Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

17. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

Notation

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen
K^*	die Menge der Einheiten im Körper K
$x \in A$	x ist Element der Menge A
$A \subseteq B (A \subset B)$	A ist eine (echte) Untermenge von B
$A \cap B, A \cup B$	Durchschnitt, Vereinigung der Mengen A, B
$A \setminus B$	die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B liegen
$\varnothing$	die leere Menge
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
|a|	der absolute Betrag von a
P, P(G)	der Positivbereich einer Gruppe G
W_G	Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten Menge G
$a \ll b$	a ist unendlich kleiner als b
$a \sim b$	a ist archimedisch äquivalent zu b
$\langle z \rangle$	die von z erzeugte Untergruppe
Σ	die Menge konvexer Untergruppen einer angeordneten Gruppe
$V \oplus W$	die direkte Summe der Untervektorräume V, W
$A \hookrightarrow B$	A eingebettet in B
$\langle u \rangle$	die von u erzeugte konvexe Untergruppe

Kapitel 1

Einleitung

Potenzreihen finden in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit formalen Potenzreihen und den algebraischen Strukturen, die auf ihnen definiert werden können.
Ordnung spielt seit jeher eine essentielle Rolle in der Geschichte der Mathematik, aber erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigte man sich mit Ordnung verbunden mit algebraischen Operationen. Derartige Strukturen treten in vielen verschiedenen mathematischen Disziplinen auf. Im 20. Jahrhundert entwickelte sich die Theorie der angeordneten Strukturen, beginnend mit Arbeiten von Hölder, Hahn und Hausdorff. In seinem Werk „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß“ zeigte Hölder 1901, dass jede archimedisch angeordnete Gruppe sich in eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen einbetten lässt. Hölder bediente sich dabei der von Dedekind eingeführten Schnitte in $\mathbb{Q}$. Der österreichische Mathematiker Hans Hahn baute diese Theorie in seinem Werk „Über nichtarchimedische Größensysteme“ weiter aus auf nichtarchimedisch angeordnete Strukturen und zeigte, dass für diese ebenso eine Einbettung als Untergruppe eines lexikographisch geordneten Funktionenraums existiert.
In der vorliegenden Ausarbeitung liegt die Aufmerksamkeit auf der Betrachtung abelscher angeordneter Gruppen. Wenn derartige Gruppen den Definitionsbereich eines lexikographisch geordneten Funktionenraums darstellen, erweist sich dieser als ein Körper. Dabei ist die Wohlordnung des Trägers der Funktionen unverzichtbar.
Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Als erstes erfolgt ein Einblick in die Theorie der angeordneten Gruppen, die später zur Konstruktion des Potenzreihenkörpers benötigt werden. Über die Wohlordnung, führt die Archimedizität und der Satz von Hölder zur zentralen Aussage des ersten Kapitels, dem Hahnschen Einbettungssatz. Im zweiten Teil werden Eigenschaften des Potenzreihenrings über einem Körper näher beschrieben und verallgemeinert bewiesen, wie der Körper der Laurentreihen entsteht. Basierend auf Arbeiten von Fuchs und Prieß-Crampe wird die Konstruktion des Potenzreihenkörpers auf einer angeordneten abelschen Gruppe durchgeführt und gezeigt, dass es sich tatsächlich um einen Körper handelt.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für das Weitere benötigten Grundlagen zusammengestellt.

2.1 Grundlegende algebraische Strukturen

Wir definieren zunächst die elementaren algebraischen Strukturen Gruppe, Ring, Körper und Quotientenkörper. Die Vertrautheit mit grundlegenden Begriffen über Mengen und Abbildungen, sowie den wichtigen Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird vorausgesetzt.

2.1.1 Definition
Eine nichtleere Menge G mit der Verknüpfung $\circ\colon G \times G \to G, (a, b) \mapsto a \circ b$ heißt *Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) (Assoziativgesetz) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$.

(ii) (Neutrales Element) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $1_G \in G$ mit $1_G \circ a = a \circ 1_G = a$ für alle $a \in G$.

(iii) (Inverses Element) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element a^{-1} in G mit $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = 1_G$.
Die Gruppe heißt *abelsch*, falls folgendes gilt:

(iv) (Kommutativgesetz) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ erfüllt ist.

2.1.2 Bemerkung
Wenn $(G, \circ)$ eine Gruppe ist, so wird das Inverse eines Elements $a \in G$ mit a^{-1} bezeichnet. In abelschen Gruppen verwenden wir als Verknüpfung $+$ und nennen das neutrale Element 0_G und $-a$ das Inverse zu $a \in G$.

2.1.3 Beispiel
$(\mathbb{Z},+)\,,(\mathbb{Q},+)$ und$(\mathbb{R},+)$ sind abelsche Gruppen.

2.1.4 Definition
Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1_G. Die Teilmenge $U\subseteq G$ heißt *Untergruppe*, wenn gilt:

(i) $1_G\in U$.

(ii) $a,b\in U\Rightarrow ab\in U$.

(iii) $a\in U\Rightarrow a^{-1}\in U$.

2.1.5 Definition
Sei R eine nichtleere Menge und seien $+:R\times R\to R$ und $\cdot:R\times R\to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel $(R,+,\cdot)$ bezeichnen wir als *Ring*, wenn gilt:

(i) $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe,

(ii) Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ: Für $a,b,c\in R$ gilt $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

(iii) (Distributivgesetze) Für alle a,b,c $\in$ R gilt:

$$(a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \text{ und } (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

Das neutrale Element bezüglich der Addition wird mit 0_R, das neutrale Element bezüglich der Multiplikation mit 1_R bezeichnet.

2.1.6 Bemerkung
Ist die Multiplikation kommutativ, so heißt $(R,+,\cdot)$ *kommutativer Ring mit Eins*. Anstelle von $(R,+,\cdot)$ sprechen wir vereinfachend von dem Ring R.

2.1.7 Definition
Sei K eine nichtleere Menge mit mindestens zwei Elementen und seien $+,\cdot$ zwei Verknüpfungen auf K. Genau dann ist $(K,+,\cdot)$ ein *Körper*, wenn folgende Gesetze gelten:

(a) Addition

  (i) (Assoziativgesetz) Für alle $a,b,c\in K$ ist $(a+b)+c=a+(b+c)$.

  (ii) (Kommutativgesetz) Für alle $a,b\in K$ ist $a+b=b+a$.

  (iii) (Nullelement) Es gibt genau ein Element $0_K\in K$ mit $0_K+a=a+0_K=a$ für alle $a\in K$.

(iv) (Negatives Element) Zu jedem $a \in K$ gibt es (genau) ein $-a \in K$ mit $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

(b) Multiplikation:

(i) (Assoziativgesetz) Für alle $a, b, c \in K$ ist $(ab)\,c = a\,(bc)$).

(ii) (Kommutativgesetz) Für alle $a, b \in K$ ist $ab = ba$.

(iii) (Einselement) Es gibt genau ein Element $1_K \in K$ mit $1_K a = a 1_K = a$ für alle $a \in K$.

(iv) (Inverses Element) Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.

(c) Distributivgesetz:

- Für alle $a, b, c \in K$ ist $a\,(b + c) = ab + bc$.

2.1.8 Satz

Es sei R ein Integritätsbereich, bestehend aus wenigstens zwei Elementen. Wir definieren auf $R \times R^*$ eine Äquivalenzrelation " $\sim$ " durch $(r, u) \sim (s, v)$ genau dann, wenn $rv = su$ ist. Man sieht sofort, dass die Relation reflexiv und symmetrisch ist. Sei $(r, u) \sim (s, v)$ und $(s, v) \sim (t, w)$, also $rv = su$ und $sw = tv$, wir können also schreiben:

$$rwv = rvw = suw = swu = tvu = tuv.$$

Nach Voraussetzung ist R ein Integritätsbereich und da v ungleich null ist, folgt $rw = tu$, so dass $(r, u) \sim (t, w)$ ist. Auf $R \times R^*$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(r, u) + (s, v) := (rv + su, uv)\,,$$

$$(r, u)\,(s, v) := (rs, uv) \;\; \textit{definiert.}$$

Wir setzen Quot$(R) := (R \times R^*)/\sim$ und bezeichnen die Äquivalenzklasse von (r, u) mit $\frac{r}{u}$, so gilt:

$$\frac{r}{u} + \frac{s}{v} = \frac{rv + su}{uv}$$
$$\frac{r}{u}\frac{s}{v} = \frac{rs}{uv}$$

(Quot $R, +, \cdot$) ist ein Körper, wir nennen ihn den Quotientenkörper von R.

Beweis:

Es genügt, die Körperaxiome für (Quot(R), $+$, $\cdot$) nachzurechnen. □

Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper in den R als Unterring eingebettet werden kann.

2.2 Einblick in die Bewertungstheorie

Im Nachfolgenden betrachten wir eine angeordnete abelsche Gruppe $(G, +)$ und eine angeordnete Menge Θ mit 0 als kleinstem Element. Die Ausführungen sind orientiert an dem Kapitel „Archimedische Klassen, Bewertungen und Bedingungen für die Anordnungsfähigkeit von Gruppen“ in [PC83, S. 9 - 11].

2.2.1 Definition
Eine *Bewertung* $v\,(a)$ mit $a \in G$ ist eine surjektive Funktion $v\colon G \to \Theta$, so dass folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

B1: $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in G$,

B2: $v(a) = -v(a)$ für alle $a \in G$,

B3: $v(a + b) \leq \max\{(v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in G$.

Die Gleichheit in der Bedingung [B3] gilt dann, wenn $v(a) \neq v(b)$. Zwei Bewertungen $v,\ v'$ auf G mit den Wertemengen Θ, Θ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma\colon \Theta \ \to \ \Theta'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v$.
Sei $(G, +)$ eine angeordnete Gruppe, mit $[a]$ bezeichnen wir die Klasse, in der das Element $a \in G$, $[G]$ bezeichne die Gesamtheit der archimedischen Klassen von G. Die Abbildung $a \mapsto [a]\colon G \to [G]$ nennt man *natürliche Bewertung*.

2.2.2 Definition
Sei K ein Körper, $(\Theta, +)$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\overline{\Theta} = \Theta \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $v\colon K \ \to \ \overline{\Theta}$ wird als *Bewertung eines Körpers* bezeichnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

B1': $v(a) = \infty$ genau dann, wenn $a = 0$ ist,

B2': $v(ab) = v\,(a) + v\,(b)$ für alle $a, b \in K$,

B3': $v\,(a + b) \geq \min\{v(a), v\,(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Ein Beispiel für eine Bewertung ist die Polordnung meromorpher Funktionen in einem festen Punkt, wie im Hauptteil 4.2.6 noch erörtert wird. Man bezeichnet $v\colon K \ \to \ \overline{\Theta}$ als diskrete Bewertung, falls gilt $\Theta = \mathbb{Z}$.

