# Zum Hahnschen Einbettungssatz für angeordnete Körper

Von

Sibylla Priess-Crampe

In [3] nennt P. Conrad einige Varianten des Satzes, daß ein angeordneter Körper mit $\Gamma$ als Gruppe der archimedischen Klassen in den Körper $H(\Gamma, \mathbf{R})$ der formalen Potenzreihen auf $\Gamma$ über $\mathbf{R}$ $o$-eingebettet werden kann. P. Conrad und J. Dauns bringen in [4, 4. Abschnitt] einen Beweis dieses Satzes, indem sie für die schwierigen Überlegungen auf Ergebnisse aus B. H. Neumann [8, Part II] und Sätze der Bewertungstheorie aus [9] verweisen. Sie fragen in diesem Zusammenhang nach einem einfachen und direkten Beweis.

In dieser Arbeit wird die folgende, schon von Alling in [1, S. 710] ähnlich formulierte Form des oben angegebenen Satzes bewiesen: Es sei $K$ ein reell-abgeschlossener Körper, $\Gamma$ die Gruppe der archimedischen Klassen und $A$ ein maximaler archimedisch angeordneter Unterkörper von $K$. Dann läßt sich $K$ $o$-einbetten in den Körper $H(\Gamma, A)$ der formalen Potenzreihen auf $\Gamma$ über $A$.

Für den Beweis werden außer elementaren Kenntnissen über angeordnete Gruppen und Körper die Artin-Schreiersche Theorie der formal-reellen Körper und der Hahnsche Einbettungssatz angeordneter abelscher Gruppen in der Darstellung von Banaschewski [2] vorausgesetzt. Bewertungstheorie wird im Beweis nicht gebraucht. An einer Stelle (S. 611) beziehen wir uns aber auf einen Satz von MacLane, den MacLane in [7] mit Ergebnissen der Bewertungstheorie bewiesen hat. Man kann diesen Satz von MacLane aber auch ohne Bewertungstheorie beweisen.

Es sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe. Für $a \in G$ sei $|a| = \operatorname{Max}\{a, -a\}$. Durch

$$a \text{ äquivalent } b \Leftrightarrow \bigvee_{n,m \in \mathbf{N}} (n \cdot |a| \geqq |b| \text{ und } m \cdot |b| \geqq |a|)$$

ist eine Einteilung von $G$ in *archimedische Klassen* gegeben. Die archimedische Klasse eines Elementes $a \in G$ bezeichnen wir mit $[a]$. Über der Menge $[G]$ der archimedischen Klassen von $G$ ist durch

$$[a] < [b] \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} n \cdot |a| < |b|$$

eine Anordnung definiert. Es gelten die Beziehungen (s. z.B. [5]):

$$[a+b] \leqq \operatorname{Max}\{[a], [b]\} \quad \text{und}$$
$$[a+b] = \operatorname{Max}\{[a], [b]\}, \quad \text{falls} \quad [a] \neq [b].$$

Ist $(G, +)$ die additive Gruppe eines angeordneten Körpers, so ist $\Gamma = [G] \setminus \{[0]\}$

mit der durch $[a][b] = [ab]$ definierten Multiplikation eine angeordnete abelsche Gruppe.

Sei nun $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ eine Menge abelscher Gruppen. $f: \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ sei eine Abbildung mit $f(\gamma) \in G_\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Die Menge $s(f) = \{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ heißt der *Träger* von $f$. Hat $f$ in der Anordnung von $\Gamma$ einen antiwohlgeordneten[1]) Träger, so nennen wir $f$ eine *formale Summe* und bezeichnen diese mit $\sum_{\gamma \in s(f)} f(\gamma)$ oder $\sum_{\gamma \in s(f)} f(\gamma)\,\gamma$. Die Menge der formalen Summen: $\Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ bildet mit der komponentenweise erklärten Addition eine abelsche Gruppe, die *Hahnsche Summe* $\mathsf{H}_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Sind die Gruppen $G_\gamma, \gamma \in \Gamma$, ferner angeordnete Gruppen, so sei $f \in \mathsf{H}_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ positiv ($> 0$), falls $0 < f(\alpha)$ für $\alpha = \operatorname{Max} s(f)$ gilt. Mit dieser Anordnung ist $\mathsf{H}_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ eine angeordnete Gruppe.

