Wohlgeordnete Untermengen in totalgeordneten Gruppen. Mit einer Anwendung auf Potenzreihenkörper.

UCSNAY, P.

in: Periodical issue | Mathematische Annalen - 160 | Periodical
10 page(s) (161 - 170)

UCSNAY, P.
Math. Annalen 160, 161—170 (1965)

Wohlgeordnete Untermengen in totalgeordneten Gruppen. Mit einer Anwendung auf Potenzreihenkörper

Von

PETER UCSNAY in Bonn

Viele der für maximal bewertete Körper gültigen Sätze lassen sich schon für perfekt bewertete Körper beweisen. Neben den maximalen kommt also auch den perfekten Körpern eine gewisse Bedeutung zu. Vorliegende (von W. KRULL angeregte) Note beschäftigt sich mit der Konstruktion von perfekten Unterkörpern in einem (stets maximalen) Hahnschen Potenzreihenkörper $\mathfrak{K}$. Der Nachweis der Körperstruktur von $\mathfrak{K}$ beruht bekanntlich im wesentlichen auf folgendem rein gruppentheoretischen Satz von B. H. NEUMANN: Es sei Γ eine totalgeordnete Gruppe und A eine nur aus nicht-negativen Elementen bestehende wohlgeordnete Untermenge von Γ; dann ist auch die durch A erzeugte Unterhalbgruppe A^* von Γ wohlgeordnet. Wir verallgemeinern diesen Satz, indem wir von A noch zusätzliche (mit Hilfe von Ordnungs-, insbesondere Anfangs- und abzählbaren δ-Zahlen definierte) Eigenschaften verlangen, und zeigen, daß dann auch A^* diese Eigenschaften besitzt. Mit Hilfe dieses Satzes wird dann die Körperstruktur gewisser Untermengen von $\mathfrak{K}$ bewiesen. — § 1 befaßt sich mit mengentheoretischen Vorbereitungen. In § 2 bringen wir gruppentheoretische Sätze, die dann in § 3 auf Potenzreihenkörper angewandt werden. Einige der vorbereitenden Sätze dürften auch an sich nicht uninteressant sein, insbesondere Satz 2 und Satz 6.

§ 1

Mit α, β bezeichnen wir Ordnungszahlen. Die Ordnungszahl einer wohlgeordneten Menge I bzw. die Kardinalzahl einer beliebigen Menge M bzw. die Kardinalzahl einer Ordnungszahl α soll mit $o(I)$ bzw. $|M|$ bzw. $|\alpha|$ bezeichnet werden.

I sei eine totalgeordnete[1]) Menge. Eine Untermenge I' von I heißt *konfinal* in I, wenn es zu jedem $\iota \in I$ ein $\iota' \in I'$ gibt, derart, daß $\iota \leqq \iota'$. Eine Untermenge I' von I heißt ein *Anfang* bzw. *Intervall* (oder eine *konvexe Untermenge)* bzw. *Ende* von I, wenn aus $\iota' \in I'$, $\iota < \iota'$ bzw. $\iota'' \in I'$, $\iota'' < \iota$ bzw. $\iota', \iota'' \in I'$, $\iota' < \iota < \iota''$ stets $\iota \in I'$ folgt. Ein Intervall I' von I heißt ein *α-Intervall*, wenn I' wohlgeordnet und $o(I') = \alpha$. Eine Untermenge I' von I heißt α-treu in I, wenn für ein α-Intervall I_α von I stets $o(I_\alpha \cap I') = \alpha$ oder 0. „α-treue" ist eine transitive Relation. Eine Familie $(I_\mu)_{\mu \in M}$ von Untermengen I_μ von I mit einer totalgeordneten Indexmenge M heißt eine *Partition* von I, wenn folgendes gilt:

[1]) In [2] „fully ordered".

1) $I = \bigcup_{\mu \in M} I_\mu$. — 2) $I_{\mu_1} \cap I_{\mu_2} = \emptyset\ (\mu_1 \neq \mu_2)$. — 3) $I_\mu \neq \emptyset$. — 4) Aus $\mu_1 < \mu_2$, $\iota_i \in I_{\mu_i}\ (i = 1, 2)$ folgt $\iota_1 < \iota_2$. — Jedes I_μ ist offenbar ein Intervall von I. Ist I wohlgeordnet, so sind auch die I_μ und M wohlgeordnet, und es gilt $o(I) = \sum_{\mu \in M} o(I_\mu)$; falls $o(I_\mu) = \alpha$ konstant, so ist $o(I) = \alpha \cdot o(M)$. Umgekehrt: Ist $o(I) = \sum_{\mu \in M} \alpha_\mu$, so gibt es genau eine Partition $(I_\mu)_{\mu \in M}$ von I, derart , daß $o(I_\mu) = \alpha_\mu$. Falls $o(I) = \alpha\beta\ (\alpha > 0)$, so ist β durch α eindeutig bestimmt; die infolgedessen nur von α abhängige Partition $(I_\mu)_{\mu \in M}$ von I mit $o(I_\mu) = \alpha$ und $o(M) = \beta$ heißt die *α-Partition* von I.

Eine Anfangszahl ist für uns stets eine transfinite Anfangszahl. Eine Anfangszahl $o(I)$ heißt *regulär*, wenn für eine konfinale Untermenge I' von I immer $o(I') = o(I)$. Bekanntlich ist jede Anfangszahl α mit isoliertem Index (d. h. $\alpha = \omega$ oder es gibt eine Anfangszahl $\beta < \alpha$, derart, daß zwischen β und α keine weitere Anfangszahl liegt) regulär. Bekannt ist auch

Lemma 1. *In jeder totalgeordneten Menge I gibt es wohlgeordnete konfinale Untermengen I'. Die kleinste Zahl in der Menge aller $o(I')$ ist regulär und heißt der Konfinalitätstyp von I.*

Die Ordnungszahlen von der Form ω^α(α beliebig) heißen *γ-Zahlen*. Ist β eine γ-Zahl, so heißt ω^β eine *δ-Zahl*. Jede Anfangszahl ist eine δ-Zahl. Die δ-Zahlen einer festen Zahlklasse bilden in dieser eine konfinale Untermenge. Wichtig ist für uns die folgende Charakterisierung der γ-Zahlen: $o(I)$ ist genau dann eine γ-Zahl, wenn für jedes nichtleere Ende E von I gilt $o(E) = o(I)$.

