Anhang: Eine kurze Einführung in formale Potenzreihen

A1. Der Ring der formalen Potenzreihen

Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche reelle Folge. Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

heißt *(reelle) formale Potenzreihe* in der Unbestimmten x. (Es gibt auch formale Potenzreihen über anderen Körpern sowie formale Potenzreihen in mehr als einer Unbestimmten, aber diese werden wir hier nicht betrachten.) Falls $a_n = 0$ gilt, können wir beim Angeben der Reihe den Term $a_n x^n$ weglassen. Der Term a_0 heißt der *konstante Term*.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ die Menge aller (reellen) formalen Potenzreihen in x und mit $\mathcal{P}_r$ die Teilmenge von $\mathcal{P}$, die aus den Reihen mit konstantem Term r besteht; die nützlichsten dieser Teilmengen sind $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_1$. Falls

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

zwei Elemente von $\mathcal{P}$ sind, so definieren wir

$$-f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n \ ,$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \ ,$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) x^n \ .$$

Mit diesen Verknüpfungen wird $\mathcal{P}$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement; das Nullelement ist $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots$ und das Einselement ist $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$. Man kann leicht überprüfen, dass $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$, falls $f(x)g(x) = 0$; also ist $\mathcal{P}$ sogar ein Integritätsring.

Zu beachten ist, dass x eine Unbestimmte ist und keine Variable, die für eine Zahl steht. Somit sind Konvergenzfragen *vollkommen irrelevant* für die Theorie der formalen Potenzreihen. Aus der Definition ist sofort ersichtlich, dass es eine eineindeutige Beziehung zwischen unendlichen Folgen und formalen Potenzreihen gibt, und dass für alle praktischen Zwecke eine formale Potenzreihe einfach als Folge angesehen wird. Wir schreiben sie als eine Potenzreihe, um unser Vorgehen, wie die Definition der Multiplikation, natürlicher erscheinen zu lassen, aber an sich könnten wir sie genauso gut als Folge schreiben. Zur Verdeutlichung: Die beiden Ausdrücke

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 x^n$$

stellen beide gültige und verschiedene formale Potenzreihen dar, obwohl, wenn man x als reelle Variable ansieht, beide Reihen für alle von 0 verschiedenen Werte von x divergieren würden und für $x = 0$ beide Reihen den Wert 1 hätten.

A2. Unendliche Summen und Produkte

Mit der üblichen induktiven Vorgehensweise lassen sich die Definitionen der Addition und der Multiplikation von formalen Potenzreihen auf natürliche Weise auf die Summe bzw. das Produkt von *endlichen* Familien von Reihen erweitern. Wir erlauben genau dann eine *unendliche* Summe formaler Potenzreihen, wenn sie sich in jedem Koeffizienten zu einer endlichen Summe reduziert. Damit ist, falls

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} x^n \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) \ ,$$

die Summe

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \tag{1}$$

genau dann definiert, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Koeffizient $a_{i,n}$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}$ ungleich 0 ist, d.h., wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein $N(n) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_{i,n} = 0$, falls $i > N(n)$. In diesem Fall ist der Koeffizient von x^n in

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x) \tag{2}$$

für alle $k \geq N(n)$ derselbe, und damit können wir (1) als die formale Potenzreihe definieren, bei der, für alle n, x^n denselben Koeffizienten wie in (2) hat, wenn k groß genug ist. Es ist klar, dass damit die unendliche Summe (1) unabhängig von der Anordnung der Summanden ist.

Zwei Spezialfälle sind erwähnenswert. Erstens, falls $f(x) \in \mathcal{P}_0$ und $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$, dann ist die Summe $a_0 + a_1 f(x) + a_2 f(x)^2 + \ldots$ definiert, da der Koeffizient von x^n in $f(x)^i$ gleich 0 ist, falls $i > n$. (Dies folgt aus der Voraussetzung, dass der konstante Term von $f(x)$ gleich 0 ist.) Zweitens, falls (1) definiert ist und $g(x)$ ergibt und $h(x)$ eine weitere formale Potenzreihe ist, dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(x) f_i(x)$$

definiert und ergibt $h(x)g(x)$.