Es sei $A$ ein Körper und $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma = A$. Eine formale Summe $f: \Gamma \to A$ heißt eine *formale Potenzreihe* auf $\Gamma$ über $A$. Mit der wie für formale Summen erklärten Addition und dem durch $(fg)(\gamma) = \sum_{\alpha\beta = \gamma} f(\alpha)\, g(\beta)$ definierten Produkt $fg = \sum_{\gamma \in s(f)s(g)} (fg)(\gamma)\,\gamma$ bildet die Menge der formalen Potenzreihen auf $\Gamma$ über $A$ einen Körper $H(\Gamma, A)$ (s. z.B. [5]). Ist $A$ angeordnet, so ist $H(\Gamma, A)$ mit der wie für formale Summen definierten Anordnung ein angeordneter Körper.

Den Begriff „*angeordnete Unterstruktur*" gebrauchen wir im folgenden stets in dem Sinn, daß die Unterstruktur als Anordnung die durch die Anordnung der Oberstruktur induzierte trägt.

Für alle nicht explizit formulierten Begriffe über angeordnete Strukturen sei auf [5] verwiesen.

Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze, von denen der erste eine Verallgemeinerung des Hölderschen Satzes (s. z.B. [5]) ist:

**Hilfssatz 1.** *Es sei $S$ ein angeordneter, kommutativer Ring, der einen zum Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen isomorphen Unterkörper enthält. Die archimedische Klasse des Einselementes $e$ von $S$ sei die größte archimedische Klasse von $S$. Durch*

$$U_s = \{q \in \mathbf{Q} : qe < s\}, \qquad O_s = \{q \in \mathbf{Q} : qe \geqq s\}$$

*ist für jedes $s \in S$ ein dedekindscher Schnitt in $\mathbf{Q}$, also ein Element $s^\sigma \in \mathbf{R}$, definiert. Die Abbildung $s \mapsto s^\sigma$ ist ein o-Homomorphismus des Ringes $S$ in $\mathbf{R}$.*

Beweis. Da $[e]$ die größte archimedische Klasse von $S$ ist, sind für jedes $s \in S$ die Mengen $U_s$ und $O_s$ nicht leer. $\mathbf{Q}e$ ist eine Teilmenge von $S$, und $S$ ist angeordnet, daher gilt:

$$\bigwedge_{s \in S} U_s \cup O_s = \mathbf{Q}, \qquad U_s \cap O_s = \emptyset.$$

Die Teilmengen $U_s$, $O_s$ definieren also für jedes $s \in S$ einen dedekindschen Schnitt in $\mathbf{Q}$. Ein Element der Form $qe$ mit $q \in \mathbf{Q}$ wird durch $\sigma$ auf $q$ abgebildet.

[1]) = dualer Begriff zu wohlgeordnet.

Wie beim Beweis des Satzes von Hölder (s. z.B. [5]) zeigt man, daß $\sigma$ ein $o$-Homomorphismus bezüglich der Addition ist.

Daß $\sigma$ auch ein Homomorphismus bezüglich der Multiplikation ist, weisen wir nun explizit nach:

Es seien $x$, $y$ Elemente aus $S$ mit $0 < x \leqq y$. Für $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ folgt aus $0 < x \leqq q_1 e$ und $0 < y \leqq q_2 e$ stets $0 < x y \leqq q_1 q_2 e$; d.h. aus $q_1 \in O_x$, $q_2 \in O_y$ erhält man $q_1 q_2 \in O_{xy}$; also gilt $(xy)^\sigma \leqq x^\sigma y^\sigma$.

Angenommen, $(xy)^\sigma < x^\sigma y^\sigma$. Dann existiert ein $r \in \mathbf{Q}$ mit $(xy)^\sigma < r < x^\sigma y^\sigma$. Da die Multiplikation von $\mathbf{R}$ eine stetige Abbildung von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ ist, gibt es eine Umgebung $U$ von $x^\sigma$ und eine Umgebung $V$ von $y^\sigma$, so daß $r < uv$ für alle $u \in U$, $v \in V$ gilt. Wegen $xy > 0$ ist $(xy)^\sigma \geqq 0$ und damit $0 < x^\sigma y^\sigma$, folglich $0 < x^\sigma$ und $0 < y^\sigma$. Daher existieren rationale Zahlen $u' \in U$, $v' \in V$ mit $0 < u' < x^\sigma$ und $0 < v' < y^\sigma$. Hieraus folgt $0 < u'e < x$ und $0 < v'e < y$, somit $0 < u'v'e < xy$ und daher $u'v' \leqq (xy)^\sigma$ im Widerspruch zu $(xy)^\sigma < r < u'v'$. Also gilt $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ für $0 < x \leqq y$.