2.2.3 Definition
Ein Integritätsring R heisst *diskreter Bewertungsring*, falls es auf dem Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ von R eine Bewertung $v : Quot(R)^* \to \mathbb{Z}$ gibt, mit:

D1: $v(ab) = v(a) + v(b)$,

D2: $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$, sodass R der Bewertungsring von v ist. Das bedeutet:

$$R = \{x \in Quot(R)^* : v(a) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Neukirch liefert in seinen Ausführungen zur algebraischen Zahlentheorie [Neu92, S. 126] eine äquivalente Definition anhand der eindeutigen Eigenschaften eines diskreten Bewertungsrings:

2.2.4 Definition
Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein Hauptidealring mit einem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{p}$.

2.3 Ordnungen

2.3.1 Anordnung

2.3.1 Definition
Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn es eine Relation " $\leq$ " auf A gibt mit: folgende Eigenschaften für alle$a, b, c \in A$ erfüllt.

T1: *Reflexivität:* $a \leq a$,

T2: *Antisymmetrie:* Aus $a \leq b$, $b \leq a$ folgt $a = b$,

T3: *Transitivität:* Aus $a \leq b$, $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

Die Relation „ $\leq$ " bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 die anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4: Für alle $a, b \in A$ besteht entweder $a < b$, oder $a = b$, oder $a > b$. Dabei gilt $a < b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$.

2.3.2 Definition
Eine *teilweise geordnete Gruppe G* bezeichnet eine Menge G mit folgenden Eigenschaften:

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,

G2: eine teilweise geordnete Menge bezüglich einer Relation " $\leq$ ", wie in 2.3.1,

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: Für $a, b \in G$ gilt: Aus $a \leq b$ folgt $ca \leq cb$ und $ac \leq bc$ für alle $c \in G$.

2.3.3 Definition
Eine Gruppe wird als *angeordnete Gruppe* bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

2.3.4 Satz
Jede angeordnete Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus obiger Definition einer angeordneten Gruppe 3.2.7. Denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei, so würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit dem Monotoniegesetz G3 2.3.2 ergeben. □

2.3.2 Wohlordnung

Nun beschäftigen wir uns mit der Wohlordnung von total geordneten Gruppen. Diese wird später bei der näheren Betrachtung des Trägers einer Potenzreihe eine wichtige Rolle spielen. Im Folgenden sei $G \neq \varnothing$ eine angeordnete Gruppe versehen mit der Ordnungsrelation „ $\leq$ “. Aufbauend auf Ideen in [Fuc66, S. 16] entwickeln wir die grundlegenden Eigenschaften wohlgeordneter Mengen.

2.3.5 Definition
Eine angeordnete Menge W nennt man *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge V von W ein kleinstes Element enthält. Es existiert also ein Element $x \in V$, mit $u \leq v$ für alle $v \in V$.

Der Wohlordnungssatz, ein von Ernst Zermelo bewiesenes Prinzip der Mengenlehre, besagt, dass auf jeder Menge eine Wohlordnung existiert. Dieses Theorem, so stellte sich nach erfolglosen Widerlegungsversuchen zahlreicher Mathematiker heraus, ist äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Lemma von Zorn.
Beispielsweise ist die natürliche Anordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist mit der natürlichen Anordnung „ $\leq$ “ total geordnet, jedoch nicht wohlgeordnet, da die negativen Elemente von $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt sind und somit $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element enthält. Nach der Konstruktion der ganzen Zahlen auf Basis der natürlichen Zahlen mittels einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ überträgt sich das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

2.3.6 Bemerkung
Ist $M \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Teilmenge, so hat M ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element.

2.3.7 Beispiel
Betrachte die Relation “ $\preceq$ “ auf $\mathbb{Z}$:

$$a \preceq b \text{ genau dann, wenn } |a| \leq |b| \text{ und } \left(|a| = |b| \Rightarrow a \leq b\right).$$

„ $\preceq$ “ ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$ und es gilt: $0 \preceq 1 \preceq -1 \preceq 2 \preceq -2 \preceq -3 \preceq 3 ...$

2.3.8 Beispiel

Ist D $\subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist der Ring $\mathcal{O}(D)$ der in D holomorphen Funktionen ein Integritätsring. Man nennt:
$M\left(D\right) :=$Quot$(\mathcal{O}\left(D\right)) = \{\frac{f}{g} : f, g \in \mathcal{O}(D),\ g \neq 0\}$ den Körper der meromorphen Funktionen.
Der Nenner kann unendlich viele Nullstellen besitzen, diese liegen allerdings isoliert.

Kapitel 3

Angeordnete abelsche Gruppen

In diesem Kapitel fassen wir jene Begriffe und Bezeichnungen zusammen, die zur Betrachtung des Potenzreihenkörpers benötigt werden. Zunächst betrachten wir die wichtigsten Eigenschaften angeordneter Gruppen. Nach einer Einführung in die Theorie angeordneter Gruppen beschäftigen wir uns mit deren Wohlordnung, eine Eigenschaft, die für die Konstruktion des Potenzreihenkörpers unabdingbar ist. Mithilfe der Eigenschaft der Archimedizität führen wir eine spezielle Art der Anordnung von Gruppen ein. Die Familie der konvexen Untergruppen führt uns zu Aussagen über die Anordnungsfähigkeit von Gruppen. An den Satz von Hölder, dass archimedisch angeordnete Gruppen in die additive Gruppe des $\mathbb{R}$ eingebettet werden können, schließt die zentrale Aussage des Kapitels an: der Hahnsche Einbettungssatz. Dieser besagt, dass angeordnete abelsche Gruppen auch als Untergruppen eines lexikographisch geordneten reellen Funktionenraums, beispielsweise des Körpers der Laurentreihen, verstanden werden können.
Die Theorie der angeordneten Strukturen, in unserem Fall ausschließlich Gruppen, liefert wichtige Erkenntnisse zur späteren Konstruktion des Körpers von formalen Potenzreihen. Die Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt werden, sind nicht mehr nur auf den natürlichen Zahlen, sondern jeder angeordneten abelschen Gruppe definierbar, wobei auf die Wohlordnung nicht verzichtet werden kann. Die nachfolgenden Ausführungen sind angelehnt an [Fuc66, S. 21 - 28] und [PC83, S. 1 - 4].

3.0.9 Definition

Eine abelsche Gruppe $(G, +))$ heißt *teilbar*, wenn zu jedem $a \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ ein Element $b \in G$ mit $nb = a$ existiert.

3.0.10 Satz

Eine torsionsfreie, abelsche Gruppe $(G, +)$ *ist bis auf Isomorphie in genau einer minimalen teilbaren, abelschen Gruppe* $\left((\overline{G}, +\right)$ *enthalten.* $\overline{G}$ *heißt die teilbare Hülle von* G.

Beweis:

Wir betrachten $\overline{G}$, bestehend aus der Menge der Paare (x, n) mit $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$ wobei $(x, n) = (y, m)$ für $mx = ny$ gelte. Die Addition über $\overline{G}$ wird definiert durch $(x, n) + (y, m) = (mx + ny, mn)$. Mit dieser Verknüpfung ist $\overline{G}$ eine abelsche Gruppe, denn $(x, n) + (y, m) = (mx + ny, mn) = (ny + mx, nm) = (y, m) + (x, n)$, da G nach Voraussetzung abelsch und $\mathbb{N}$ ein kommutativer Halbring ist.
Die Gruppe $\overline{G}$ ist torsionsfrei, da jedes Element, bis auf das neutrale, unendliche Ordnung hat, nach Konstruktion von $\overline{G}$. Durch die Abbildung $G \to \overline{G}, a \mapsto (a, 1)$ ist eine Einbettung von G in $\overline{G}$ gegeben, die jedem Element aus G ein Element in $\overline{G}$ zuordnet.
Wir konstruieren eine minimal teilbare Gruppe einer teilbaren Obergruppe G^* von G. Als minimal teilbare Untergruppe von G^*, die G enthält nach Konstruktion, wählen wir $\mathbb{Q}G = \{qx : q \in \mathbb{Q}, x \in G\}$. Durch die Abbildung $(a, n) \mapsto \frac{1}{n} \cdot a$ ist ein Isomorphismus von $\overline{G}$ auf $\mathbb{Q} \cdot G$ definiert. $\square$

3.0.11 Bemerkung

Genügt eine Teilmenge $P := \{x \in G | x \geq 0\}$ einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so nennt man $(G, \circ)$ *anordnungsfähig*. Wir nennen P den *Positivbereich* von G.

P1: $\{0\} \cup P \cup -P = G$, $P \cap -P = \varnothing$,

P2: $P \circ P \subseteq P$,

P3: P ist normal in G.

3.0.12 Bemerkung

Ist eine abelsche Gruppe G mit dem Positivbereich P angeordnet, so definiert dann $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P$ für $a, b \in G$.

3.0.13 Definition

Der *absolute Betrag* $|a|$ eines Elements a $\in G$, wobei G eine angeordnete Gruppe sei, ist definiert als $|a| = max\{a, -a\}$.

Wenn die angeordnete Gruppe zusätzlich abelsch ist, gilt die *Dreiecksungleichung* für alle $a, b \in G$:

$$|k + l| \leq |k| + |l|, \text{ für alle } k, l \in G.$$

Die Ungleichung gilt trivialerweise wenn beide Elemente das gleiche Vorzeichen haben. Sei also $k < 0$ und $l > 0$. Dann ist $k = -|k|$.
Für $|k| \leq |l|$, so ist $|k + l| = |-|k| + l| = l - |k| \leq l = |l| \leq |k| + |l|$.
Ist $|k| > l$, so ist:

$$|k + l| = |-|k| + l| = |k| - l \leq |k| \leq |k| + |l|.$$

3.1 Wohlordnung in angeordnet abelschen Gruppen

Die folgenden Aussagen orientieren sich an der Arbeit [Xin05] von Guoce Xin, der sich mit den Eigenschaften Hahnscher, respektive Malcev-Neumann-Potenzreihen auseinandersetzte.

