \in K^\times$ sei $v_\lambda(a) \in \mathbb{Z}$ die Vielfachheit von λ als Nullstelle von a (als rationale Funktion; Pole werden negativ gezählt). Dann ist $v_\lambda\colon K^\times \to \mathbb{Z}$ eine diskrete Bewertung von K.

(f) Jedes Element $a \in K^\times$ kann in der Form $a = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots a_r x^r}{b_0 + b_1 x + \cdots b_s x^s}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i \in k$ und $a_r, b_s \neq 0$ geschrieben werden, und $v(a) := s - r$ definiert eine diskrete Bewertung $v\colon K^\times \to \mathbb{Z}$.