Aus $0 = x \leqq y$ erhält man $xy = 0$ und $x^\sigma = 0$, folglich $0 = x^\sigma y^\sigma = (xy)^\sigma$. Im Fall $x < 0 < y$ gilt nach dem bisher Bewiesenen $((-x)y)^\sigma = (-x)^\sigma y^\sigma$, woraus wegen der Homomorphieeigenschaft von $\sigma$ bezüglich der Addition $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ folgt. Entsprechend läßt sich der Fall $x \leqq y \leqq 0$ auf die bisher behandelten zurückführen. Damit ist gezeigt, daß $\sigma$ auch ein Homomorphismus bezüglich der Multiplikation ist.

**Hilfssatz 2.** *Es sei $A$ ein reell-abgeschlossener, archimedisch angeordneter Unterkörper des angeordneten Körpers $L$. Das Element $s \in L$ sei transzendent über $A$ und liege in derselben archimedischen Klasse wie $e$. Dann ist $[e]$ die größte archimedische Klasse des Polynomringes $A[s]$. Gilt für die wie im Hilfssatz 1 definierte Abbildung $\sigma: A[s] \to \mathbf{R}$ weiter $a^\sigma \neq s^\sigma$ für alle $a \in A$, so ist $A[s]$ archimedisch angeordnet.*

Beweis. Sei $0 \neq f(s) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i \in A[s]$ mit $a_i \in A$, $i = 0, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$. Wegen $[s] = [e]$ und $[a_i s^i] = [a_i][s^i]$ ist

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right] \leqq \operatorname{Max}\{[a_i s^i]\colon\ i = 0, \ldots, n\} = [e];$$

also ist $[e]$ die größte archimedische Klasse von $A[s]$. Nach Hilfssatz 1 ist $\sigma$ ein $o$-Homomorphismus. Die Einschränkung $\sigma|_A$ von $\sigma$ auf $A$ ist ein $o$-Isomorphismus, weil $A$ archimedisch angeordnet ist (s. z.B. [5], S. 185). Angenommen, es gälte $[f(s)] < [e]$. Dann ist $f(s) \in \operatorname{Kern} \sigma$ und daher

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^\sigma (s^\sigma)^i = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \neq a_n^\sigma.$$

Also ist $s^\sigma$ algebraisch über $A^\sigma$. Mit $A$ ist auch $A^\sigma$ reell-abgeschlossen. Folglich ist $s^\sigma$ ein Element aus $A^\sigma$, d.h. aber, es gibt ein $a \in A$ mit $a^\sigma = s^\sigma$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $[f(s)] = [e]$ für jedes $0 \neq f(s) \in A[s]$.

Wir beweisen jetzt das als Ziel dieser Arbeit genannte Theorem:

**Satz.** *Es sei $K$ ein reell-abgeschlossener Körper, $\Gamma$ die Gruppe der archimedischen Klassen und $A$ ein maximaler archimedisch angeordneter Unterkörper von $K$. Dann ist $K$ einem Unterkörper von $H(\Gamma, A)$ o-isomorph.*

Beweis. Die Menge aller archimedisch angeordneten Unterkörper von $K$ ist bezüglich der Inklusion als teilweiser Ordnung induktiv und enthält daher nach dem Zornschen Lemma einen maximalen archimedisch angeordneten Unterkörper $A$. Dieser ist reell-abgeschlossen; denn für ein über $A$ algebraisches Element $b \in K$ ist $A(b)$ archimedisch angeordnet (s. z.B. [5], S. 186), und wegen der Maximalität von $A$ gilt daher $b \in A$.

Um die $o$-Einbettbarkeit von $K$ bezüglich der Addition in $H(\Gamma, A)$ zu beweisen, beziehen wir uns auf einen Beweis des Hahnschen Satzes von Banaschewski [2]: $A$ ist ein Unterkörper von $K$, also ist $K$ ein Vektorraum über $A$. Weiter ist jede konvexe Untergruppe $U$ der additiven Gruppe $(K, +)$ von $K$ ein Vektorraum über $A$; denn aus $0 < u \in U$ und $0 < a \in A$ folgt $0 < au < (ne)u = nu \in U$ für ein $n \in \mathbf{N}$ mit $a < ne$, und daher gilt $au \in U$. Es sei $\mathfrak{U}$ die Menge der konvexen Untergruppen von $(K, +)$. Nach dem Lemma 4 aus [2] existieren Funktionen $\tau$ von $\mathfrak{U}$ in die Menge der $A$-Unterräume von $K$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} U \oplus \tau U = K \quad \text{und} \quad \bigwedge_{U, U' \in \mathfrak{U}} (U \subsetneqq U' \Rightarrow \tau U \supsetneqq \tau U').$$