3.1.1 Satz
Sei " $\leq$ " eine totale Ordnung auf der Menge W. Dann ist W genau dann wohlgeordnet, wenn es keine unendlich abnehmende Folge in W gibt.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei W wohlgeordnet. Angenommen es gibt eine unendlich abnehmende Folge von Elementen in W, nämlich $a_1 > a_2 > a_3 > ....$ Damit erhalten wir eine Teilmenge $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die kein kleinstes Element besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Wohlordnung von W.
" $\Leftarrow$ " Wir nehmen an, es gibt keine unendlich abnehmende Folge in W und betrachten den Fall W ist nicht wohlgeordnet. Dann gibt es eine Teilmenge A von W, die kein kleinstes Element enthält. Für ein beliebiges Element $a_1 \in A$ finden wir $a_2 \in A$ mit $a_2 < a_1$. Dieses Verfahren lässt sich endlos fortsetzen und wir erhalten eine unendlich abnehmende Folge $a_1 > a_2 > a_3 > ....$ □

3.1.2 Beispiel
Total geordnete endliche Mengen sind wohlgeordnet.

Betrachte nun die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen W_S einer total geordneten Menge S, die nicht zwangsläufig wohlgeordnet ist.

3.1.3 Lemma
Sei $w_\alpha \in W_S$, dann gilt $\cap_\alpha w_\alpha \in W_S$ für alle α und für $w_1, w_2 \in W_S$ gilt $w_1 \cup w_2 \in W_S$.

Beweis:

Die erste Aussage ist trivial. Zum Beweis der zweiten Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $w_1 \cup w_2$ sei nicht wohlgeordnet, dann gibt es nach 3.1.1 eine unendlich abnehmende Folge $a_1 > a_2 > ...$ in $w_1 \cup w_2$.
Betrachten wir alle Elemente aus w_1, so können wir diese als Folge $a_{i_1} > a_{i_2}...$ schreiben. Aufgrund der Wohlordnung von w_1 ist die so erhaltene abnehmende Folge endlich. Die selbe Argumentation wählen wir für w_2 und erhalten die endliche abnehmende Folge $a_{j_1} > a_{j_2}....$ Jedes Element der unendlichen Menge $\{a_n | n \geq 1\}$ abnehmender Folgen ist $\{a_n\}_{n\geq 1}$ nach Definition in einer der beiden endlichen Folgen enthalten. Widerspruch! □

3.1.4 Lemma
Wir betrachten eine total geordnete Menge W. Jede unendliche Folge $a_1, a_2, ...$ in W erfüllt

mindestens eine der drei folgenden Eigenschaften:

(1) $a_1, a_2, ...$ *enthält eine unendlich zunehmende Teilfolge.*

(2) $a_1, a_2, ...$ *enthält eine unendlich konstante Teilfolge.*

(3) $a_1, a_2, ...$ *enthält eine unendlich abnehmende Teilfolge.*

Beweis:

Angenommen die Folge $a_1, a_2, ...$ erfüllt weder die Bedingung (2) noch (3). Wir wollen zeigen, dass sie eine unendliche zunehmende Teilfolge enthält.
Da die Folge somit keine unendlich abnehmende Teilfolge enthält, gibt es ein kleinstes Element a_{i_1}, denn andernfalls ließe sich eine unendlich abnehmende Teilfolge konstruieren. Die Folge bleibt unendlich wenn wir die ersten Folgenglieder i_1 aus $\{a_n\}_{n\geq 1}$ entfernen, da es nur endlich viele Folgenelemente nach Voraussetzung gibt, die gleich a_{i1} sind. In der daraus entstandenen Folge ist jedes Element größer als a_{i1} und sie enthält wiederum keine unendlich abnehmende oder unendlich konstante Teilfolge. In der so entstandenen Folge ist jedes enthaltene Element echt größer als a_{i1}.
Wir wiederholen das durchgeführte Verfahren und konstruieren so die unendlich zunehmende Teilfolge $a_{i1} < a_{i2} < ....$
Die Aussagen (2), (3) werden analog bewiesen. □

Bernhard Hermann Neumann ein deutsch-englisch-australischer Mathematiker bewies in seinem Werk „On ordered division rings“ [Neu, S. 206] die beiden folgenden wichtigen Lemmata, deren volle Bedeutung sich im Hauptteil 4.3 erschließen wird.

3.1.5 Lemma

Die Menge W *ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede Folge* $w_1, w_2, ...$ *von Elementen aus* W *eine nichtabfallende Teilfolge* $w_{\tau(1)} \leq w_{\tau(2)} \leq ...$ *enthält.*

Beweis:

“ $\Rightarrow$ “ Sei die total geordnete Menge W wohlgeordnet. Dann gilt nach Lemma 3.1.4 und der Definition der Wohlordnung, dass eine Folge $w_1, w_2, ...$ von Elementen aus W entweder eine unendlich zunehmende oder konstante Teilfolge enthält.
“ $\Leftarrow$ “ Jede Folge von Elementen aus W enthält eine nichtabfallende Teilfolge, damit existiert ein kleinstes Element der Teilfolge und W ist nach Definition der Wohlordnung wohlgeordnet. □

Wir bezeichnen mit W_G die Menge der wohlgeordneten Teilmengen einer angeordneten abelschen Gruppe G.

3.1.6 Satz

Sei G *ein total geordnetes Monoid und* $w_1, w_2 \in W_G$ *dann sind* $w_1 w_2 \in W_G$.

Beweis:

Angenommen $w_1 w_2$ liegt nicht in der Menge der wohlgeordneten Teilmengen W_G. Es gibt also eine unendlich abfallende Folge $a_1 b_1 > a_2 b_2 > ...$, wobei $a_i \in w_1, b_i \in w_2$. Da w_1 wohlgeordnet ist, enthält die unendlich abfallende Folge $\{a_n\}_{n \geq 1}$ nach Definition der Wohlordnung keine unendlich abfallende Folge. Nach 3.1.4 gibt es eine unendlich zunehmende oder konstante Teilfolge $a_{i1} \leq a_{i2} \leq ....$ Da aber gilt $a_{i1} b_{i1} > a_{i2} b_{i2} > ...$ erhalten wir eine unendlich abnehmende Folge $b_{i1} > b_{i2} > ...$ in w_2. Dies widerspricht der Tatsache, dass w_2 wohlgeordnet ist. □

3.1.7 Lemma

(Lemma von B.H. Neumann) Sei G eine angeordnete Gruppe und $V, W \subseteq G$ wohlgeordnet, dann ist $U = V + W$ ebenso wohlgeordnet.

Beweis:

Sei

$$u_1 = v_1 + w_1, \; u_2 = v_2 + w_2 \; ..., \text{ mit } v_r \in V, w_r \in W$$

eine beliebige Folge von Elementen aus U. Es gibt eine Folge $v_1, v_2, ...$ mit $v_{\tau(1)} \leq v_{\tau(2)} \leq ...$ und zu der Folge $w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, ...$ eine nichtabfallende Teilfolge $w_{\tau(\sigma(1))} \leq w_{\tau(\sigma(2))} \leq ....$ Daraus folgt es gibt zu der beliebigen Folge von Elementen aus U ebenso eine nicht abfallende Teilfolge $u_{\tau(\sigma(1))} \leq u_{\tau(\sigma(2))} \leq ...$, Nach Lemma 3.1.5 ist U damit wohlgeordnet. □

3.1.8 Folgerung

Seien V, W wohlgeordnete Teilmengen einer angeordneten Gruppe G, dann gibt es für ein $g \in G$ nur endlich viele Paare $(v, w) \in V \times W$ mit $v + w = g$.

3.2 Archimedisch angeordnete Gruppen

Erst seit dem Ende des 19. Jahrhunderts kristallisierte sich die hohe Bedeutung geordneter Strukturen in der Mathematik heraus. Man erkannte, dass das archimedische Axiom unverzichtbar für die nähere Untersuchung dieses Bereichs war, unter anderem spielte es schon eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der reellen Zahlen mithilfe des Dedekindschen Schnittes (1872). Genau genommen ermöglicht die archimedische Eigenschaft die Herstellung von Kommutativität und Vollständigkeit.

Im hinteren Teil des Kapitels zeigen wir, dass jede archimedisch angeordnete Gruppe bis auf Isomorphie einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen mit der Ordnung "$<$" entspricht. Zwar wird der Beweis dieser Aussage in der verwendeten Literatur Otto Hölder (1901)[Hö01] zugeschrieben, die grundlegenden Ideen dazu lieferte jedoch bereits Bettazi in seinem Werk „Teoria delle grandezze", 1890.[Lü08, S. 578]

Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an das Kapitel „Angeordnete Gruppen" in [Fuc66, S. 73 - 93], sowie Arbeiten von Prieß-Crampe [PC70], [PC83].

3.2.1 Definition

Eine angeordnete Gruppe $(G, +)$ heisst *archimedisch*, wenn es für alle $a, b \in G$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b < na$.

3.2.2 Definition

Seien $a, b \in G$, wobei G eine angeordnete Gruppe ist. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n|a| < |b|.$$

In Zeichen schreiben wir: $a \ll b$.

3.2.3 Definition

Sei G eine angeordnete Gruppe, und $|a|$ der absolute Betrag eines Elements a aus G. Zwei Elemente $a, b \in G$ werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, wenn natürliche Zahlen m und n existieren, so dass:

$$|a| < m|b| \text{ und } |b| < n|a|.$$

In diesem Fall schreiben wir: $a \sim b$

3.2.4 Folgerung

Für jedes Paar von Elementen $a, b \in G$ gilt genau eine der anschließenden Relationen:

(i) $a \ll b$, (ii) $a \sim b$, (iii) $b \ll a$.

Des Weiteren schließen wir aus Definition 3.2.2 und 3.2.3:

(i) Aus $a \ll b$ folgt $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx$ für alle $x \in G$;

(ii) Aus $a \ll b$ und $a \sim c$ folgt $c \ll b$;

(iii) Aus $a \ll b$ und $b \sim d$, folgt $a \ll d$;

(iv) Aus $a \ll b$ und $b \ll c$ folgt $a \ll c$;

(v) Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$.