Ein unendliches Produkt formaler Potenzreihen ist gleichermaßen genau dann definiert, wenn jeder Koeffizient in den partiellen Produkten 'ab irgendeinem Punkt' unverändert bleibt. Für uns ist hier nur ein Fall von Interesse: Falls $f_i(x) \in \mathcal{P}_0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und (1) definiert ist, so ist der Koeffizient von x^n in

$$\prod_{i=1}^{k} (1 + f_i(x)) \tag{3}$$

für jedes $k \geq N(n)$ gleich. Somit können wir das unendliche Produkt

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + f_i(x))$$

als die formale Potenzreihe definieren, in der für jedes n x^n denselben Koeffizienten wie in (3) hat, wenn k groß genug ist.

A3. Inverse

Satz A1. *$f(x)$ besitzt genau dann ein Inverses in $\mathcal{P}$, wenn $f(x) \notin \mathcal{P}_0$ gilt.*

Beweis. Gilt $f(x) \in \mathcal{P}_0$ (d.h. $f(x)$ hat konstanten Term 0), so ist $f(x)g(x) \in \mathcal{P}_0$ für jedes $g(x) \in \mathcal{P}$. Insbesondere gilt $f(x)g(x) \neq 1$, weshalb $f(x)$ kein Inverses besitzt. Nehmen wir nun an, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

wobei $a_0 \neq 0$, so können wir $f(x) = a_0[1 + h(x)]$ für ein $h(x) \in \mathcal{P}_0$ schreiben. Setzen wir $g(x) := a_0^{-1}[1 - h(x) + h(x)^2 - h(x)^3 + \ldots] = a_0^{-1}[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m h(x)^m]$, so gilt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= a_0 g(x) + a_0 h(x) g(x) \\ &= \big[1 - h(x) + h(x)^2 - h(x)^3 + \ldots\big] + \big[h(x) - h(x)^2 + h(x)^3 - \ldots\big] \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

Also ist $f(x)$ invertierbar und es gilt $f(x)^{-1} = g(x)$. □

Falls $f(x)^{-1}$ existiert, so folgt (wie in der Gruppentheorie) leicht, dass $(f(x)^{-1})^n = (f(x)^n)^{-1}$ gilt. Diese Reihe bezeichnen wir mit $f(x)^{-n}$.

A4. Quadratwurzeln und quadratische Gleichungen

Falls $f(x) \in \mathcal{P}_1$ und $n \in \mathbb{N}$, so kann bewiesen werden, dass es eine eindeutige Reihe $g(x) \in \mathcal{P}_1$ gibt, sodass $g(x)^n = f(x)$. Daher ist in diesem Fall der Ausdruck $f(x)^{1/n}$ wohldefiniert. Unter Verwendung der Kommutativität der Multiplikation kann dann leicht für jedes $m \in \mathbb{N}$ gezeigt werden, dass $(f(x)^{1/n})^m = (f(x)^m)^{1/n}$ gilt. Diese Reihe bezeichnen wir mit $f(x)^{m/n}$. Somit ist der Ausdruck $f(x)^q$ für jede positive rationale Zahl q wohldefiniert, und, da $f \notin \mathcal{P}_0$, auch für jede rationale Zahl q. Wir werden davon nur einen kleinen Teil zeigen; und zwar gerade soviel, um Quadratwurzeln zu ziehen.