Unter einem Vektorraum ist im folgenden stets ein Vektorraum über $A$ zu verstehen. Für $\gamma \in \Gamma$ sei $U_\gamma = \{u \in K\colon [u] < \gamma\}$ und $U^\gamma = \{u \in K\colon [u] \leqq \gamma\}$. Die konvexen Mengen $U_\gamma$ und $U^\gamma$ sind Untergruppen von $(K, +)$, und $U_\gamma$ ist ein Unterraum von $U^\gamma$. Daher läßt sich $U^\gamma$ als $U^\gamma = K^\gamma \oplus U_\gamma$ mit einem zu $U_\gamma$ in $U^\gamma$ komplementären Unterraum $K^\gamma$ darstellen. Wir zeigen, daß man für jedes $\gamma \in \Gamma$ als $K^\gamma$ einen Unterraum von der Form $Ae_\gamma$ mit $0 < e_\gamma$, $[e_\gamma] = \gamma$ wählen kann, wobei für das neutrale Element $\varepsilon \in \Gamma$ außerdem $e_\varepsilon = e$ gilt: Das Einselement $e$ von $K$ liegt in $U^\varepsilon$ und nicht in $U_\varepsilon$, daher kann $e \in K^\varepsilon$ vorausgesetzt werden. Da $K^\varepsilon$ ein Vektorraum über $A$ ist, gilt $A \subseteqq K^\varepsilon$. Angenommen, $A \neq K^\varepsilon$. Dann existiert ein Element $s \in K^\varepsilon \backslash A$. Da $A$ reell-abgeschlossen ist, kann $s$ nicht algebraisch über $A$ sein; folglich ist $s$ transzendent über $A$. Sei $\sigma$ der im Hilfssatz 1 definierte $o$-Homomorphismus: $A[s] \to \mathbf{R}$. Aus der Existenz eines Elementes $a \in A$ mit $a^\sigma = s^\sigma$ folgt $a - s \in \operatorname{Kern} \sigma \subseteqq U_\varepsilon$; wegen $a, s \in K^\varepsilon$ gilt damit $a - s \in K^\varepsilon \cap U_\varepsilon = \{0\}$, also $a = s$, was wegen $s \in K^\varepsilon \backslash A$ nicht möglich ist. $A$ und $s$ erfüllen damit alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2; daher ist der Polynomring $A[s]$ und folglich auch $A(s)$ archimedisch angeordnet im Widerspruch dazu, daß $A$ ein maximaler archimedisch angeordneter Unterkörper von $K$ ist. Es gilt also: $A = K^\varepsilon$. Da aus $U^\varepsilon = K^\varepsilon \oplus U_\varepsilon$, $x \in K$, $[x] = \gamma$ wegen $xU^\varepsilon = U^\gamma$ und $xU_\varepsilon = U_\gamma$ die Zerlegung $U^\gamma = xK^\varepsilon \oplus U_\gamma$ folgt, kann für jedes $\gamma \in \Gamma$ als $K^\gamma$ ein Unterraum der Form $Ae_\gamma$ mit $0 < e_\gamma$, $[e_\gamma] = \gamma$ und $e_\varepsilon = e$ gewählt werden. Nach dem Hahnschen Satz (s. [2]) ist $K$ bezüglich der Addition $o$-isomorph einer Untergruppe der Hahnschen Summe $\mathsf{H}_{\gamma \in \Gamma} Ae_\gamma$. Ein Element $c \in K$ wird bei diesem Isomorphismus auf die formale Summe

$$\bar{c} = \sum_{\gamma \in s(\bar{c})} \bar{c}(\gamma) \quad \text{mit} \quad \bar{c}(\gamma) = c(\gamma)\, e_\gamma, \quad c(\gamma) \in A,$$

abgebildet. Die Abbildung

$$c \mapsto \bar{c} = \sum_{\gamma \in s(\bar{c})} c(\gamma)\, e_\gamma \mapsto \sum_{\gamma \in s(\bar{c})} c(\gamma)\, \gamma$$

ist also ein injektiver $o$-Homomorphismus bezüglich der Addition von $K$ in $H(\Gamma, A)$.

Wir werden zeigen, daß man durch geeignete Wahl der Elemente $e_\gamma$ erreichen kann, daß dieser Homomorphismus auch ein Homomorphismus bezüglich der Multiplikation ist.