Sind alle Elemente einer Gruppe archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe *archimedisch angeordnet*.
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. Es bezeichne $[x]$ die *archimedische Klasse* in der das Element $x \in G$ liegt, $[G]$ die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G.
Sind zwei Elemente $a,\ b \in G$ nicht archimedisch äquivalent, gilt entweder

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } n|a| < |b|$$

, oder

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } n|b| < |a|.$$

3.2.5 Satz

Eine archimedische Gruppe $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beweis:

Falls G ein kleinstes positives Element z besitzt, so ist die von z erzeugte Untergruppe $\langle z \rangle$ eine abelsche Gruppe, da jede aus einem Element erzeugte Menge eine Untergruppe ist. Nach Definition der Archimedizität 3.2.1 existiert für $0 < b \in G$ eine natürliche Zahl n mit:

$$(n-1) \cdot z \leq b < n \cdot z.$$

Die Umkehrabbildung ${\lambda_x}^{-1}$ der bijektiven und ordnungstreuen Abbildung

$$\lambda_x \colon G \to G,\ y \mapsto x + y$$

existiert und es gilt:

$${\lambda_x}^{-1}(a)\ x \mapsto a - y \text{ und daher:}$$

$$0 = \lambda_x(n-1) \cdot z^{-1}\left((n-1)\right)\ \leq\ \lambda_x(n-1) \cdot z^{-1}\left(b\right)\ <\ \lambda_x(n-1) \cdot z^{-1}(n \cdot z) = z.$$

Da z nach Voraussetzung das kleinste positive Element aus G ist, erhalten wir:

$$0 = \lambda_x(n-1) \cdot z^{-1}\left(b\right).$$

Somit ist $b = (n-1) \cdot z$ und daher $L = \langle z \rangle$. G ist also eine zyklische Gruppe, da sie von einem Gruppenelement erzeugt wird. Jede zyklische Gruppe ist abelsch und die Behauptung ist in diesem Fall gezeigt.

Nun muss noch der Fall betrachtet werden, dass G kein kleinstes positives Element besitzt. Zu jedem Element $0 < x \in G$ existiert also ein $c \in G$ mit: $0 < c < x$. Das bedeutet zwischen der Null und jedem beliebigen Element von G gibt es stets noch ein Element, da kein kleinstes positives Element existiert. Es sei $x = \lambda_c {\lambda_c}^{-1}(x) = c + {\lambda_c}^{-1}(x)$, woraus wegen $c < x$ folgt, dass $0 < {\lambda_c}^{-1}(x)$ ist. Wähle $d \in G$, mit $0 < d \leq \min\{c, {\lambda_c}^{-1}(x)\}$, dann gibt es für alle $x \in G$ ein derartiges Element mit $0 < 2d \leq c + {\lambda_c}^{-1}(x) = x$. Daraus folgt, es gibt natürlich auch ein Element $d' \in G$ mit $0 < 3d' \leq x$.

Angenommen G ist nicht abelsch. Dann existieren Elemente $a, b \in G$ mit $a + b < b + a$ oder $b + a < a + b$. Wir schränken uns o.B.d.A auf den ersten Fall ein. Es sei $s \in G$ bestimmt als $s + (a + b) = 0$. Wir erhalten $0 < s + b + a$ und wir wissen, dass es ein Element d' aus G gibt, welches die Ungleichung $0 < 3 \cdot d' \leq s + (b + a)$ erfüllt. Weil G archimedisch ist, gibt es ganze

Zahlen n_1, n_2 mit $n_1 \cdot d' \leq a < (n_1 + 1) \cdot d'$, $n_2 \cdot d' \leq a < (n_2 + 1) \cdot d'$. Wir folgern:

$$(n_1 + n_2) \cdot d' \leq b + a < n_1 + n_2) \cdot d' + 3d' \text{ und}$$

$$(n_1 + n_2) \cdot d' \leq a + b < n_1 + n_2) \cdot d' + 3d'$$

. Aus der letzten Ungleichung folgt -$(n_1 + n_2) \cdot d - 3d' < s \leq -(n_1 + n_2) \cdot d$ und damit ergibt sich:

$$s + (b + a) < 3d$$

Wir erhalten einen Widerspruch zu unserer Annahme, daher ist die Aussage gezeigt. □

3.2.6 Definition

Ist G mit dem Positivbereich P eine angeordnete Gruppe, so ist G auch mit dem Positivbereich $(-P)$ eine angeordnete Gruppe. Die Abbildung $a \mapsto -a$ ist ein *ordnungserhaltender Isomorphismus* zwischen diesen beiden Gruppen. Man nennt einen solchen Isomorphismus einen *Ordnungsisomorphismus.* Man nennt Gruppen *ordnungsisomorph (o-isomorph)*, wenn es zwischen ihnen einen Ordnungsisomorphismus gibt.

3.2.7 Satz

Eine angeordnete abelsche Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie zu einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist.

Beweis:

" $\Leftarrow$ " : Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch angeordnet ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.
" $\Rightarrow$ „: Sei G eine angeordnete abelsche Gruppe, G besitzt einen Positivbereich P. Nach Voraussetzung erfüllt G die archimedische Eigenschaft. Sei $G \neq \{e_G\}$, wobei e_G das neutrale Element der Addition in G ist. Andernfalls wäre G isomorph zu $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, der trivialen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Somit ist P nicht leer und wir nehmen ein Element $\alpha \in P$ beliebig. Für jedes $g \in G$ und $g \in P$ definieren wir:

$$S_g := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ | m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \leq ng\}$$

Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $m\alpha \leq ng \Leftrightarrow mp\alpha \leq np\alpha$. Die Darstellung von $r \in \mathbb{Q}^+$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen hängt also nicht damit zusammen, ob $r \in S_g$ enthalten ist.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es, einen Monomorphismus zu finden, der G auf die additive Gruppe der reellen Zahlen abbildet. Wir zeigen nun folgende Aussagen:

(i) Für alle $g \in S_g$ gilt $S_g \neq \varnothing$ und $S_g \neq \mathbb{Q}^+$. Für $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ und damit $r \in S_g$.

(ii) Sei $S_g \subseteq \mathbb{Q}^+$, wobei S_g nicht leer und beschränkt. Die Abbildung $\Phi : P \to \mathbb{R}^+, g \mapsto$ $\sup\}S_g\{$ ist somit wohldefiniert.

(iii) Für alle $g, h \in \mathbb{Q}^+$. gilt: $g \leq h \Leftrightarrow S_g \subseteq S_h \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h)$.

(iv) Sei $g, h \in P$ und $r, s \in \mathbb{Q}^+$. Sei $r \in S_g$ und $s \in S_h$ so folgt $r + s \in S_{g+h}$.
Sei $r \notin S_g$ und $s \notin S_h$, so folgt $r + s \notin S_{g+h}$.

(v) Es gilt: $\Phi\,(g+h) = \Phi\,(g) + \Phi\,(h)$ für alle $g, h \in P$.

(vi) Φ wird fortgesetzt auf die gesamte Gruppe G durch $\Phi\,(e_G) = 0$ und $\Phi\,(-g) = \Phi\,(g)$ für alle g $\in P$.

Insgesamt ist Φ ein Monomorphismus abelscher Gruppen und damit ist G isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.
Zu (i): Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es zu jedem Element $g \in p$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng < \alpha$. Nach Definition von S_g gilt $\frac{1}{n} \in S_g$ und somit ist S_g nicht leer.
Angenommen $S_g = \mathbb{Q}^+$, dann wäre $n \in S_g$ und $n\alpha \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Seien $r, s \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < s$ und $s \in S_g$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt $kn < lm$ und da $s \in S_g : m\alpha \leq ng$ und $kn\alpha \leq lm\alpha \leq lng$. Daraus wiederum folgt: $\frac{kn}{ln} = r \in \mathbb{Q}^+$.
Zu (ii): Wir haben bereits gezeigt, dass S_g nicht leer ist. Angenommen S_g wäre unbeschränkt, dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r \in S_g$ mit n $<$ r. Nach (i) folgt daraus $n \in S_g$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n\alpha \leq g$, was ein Widerspruch zur archimedischen Eigenschaft ist.
Zu (iii): Zunächst beweisen wir die erste Implikation. Sei $g, h \in \mathbb{Q}^+$. und es gilt: $g \leq h$. Sei $r \in S_g, r := \frac{m}{n}$ und $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt: $m\alpha \leq ng$. Da $g \leq h$ folgt $m\alpha \leq nh$ und damit $r \in S_h$.
Die zweite Implikation folgt nach Definition von Φ offensichtlich.
Sei $\Phi\,(g) \leq \Phi\,(h)$. Angenommen $g > h$, nach der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\,(g-h) > 2\alpha$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ möglichst klein, mit $m\alpha < nh$. Es gilt $\frac{m}{n} \notin S_h$ und $\frac{m}{n} \geq \Phi\,(h)$ Da m minimal ist, gilt die Ungleichung $(m-1)\,\alpha \leq nh$ und wir erhalten $(m+1)\,\alpha \leq nh + 2\alpha < nh + n(g-h) = ng$ und $\frac{m+1}{n} \in S_g$, also $\frac{m+1}{n} \leq \sup(S_g) = \Phi\,(g)$.
Insgesamt ergibt sich $\Phi\,(h) \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq \Phi\,(g)$.
Zu (iv): $r \in S_g, s \in S_h$ mit $r := \frac{k}{l}$ und $s := \frac{m}{n}$, wobei $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $k\alpha < lg$ und $m\alpha \leq nh$. Es folgt: $kn\alpha \leq lng \leq$ und $lm\alpha \leq lng$. Somit gilt für $r + 1 = \frac{kn+lm}{ln} \in S_{g+h}$. Die zweite Aussage folgt analog indem in Obigem " $\leq$ " durch $>$ ersetzt wird.
Zu (v): Als erstes zeigen wir, dass $\Phi\,(g+h)$ eine obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen

es gibt ein $r \in S_{g+h}$ mit $r > \Phi(g+h)$. Wähle $\epsilon = r - \Phi(g) - \Phi(h)$ und wähle s, t $\in \mathbb{Q}^+$ mit $\Phi(g) < s < \Phi(g) + \frac{\epsilon}{2}$ und $\Phi(h) < t < \Phi(h) + \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt folgt $s + t < \Phi(g) + \Phi(g) + \epsilon = r$. Da $s \notin S_g$ und $t \notin S_h$ gilt $s + t \notin S_{g+h}$ nach (i). Wir erhalten $s + t \geq \Phi(g+h) \geq r$ und der Widerspruch $r \leq s + t < r$ zeigt, dass ein derartiges r nicht existieren kann.
Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(g+h)$ die kleinste obere Schranke von S_{g+h} ist. Angenommen es gäbe eine kleinere obere Schranke $o \in \mathbb{R}^+$ und sei $\epsilon = \Phi(g) + \Phi(h) - o$. Nach Definition der Abbildung gibt es ein $r \in S_g$ mit $r < \Phi(g) - \frac{\epsilon}{2}$ und $s \in S_h$ mit $s < \Phi(h) - \frac{\epsilon}{2}$. Nach (iv) ist $r + s$ in S_{g+h} und daher $r + s \leq o$. Widerspruch, da $r + s > \Phi(g) + \Phi(h) - \epsilon = o$.
Zu (vi): Falls $g, h > e_G$ wurde die Äquivalenz $g \leq h \Leftrightarrow \Phi(g) + \Phi(h)$ bereits gezeigt. Die Aussage ist offensichtlich, wenn eines der beiden Elemente g oder h gleich Null ist. Sei $g < e_G$ und $h > e_G$, dann folgt die Behauptung nach Definition. Die Aussage bleibt für $g, h < e_G$ zu zeigen:

$$g \leq h \Leftrightarrow -g \geq -h \Leftrightarrow \Phi(-g) \geq \Phi(-h)\, n \Leftrightarrow \Phi(g) \leq \Phi(h).$$