Satz A2. *Falls $f(x) \in \mathcal{P}_1$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Reihe $g(x) \in \mathcal{P}_1$ mit $g(x)^2 = f(x)$, für die wir $g(x) = \sqrt{f(x)}$ schreiben.*

Beweis. Seien $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ und $g(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= 1 + 2b_1 x + (2b_2 + b_1^2)x^2 + (2b_3 + 2b_1 b2)x^3 + \ldots \\ & \quad \ldots + (2b_r + 2b_1 b_{r-1} + \ldots)x^r + \ldots \end{aligned}$$

Die Gleichung $g(x)^2 = f(x)$ reduziert sich somit zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2}a_1 \\ b_2 &= \frac{1}{2}(a_2 - b_1^2) \\ b_3 &= \frac{1}{2}(a_3 - 2b_1 b_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_4 &= \frac{1}{2}(a_4 - 2b_1b_3 - b_1^2) \\
&\vdots \\
b_r &= \frac{1}{2}(a_r - 2b_1b_{r-1} - \ldots), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

und diese haben eine eindeutige Lösung b_1, b_2, ... Somit existiert genau eine Reihe $g(x) \in \mathcal{P}_1$ mit $g(x)^2 = f(x)$. $\square$

Satz A3. *(a) Falls $a(x) \in \mathcal{P}$ und $a(x) \neq 0$, so hat die Gleichung $f(x)^2 = a(x)$ entweder keine oder genau zwei Lösungen.*
(b) Falls $a(x), b(x), c(x) \in \mathcal{P}$ und $a(x) \notin \mathcal{P}_0$, so hat die Gleichung $a(x)f(x)^2 + b(x)f(x) + c(x) = 0$ genau dann eine Lösung, wenn $b(x)^2 - 4a(x)c(x)$ eine Quadratwurzel in $\mathcal{P}$ besitzt. In diesem Fall sind die Lösungen gerade

$$
f(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{b(x)^2 - 4a(x)c(x)}}{2a(x)} \ . \tag{4}
$$

Beweis. (a) Falls $f(x)^2 = a(x)$ und $g(x)^2 = a(x)$, so gilt

$$
(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = f(x)^2 - g(x)^2 = 0 \ .
$$

Da es in $\mathcal{P}$ keine Nullteiler gibt, folgt, dass $f(x) - g(x) = 0$ oder $f(x) + g(x) = 0$, d.h. $f(x) = \pm g(x)$.

Umgekehrt, falls $f(x)^2 = a(x)$, so gilt $(-f(x))^2 = a(x)$. Wenn also die Gleichung $f(x)^2 = a(x)$ lösbar ist, dann besitzt sie zwei Lösungen.

(b) Falls $a(x)f(x)^2 + b(x)f(x) + c(x) = 0$, so gilt

$$
\begin{aligned}
[2a(x)f(x) + b(x)]^2 &= 4a(x)^2 f(x)^2 + 4a(x)b(x)f(x) + b(x)^2 \\
&= 4a(x)\left[a(x)f(x)^2 + b(x)f(x) + c(x)\right] + b(x)^2 - 4a(x)c(x) \\
&= b(x)^2 - 4a(x)c(x) \ .
\end{aligned}
$$

Also besitzt $b(x)^2 - 4a(x)c(x)$ eine Quadratwurzel und (4) gilt. Die andere Richtung folgt aus der Umkehrung der Argumentation. $\square$

A5. Derivationen

Für $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_rx^r + \ldots$ definieren wir

$$
D(f(x)) := a_1 + 2a_2x + \ldots + ra_rx^{r-1} + \ldots
$$

Satz A4. *Sind $f(x), g(x) \in \mathcal{P}$, so gilt*

$$\begin{aligned} D(f(x)+g(x)) &= D(f(x))+D(g(x)) \ , \\ D(f(x)g(x)) &= f(x)D(g(x))+g(x)D(f(x)) \ , \\ D(f(x)^n) &= nf(x)^{n-1}D(f(x)) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Falls $f(x)^{-1}$ existiert, so gilt außerdem

$$\begin{aligned} D(f(x)^{-1}) &= -f(x)^{-2}D(f(x)) \ , \\ D(f(x)^{-n}) &= -nf(x)^{-n-1}D(f(x)) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Falls nun sogar $f(x) \in \mathcal{P}_1$, dann gilt

$$D(f(x)^q) = qf(x)^{q-1}D(f(x))$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$.