Da $K$ reell-abgeschlossen ist, hat jedes Polynom ungeraden Grades eine Lösung in $K$, und $K^+ = \{k \in K\colon k > 0\}$ ist quadratisch abgeschlossen; folglich ist $(K^+, \cdot)$ eine teilbare, torsionsfreie, abelsche Gruppe, und damit ist auch $(\Gamma, \cdot)$ eine teilbare, torsionsfreie, abelsche Gruppe. Es gibt also eine Basis $B \subseteqq \Gamma$, so daß sich jedes Element $\gamma \in \Gamma$ als Produkt von Basiselementen mit rationalen Exponenten darstellen läßt:

$$\gamma = \beta_{i_1}^{r_1} \cdots \beta_{i_n}^{r_n}, \qquad r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}.$$

Mit Hilfe dieser Basisdarstellung definieren wir nun einen Isomorphismus $\sigma$ von $(\Gamma, \cdot)$ in $(K^+, \cdot)$ mit der Eigenschaft $[\gamma^\sigma] = \gamma$, indem wir für jedes Basislement $\beta \in B$ als $\beta^\sigma$ ein Element aus $K^+$ wählen, das in der archimedischen Klasse $\beta$ liegt.

Von den Elementen $e_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, hatten wir bisher nur $0 < e_\gamma$, $[e_\gamma] = \gamma$ und $e_\varepsilon = e$ verlangt; wir können für jedes $\gamma \in \Gamma$ also $\gamma^\sigma$ als $e_\gamma$ nehmen und haben damit erreicht, daß $T = \{e_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$ mit der Multiplikation von $(K, +, \cdot)$ ein abgeschlossenes System bildet.

Man kann $A$ als Unterkörper und $\Gamma$ als Teilmenge von $H(\Gamma, A)$ betrachten. $A(T)$ sei der aus $A$ und $T$ erzeugte Unterkörper von $K$ und $A(\Gamma)$ der aus $A$ und $\Gamma$ in $H(\Gamma, A)$ erzeugte Unterkörper. $A[T]$ bzw. $A[\Gamma]$ seien die zugehörigen Polynomringe. Wegen der Isomorphie von $(T, \cdot)$ und $(\Gamma, \cdot)$ ist die Abbildung

$$c \mapsto \sum_{\gamma \in s(\bar{c})} c(\gamma)\, e_\gamma \mapsto \sum_{\gamma \in s(\bar{c})} c(\gamma)\, \gamma$$

nun auch ein Homomorphismus bezüglich der Multiplikation von $A[T]$ auf $A[\Gamma]$, also ein $o$-Isomorphismus von $A[T]$ auf $A[\Gamma]$ und damit auch von $A(T)$ auf $A(\Gamma)$. Sei $F = A(T)$ und

$$\varphi = \Big(c \mapsto \sum_{\gamma \in s(\bar{c})} c(\gamma)\, \gamma\Big)\colon F \to A(\Gamma).$$

Wir zeigen jetzt im letzten Teil des Beweises, daß man $\varphi$ zu einem $o$-Isomorphismus: $K \to H(\Gamma, A)$ fortsetzen kann: Es bezeichne $\mathfrak{L}$ die Menge aller Tupel $(L, \varphi_L)$, wobei $L$ ein Zwischenkörper von $F$ und $K$ und $\varphi_L$ ein $o$-Isomorphismus: $L \to H(\Gamma, A)$ mit $\varphi_L|_F = \varphi$ sei. Über $\mathfrak{L}$ ist durch

$$(L_1, \varphi_{L_1}) \leqq (L_2, \varphi_{L_2})\colon \Leftrightarrow L_1 \subseteqq L_2 \text{ und } \varphi_{L_2}|_{L_1} = \varphi_{L_1}$$

eine teilweise Ordnung definiert, die induktiv ist. Daher gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element $(B, \psi) \in \mathfrak{L}$. Da $K$ reell-abgeschlossen ist, liegt der reelle Abschluß $\hat{B}$ von $B$ in $K$. Die Gruppe $\Gamma$ ist teilbar, und $A$ ist reell-abgeschlossen; daher ist nach [7] $H(\Gamma, A)$ reell-abgeschlossen; also ist der reelle

Abschluß $\hat{B^\psi}$ von $B^\psi$ ein Unterkörper von $H(\Gamma, A)$. Nach Artin und Schreier (s. z.B. [6], S. 285, Theorem 8) gibt es einen $o$-Isomorphismus $\chi\colon \hat{B} \to \hat{B^\psi}$, der eine Fortsetzung von $\psi$ ist. $(B, \chi)$ ist also ein Element aus $\mathfrak{L}$, und wegen $(\hat{B}, \chi) \geqq (B, \psi)$ und der Maximalität von $(B, \psi)$ in $\mathfrak{L}$ gilt $B = \hat{B}$; folglich ist $B$ und damit auch $B^\psi$ reell-abgeschlossen.