Wir zeigen nun $\Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$ für beliebige $g, h \in G$. Es genügt dies für $g, h < e_G$ zu beweisen. Hier kann auf das bereits Bewiesene zurückgegriffen werden:

$$\Phi(g+h) = -\Phi((-g) + (-h)) = (-\Phi(-g)) + (-\Phi(-h)) = \Phi(g) + \Phi(h).$$

Zunächst betrachten wir den Fall $g \geq -h$. Dann ist $g + h \geq e_G$, und nach der bereits gezeigten Aussage folgern wir:
$\Phi(g+h) + \Phi(-h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) - \Phi(h) = \Phi(g) \Leftrightarrow \Phi(g+h) = \Phi(g) + \Phi(h)$.
Setzen wir nun $g < -h$ voraus. Dann ist $-g - h > 0$, also $\Phi(g) + \Phi(-g-h) = \Phi(-h)$, was äquivalent zu $\Phi(g) - \Phi(g+h) = -\Phi(h)$ und zu $\Phi(g) + \Phi(h) = \Phi(g+h)$ ist. □

3.2.8 Satz

Sei $(G, +)$ eine archimedische Gruppe und $\phi : G \to \mathbb{R}$ ein injektiver o-Homomorphismus. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $\phi(g) = r \cdot a$ für alle $a \in G$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist ϕ ein injektiver o-Homomorphismus und damit sind mit $0 < g_1, g_2 \in G$ auch $\phi(g_1)$ und $\phi(a_2)$ positiv. Angenommen es gilt, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} \neq \frac{g_1}{g_2}$, so gibt es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, die zwischen $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)}$ und $\frac{g_1}{g_2}$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\frac{\phi(g_1)}{\phi(g_2)} < \frac{m}{n} < \frac{g_1}{g_2}$ ist. Weiterhin gehen wir davon aus, dass $n \cdot g_1 > m \cdot g_2$ ist. Nach der archimedischen Eigenschaft der Gruppe G stehen die Bilder $\phi(n \cdot g_1)$ und $\phi(m \cdot g_2)$ in umgekehrter Größenbeziehung zueinander. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Ordnungstreue der Abbildung ϕ. Folglich gilt auch für alle positiven Elemente $g \in G$, dass die Gleichung $\frac{\phi(g_1)}{g} = \frac{\phi(g)}{g}$ erfüllt ist.
Für die negativen Gruppenelemente $g \in G$, mit $g < 0$ und daher $-g > 0$ erhalten wir aufgrund der Homomorphismuseigenschaften $\frac{\phi(g)}{g} = \frac{(-1)\cdot\phi(g)}{(-1)\cdot g} = \frac{\phi(-g)}{-g} = \frac{\phi(g_1)}{g_1}$. Mit der positiven

Konstanten $r := \frac{m}{n}$ ist die Aussage $\phi(g) = r \cdot g$ für alle $g \in G$ gezeigt. $\square$

Die Grundaussage dieses Satzes bewies erstmals Hion 1954 in seinem russischsprachigen Werk „Archimedisch geordnete Ringe". Er setzte jedoch einen o-Homomorphismus zwischen zwei Untergruppen der additiven angeordneten Gruppe der reellen Zahlen voraus, ebenso wie Fuchs und Prieß-Crampe, die den Satz in ihre Arbeiten mitaufnahmen. Der Satz 3.2.8 impliziert weiterhin die o-Isomorphie zwischen der Gruppe der ordnungserhaltenden Automorphismen der archimedischen Gruppe und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen. [PC83]

3.3 Die angeordnete Menge konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten Gruppe. Wir benötigen einige Eigenschaften dieser Menge an speziellen Untergruppen später zum Beweis der zentralen Aussage des Kapitels, dem Hahnschen Einbettungssatz. Untergruppen teilweise geordneter Gruppen besitzen eine durch die teilweise Gruppenordnung induzierte teilweise Ordnung. Wir bezeichnen die Untergruppen als angeordnet, falls die ursprüngliche teilweise Ordnung ebenso eine Anordnung war.
Sei $(G, +)$ eine Gruppe, U eine Untergruppe und $g \in G$. Wir untersuchen nun die bezüglich der Inklusion linear angeordnete Menge Σ konvexer Untergruppen von G. Wir definieren konvexe Untergruppen wie in [PC83, S. 3].

3.3.1 Definition

Eine Untergruppe U einer angeordneten Gruppe G nennen wir *konvex*, wenn aus $a \in U$, $x \in G$, mit $0 < |x| < |a|$ folgt $x \in U$.

„Σ" bezeichne nun die *Menge konvexer Untergruppen* einer angeordneten Gruppe $(G, +)$.

3.3.2 Definition

Sei $C, D \in \Sigma$, wenn $D \subset C$ und Σ keine weitere Untergruppe zwischen C und D enthält, nennen wir das Paar C, D *Sprung* in Σ und bezeichnen es mit $D \prec C$.

Nach [Fuc66, S. 81 - 83] besitzt Σ besitzt folgende Eigenschaften:

- S1: Die Vereinigung und der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen aus Σ liegen wieder in Σ.
- S2: Ist $C \in \Sigma$ und $g \in G$, so ist $g^{-1}Cg \in \Sigma$
- S3: Sei $D \prec C$ in Σ, so ist D normal in C und C/D ist isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.

Beweis:

Zu S1: Seien $C, D \in \Sigma$ konvexe Untergruppen der angeordneten Gruppe G und sei $c \in C, c \notin D$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, c ist bezüglich der Anordnung von G größer als das neutrale Element e. Da c nicht in D liegt, kann es kein Element $d \in D$ geben, sodass $e < c < d$, da in diesem Fall c in D liegen würde nach der konvexen Eigenschaft. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und daher gilt $D \subseteq C$. Damit folgt unmittelbar, dass sowohl der Schnitt konvexer Untergruppen wieder angeordnet und konvex ist, als auch die Vereinigung.
Zu S2: Für $g \in C$ ist offensichtlich $g^{-1}Cg = C \in \Sigma$. Falls $g \notin C$, so ist $g^{-1}Cg$ eine Untergruppe von G, denn für alle $c_1, c_2 \in C, g \in G$ ist $g^{-1}c_1 g \cdot g^{-1}c_2 g = g^{-1}c_1 c_2 g \in g^{-1}Cg$ und $g^{-1}c_1 g^{-1} = g^{-1}c_1{}^{-1}g \in g^{-1}C_1 g$. Die Anordnung von G überträgt sich auf $g^{-1}C_1 g$ und die Untergruppe ist konvex, da C nach Voraussetzung und G als triviale Untergruppe konvex ist.
Zu S3: Nach Voraussetzung gilt $D \prec C$ und offensichtlich erfüllt jedes Element $g \in G$ die Bedingung $g^{-1}D_1 g \prec g^{-1}C_1 g$. Weiterhin erhalten wir im Fall $g \in C$, dass $g^{-1}C_1 g = C$, und da $D \subset C$ ist $g^{-1}D_1 g = D$. Infolgedessen ist D normal in C und die Faktorgruppe C/D enthält, da in Σ keine Untergruppe zwischen C und D existiert, dementsprechend nur die trivialen konvexen Untergruppen. In C/D ist für jedes $c \in C/D$ die Menge $\{g \in C/D : \exists_{m,n \in \mathbb{Z}} m \cdot a \leq g \leq n \cdot a\}$. Damit ist C/D archimedisch und nach Satz von Hölder 3.2.7 isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen. □

3.4 Der Hahnsche Einbettungssatz

Wie in den vorherigen Paragraphen ausgeführt, sind archimedische Gruppen abelsch und isomorph zu Untergruppen der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Das heißt, es gibt einen injektiven monotonen Homomorphismus $f\colon G \mapsto (\mathbb{R}, +)$. Existiert ein weiterer solcher Homomorphismus $g\colon G \mapsto (\mathbb{R}, +)$, dann existiert genau eine reelle Zahl $r > 0$, mit $g(x) = r \cdot f(x)$ für alle $x \in G$, siehe Satz 3.2.8.
Da nur eine eingeschränkte Betrachtung geordneter Strukturen möglich war, stellte sich Hahn als einer der ersten 1907 der Fragestellung, ob es sogenannte nicht-archimedische Strukturen gibt, die eine gewisse Art der Vollständigkeit besitzen, ähnlich den reellen Zahlen.[Hah] In der abstrakten Algebra, die sich mit angeordneten abelschen Strukturen beschäftigt, lieferte Hahns Ausweitung des Satzes von Bettazi/Hölder 3.2.7, der sogenannte Hahnsche Einbettunsgssatz, eine wichtige Beschreibung für nicht-archimedische Anordnungen.

Wir betrachten eine total geordnete abelsche Gruppe Γ mit der Addition als Verknüpfung

von Gruppenelementen. Aus den in 3.2 vorgestellten Axiomen folgt, dass eine Gruppe archimedisch ist, wenn alle Elemente $a \in \Gamma$ mit $a \neq 0$ archimedisch äquivalent sind. Der Satz von Hölder besagt, jede angeordnete abelsche Gruppe ist archimedisch genau dann, wenn sie bis

auf Isomorphie einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R},+)$ entspricht. An die Stelle von $(\mathbb{R},+)$ tritt die sogenannte Hahn-Gruppe $\mathrm{H}(\Gamma, G_\gamma)$. Die Hahn-Gruppe ist ein spezieller Funktionenraum, unter dem wir das lexikographische Produkt der Gruppen G_γ über Γ verstehen, für das jede Gruppe G_γ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}+)$ ist. Falls wir archimedisch angeordnete Gruppen betrachten reduziert sich der Hahnsche Einbettungssatz auf den Satz 3.2.7, denn die archimedischen Klassen Ω bestehen nur aus der einelementigen Menge und somit gilt: $\mathbb{R}^\Omega = \mathbb{R}$.
Hahn bewies diese Aussage 1907 in seinem Werk „ Über nichtarchimedische Größensysteme“ in einem 27-seitigen Beweis, der von vielen Mathematikern heutzutage als transfiniter Marathon bezeichnet wird. Conrad lieferte 1953 als erster einen einfacheren Beweis des Einbettungssatzes, ein Jahr später übertrug Clifford die Aussage auf abelsche Gruppen.
Sei Γ eine angeordnete Menge und für jedes Element der Menge sei $(G_\gamma,+)$ eine angeordnete Gruppe. $\prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ bezeichnet das vollständige direkte Produkt der Gruppen G_γ. Wir definieren, ähnlich wie in 4.2.2, den Träger eines Elements f des direkten Produkts als $\mathrm{supp}(f) = \{y \in \Gamma : f(y) \neq 0\}$. [PC83]

3.4.1 Definition
Die Menge der Elemente aus $\prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ bezeichnen wir als das *lexikographische Produkt* $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$ der Gruppen G_γ, wobei $\gamma\in\Gamma$, wenn der Träger wohlgeordnet ist.