Lemma 2. *I sei eine totalgeordnete Menge vom Konfinalitätstyp α. Ferner sei A eine Menge mit $|A| < |\alpha|$, und $(a_\iota)_{\iota \in I}$ sei eine Familie aus A. Dann gibt es eine konfinale Untermenge I' in I, derart, daß $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ konstant.*

Beweis. Wir können $A = \{a_\iota \mid \iota \in I\}$ voraussetzen. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es zu jedem $a \in A$ ein $f(a) \in I$, derart, daß für alle $\iota' > f(a)$ gilt $a_{\iota'} \neq a$. Die Menge $f(A)$ ist konfinal in I (denn $f(a_\iota) \geqq \iota$ für jedes $\iota \in I$) und $|f(A)| \leqq |A| < |\alpha|$. Nach Lemma 1 ist das ein Widerspruch.

Lemma 3. *Es sei $o(I) = \omega^\alpha$ (α beliebig). Ferner sei $(a_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie aus einer endlichen Menge A. Dann gibt es $I' \subseteq I$, derart, daß $o(I') = o(I)$ und $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ konstant.*

Beweis. Mit Induktion bezüglich α; trivial für $\alpha = 0$ und α keine Limeszahl. Ist α eine Limeszahl, etwa $\alpha = \lim_{\mu \in M} \alpha_\mu$ und damit $\omega^\alpha = \sum_{\mu \in M} \omega^{\alpha_\mu}$ [2]), so gibt es eine Partition $(I_\mu)_{\mu \in M}$ von I mit $o(I_\mu) = \omega^{\alpha_\mu}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $I'_\mu \subseteq I_\mu$, derart, daß $o(I'_\mu) = o(I_\mu)$ und $a_{\iota_\mu} = a_\mu$ ($\iota_\mu \in I'_\mu$, $\mu \in M$). Nach Lemma 2 gibt es weiter eine konfinale Untermenge M' in M, derart, daß $a_\mu = a$ ($\mu \in M'$). Die gesuchte Menge ist dann $I' = \bigcup_{\mu \in M'} I'_\mu$. — Einfache Beispiele zeigen, daß für eine Nicht-γ-Zahl Lemma 3 im allgemeinen nicht gilt.

I und A seien totalgeordnet. $(a_\iota)_{\iota \in I}$ aus A heißt *(streng-)aufsteigend* bzw. *(streng-)absteigend*, wenn aus $\iota < \iota'$ stets ($a_\iota < a_{\iota'}$) $a_\iota \leqq a_{\iota'}$ bzw. ($a_\iota > a_{\iota'}$) $a_\iota \geqq a_{\iota'}$ folgt. Trivialerweise gelten:

---

[2]) [1], III. § 11, b) auf Seite 51.

Lemma 4. *Ist* $(a_\iota)_{\iota \in I}$ *aufsteigend, so gibt es ein konfinales* $I' \subseteq I$, *derart, daß* $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ *konstant oder streng-aufsteigend.*

Lemma 5. *Ist* A *wohlgeordnet und* $(a_\iota)_{\iota \in I}$ *aus* A, *so gibt es ein konfinales* $I' \subseteq I$, *derart, daß* $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ *aufsteigend.*

Für Anfangszahlen $o(I)$ läßt sich Lemma 5 wie folgt verschärfen:

Satz 1. *Es sei* $o(I)$ *eine Anfangszahl, und* $(a_\iota)_{\iota \in I}$ *sei eine Familie aus einem wohlgeordneten* A. *Dann gibt es* $I' \subseteq I$, *derart, daß* $o(I') = o(I)$ *und* $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ *aufsteigend.*

Beweis. Falls $o(I)$ regulär, so folgt die Behauptung aus Lemma 5. Falls $o(I)$ nicht-regulär, so hat $o(I)$ Limeszahlindex. Es gibt also eine Darstellung $o(I) = \sum_{\mu \in M} \alpha_\mu$ [3]) und damit eine Partition $(I_\mu)_{\mu \in M}$ von I, derart, daß $o(I_\mu) = \alpha_\mu$ stets eine Anfangszahl mit isoliertem Index [4]) und somit regulär. Man kann also $(a_\iota)_{\iota \in I_\mu}$ als aufsteigend „annehmen". Es gilt ferner $\alpha_\mu = \sum_{\mu' \leqq \mu} \alpha_{\mu'}$ [3]), also gibt es eine Partition $(I_{\mu,\mu'})_{\mu' \leqq \mu}$ von I_μ mit $o(I_{\mu,\mu'}) = \alpha_{\mu'}$. Da A wohlgeordnet, gibt es für jedes $\mu' \in M$ ein (nicht eindeutiges, aber fest gewähltes) $f(\mu') \geqq \mu'$ in M, derart, daß es für alle $\iota' \in I_{f(\mu'),\mu'}$ und $\mu \geqq \mu'$ ein $\iota \in I_{\mu,\mu'}$ gibt, derart, daß $a_{\iota'} \leqq a_\iota$. Nach Lemma 5 und 4 gibt es $M' \subseteq M$, derart, daß M' konfinal in M und $(f(\mu'))_{\mu' \in M'}$ streng-aufsteigend („konstant" kommt nicht in Frage, da $f(\mu') \geqq \mu'$). Für $I' = \bigcup_{\mu' \in M'} (I_{f(\mu'),\mu'})$ gilt dann das Verlangte.

I und A seien totalgeordnet; $(I_\mu)_{\mu \in M}$ sei eine Partition von I. Eine Folge $(a_\iota)_{\iota \in I}$ aus A heißt (I_μ, M)-*aufsteigend*, wenn es zu jedem $\mu_1 < \mu_2 \in M$, $\iota_1 \in I_{\mu_1}$ ein $\iota_2 \in I_{\mu_2}$ gibt, derart, daß $a_{\iota_1} \leqq a_{\iota_2}$. Von (I_μ, M)-*streng-aufsteigend* sprechen wir, wenn aus $\mu_1 < \mu_2$, $\iota_i \in I_{\mu_i}$ $(i = 1, 2)$ stets folgt $a_{\iota_1} < a_{\iota_2}$. Falls $(I_\mu)_{\mu \in M}$ die α-Partition von I ist, so sagen wir einfach α-*aufsteigend* bzw. α-*streng-aufsteigend*. Es sei $I_i \subseteq I$ $(i = 1, 2)$; durch die Vorschrift „$I_1 \preccurlyeq I_2$ genau dann, wenn es für alle $\iota_1 \in I_1$ ein $\iota_2 \in I_2$ gibt, derart, daß $a_{\iota_1} \leqq a_{\iota_2}$" wird eine totale „Vorordnung" [5]) $\preccurlyeq$ in der Potenzmenge $\mathfrak{J}$ von I definiert, die (wie eine totale Vorordnung immer) eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{J}$ und eine Totalordnung in der Menge $\overline{\mathfrak{J}}$ aller Äquivalenzklassen induziert. Wie sofort zu sehen, ist mit A auch $\overline{\mathfrak{J}}$ wohlgeordnet. Daraus folgt:

Korollar zu Satz 1. I *und* A *seien wohlgeordnet;* $(I_\mu)_{\mu \in M}$ *sei eine Partition von* I, *derart, daß* $o(M)$ *eine Anfangszahl; und* $(a_\iota)_{\iota \in I}$ *sei aus* A. *Dann gibt es* $M' \subseteq M$, *derart, daß* $o(M') = o(M)$ *und* $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ (I_μ, M')-*aufsteigend, falls* $I' = \bigcup_{\mu \in M'} I_\mu$.