(Im folgenden sei eine *halbzahlige Zahl* q ein Element in $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2} \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \ldots\}$.)

Beweis. Die Summenaussage ist offensichtlich. Für die Produktaussage ist zu beachten, dass der Koeffizient von x^{r+1} in $f(x)g(x)$ gleich $\sum_{s=0}^{r+1} a_s b_{r+1-s}$ ist, weshalb der Koeffizient von x^r in $D(f(x)g(x))$ gleich

$$(r+1)\sum_{s=0}^{r+1} a_s b_{r+1-s} \ . \tag{5}$$

ist. Der zugehörige Koeffizient in $f(x)D(g(x)) + g(x)D(f(x))$ ist

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{r} [a_s(r-s+1)b_{r-s+1} + b_s(r-s+1)a_{r-s+1}] = \\ &\qquad \sum_{s=0}^{r+1}(r-s+1)a_s b_{r+1-s} + \sum_{s=0}^{r+1} s a_s b_{r+1-s} \ , \end{aligned}$$

also gleich (5), wobei in der zweiten Summe s durch $r-s+1$ ersetzt wurde. Mit der Produktformel folgt dann $D(f(x)^2) = 2f(x)D(f(x))$, und damit die Formel für $D(f(x)^n)$ durch vollständige Induktion. Außerdem gilt

$$f(x)D(f(x)^{-1}) + f(x)^{-1}D(f(x)) = D(f(x)f(x)^{-1}) = D(1) = 0,$$

woraus sich die Formel für $D(f(x)^{-1})$ ergibt. Die Formel für $D(f(x)^{-n})$ folgt auf ähnliche Weise bzw. durch Verwendung von $f(x)^{-n} = (f(x)^{-1})^n$. Letztendlich, falls $q = \frac{1}{2}n$ gilt, so gilt

$$D((f(x)^q)^2) = 2f(x)^q D(f(x)^q)$$

sowie

$$D((f(x)^q)^2) = D(f(x)^n) = nf(x)^{n-1}D(f(x)),$$

weshalb wie gewünscht

$$D(f(x)^q) = \frac{1}{2}f(x)^{-q}D((f(x)^q)^2) = \frac{1}{2}nf(x)^{n-1-q}D(f(x)) = qf(x)^{q-1}D(f(x))$$

gilt. Damit ist Satz A4 bewiesen. □

Auf ähnliche Weise kann $D(f(x)^q) = qf(x)^{q-1}D(f(x))$ für jede rationale Zahl q bewiesen werden. Der einzige Grund, warum wir das hier nicht beweisen, ist, dass wir nicht gezeigt haben, dass $f(x)^q$ auch wohldefiniert ist, wenn q nicht halbzahlig ist.

A6. Der allgemeine binomische Lehrsatz

Der allgemeine binomische Lehrsatz besagt, dass, wenn $f(x) \in \mathcal{P}_0$ und $q \in \mathbb{Q}$, so gilt

$$(1+f(x))^q = 1 + qf(x) + \frac{q(q-1)}{2!}f(x)^2 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}f(x)^r + \ldots$$

Wie zuvor werden wir den Satz nur für halbzahlige q beweisen. Wir werden uns außerdem auf den Fall beschränken, dass $f(x)$ von einfacher Form ist, nämlich ein Vielfaches von x.