Das Lexikographische Produkt $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$ bildet eine Untergruppe von $\prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ und wir definieren den Positivbereich P folgendermaßen:

$$P = \{f \in \prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma : f\,(\min(\mathrm{supp}(f))) > 0\}.$$

Betrachte eine Teilmenge A von Γ, sodass für alle $\alpha \in A$ und für ein $y \in \Gamma$ gilt: $\alpha < y$. Die Menge $\prod_{\gamma\in A_{Lex}} G_\gamma$ ist bis auf o-Isomorphie eine konvexe Untergruppe von $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$.
Wir zeigen nun, dass diese Menge ein Normalteiler von $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$ ist. Mithilfe von Normalteilern können Faktorgruppen gebildet werden. Zu zeigen ist: $\prod_{\gamma\in A_{Lex}} G_\gamma$ ist invariant unter der Konjugation $-g+f+g = f$, wobei $f \in \prod_{\gamma\in A_{Lex}} G_\gamma$ und g$\in \prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$. Es gilt $\mathrm{supp}(f)$ $=\mathrm{supp}(-g+f+g)$, und damit ist $\prod_{\gamma\in A_{Lex}} G_\gamma$ ein Normalteiler von $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$. Die daraus konstruierte Faktorgruppe $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma / \prod_{\gamma\in A_{Lex}} G_\gamma$ ist o-isomorph zu $\prod_{\gamma\in\Gamma\setminus A_{Lex}} G_\gamma$.
Hahn benötigte, um auch die Einbettbarkeit nichtarchimedisch geordneter Gruppen in einen Funktionenraum zu zeigen, eine speziellere Menge als die im Hölderschen Einbettungssatz 3.2.7 verwendete additive Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R},+)$. Dazu konstruierte er die sogenannte *Hahn-Gruppe*.

3.4.2 Definition
Das lexikographische Produkt $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G_\gamma$, für das jede Gruppe G_γ, $\gamma\in\Gamma$ eine Untergruppe

von $(\mathbb{R},+)$ ist, bezeichnen wir als *Hahn-Gruppe.*

Sei $(G,+)$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\Gamma = [G] \setminus \{0\}$. Für $\gamma \in G$ bilden die konvexen Untergruppen $G_\gamma = \{x \in G : [x] < \gamma\}$ und $G^\gamma = \{x \in G : [x] \leq \gamma\}$ einen Sprung $G_\gamma \prec G^\gamma$ in Σ und damit gilt für jedes Element $0 \neq g \in G$, dass $g \in G^\gamma \setminus G_\gamma$. Die Faktorgruppe ist eine angeordnete archimedische Gruppe und damit nach dem Satz von Hölder (3.2.7) ordnungsisomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.[Hah]

In folgendem Lemma betrachten wir Vektorräume über einem Körper K. Banachschewski zeigte die Aussage in seinem Werk für Module über Schiefkörpern [Ban56, Lemma 4, S. 431 - 433], in unserem Fall genügt es, die Aussage auf Vektorräume über Körpern zu spezialisieren.

3.4.3 Lemma

Es gibt Abbildungen $\phi : S(V) \to S(V)$, wobei V einen K-Vektorraum bezeichnet und $S(V)$, die Menge der Untervektorräume von V, die jedem Element U von $S(V)$ einen Untervektorraum $\phi(U) \subseteq V$ zuordnen. Diese Abbildungen erfüllen folgende Eigenschaften für alle $U, W \in S(V)$:

(1) Aus $U \subseteq W$ folgt $\phi(U) \supseteq \phi(W)$,

(2) $W \cap \phi(W) = 0$ und $V = W \oplus \phi(W)$.

Beweis:

Wir wählen nun einen Untervektorraum A und betrachten die Menge der Untervektorräume davon, auf der wir Funktionen definieren, die die geforderten Eigenschaften erfüllen. $S(V)$ bestimmt auf jedem Untervektorraum A von V die Menge $S(V)_A$ aller $U \cap A$, $U \in S(V)$. Die Abbildungen auf $S(V)_A$ mit oben genannten Eigenschaften werden mit ϕ_A bezeichnet. Wir zeigen, dass der gewählte Untervektorraum A dem Vektorraum V entspricht, um das Lemma zu beweisen.
Dazu definieren wir zunächst eine Ordnung auf der Menge Φ, bestehend aus allen Abbildungen ϕ_A. Wählt man A als die Menge des Produkts aus den Körper- und Untervektorraumelementen $A = \{Ka \mid a \in V\}$, so sieht man sofort, dass die Menge derartiger Funktionen nicht leer ist. Es gilt für $\phi_A,\ \phi_B \in \Phi$, dass $\phi_A \geq \phi_B$ ist, wenn $A \subseteq B$ und $\phi_A(U \cap A) \subseteq \phi_B(U \cap B)$ für jedes $U \in S(V)$.
Wir zeigen nun, dass jede nichtleere geordnete Teilmenge von Φ ein minimales Element besitzt, damit gilt dann der Wohlordnungssatz.
Sei Ψ eine Kette in Φ, dann bezeichne $\mathfrak{B}$ die Menge aller B mit $\phi_B \in \Psi$ und $A = \bigcup B,\ B \in \mathfrak{B}$. In $S(V)_A$ ist also $\phi_A(U \cap A) = \bigcup \phi_B(U \cap B)$, wobei $B \in \mathfrak{B}$ und da Ψ eine geordnete Menge ist, gilt:
Wenn x ein Element von $(U \cap A) \cap \phi_A(U \cap A)$ ist, dann liegt x ebenso in $(U \cap B) \cap \phi_B(U \cap B)$ mit passendem B $\in \mathfrak{B}$ und daher ist $x = 0$.

Die Eigenschaft (2) ist erfüllt, da für B $= (U \cap B) \oplus \phi_B(U \cap B) \subseteq (U \cap A) \oplus \phi_A(U \cap A)$ für alle B $\in \mathfrak{B}$ folgt $(U \cap A) \oplus \phi_A(U \cap A) = A$.
Für $U \cap A \subseteq U' \cap A$ gilt auch $U \cap B \subseteq U' \cap B$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$. Da $\phi_B \in \Phi$ ist, erhalten wir $\phi_B(U \cap B) \supseteq \phi_B(U' \cap B)$. Aus A $= \bigcup B$ folgt, dass $\phi_A(U \cap A) \supseteq \phi_A(U' \cap A)$. Die Abbildung ϕ_A erfüllt also beide Eigenschaften und gehört somit zu Φ. Die Menge Φ ist fundiert geordnet. Daraus folgt, dass jede nichtleere Teilmenge von Φ ein minimales Element besitzt. Sei Φ_A ein minimales Element. Wir zeigen, dass $A = V$ folgt und somit das Lemma bewiesen ist.
Angenommen $A \neq V$, dann existiert ein Element $c \notin A$. Wähle $B = A \oplus Kc$, $c \in V$, wobei K der Körper ist über dem der Vektorraum V definiert ist. Für die Abbildung ϕ_B wählt man:

$$\phi_B(U \cap B) = \begin{cases} \phi_A(U \cap A) \oplus Kc, & \text{wenn } U \cap B \subseteq A, \text{ das heißt: } U \cap B = U \cap A, \\ \phi_A(U \cap A), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es wird gezeigt, dass die konstruierte Abbildung in der Kette Φ liegt, die, wie oben bewiesen, ein minimales Element besitzt. Nach Definition der Ordnung gilt $\phi_A \geq \phi_B$, da aus B $:= A \oplus Kc$ notwendigerweise A $\subseteq$ B folgt und nach Wahl unserer Abbildung gilt:

$$\phi_A(U \cap A) \subseteq \left\{ \begin{matrix} \phi_A(U \cap A) \oplus Kc, & \text{wenn } U \cap B \subseteq A, \text{ das heißt: } U \cap B = U \cap A, \\ \phi_A(U \cap A), & \text{sonst.} \end{matrix} \right\} = \phi_B(U \cap B)$$

Da $A \neq B$ nach Voraussetzung erfüllt ist, wäre $\phi_A \geq \phi_B$.
Sei $(U' \cap A) \subseteq A$, so erhält man $(U \cap A) \subseteq (U' \cap A)$, dass $\phi_B(U \cap B) = \phi_A(U \cap A) \oplus Kc \supseteq \phi_A(U' \cap A) \oplus Kc = \phi_B(U' \cap B)$. Im zweiten Fall, $(U' \cap B) \nsubseteq A$, erhält man $\phi_B(U \cap B) \supseteq \phi_A(U \cap A) \supseteq \phi_A(U' \cap A) = \phi_B(U' \cap B)$.
Die Abbildung ϕ_B erfüllt im ersten Fall, wie leicht zu sehen ist, die zur Zugehörigkeit zu Φ geforderte Eigenschaft (2). Im zweiten Fall gilt offensichtlich $(U \cap B) \nsubseteq A$, das heißt $B = (U \cap B) + \phi_A(U \cap A)$, da für $a \in A$, $0 \neq \lambda \in K$, $a + \lambda\, c \in (U \cap B)$ und wegen $A \subseteq (U \cap B) + \phi_A(U \cap A)$ liegt auch c $= (\lambda^{-1}(a + \lambda c - a)) \in (U \cap B) + \sigma_A(U \cap A)$. Weiterhin folgt aus $\phi_A(U \cap A) \subseteq A$ und da $\phi_A \in \Phi$ und somit die Eigenschaften (1), (2) erfüllt, gilt ebenso $(U \cap A) \cap \phi_A(U \cap A) = 0$. Damit erhält man $(U \cap B) \cap \phi_A(U \cap A) = 0$. Die Eigenschaft (2) ist also auch im zweiten Fall erfüllt.
Damit liegt $\phi_B \in \Phi$. Nach Definition von B gilt offensichtlich $A \neq B$ und somit $\phi_A > \phi_B$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von ϕ_A und folglich muss gelten $A = V$. □

Die folgende Aussage, zu deren Beweis obiges Lemma benötigt wird, stellt eine Variante des Hahnschen Einbettungssatzes dar, der anschließend formuliert wird. Die Beweisführung basiert auf der Arbeit Banachschewskis [Ban56, S. 431 - 433] und enthält Elemente, die Prieß-Crampe im Kapitel „Der Hahnsche Einbettungssatz“ [PC83, Satz 2, S. 16 - 18] verwendete.