Angenommen, $B \neq K$. Dann gibt es ein Element $x \in K \setminus B$. Da $B$ reell-abgeschlossen ist, kann $x$ nicht algebraisch über $B$ sein; also ist $x$ transzendent über $B$. Um $\psi$ auf $B(x)$ $o$-isomorph fortsetzen zu können, brauchen wir als Bild von $x$ ein über $B^\psi$ transzendentes Element $x' \in H(\Gamma, A)$, das sich der Anordnung nach genau so zu den Elementen von $B^\psi$ verhält wie $x$ zu $B$. Wir werden $x'$ durch eine Folge von Elementen aus $B^\psi$ definieren und beweisen dafür die Eigenschaften (1), (2) und (3):

(1) $\bigwedge\limits_{b \in B} \bigvee\limits_{b_1 \in B} b_1 < x$ und $[x - b_1] < [x - b]$.

Es sei $[x - b] = \alpha$ und $b_0 = b + (x(\alpha) - b(\alpha))\, e_\alpha$; also ist $b_0 \in B$ und

$$\sigma = [x - b_0] < \alpha .$$

Im Falle $b_0 < x$ setze man $b_1 = b_0$; im Falle $b_0 > x$ ist $x(\sigma) - b_0(\sigma) < 0$, damit gilt für das Element $b_1 = b_0 + 2(x(\sigma) - b_0(\sigma))\, e_\sigma$ einmal $b_1 \in B$ und wegen

$$[x - b_1] \leqq [x - b_0] = \sigma < \alpha$$

und $x(\sigma) - b_1(\sigma) = -(x(\sigma) - b_0(\sigma)) > 0$ weiter $b_1 < x$.

(2) Sei $\Lambda = \{[x - b] : b \in B\}$ und $\sigma, \tau \in \Lambda$. Für Elemente $b_\sigma, b_\tau \in B$ mit $[x - b_\sigma] = \sigma$, $b_\sigma < x$ und $[x - b_\tau] = \tau$, $b_\tau < x$ gilt: Aus $\tau < \sigma$ folgt $[b_\tau - b_\sigma] = \sigma$ und $b_\sigma < b_\tau$.

Wegen $[x - b_\sigma] > [x - b_\tau]$ ist

$$[b_\tau - b_\sigma] = [x - b_\sigma - (x - b_\tau)] = \mathrm{Max}\,\{[x - b_\sigma], [x - b_\tau]\} = \sigma .$$

Aus $\tau < \sigma$ und $[x - b_\tau] = \tau$ erhält man $x(\sigma) = b_\tau(\sigma)$. Wegen $x > b_\sigma$ und $[x - b_\sigma] = \sigma$ ist $x(\sigma) > b_\sigma(\sigma)$, also gilt $b_\tau(\sigma) > b_\sigma(\sigma)$ und daher $b_\tau > b_\sigma$.

Die Menge $\Sigma$ sei antiwohlgeordnet und koinitial mit $\Lambda$. Zu jedem $\sigma \in \Sigma$ sei ein Element $b_\sigma \in B$ mit $b_\sigma < x$ und $[x - b_\sigma] = \sigma$ bestimmt. $B_\Sigma$ sei die Menge dieser Elemente $b_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$, und $B'_\Sigma$ sei die Bildmenge von $B_\Sigma$ unter $\psi$. Um zu viele Indices zu vermeiden, schreiben wir statt $b_\sigma^\psi$ auch $b'_\sigma$. Wir definieren eine Abbildung $(\gamma \mapsto x'(\gamma))\colon \Gamma \to A$: Falls es ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma < \gamma$ gibt, sei $x'(\gamma) = b'_\sigma(\gamma)$, andernfalls sei $x'(\gamma) = 0$. Diese Definition ist möglich; denn aus $\tau < \sigma < \gamma$, $\tau, \sigma \in \Sigma$, folgt nach (2) $[b_\tau - b_\sigma] = \sigma$; also ist $[b'_\tau - b'_\sigma] = \sigma$ und daher $b'_\sigma(\gamma) = b'_\tau(\gamma)$.

(3) Die Abbildung $(\gamma \mapsto x'(\gamma))\colon \Gamma \to A$ hat einen antiwohlgeordneten Träger

$$s(x') = \{\gamma \in \Gamma : x'(\gamma) \neq 0\} .$$

Es sei $\Delta \subseteqq s(x')$ und $\Delta \neq \emptyset$; also gibt es ein $\gamma \in \Delta$ mit $x'(\gamma) \neq 0$. O.B.d.A. sei $\gamma \neq \mathrm{Max}\,\Delta$; dann ist $\Delta_0 = \{\delta \in \Delta : \delta > \gamma\} \neq \emptyset$. Wegen $x'(\gamma) \neq 0$ existiert ein $b'_\sigma \in B'_\Sigma$ mit $\sigma < \gamma$ und $x'(\gamma) = b'_\sigma(\gamma)$. Für alle $\delta > \sigma$ ist $b'_\sigma(\delta) = x'(\delta)$ und daher $\Delta_0 \subseteqq s(b'_\sigma)$. Das Element $b'_\sigma$ hat einen antiwohlgeordneten Träger, folglich existiert $\mathrm{Max}\,\Delta_0$.