Satz A5. *Ist $k \in \mathbb{R}$ und ist $q \in \mathbb{Q}$ halbzahlig, dann gilt*

$$(1+kx)^q = 1 + qkx + \frac{q(q-1)}{2!}(kx)^2 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}(kx)^r + \ldots$$

Beweis. Es folgt aus Satz A4, dass

$$D(1+kx)^q = q(1+kx)^{q-1}D(1+kx) = qk(1+kx)^{q-1}$$

gilt, und damit ist mittels Induktion nach r leicht zu sehen, dass

$$D^r(1+kx)^q = q(q-1)\ldots(q-r+1)k^r(1+kx)^{q-r}$$

für jede natürliche Zahl r gilt. Da auch $q-r$ halbzahlig ist, gilt $(1+kx)^{q-r} \in \mathcal{P}_1$ (nach Satz A2), weshalb der konstante Term von $D^r(1+kx)^q$ gleich $q(q-1)\ldots(q-r+1)k^r$ ist. Ganz allgemein ist der konstante Term von $D^r(f(x))$ gleich dem $r!$–fachen des Koeffizienten von x^r in $f(x)$. Also ist der Koeffizient von x^r in $(1+kx)^q$ gleich

$$\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}k^r.$$

Damit haben wir das gewünschte Ergebnis erhalten. □

A7. Differentialgleichungen

Falls $f(x) \in \mathcal{P}_0$, so können wir die folgenden Definitionen vornehmen.

$$\begin{aligned}
\log(1+f(x)) &:= f(x) - \frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{3}f(x)^3 - \ldots \\
\exp f(x) &:= 1 + f(x) + \frac{1}{2!}f(x)^2 + \frac{1}{3!}f(x)^3 + \ldots \\
\cos f(x) &:= 1 - \frac{1}{2!}f(x)^2 + \frac{1}{4!}f(x)^4 - \ldots \\
\sin f(x) &:= x - \frac{1}{3!}f(x)^3 + \frac{1}{5!}f(x)^5 - \ldots
\end{aligned}$$

Da $\cos f(x) \in \mathcal{P}_1$, sind auch $\sec f(x) := (\cos f(x))^{-1}$ und $\tan f(x) := \sin f(x) \sec f(x)$ wohldefiniert. Allerdings können wir nicht $\operatorname{cosec} f(x)$ oder $\cot f(x)$ definieren (was nicht vollkommen überraschend ist, da im üblichen analytischen Sinne $\operatorname{cosec} x$ aund $\cot x$ ebenfalls keine

Reihenentwicklung mit Potenzen von x besitzen). Es kann gezeigt werden, dass nahezu alle der üblichen Regeln gelten. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \sin^2 f(x) + \cos^2 f(x) &= \sec^2 f(x) - \tan^2 f(x) = 1 \ , \\ D(\exp f(x)) &= (\exp f(x)) D(f(x)) \ , \\ D(\tan f(x)) &= \sec^2 f(x) D(f(x)) \ , \end{aligned}$$

usw.

Seien nun $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_n(x) \in \mathcal{P}$, für eine natürliche Zahl n. Es ist leicht zu sehen, dass für jede Differentialgleichung der Form

$$D(f(x)) = g_0(x) + g_1(x)f(x) + g_2(x)f(x)^2 + \ldots + g_n(x)f(x)^n$$

eine Lösung existiert und diese eindeutig ist, sobald der konstante Term von $f(x)$ vorgegeben ist. Dies ist der Fall, da diese Gleichung jeden Koeffizienten (außer den ersten) in $f(x)$ als Ausdruck in den Koeffizienten von kleineren Potenzen von x bestimmt. Die Theorie der Differentialgleichungen kann wie in der Analysis aufgebaut werden, aber dies ist für einige Lösungen noch nicht einmal nötig. Zum Beispiel ist $f(x) = k \exp(cx)$ für jede reelle Zahl k eine Lösung der Gleichung $D(f(x)) = cf(x)$, und diese ist damit jeweils die einzige Lösung mit konstantem Term k. Und die Gleichung $D(f(x)) = 1 + f(x)^2$ wird durch $f(x) = \tan x$ erfüllt, was damit die einzige Lösung mit konstantem Term 0 ist.

Literatur

I. Niven, *Formal Power Series*, American Mathematical Monthly **76** (1969), 871–889.