3.4.4 Satz

Sei $(G,+)$ eine angeordnete teilbare abelsche Gruppe und $\Gamma = [G] \setminus \{[0]\}$. Es gibt einen injektiven o- Homomorphismus $\varphi : G \mapsto \prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G^\Gamma/G_\Gamma$, für den gilt $g \in G^\gamma \setminus G_\gamma$ genau dann, wenn γ das Minimum des Trägers von $\overline{g} = \varphi(g)$ ist und es folgt $\overline{g}(\gamma) = g + G_\gamma$.

Beweis:

G ist eine angeordnete, teilbare, abelsche Gruppe, nach 2.3.4 daher torsionsfrei. Der Struktursatz für teilbare abelsche Gruppen besagt, dass G als Vektorraum über den rationalen Zahlen betrachtet werden kann. Für eine konvexe Untergruppe U von G gilt, dass diese ebenfalls teilbar ist und, da G als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ gesehen werden kann, einen Untervektorraum von G darstellt. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $x \in U$ gibt es nämlich Elemente $h, k \in \mathbb{Z}$ mit $hx \leq \lambda x \leq kx$ und wegen $hx, kx \in U$ folgt $\lambda x \in U$.
Wie in Lemma 3.4.3 sei $S(G)$ die Menge der Untervektorräume von G und $\phi : S(G) \to S(G)$ eine Abbildung, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt. Damit gilt für alle $\gamma \in \Gamma$, dass die Gruppe $G = G^\gamma \oplus \phi(G^\gamma)$ ist. Jedes Element g aus G lässt sich darstellen als Summe:

$$g = g_\gamma + {g_\gamma}^\phi \text{ mit } g_\gamma \in G^\gamma \text{ und } {g_\gamma}^\phi \in \phi(G^\gamma)$$

Die Abbildung $\varphi : G \to \prod_{\gamma\in\Gamma} G^\gamma/G_\gamma$, $g \mapsto \overline{g}$, mit $\overline{g}(\gamma) = g_\gamma + G^\gamma$, wobei $g_\gamma \in G^\gamma$ wie oben, ist ein Monomorphismus. Die Injektivität folgt direkt aus deren Definition. Sei $g_1 = {g_1}_\gamma + {{g_1}_\gamma}^\phi$ und $g_2 = {g_2}_\gamma + {{g_2}_\gamma}^\phi$. Da $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ ist, folgt für $\overline{g_1}(\gamma) = {g_1}_\gamma + G^\gamma$ und $\overline{g_2}(\gamma) = {g_2}_\gamma + G^\gamma$, dass ${g_1}_\gamma = {g_2}_\gamma$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass es sich bei ϕ um einen Homomorphismus handelt.
Wir zeigen nun, dass für jedes Element der angeordneten, abelschen, teilbaren Gruppe G der Träger $\text{supp}(\overline{g})$ des Bildes unter φ wohlgeordnet ist. So erhalten wir, dass der Wertebereich der Abbildung auf die Menge $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G^\Gamma/G_\Gamma$, die nach Definition genau aus den Elementen besteht, deren Träger wohlgeordnet ist, eingeschränkt werden kann. Wir wählen eine nichtleere Teilmenge T des Trägers $\text{supp}(\overline{g}) = \{\gamma \in \Gamma\colon g_\gamma + G^\gamma \neq G^\gamma\}$. Die Vereinigung der Untergruppen $\bigcup_{\gamma\in T} G^\gamma =: G^T$ ist als Vereinigung konvexer Untergruppen nach 3.3 wieder konvex und ein Untervektorraum von G. Damit ist $g = x + y$, $x \in G^T$, $y \in \phi(G^T)$ bezüglich der Zerlegung $G = G^T \oplus \phi(G^T)$. Da $x \in G^T$ liegt, existiert ein $\beta \in T$ sodass x$\in G^\beta$. Nach Lemma 3.4.3 (1) gilt für $\gamma \in T$ und $G^\gamma \subseteq G^T$, dass $\phi(G^T) \subseteq \phi(G^\gamma)$. Also liegt auch $y \in \phi(G^\gamma)$ für $\gamma \in T$ und damit ist $\phi(G^\gamma)$ im Kern des Monomorphismus und da ϕ injektiv ist, erhält man $y_\gamma = 0$ für alle $\gamma \in T$.
Es ergibt sich für $g_\gamma = x_\gamma + y_\gamma$, $g = x_\gamma$ für $\gamma \in T$ und wir können für x natürlich auch ein $\beta \in T$ wählen, dass $x = x_\beta = g_\beta \in G^\beta \setminus G_\beta$. Die lineare Ordnung der Untervektorräume, wie in 3.4.3 liefert für $\gamma \in T$ und $\gamma \leq \beta$, dass $x \in G^\beta \subseteq G^\gamma$, also $x = x_\gamma = g_\gamma = x = g_\beta$. Damit ist $\beta \in T$ das kleinste Element in T und wir haben die Wohlordnung des Trägers $\text{supp}(\overline{g}) = \{\gamma \in \Gamma : g_\gamma + G^\gamma \neq G^\gamma\}$ gezeigt. Die Abbildung φ ist also ein injektiver Homomorphismus von G in das lexikographische Produkt $\prod_{\gamma\in\Gamma_{Lex}} G^\Gamma/G_\Gamma$.

Nun zeigen wir, dass für $g \in G^\gamma \setminus G_\gamma$, γ das Minimum des Trägers von $\overline{g} = \varphi(g)$ ist. Sei $g \in G^\gamma \setminus G_\gamma$, $g = g_\alpha$ wenn $\alpha \geq \gamma$ für alle $a \in \Gamma$ und g $\in G_\alpha$ mit $\alpha < \gamma$. Deswegen ist γ das minimale Element für das $g_\alpha + G_\alpha \neq G_\alpha$, für $\alpha \in \Gamma$ ist und damit das Minimum des Trägers von $\overline{g}$. Wir erhalten $\overline{g(\gamma)} = g + G_\gamma$. Sei nun γ das Minimum des Trägers von $\overline{g} = \varphi(g)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha < \gamma$, dass $g_\alpha \in G_\alpha$, wenn $g_\gamma \in G^\gamma \setminus G_\gamma$. Die Archimedische Klasse von g_γ entspricht γ und daher liegt auch das Element $g \in G^\gamma \setminus G_\gamma$.
Es bleibt nur noch zu zeigen, dass das Bild von positiven Elementen positiv bleibt, also die Ordnungstreue der Abbildung. Wähle $0 > g \in G$ und g $\in G^\gamma \setminus G_\gamma$. Natürlich ist $G_\gamma > g + G_\gamma = g_\gamma + G_\gamma$ und γ das Minimum des Trägers von $\varphi(g)$, also ist $\varphi(g)$ positiv. □

Auf die Voraussetzung der Teilbarkeit der gewählten Gruppe G kann in obigem Satz nicht verzichtet werden, denn in diesem Fall sind die Untergruppen G^γ, G_γ nur noch Untergruppen der teilbaren Hülle und nicht von A selbst.
Wir wählen nun eine angeordnete abelsche Gruppe $(A, +)$. Nach Satz 2.3.4 ist A torsionsfrei und lässt sich bis auf Isomorphie in die eindeutig bestimmte teilbare Hülle G einordnen 3.0.10, die die Anordnung von A fortsetzt, was leicht mithilfe des Positivbereichs zu zeigen ist. Die Menge der archimedischen Klassen von A ist bijektiv und ordnungstreu zur Menge der archimedischen Klassen der Hülle, deswegen setzen wir diese gleich.
Die Gruppen $G^\gamma \setminus G_\gamma$ erfüllen die archimedische Eigenschaft und es gilt der Satz von Hölder 3.2.7. Damit gibt es eine ordnungstreue Einbettung τ des Lexikographischen Produkts der Gruppen $\prod_{\gamma \in \Gamma_{Lex}} G^\Gamma / G_\Gamma$in die Hahn-Gruppe $\mathrm{H}(\Gamma, \mathbb{R})$.
Wir können nun die zentrale Aussage des Kapitels formulieren, den **Hahnschen Einbettungssatz**:

3.4.5 Satz
Eine angeordnete abelsche Gruppe A lässt sich ordnungstreu in die Hahn-Gruppe H(Γ*,* $\mathbb{R}$*) einbinden, wobei* $\Gamma = [A] \setminus \{[0]\}$.

Insgesamt erhalten wir also eine Reihe von Einbettungen, die zeigt, dass der Satz von Banachschewski 3.4.4 den Hahnschen Einbettungssatz impliziert.

$$A \hookrightarrow G \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \prod_{\gamma \in \Gamma_{Lex}} G^\Gamma / G_\Gamma \overset{\tau}{\hookrightarrow} H(\Gamma, \mathbb{R})$$

Kapitel 4

Potenzreihenkörper

Die aus der Analysis bekannten Potenzreihen stellen ein bekanntes und wichtiges Werkzeug dar. In mathematischen Gebieten, wie der Kombinatorik, Automaten- und Kontrolltheorie ermöglichen sie sowohl eine kompakte Darstellung von Summenformeln als auch deren Auffindung. Potenzreihen können ebenso über den Weg der Algebra definiert werden, durch die Folge ihrer Koeffizienten. Die algebraische Sichtweise zieht den neuen Aspekt mit sich, dass grundsätzlich auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet wird und dadurch auf beliebigen Körpern und Ringen gearbeitet werden kann.
Diese sogenannten formalen Potenzreihen in einer Unbekannte z, auf den natürlichen Zahlen, deren Koeffizienten in einem beliebigen Körper K liegen, bilden einen Ring $K[[z]]$. Aufbauend darauf stellen wir einen Zusammenhang zu den, in der Funktionentheorie häufig verwendeten, Laurentreihen her. Der Ring formaler Potenzreihen ist ein Integritätsring, woraus folgt, dass dieser in einen kleinsten Körper eingebettet werden kann. Dieser Quotientenkörper von $K[[z]]$ entspricht genau dem Körper, den die Laurentreihen $K((z))$ formen. Potenzreihen bilden somit algebraische Strukturen, deren Beschaffenheit von dem Träger der Reihen abhängt. Daher stellt sich die Frage, ob die formalen Potenzreihen weiter verallgemeinert werden können und welche Voraussetzungen der Träger erfüllen muss, damit diese allgemeinen formalen Potenzreihen einen Körper ergeben. Das Kapitel endet mit dem Beweis der zentralen Aussage, dass die Menge der formalen Potenzreihen auf einer angeordneten Gruppe über einem beliebigen Körper, unter der Voraussetzung eines wohlgeordneten Trägers, ein Körper ist.