Da $s(x')$ antiwohlgeordnet ist, ist $x' = \sum_{\gamma \in s(x')} x'(\gamma)\,\gamma$ ein Element aus $H(\Gamma, A)$.

Wir zeigen nun, daß $x'$ transzendent über $B^{\psi}$ ist: Angenommen, $x'$ ist nicht transzendent, sondern algebraisch über $B^{\psi}$. Dann liegt $x'$ in $B^{\psi}$, da $B^{\psi}$ reell-abgeschlossen ist. Also hat $x'$ bei der Abbildung $\psi$ ein Urbild $y \in B$. Sei $[x - y] = \lambda$. Nach (1) und Wahl der Mengen $\Sigma$ und $B_\Sigma$ gibt es zu $y$ ein Element $b_\sigma \in B_\Sigma$ mit $\sigma = [x - b_\sigma] < [x - y]$. Wegen $[x - b_\sigma] < [x - y]$ ist

$$[y - b_\sigma] = [x - b_\sigma - (x - y)] = \operatorname{Max}\{[x - b_\sigma], [x - y]\} = \lambda .$$

Also gilt $[x' - b'_\sigma] = \lambda$ und daher $x'(\lambda) \neq b'_\sigma(\lambda)$. Wegen $\sigma < \lambda$ und $b'_\sigma \in B'_\Sigma$ erhält man im Widerspruch hierzu nach der Definition von $x'$ aber $x'(\lambda) = b'_\sigma(\lambda)$. Also ist $x'$ transzendent über $B^{\psi}$. Die Körper $B(x)$ und $B^{\psi}(x')$ sind einfache transzendente Erweiterungen über $B$ bzw. $B^{\psi}$. Folglich läßt sich der $o$-Isomorphismus $\psi\colon B \to B^{\psi}$ zu einem Isomorphismus $\Psi\colon B(x) \to B^{\psi}(x')$ mit $x^{\Psi} = x'$ fortsetzen.

Um die Annahme $B \subset K$ zum Widerspruch zu führen, haben wir nur noch zu zeigen, daß $\Psi$ ordnungstreu ist. Wir leiten dafür zunächst die beiden folgenden Beziehungen (4) und (5) her:

$$\bigwedge_{b'_\sigma \in B'_\Sigma} [x' - b'_\sigma] = \sigma \quad \text{und} \quad b'_\sigma < x' . \tag{4}$$

Für $\gamma > \sigma$ ist $x'(\gamma) = b'_\sigma(\gamma)$, also ist $[x' - b'_\sigma] \leqq \sigma$. Da $\Sigma$ kein kleinstes Element enthält, existiert ein $b'_\tau \in B'_\Sigma$ mit $\tau < \sigma$. Daher ist $x'(\sigma) = b'_\tau(\sigma)$. Nach (2) gilt $[b_\sigma - b_\tau] = \sigma$ und $b_\sigma < b_\tau$; hieraus folgt $[b'_\sigma - b'_\tau] = \sigma$ und $b'_\sigma < b'_\tau$ und damit $b'_\sigma(\sigma) < b'_\tau(\sigma)$. Also ist $b'_\sigma(\sigma) < x'(\sigma)$, folglich $[x' - b'_\sigma] = \sigma$ und $b'_\sigma < x'$.

$$\bigwedge_{b \in B} [x - b] = [x' - b^{\psi}] . \tag{5}$$

Sei $[x - b] = \beta$. Nach (1) und aufgrund der Definition von $B_\Sigma$ gibt es ein $b_\sigma \in B_\Sigma$ mit $[x - b_\sigma] = \sigma < \beta$. Wegen $[x - b_\sigma] < [x - b]$ ist

$$[b - b_\sigma] = [x - b_\sigma - (x - b)] = \operatorname{Max}\{[x - b_\sigma], [x - b]\} = \beta;$$

folglich ist $[b^{\psi} - b'_\sigma] = \beta$. Nach (4) erhält man $[x' - b'_\sigma] = \sigma$. Also ist

$$[x' - b'_\sigma] < [b^{\psi} - b'_\sigma] = \beta$$

und daher

$$[x' - b^{\psi}] = [x' - b'_\sigma - (b^{\psi} - b'_\sigma)] = \operatorname{Max}\{[x' - b'_\sigma], [b^{\psi} - b'_\sigma]\} = \beta .$$