Für Nicht-Anfangszahlen gilt Satz 1 im allgemeinen offenbar nicht. Um wenigstens für abzählbare γ-Zahlen eine ähnliche Aussage zu gewinnen, definieren wir: $(a_\iota)_{\iota \in I}$ heißt *schwach-aufsteigend* [6]), wenn es zu jedem $\iota \in I$ ein Ende $E_\iota \neq \emptyset$ von I gibt, derart, daß für alle $\iota' \in E_\iota$ gilt $a_\iota \leqq a_{\iota'}$. Jede aufsteigende Folge ist schwach-aufsteigend. Ist I' konfinal in I, so ist mit $(a_\iota)_{\iota \in I}$

[3]) [1], III. § 16, a) und b) auf Seite 69.

[4]) Bezieht sich hier natürlich nicht auf μ!

[5]) In [2] "preorder".

[6]) In [6], auf Seite 277, "konfinal".

auch $(a_\iota)_{\iota\in I'}$ schwach-aufsteigend und es gilt: für alle $\iota \in I$ gibt es $\iota' \in I'$, derart, daß $a_\iota \leqq a_{\iota'}$.

Satz 2. *Es sei $o(I) = \omega^\alpha$ abzählbar, und $(a_\iota)_{\iota\in I}$ sei aus einem wohlgeordneten A. Dann gibt es eine ω-treue Untermenge I' in I, derart, daß $o(I') = o(I)$ und $(a_\iota)_{\iota\in I'}$ schwach-aufsteigend .*

Beweis: Für $\alpha = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 1. Induktionsvoraussetzung für alle $\beta < \alpha$. Für α keine Limeszahl ist $\omega^\alpha = \omega^{\alpha-1}\cdot\omega$; für α Limeszahl gibt es eine Darstellung $\alpha = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$, $\omega^\alpha = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega^{\alpha_n}$ [2]).

(Man beachte Lemma 1 und daß α nach Voraussetzung endlich oder abzählbar ist.) Es gibt also eine Partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von I, derart, daß $o(I_n) = \omega^{\alpha-1}$ oder $\omega^{\alpha_n} (n \in \mathbb{N})$. Nach Induktionsvoraussetzung bzw. nach dem Korollar zu Satz 1 kann man $(a_\iota)_{\iota\in I_n}$ stets als schwach-aufsteigend bzw. $(a_\iota)_{\iota\in I}$ als $(I_n, \mathbb{N})$-aufsteigend „annehmen". Für jedes n sei $(\iota_{n\,i})_{i\in\mathbb{N}}$ streng-aufsteigend und konfinal in I_n. Wegen den gemachten Annahmen kann zu jedem n ein $i(n)$ so gewählt werden, daß $a_{\iota_{n,i(n)}} \geqq a_{\iota_{j\,i}}$ $(1 \leqq j, i \leqq n)$. Bedeutet E_n jeweils ein Ende von I_n, derart, daß $a_{\iota_{n,i(n)}} \leqq a_{\iota'}$ für alle $\iota' \in E_n$, so ist $I' = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ die gesuchte Untermenge von I. — Einfache Beispiele zeigen, daß für eine Nicht-γ-Zahl (abzählbar oder überabzählbar) Satz 2 im allgemeinen nicht gilt. Offen ist dagegen, ob Satz 2 auch im Überabzählbaren gilt ?

§ 2

Γ sei eine (additiv geschriebene) totalgeordnete Gruppe. Γ^+ bezeichne die Menge aller nicht-negativen Elemente von Γ. Ist $A \subseteqq \Gamma$ und $s \in \mathbb{N}$, so sei $A_s = \{a \mid a = a_1 + \cdots + a_s, a_k \in A\}$. Für $A \subseteqq \Gamma^+$ sei A^* die durch A erzeugte (d. h. die kleinste A enthaltende) Unterhalbgruppe von Γ^+. Die folgenden zwei Sätze sind bekannt[7]):

Lemma 6. *Ist $A \subseteqq \Gamma$ wohlgeordnet, dann ist für jedes $s \in \mathbb{N}$ auch A_s wohlgeordnet.*

Lemma 7. (B. H. NEUMANN). *Ist $A \subseteqq \Gamma^+$ wohlgeordnet, dann ist auch A^* wohlgeordnet.*

Satz 3. *Es sei $o(I)$ eine Anfangszahl, $A \subseteqq \Gamma$ wohlgeordnet und $s \in \mathbb{N}$. Ferner sei $(a_\iota)_{\iota\in I}$ streng-aufsteigend aus Γ, derart, daß $a_\iota = a_\iota^1 + \cdots + a_\iota^s$ mit $a_\iota^k \in A$. Dann gibt es $I' \subseteqq I$ und ein $k_0 (1 \leqq k_0 \leqq s)$, derart, daß $o(I') = o(I)$ und $(a_\iota^{k_0})_{\iota\in I'}$ streng-aufsteigend.*

Beweis. Wegen Lemma 6 können wir uns auf den Fall $s = 2$ beschränken. Nach Satz 1 kann man annehmen, daß $(a_\iota^k)_{\iota\in I}$ $(k = 1, 2)$ aufsteigend. Wir können dann für $\iota \in I$ definieren: $f(\iota) = 1$, falls $a_\iota^1 > a_{\iota'}^1$ für alle $\iota' < \iota$, und $f(\iota) = 2$, falls $a_\iota^1 = a_{\iota'}^1$, für ein $\iota' < \iota$ und damit $a_\iota^2 > a_{\iota'}^2$ für alle $\iota' < \iota$. Nach Lemma 3 gibt es $I' \subseteqq I$, derart, daß $o(I') = o(I)$ und $(f(\iota))_{\iota\in I'}$ konstant, $f(\iota) = k_0 (\iota \in I')$. Die Folge $(a_\iota^{k_0})_{\iota\in I'}$ ist streng-aufsteigend.