Mit (4) und (5) beweisen wir nun, daß ein positives Polynom $f(x) \in B[x]$, $(0 < f(x))$, durch $\psi$ auf ein positives Polynom $f'(x') \in B^{\psi}[x']$ abgebildet wird:

$f$ habe in $K$ die Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$. Da $B$ reell-abgeschlossen ist, liegen die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ in $B$. Sei $\lambda_0 = \operatorname{Min}\{[x - x_i]\colon i = 1, \ldots, n\}$. Wegen (1) und Definition der Menge $B_\Sigma$ ist $B_{\Sigma_0} = \{b_\sigma \in B_\Sigma\colon \sigma < \lambda_0\} \neq \emptyset$. Wir zeigen, daß $f(x)$ und $f(b_\sigma)$ für jedes $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$ gleiches Vorzeichen haben: Aus der Existenz eines $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$ mit $\operatorname{sgn} f(b_\sigma) \neq \operatorname{sgn} f(x)$ würde, da $K$ reell-abgeschlossen ist, nach dem Weierstraßschen Nullstellensatz (s. z.B. [10], S. 257, Satz 5) die Existenz einer Nullstelle von $f$ in $K$ zwischen $b_\sigma$ und $x$ folgen. In $K$ kann es aber keine Nullstelle $x_i$ von $f$ zwischen $x$ und einem Element $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$ geben; denn aus $b_\sigma < x_i < x$, $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$, erhält man

$0 < x - x_i < x - b_\sigma$, $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$, und hieraus $[x - x_i] \leqq [x - b_\sigma] < \lambda_0$ im Widerspruch zu $\lambda_0 \leqq [x - x_i]$. Also gilt $f(b_\sigma) > 0$ für alle $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$ und daher auch $f'(b'_\sigma) > 0$ für alle $b'_\sigma \in B'_{\Sigma_0} = \{b'_\sigma \in B'_\Sigma \colon \sigma < \lambda_0\}$.

Nach (4) gilt $b'_\sigma < x'$ für jedes $b'_\sigma \in B'_\Sigma$. Wäre also $f'(x') < 0$, so gäbe es nach dem Weierstraßschen Nullstellensatz eine Nullstelle $t'$ von $f'$ in $H(\Gamma, A)$ mit $b'_\sigma < t' < x'$ für alle $b'_\sigma \in B'_{\Sigma_0}$. Da $B^\psi$ reell-abgeschlossen und $t'$ algebraisch über $B^\psi$ ist, muß $t'$ in $B^\psi$ liegen. Das Urbild $t$ von $t'$ unter $\psi$ ist also eine Nullstelle von $f$ und ein Element aus $B$. Aus $b'_\sigma < t' < x'$ folgt $0 < x' - t' < x' - b'_\sigma$ und daher $[x' - t'] \leqq [x' - b'_\sigma]$. Nach (5) gilt damit $[x - t] \leqq [x - b_\sigma]$ für alle $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$, was wegen $\lambda_0 \leqq [x - t]$ und $[x - b_\sigma] < \lambda_0$ für jedes $b_\sigma \in B_{\Sigma_0}$ nicht möglich ist. Also ist $f'(x') > 0$. Folglich ist $\Psi$ ein $o$-Isomorphismus von $B(x)$ auf $B^\psi(x')$ mit $\Psi|_B = \psi$. Das widerspricht aber der Maximalität von $(B, \psi)$ in $\mathfrak{L}$. Daher gilt $K = B$, und damit ist $\psi$ ein $o$-Isomorphismus von $K$ in $H(\Gamma, A)$.

### Literaturverzeichnis

[1] N. L. ALLING, On exponentially closed fields. Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 706—711 (1962).
[2] B. BANASCHEWSKI, Totalgeordnete Moduln. Arch. Math. **7**, 430—440 (1956).
[3] P. CONRAD, On ordered division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 323—328 (1954).
[4] P. CONRAD and J. DAUNS, An embedding theorem for lattice-ordered fields. Pacific J. Math. **30**, 385—397 (1969).
[5] L. FUCHS, Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Göttingen 1966.
[6] N. JACOBSON, Lectures in abstract algebra III: Theory of fields and galois theory. Princeton 1964.
[7] S. MACLANE, The universality of formal power series fields. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 888—890 (1939).
[8] B. H. NEUMANN, On ordered division rings. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 202—252 (1949).
[9] O. SCHILLING, The theory of valuations. New York 1950.
[10] B. L. VAN DER WAERDEN, Algebra I. Berlin, Heidelberg, New York 1966.

Eingegangen am 8. 3. 1971 *)

Anschrift des Autors:
Sibylla Prieß-Crampe
Mathematisches Institut
der Universität
8 München

*) Eine revidierte Fassung ging am 17. 5. 1973 ein.