Satz 4. *Es sei ω^α eine abzählbare δ-Zahl, $o(I) = \omega\cdot\omega^\alpha$, $A \subseteqq \Gamma$ wohlgeordnet und $s \in \mathbb{N}$. Ferner sei $(a_\iota)_{\iota\in I}$ ω-streng-aufsteigend aus Γ, derart,*

[7]) Beweise findet man in [4] oder [7].

daß $a_\iota = a_\iota^1 + \cdots + a_\iota^s$ *mit* $a_\iota^k \in A$. *Dann gibt es eine* ω*-treue Untermenge* I' *in* I *und ein* $k_0 (1 \leqq k_0 \leqq s)$, *derart, daß* $o(I') = o(I)$ *und* $(a_\iota^{k_0})_{\iota \in I'}$ ω*-streng-aufsteigend.*

Beweis. Wegen Lemma 6 und der Transitivität der Relation „ω-treu" können wir uns auf den Fall $s = 2$ beschränken. Der Beweis geht mit Induktion für α. Für $\alpha = 1$: Ist $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Partition von I mit $o(I_n) = \omega$, so kann man nach Satz 1 bzw. nach dem Korollar zu Satz 1 $(a_\iota^k)_{\iota \in I_n}$ $(k = 1, 2)$ stets als aufsteigend bzw. $(a_\iota^k)_{\iota \in I}$ $(k = 1, 2)$ als $(I_n, \mathbb{N})$-aufsteigend annehmen. Weiter geht der Beweis analog zu dem von Satz 3. — Induktionsvoraussetzung für alle γ-Zahlen $\beta < \alpha$. Zunächst zeigen wir: Es sei L eine (nicht-notwendig ω-treue) Untermenge von I mit der Ordnungszahl $\omega \cdot \omega^{\beta m}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Ferner sei m_i $(i = 1, 2; 0 \leqq m_i \leqq m)$ maximal mit der Eigenschaft: Es gibt eine ω-treue Untermenge L_i in L mit der Ordnungszahl $\omega \cdot \omega^{\beta m_i}$, derart, daß $(a_\iota^i)_{\iota \in L_i}$ ω-streng-aufsteigend ist. Dann gilt $m \leqq m_1 + m_2$. Beweis: Für $m = 0$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Es seien $n = m + 1$ und $K \subseteq I$ mit $o(K) = \omega \cdot \omega^{\beta n} = \omega \cdot \omega^{\beta m} \cdot \omega^\beta$. Es sei $(L_\mu)_{\mu \in M}$ die $(\omega \cdot \omega^{\beta m})$-Partition von K, also $o(L_\mu) = \omega \cdot \omega^{\beta m}$ und $o(M) = \omega^\beta$. Nach Satz 2 können wir $(a_\iota^i)_{\iota \in L_\mu}$ $(i = 1, 2;$ $\mu \in M)$ als schwach-aufsteigend annehmen. Daher und wegen der Induktionsvoraussetzung für β können wir, falls L'_μ stets eine konfinale Untermenge von L_μ mit $o(L'_\mu) = \omega$ bedeutet und $K' = \bigcup_{\mu \in M} L'_\mu$ mit $o(K') = \omega \cdot \omega^\beta$, z. B. $(a_\iota^1)_{\iota \in K'}$ als ω-streng-aufsteigend und damit — indem man L_μ jeweils mit einem passenden Ende von L_μ identifiziert — $(a_\iota^1)_{\iota \in K}$ als (L_μ, M)-streng-aufsteigend annehmen. Es seien n_i bzw. $m_{\mu i}$ $(i = 1, 2; \mu \in M)$ die im Sinne der Behauptung zu K bzw. L_μ gehörige Zahlen und $L_{\mu 1}$ eine dem $m_{\mu 1}$ entsprechende Untermenge von L_μ. Nach Lemma 3 können wir annehmen, daß $m_{\mu i} = m_i$ konstant. Daher hat die ω-treue Untermenge $K_1 = \bigcup_{\mu \in M} L_{\mu 1}$ von K die Ordnungszahl $\omega \cdot \omega^{\beta m_1} \cdot \omega^\beta = \omega \cdot \omega^{\beta(m_1 + 1)}$. Wir haben aber auch, daß $(a_\iota^1)_{\iota \in K_1}$ ω-streng-aufsteigend und damit $n_1 > m_1$. Die Induktionsvoraussetzung für m ergibt $m \leqq m_1 + m_2$, wegen $n_i \geqq m_i$ $(i = 1, 2)$ ist also $n \leqq n_1 + n_2$. — Wir kommen nun zu dem Beweis von Satz 4 zurück. Im Fall $\alpha = \beta \cdot \omega = \lim_{m \in \mathbb{N}} (\beta \cdot m)$, $\omega^\alpha = \sum_{m \in \mathbb{N}} \omega^{\beta \cdot m}$ bzw. $\alpha = \lim_{m \in \mathbb{N}} \beta_m$ (alle β_m γ-Zahlen), $\omega^\alpha = \sum_{m \in \mathbb{N}} \omega^{\beta_m}$ gibt es eine Partition $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von I, derart, daß stets $o(I_m) = \omega^{\beta \cdot m}$ bzw. $o(I_m) = \omega^{\beta_m}$. Nach dem soeben Bewiesenen (mit m wird auch z. B. m_1 beliebig groß!) bzw. der Induktionsvoraussetzung kann man annehmen, daß z. B. $(a_\iota^1)_{\iota \in I_m}$ stets ω-streng-aufsteigend ist. Man hat jetzt nur noch $\omega^{\beta \cdot m} = \sum_{m' \leqq m} \omega^{\beta \cdot m'}$ bzw. $\omega^{\beta_m} = \sum_{m' \leqq m} \omega^{\beta_{m'}}$, ferner den Beweis von Satz 1 zu beachten. q.e.d.

Korollar. *Die Voraussetzungen und die Behauptung seien dieselben wie in Satz 3; mit dem einzigen Unterschied:* $o(I)$ *sei jetzt eine abzählbare* δ*-Zahl.*

Einfache Beispiele zeigen, daß für eine Nicht-δ-Zahl (abzählbar oder überabzählbar) Korollar zu Satz 4 im allgemeinen nicht gilt. Offen ist wieder, ob es für alle überabzählbare δ-Zahlen gilt? Satz 3 und Korollar zu Satz 4 ergänzen wir noch mit:

Satz 5. *Es sei $o(I)$ eine beliebige γ-Zahl, $A \subseteq \Gamma$ wohlgeordnet und $s \in \mathbb{N}$. Ferner sei $a = a_\iota^1 + \cdots + a_\iota^s$ $(\iota \in I)$ mit $a_\iota^k \in A$. Dann gibt es $I' \subseteq I$, derart, daß $o(I') = o(I)$ und $(a_\iota^k)_{\iota \in I'}$ konstant für jedes k.*

Der Beweis geht ähnlich zu dem von Lemma 3; benutzt wird Lemma 5. Für Nicht-γ-Zahlen gilt Satz 5 im allgemeinen nicht.

Bekanntlich heißen a und b aus Γ^+ *archimedisch äquivalent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, derart, daß $a \leqq nb, b \leqq na$. Die a enthaltende archimedische Klasse bezeichnen wir mit $\bar{a}$. Die Menge $\overline{\Gamma^+}$ aller Klassen ist in kanonischer Weise totalgeordnet. Trivialerweise gelten:

Lemma 8. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma^+$ ist $\overline{a_1 + \cdots + a_n} = \mathrm{Max}$ $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$.*

Lemma 9. *Aus $a, b \in \Gamma^+$, $\bar{a} < \bar{b}$ und $c \in \Gamma$ folgt $\overline{c + a - c} < \overline{c + b - c}$.*

Lemma 10.[8]. *Es seien $\Delta_1 \subset \Delta_2$ „benachbarte" konvexe Untergruppen von Γ. Dann ist Δ_1 normal in Δ_2 und Δ_2/Δ_1 ist ordnungsisomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.*

Ein $U \subseteq \Gamma^+$ soll *beschränkt* heißen, wenn es ein $a_0 \in \Gamma^+$ gibt, derart, daß für $a \in U$ stets $a \leqq a_0$ und $\bar{a} = \bar{a}_0$. (a_0 heißt eine *Schranke* von U). Mit Hilfe von Lemma 8 zeigt man leicht:

Lemma 11. *Es sei $A \subseteq \Gamma^+$ wohlgeordnet. $U \subseteq A^*$ sei beschränkt, und a_0 sei eine Schranke von U. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ und für jedes $a \in U$ eine Darstellung $a = a^1 + \cdots + a^s$, derart, daß für gerades bzw. ungerades k stets $a^k \in A$ und $\overline{a^k} = \bar{a}_0$ bzw. $a^k \in A^*$ und $\overline{a^k} < \bar{a}_0$ (in beiden Fällen ist auch noch $a^k = 0$ zugelassen).*

Im folgenden betrachten wir Untermengen U von Γ, die ein erstes Element e, aber kein letztes Element haben. Es sei immer $U' = U - \{e\}$, $U_r = \{a - e \mid a \in U'\}$ und $U_l = \{-e + a \mid a \in U'\}$. U heißt eine *rechts (links) G_1- bzw. G_2- bzw. G_3-Menge*, wenn aus $a < b < c$ in U stets folgt $\overline{b - a} <$ bzw. $=$ bzw. $> \overline{c - b}$ ($\overline{-a + b} <$ bzw. $=$ bzw. $> \overline{-b + c}$). Wegen Lemma 9 ist jede rechts (links) G_i-Menge auch eine links (rechts) G_i-Menge. Wir können also einfach von *G_i-Mengen* sprechen. Aus Lemma 8 folgt sofort: U ist eine rechts (links) G_1-Menge genau dann, wenn 1) aus $b < a, c < a$ in U folgt $\overline{a - b} = \overline{a - c} = \mathfrak{O}_a$ ($\overline{-b + a} = \overline{-c + a} = \mathfrak{O}_a$); — 2) $(\mathfrak{O}_a)_{a \in U'}$ ist streng-aufsteigend. — U ist eine rechts (links) G_2-Menge genau dann, wenn aus $a < b, c < d$ in U folgt $\overline{b - a} = \overline{d - c}$ ($\overline{-a + b} = \overline{-c + d}$). — U ist eine rechts (links) G_3-Menge genau dann, wenn 1) aus $a < b, a < c$ in U folgt $\overline{b - a} = \overline{c - a} = \mathfrak{O}_a$ ($\overline{-a + b} = \overline{-a + c} = \mathfrak{O}_a$); — 2) $(\mathfrak{O}_a)_{a \in U}$ ist streng-absteigend. — Eine G_i-Menge $U \subseteq \Gamma^+$ $(i = 1, 2)$ soll *normal* heißen, wenn aus $b < a$ in U folgt $\bar{a} = \overline{a - b} = \overline{-b + a}$.

Lemma 12. *Ist $U \subseteq \Gamma$ eine G_i-Menge $(i = 1, 2)$, so sind U_r und U_l normale G_i-Mengen.*

Eine G_2-Menge $U \subseteq \Gamma$ soll eine *G_4-Menge* heißen, wenn U_r (oder, was damit gleichwertig ist, U_l) beschränkt ist. Einfache Rechnung ergibt:

[8]) [2], Chap. IV, § 3, (3) auf Seite 50.

Lemma 13. *Es sei $U \subseteqq \Gamma^+$ eine G_i-Menge. Für $i = 1$ ist $(\bar{a})_{a \in U}$ entweder konstant und damit U beschränkt oder es gibt ein Ende $E \neq \emptyset$ in U, derart, daß $(\bar{a})_{a \in E}$ streng-aufsteigend und damit E normal. Für $i = 2$ und 3 ist $(\bar{a})_{a \in U'}$ immer konstant. Für $i = 3$ und 4 ist U' sogar beschränkt.*

Zu der Frage: „Gibt es zu jeder Ordnungszahl α Gruppen Γ, in denen wohlgeordnete G_i-Untermengen U mit $o(U) = \alpha$ existieren?" sei folgendes bemerkt: Für $i = 1$ und 3 ist die Frage positiv zu beantworten, die „lexikographischen Produkte" von totalgeordneten Gruppen[9]) liefern einfache Beispiele dafür. Für $i = 2$ beachte man: Eine archimedisch totalgeordnete Gruppe Γ (und damit auch jede Untermenge von Γ) ist stets eine G_2-Menge. Bekanntlich gibt es in $\mathbb{R}$ zu jeder abzählbaren Ordnungszahl α wohlgeordnete Untermengen U mit $o(U) = \alpha$. Andererseits ist — wie ebenfalls bekannt — jede wohlgeordnete Untermenge von $\mathbb{R}$ höchstens abzählbar. Wegen Lemma 10 und 12 ergibt sich daraus: Die G_2-Untermengen einer beliebigen Gruppe Γ sind höchstens abzählbar. — Das Betrachten von G_i-Mengen wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 6. *Es sei $U \neq \emptyset$ eine Untermenge von Γ ohne ein letztes Element. Für genau ein $i = i(U)$ $(i = 1, 2, 3)$ gibt es konfinale G_i-Untermengen in U.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von i ist trivial. — Für jedes $a \in U$ sei $E_a = \{a' \in U \mid a' > a\}$. Die Folge $(\overline{a' - a})_{a' \in E_a}$ ist aufsteigend, nach Lemma 4 gibt es also ein konfinales E'_a in E_a, derart, daß $(\overline{a' - a})_{a' \in E'_a}$ streng-aufsteigend (und damit E'_a eine G_1-Menge) oder konstant. Es bleibt nur der Fall zu untersuchen, daß für jedes $a \in U$ „konstant" zutrifft und damit E'_a stets als ein „maximales" Ende von U angenommen werden kann. Daraus folgt $E'_a \supseteqq E'_b$, falls $a < b$ in U. Es sei $\mathfrak{O}_a = \overline{a' - a}$ $(a' \in E'_a)$; da $(\mathfrak{O}_a)_{a \in U}$ absteigend ist, gibt es nach Lemma 4 ein konfinales $U' \subseteqq U$, derart, daß $(\mathfrak{O}_a)_{a \in U'}$ konstant bzw. streng-absteigend. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller $V \subseteqq U'$, derart, daß für $a < b$ in V stets $b \in E'_a$; in der hinsichtlich der Inklusion induktiv geordneten Menge $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element U''. U'' ist eine konfinale G_2- bzw. G_3-Untermenge von U.

Die folgenden Sätze schließen sich an die Sätze 3 und 4 an. Eine streng-aufsteigende Folge $(a_\iota)_{\iota \in I}$ heißt eine *G_i-Folge*, wenn $\{a_\iota \mid \iota \in I\}$ eine G_i-Menge ist. Oft wird die folgende triviale Umformung benutzt: Es sei $a = a^1 + a^2$, $b = b^1 + b^2$, dann ist

$$(*)\quad \begin{aligned} b - a &= (b^1 - a^1) + a^1 + (b^2 - a^2) - a^1 = b^1 + (b^2 - a^2) - b^1 + (b^1 - a^1) \text{ bzw.} \\ -a + b &= (-a^2 + b^2) - b^2 + (-a^1 + b^1) + b^2 = -a^2 + (-a^1 + b^1) + a^2 + (-a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Satz 7. *Alles wie in Satz 3 mit dem Unterschied: $o(I)$ ist jetzt eine Anfangszahl oder eine abzählbare γ-Zahl; anstelle von „streng-aufsteigend" steht jetzt „G_1-Folge".*

Beweis. $s = 2$. Wegen Satz 1 und 2 kann man annehmen, daß $(a_\iota^k)_{\iota \in I}$ $(k = 1, 2)$ schwach-aufsteigend. Ist o das erste Element von I, so gibt es also ein Ende $E_0 \neq \emptyset$ von I, derart, daß für $\iota \in E_0$ stets $a_\iota^k - a_0^k \geqq 0$ $(k = 1, 2)$.

[9]) [2], Chap. II, § 7.

Nach (*) und Lemma 8 kann man dann für $\iota \in E_0$ definieren: $f(\iota) = 1$, falls $\overline{a_\iota^1 - a_0^1} = \overline{a_\iota - a_0}$, und $f(\iota) = 2$, falls $\overline{a_\iota^1 - a_0^1} < \overline{a_\iota - a_0}$ und damit $\overline{a_0^1 + (a_\iota^2 - a_0^2) - a_0^1} = \overline{a_\iota - a_0}$. Nach Lemma 3 gibt es ein $I' \subseteq E_0$, derart, daß $o(I') = o(E_0) = o(I)$ ($o(I)$ eine γ-Zahl!) und $(f(\iota))_{\iota \in I'}$ konstant, $f(\iota) = k_0$ ($\iota \in I'$). Mit Hilfe von Lemma 9 zeigt man leicht, daß $(a_\iota^{k_0})_{\iota \in I'}$ eine G_1-Folge ist. — Mit Hilfe von Lemma 7, 8, 11 und 13 folgt mühelos

Korollar. *α sei eine Anfangszahl oder eine abzählbare γ-Zahl, und $A \subseteq \Gamma^+$ sei wohlgeordnet. Gibt es G_1-Untermengen $U \subseteq A^*$ mit $o(U) = \alpha$, so gibt es auch G_1-Untermengen $V \subseteq A$ mit $o(V) = \alpha$.*

Satz 8. *Alles wie in Satz* 3 *mit dem Unterschied: $o(I) = \omega^\alpha$ ist jetzt eine Anfangszahl oder eine abzählbare δ-Zahl; anstelle von „streng-aufsteigend" steht jetzt „G_i-Folge"* ($i = 2, 3, 4$).

Beweis. $s = 2$. Nach Satz 1 und 2 kann $(a_\iota^k)_{\iota \in I}$ ($k = 1, 2$) als schwach-aufsteigend angenommen werden. Wegen Satz 3 und dem Korollar zu Satz 4 können wir ferner annehmen, daß $(a_\iota^1)_{\iota \in I}$ bzw. $(a_\iota^2)_{\iota \in I}$ streng-aufsteigend ist. Mit Hilfe von (*) und Lemma 8 folgt daraus

$$\overline{a_{\iota'}^1 - a_\iota^1} \leqq \overline{a_{\iota'} - a_\iota} \text{ bzw. } \overline{-a_\iota^2 + a_{\iota'}^2} \leqq \overline{-a_\iota + a_{\iota'}} \qquad (\iota' > \iota \in I)\,. \tag{1}$$

Gibt es ein $I' \subseteq I$, derart, daß $o(I') = o(I)$ und für $\iota' > \iota \in I'$ stets $\overline{a_{\iota'}^1 - a_\iota^1} = \overline{a_{\iota'} - a_\iota}$ bzw. $\overline{-a_\iota^2 + a_{\iota'}^2} = \overline{-a_\iota + a_{\iota'}}$, so ist $(a_\iota^1)_{\iota \in I'}$ bzw. $(a_\iota^2)_{\iota \in I'}$ eine G_i-Folge, und wegen $o(I') = o(I)$ sind wir dann fertig mit dem Beweis. Wir setzen voraus, daß es kein solches I' gibt. Mit Hilfe von (1) folgt daraus: Ist $\beta < \alpha$, also $\omega^\beta \cdot \omega^\alpha = \omega^\alpha$ (da α eine γ-Zahl!), und ist $(I_\mu)_{\mu \in M}$ eine Partition von I, $o(I_\mu) = \omega^\beta$, $o(M) = \omega^\alpha$, so gibt es ein kleinstes $\mu(\beta) \in M$, derart, daß für $\iota' > \iota \in I_{\mu(\beta)} = I_\beta$ stets $\overline{a_{\iota'}^1 - a_\iota^1} < \overline{a_{\iota'} - a_\iota}$ bzw. $\overline{-a_\iota^2 + a_{\iota'}^2} < \overline{-a_\iota + a_{\iota'}}$ und damit (wegen (*) und Lemma 8):

$$\begin{aligned} &\overline{a_\iota^1 + (a_{\iota'}^2 - a_\iota^2) - a_\iota^1} = \overline{a_{\iota'}^1 + (a_{\iota'}^2 - a_\iota^2) - a_{\iota'}^1} = \overline{a_{\iota'} - a_\iota} \qquad \text{bzw.} \\ &\overline{-a_\iota^2 + (-a_\iota^1 + a_{\iota'}^1) + a_\iota^2} = \overline{-a_{\iota'}^2 + (-a_\iota^1 + a_{\iota'}^1) + a_{\iota'}^2} = \overline{-a_\iota + a_{\iota'}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Minimalität von $\mu(\beta)$ folgt: Zu jedem $\beta_1 < \beta_2$ gibt es ein $\iota(\beta_1, \beta_2) \in I_{\beta_2}$, derart, daß für $\iota \in I_{\beta_1}$ stets $\iota < \iota(\beta_1, \beta_2)$. Es sei $E_{\beta+1}$ das mit $\iota(\beta, \beta+1)$ beginnende Ende von $I_{\beta+1}$. Wir bilden $I' = \bigcup_{\beta<\alpha} E_{\beta+1}$; $(E_{\beta+1})_{\beta<\alpha}$ ist eine Partition von I', wegen $o(E_{\beta+1}) = \omega^{\beta+1}$ ist also $o(I') = \sum_{\beta<\alpha} \omega^{\beta+1} = o(I)$. Aus (2) folgt, daß für $\beta < \alpha$ stets $(a_\iota^2)_{\iota \in I_\beta}$ bzw. $(a_\iota^1)_{\iota \in I_\beta}$ streng-aufsteigend ist. Beachtet man den Beweis von Satz 1, so folgt weiter, daß auch $(a_\iota^2)_{\iota \in I'}$ bzw. $(a_\iota^1)_{\iota \in I'}$ als streng-aufsteigend angenommen werden kann. Mit Hilfe von Lemma 8 und 9, (*) und (2) verifiziert man nun mühelos, daß $(a_\iota^2)_{\iota \in I'}$ bzw. $(a_\iota^1)_{\iota \in I'}$ sogar eine G_i-Folge ist. (Für jedes β wird dabei das erste Element von $E_{\beta+1}$ weggelassen.)

Korollar. *α sei eine Anfangszahl oder eine abzählbare δ-Zahl, und $A \subseteq \Gamma^+$ sei wohlgeordnet. Gibt es G_3- bzw. G_4-Untermengen $U \subseteq A^*$ mit $o(U) = \alpha$, so gibt es auch G_3- bzw. G_4-Untermengen $V \subseteq A$ mit $o(V) = \alpha$.*

§ 3

Γ sei eine totalgeordnete Gruppe, und K sei ein (nicht-notwendig kommutativer) Körper. Wie üblich bezeichnet K^Γ die Menge aller Abbildungen von Γ in K. Für jedes $x \in K^\Gamma$ sei $\Gamma_x = \{a \in \Gamma \mid x(a) \neq 0\}$. Mit $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir die Menge aller wohlgeordneten Untermengen von Γ. Bekanntlich ist $\mathfrak{K} = K^{(\Gamma)} = \{x \in K^\Gamma \mid \Gamma_x \in \mathfrak{W}\}$ hinsichtlich der „komponentenweisen" Addition und der „Cauchy"-Multiplikation ein Körper (ein sog. „Hahnscher Potenzreihenkörper"). Durch die Vorschrift $B(x) = \operatorname{Min} \Gamma_x$ $(x \in \mathfrak{K}, x \neq 0)$, $B(0) = \infty$ wird eine Bewertung B von $\mathfrak{K}$ definiert. B hat als Wertgruppe Γ, als Restklassenkörper K, als Bewertungsring $\mathfrak{B} = \{x \in \mathfrak{K} \mid \Gamma_x \subseteqq \Gamma^+\}$ und als (multiplikative) Einseinheitengruppe $\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{B} \mid x(0) = 1\}$. Die Gruppe Γ bzw. der Körper K läßt sich in kanonischer Weise in die multiplikative Gruppe von $\mathfrak{K}$ bzw. in den Körper $\mathfrak{K}$ isomorph einbetten. Das Bild von $a \in \Gamma$ bzw. $k \in K$ in $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir mit t^a bzw. u_k. Ein Unterkörper bzw. -ring von $\mathfrak{K}$ ist für uns im folgenden stets ein K und Γ enthaltender Unterkörper bzw. -ring. Für A_1, $A_2 \subseteqq \Gamma$ sei $A_1 + A_2 = \{a \mid a = a_1 + a_2, a_i \in A_i\}$. Es gelten[7])

Lemma 14. *Für* $x, y \in \mathfrak{K}$ *ist* $\Gamma_{x+y} \subseteqq \Gamma_x \cup \Gamma_y$, $\Gamma_{(-x)} = \Gamma_x$, $\Gamma_{xy} \subseteqq \Gamma_x + \Gamma_y$. *Für* $x \in \mathfrak{n}$ *ist* $\Gamma_{x^{-1}} \subseteqq (\Gamma_x)^*$.

Lemma 15. *Zu jedem* $x \in \mathfrak{K}$ $(x \neq 0)$ *gibt es genau ein Tripel* $a \in \Gamma$, $k \in K$ $(k \neq 0)$ *und* $e \in \mathfrak{n}$, *derart, daß* $x = t^a \cdot u_k \cdot e$.

Es sei $\mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{W}$ mit den folgenden Eigenschaften: 1) $\emptyset \in \mathfrak{S}$. — 2) Aus $A' \subseteqq A \in \mathfrak{S}$ folgt $A' \in \mathfrak{S}$. — 3) Aus $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$ folgt $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{S}$. — 4) Für jedes $a \in \Gamma$ ist $\{a\} \in \mathfrak{S}$. — 5) Aus $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}$ folgt $A_1 + A_2 \in \mathfrak{S}$. — 6) Aus $A \in \mathfrak{S}$, $A \subseteqq \Gamma^+$ folgt $A^* \in \mathfrak{S}$. — Die Eigenschaften 1)—3) besagen offenbar, daß $\mathfrak{S}$ ein „Mengenideal" ist. Wegen Lemma 6 und 7 hat $\mathfrak{W}$ selbst die Eigenschaften 1)—6). Es sei $\mathfrak{K}_\mathfrak{S} = \{x \in \mathfrak{K} \mid \Gamma_x \in \mathfrak{S}\}$. Aus Lemma 14 und 15 folgt:

Lemma 16. *Hat ein* $\mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{W}$ *die Eigenschaften* 1)—6) (1)—5)), *so ist* $\mathfrak{K}_\mathfrak{S}$ *ein Unterkörper(-ring) von* $\mathfrak{K}$.

Es sei α eine Ordnungszahl; wir bilden $\mathfrak{S}_{i,\alpha} = \{A \in \mathfrak{W} \mid$ für jede G_i-Untermenge $U \subseteqq A$ ist $o(U) < \alpha\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und $\mathfrak{S}_\alpha = \{A \in \mathfrak{W} \mid o(A) < \alpha\}$.

Satz 9. *Es sei* α *eine Anfangszahl oder eine abzählbare* δ*-Zahl. Dann gilt:* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{i,\alpha}}$ $(i = 1, 3, 4)$ *ist ein Unterkörper,* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{2,\alpha}}$ *und* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ *sind Unterringe von* $\mathfrak{K}$. *(Für* $i = 1$ *kann* α *auch eine abzählbare* γ*-Zahl sein. Da die* G_2*-Mengen höchstens abzählbar sind, ist für ein überabzählbares* α *stets* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{2,\alpha}} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{4,\alpha}} = \mathfrak{K}$.) *Aus* $\alpha < \alpha'$ *folgt* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{i,\alpha}} \subseteqq \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{i,\alpha'}}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *und* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_\alpha} \subseteqq \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{\alpha'}}$.

Beweis. Wegen Lemma 16 sind nur die Eigenschaften 1)—6) bzw. 1)—5) von $\mathfrak{S}_{i,\alpha}$ $(i = 1, 3, 4)$ bzw. $\mathfrak{S}_{2,\alpha}$ und $\mathfrak{S}_\alpha$ nachzuweisen. 1), 2) und 4) sind trivial. — 3) folgt aus Lemma 3. — 5) folgt für $i = 1$ aus Satz 7; für $i = 2, 3, 4$ aus Satz 8; und für $\mathfrak{S}_\alpha$ aus Satz 3 und Korollar zu Satz 4. — 6) folgt aus Korollar zu Satz 7 $(i = 1)$ und Korollar zu Satz 8 $(i = 3, 4)$.

Die folgenden Definitionen sind auf den speziellen Fall von Potenzreihenkörpern zugeschnitten[10]). Es sei $I \neq \emptyset$ wohlgeordnet und ohne ein letztes Element; $(x_\iota)_{\iota \in I}$ sei eine Folge aus $\mathfrak{B}$, derart, daß für $\iota < \iota' < \iota''$ stets $B(x_\iota - x_{\iota'}) <$

[10]) Für beliebige (kommutative) bewertete Körper findet man sie in [3] und [5].

$< B(x_{\iota'} - x_{\iota''})$. Es sei $a_\iota = B(x_\iota - x_{\iota'})$, falls $\iota < \iota'$ (a_ι hängt nicht ab von ι'). Die Folge $(a_\iota)_{\iota \in I}$ aus Γ^+ ist streng-aufsteigend. Ist der durch $(a_\iota)_{\iota \in I}$ erzeugte (d. h. kleinste $(a_\iota)_{\iota \in I}$ enthaltende) Anfang A von Γ^+ eine Halbgruppe, so heißt die Folge $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *pseudo-konvergent*. $(x_\iota)_{\iota \in I}$ heißt eine *spezielle pseudo-konvergente* Folge, wenn darüber hinaus noch gilt: Es gibt ein Ende $E \neq \emptyset$ in I, derart, daß $(\bar{a}_\iota)_{\iota \in E}$ konstant. Das durch die Vorschrift „$x(a) = x_\iota(a)$ für $a < a_\iota$ in A, $x(a) = 0$ für $a \notin A$" definierte Element $x \in \mathfrak{B}$ heißt der *Pseudo-Limes* der pseudo-konvergenten Folge $(x_\iota)_{\iota \in I}$. Ein Unterring $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ heißt *(stufenweise) perfekt*, wenn mit jeder (speziellen) pseudo-konvergenten Folge aus $\mathfrak{P}$ auch deren Pseudo-Limes zu $\mathfrak{P}$ gehört. Der selbst (stufenweise) perfekte Durchschnitt aller (stufenweise) perfekten Oberringe eines Unterringes $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ heißt die *(stufenweise) perfekte Hülle* von $\mathfrak{K}'$. — Aus Lemma 13 folgt:

Satz 10. *$\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{1,\alpha}}$ ist stufenweise perfekt, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{i,\alpha}}$ $(i = 3, 4)$ ist perfekt (α ist wie in Satz 9).*

Satz 11. *$(\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{1,\omega}} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{3,\omega}} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{4,\omega}})\ \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{3,\omega}} \cap \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_{4,\omega}} = \mathfrak{P}_0$ ist die (stufenweise) perfekte Hülle von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_\omega}$.*

Beweis. $\mathfrak{P}$ sei ein perfekter Oberring von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_\omega}$. Zu zeigen ist, daß aus $x \in \mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{B}$ folgt $x \in \mathfrak{P}$. Für jedes $a \in \Gamma_x$ sei x_a definiert durch die Vorschrift: $x_a(b) = x(b)$ bzw. 0 für $b < a$ bzw. $b \geqq a$. Um das Zornsche Lemma anwenden zu können, muß nur gezeigt werden, daß aus $x_a \in \mathfrak{P}$ $(a \in \Gamma_x)$ folgt $x \in \mathfrak{P}$. (Dabei kann angenommen werden, daß Γ_x kein letztes Element hat.) Nach Satz 6 gibt es eine konfinale G_i-Untermenge U (mit dem ersten Element e) in Γ_x. Wegen $x \in \mathfrak{P}_0$ ist U keine G_3- oder G_4-Menge. Daraus folgt, daß die Folge $(t^{-e}(x_a - x_e))_{a \in U'}$ aus $\mathfrak{P}$ pseudo-konvergent ist; also ist der Pseudo-Limes $t^{-e}(x - x_e)$ dieser Folge und damit auch x in $\mathfrak{P}$.

Literatur

[1] BACHMANN, H.: Transfinite Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955.

[2] FUCHS, L.: Partially ordered algebraic systems. Oxford: Pergamon Press 1963.

[3] KRULL, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1932).

[4] NEUMANN, B. H.: On ordered division rings. Trans. Am. Math. Soc. **66**, 202—252 (1949).

[5] RIBENBOIM, P.: Corps maximaux et complets par des valuations de Krull. Math. Z. **69**, 466—479 (1958).

[6] SCHMIDT, J.: Konfinalität. Z. math. Logik u. Grundlagen Math. **1**, 271—303 (1955).

[7] UCSNAY, P.: Formales Rechnen in Potenzreihenkörpern. Bonner Math. Schr. **18**, 1—67 (1963).

(Eingegangen am 28. August 1964)