4.1 Der Potenzreihenring

Wir betrachten im Folgenden die Menge der formalen Potenzreihen $K[[z]]$ über einem beliebigen Körper K. Dabei repräsentiert z keine Variable, die für eine Zahl steht, sondern eine Unbestimmte. Konvergenzbetrachtungen sind in der Theorie der formalen Potenzreihenringe und -körper daher irrelevant.

Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^1 + a_2 z^2 + ... \tag{4.1}$$

, wobei $a_n \in K$, heißt formale Potenzreihe in der Unbestimmten z. Wir bezeichnen die Menge der formalen Potenzreihen in z auf $\mathbb{N}$ über K mit

$$K[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in K\}$$

.

4.1.1 Rechnen im Potenzreihenring

Im Folgenden werden Addition und Multiplikation in $K[[z]]$ definiert. Mit diesen Verknüpfungen wird $K[[z]]$ zu dem Ring der formalen Potenzreihen.
Formale Potenzreihen werden komponentenweise addiert:

$$+ : K[[z]] \times K[[z]] \to K[[z]], \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Die Multiplikation zweier formaler Potenzreihen erfolgt durch die sogenannte Faltung:

$$\cdot : K[[z]] \times K[[z]] \to K[[z]] : \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0)\, z_n$$

Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Das *neutrale Element der Addition* 0_R ist die Nullreihe $g(z) :=$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $b_k = 0$ für alle k $\in \mathbb{N}$. Denn wir erhalten als Summe von $g(z)$ und $f(z)$:

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Weiterhin gilt:

$$f(z) + (-f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + (\sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n) z^n = 0_R.$$

Wir bezeichnen daher $-f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) z^n$ als das *Inverse der Addition.*
Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die Einsreihe. Darunter verstehen wir diejenige

Reihe, bei der nur der konstante Koeffizient $a_0 = 1$ und alle anderen gleich 0 sind:

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

, wobei

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 0 \text{ für alle n } \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

.

Damit folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j \cdot b_k)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Für das *Inverse der Multiplikation* muss für zwei Potenzreihen $f, g \in K[[z]]$ nach Definition der Multiplikation gelten:

$$fg = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n \stackrel{!}{=} 1$$

Sei $c_n = \sum_{j+k=n}(a_j b_k)$. Damit das Produkt der Potenzreihen dem neutralen Element der Multiplikation entspricht, müssen alle Koeffizienten mit Indizes größer Null den Wert 0 annehmen, während $c_0 = 1$ gilt. Wir zeigen zunächst, dass zu einer formale Potenzreihe $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ genau dann die inverse Potenzreihe existiert, wenn $a_0 \neq 0$.

4.1.1 Satz

Sei $K[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist eine formale Potenzreihe $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann eine Einheit, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Beweis:

“ $\Leftarrow$ “ Beweis über Induktion:

Sei $a_0 \neq 0$ dann folgt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k)\, z^n \stackrel{!}{=} 1$. Wir müssen nun eine entsprechende Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_m z^m$ finden.

Für b_0 muss folgende Gleichung erfüllt sein: $a_0 b_0 = 1$. Da a_0 ungleich null ist besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung: $b_0 = a_0^{-1}$.

Angenommen es existiert ein b_k mit $k < n$, sodass alle $c_m := a_j b_k$, für $1 \leq m < n$, gleich 0 sind. Für den n-ten Koeffizienten ergibt sich $0 = c_m = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$. Bis auf b_n sind alle Werte festgelegt. Da a_0 ungleich 0 ist, ist die Lösung für b_n eindeutig.

“ $\Rightarrow$ “ Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = 1$.

Nach der Voraussetzung folgt $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$ für $n > 0$. Daraus folgt unmittelbar $a_0 b_0 = 1$ und somit muss a_0 ungleich 0 sein. $\square$

Wir haben gezeigt, dass die Einheiten des Potenzreihenrings genau die Elemente sind deren konstanter Term ungleich 0 ist. In diesem Fall können wir die inverse Potenzreihe

$g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ konstruieren:

$$\text{Da } c_0 = 1 \text{ gilt: } a_0 b_0 = 1. \text{ Daraus folgt: } b_0 = \frac{1}{a_0}$$

Für die restlichen Koeffizientenwerte gilt:

$$\sum_{j+k=n} (a_j b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 0. \tag{4.2}$$

Die Koeffizienten b_n werden rekursiv durch diese Gleichungen definiert und die so entstandene Potenzreihe ist die Inverse.

4.1.2 Beispiel

Es sei $q \in \mathbb{R}$ beliebig und $A(z) := \sum a_n z^n$ mit $a_n := q^n$ gleich der geometrischen Reihe. Wir bestimmen die inverse Potenzreihe $B(z) = \sum b_n z^n$. Dazu wenden wir die Formel aus (**??**) an:

$b_0 = \frac{1}{a_0} = 1,$

$b_1 = -a_1 b_0 = -q,$

$b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) = -\left(-q^2 + q^2\right) = 0,$

...

$b_n = -(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) = -\left(-q^{n-1}(-q) + q^n\right) = 0.$

für alle $n \geq 3$ folgt induktiv, dass ebenso $b_n = 0$ gilt. Die inverse Potenzreihe zu $A(z)$ ist $B(z) := b_0 + b_1 z = 1 - qz$. Daraus können wir schließen:

$$\forall z \in \mathbb{R} \text{ mit } |z| < |\frac{1}{q}| : A(z) = \sum a_n z^n = \frac{1}{1 - qz}$$

4.1.2 Eigenschaften des Potenzreihenrings

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Potenzreihenring auch ein Integritätsring ist. Im Körper $\mathbb{C}$ betrachten wir den Zusammenhang zwischen $K[[z]]$ und dem Ring der konvergenten Potenzreihen.
Wir beweisen weiterhin, dass $K[[z]]$ ein Integritätsring und damit nullteilerfrei ist. Wir wissen also, dass der Ring in einen kleinsten Körper, den Quotientenkörper, eingebettet werden kann

4.1.3 Satz

Der Ring $K[[z]]$ ist ein Integritätsring.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass der Ring nullteilerfrei ist.
Seien $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$f(z) \cdot g(z) = \sum a_n z^n \cdot \sum b_n z^n = 0.$$

Nach Definition der Multiplikation gilt also: $\sum_{j+k=n} a_j b_k = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$ Sei nun o.B.d.A. $\sum a_n z^n \neq 0$. Wir zeigen, dass die Potenzreihe $\sum b_n z^n$ gleich null ist. Es soll also kein Index n existieren, für den $b_n = 0$ ist und somit für $b_0, b_1, ..., b_{n-1} = 0$ folgt $b_n = 0$,, für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei k der erste Index, sodass $a_k \neq 0$ gilt.

$$\sum_{k+l=k} a_k b_l = \sum_{k+0=k} a_k b_0 = 0.$$

Damit gilt $b_0 = 0$. Seien jetzt $b_0 ... b_{n-1} = 0$. Mit $\sum_{k+l=n+l} a_k b_{n-k} = a_l b_n = 0$. Es folgt daher auch $b_n = 0$. □

Da Konvergenzbetrachtungen nur im Körper der reellen und komplexen Zahlen Sinn machen, beschränken wir uns in folgendem Satz auf $\mathbb{C}$.

4.1.4 Satz
Sei $\mathbb{C}\langle z\rangle$ die Menge der konvergenten Potenzreihen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}\langle z\rangle$ ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[z]$.

Beweis:

Wir haben bereits in 4.1.3 gezeigt, dass $\mathbb{C}[[z]$ ein Integritätsring ist. Nun bleibt für $\mathbb{C}\langle z\rangle$ noch zu beweisen, dass die Summe und das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen wieder konvergent ist.
Betrachte zwei konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2. Innerhalb des $\min\{r_1, r_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen und somit auch die Summe der beiden Potenzreihen. Das Produkt besitzt denselben Konvergenzradius, da beide Reihen im Radius $\min\{r_1, r_2\}$ absolut konvergieren und nach dem großen Umordnungssatz konvergiert auch das Cauchyprodukt gegen den gleichen Wert. □

Im nächsten Teil können wir zeigen, dass der Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen, dem Körper der formalen Laurentreihen entspricht, auf den wir später näher eingehen werden. Anschließend definieren wir eine entsprechende Bewertung auf dem Körper der formalen Laurentreihen.

4.2 Der Körper der formalen Laurentreihen

Eine Erweiterung des Begriffs einer formalen Potenzreihe führt zu der formalen Laurentreihe. Diese unterscheidet sich bezüglich ihres Anfangsindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ von den formalen Potenzreihen.

Wir bezeichnen mit $K((z))$ die Menge aller Abbildungen f von $\mathbb{Z}$ in einen kommutativen Körper K, für die es ein Element $x \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $f(y) = 0$ für alle $y < x$. Wenn wir von K sprechen, ist im Folgenden immer ein kommutativer Körper gemeint.
Laurentreihen spielen eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie, da sie komplexe Funktionen beschreiben, welche auf einem Kreisring holomorph sind. In dieser Arbeit wird jedoch auf Konvergenzbetrachtungen verzichtet und nur formale Laurentreihen, also Laurentreihen in einer Unbestimmten z behandelt. Das Kapitel basiert auf Ausführungen Lüneburgs [Lü08, S. 563 - 572].

4.2.1 Definition
Eine Laurentreihe ist eine Reihe $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ mit $k \in \mathbb{Z}, n \geq -k$, und $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei K ein kommutativer Körper ist. Dabei bezeichnet $\sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^{-n}$ den Hauptteil, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Nebenteil der Laurentreihe.

Wir definieren $K((z))$ als die Menge der Abbildungen f von $\mathbb{Z}$ in den kommutativen Körper K, für die es ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit $f(i) = 0$ für alle $i < a$. Im Unterschied zu der funktionentheoretischen Verwendung der Laurentreihen betrachten wir nur Laurentreihen mit endlich vielen negativen Summanden. Diese Beschränkung ist notwendig, da andernfalls die Multiplikation nicht definiert werden kann.

4.2.2 Definition
Der Träger der Laurentreihe, also der Definitionsbereich der Funktion, die die Laurentreihe darstellt, ist folgendermaßen definiert: $\text{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$.

Zwei Laurentreihen werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koeffizienten addiert:

$$+: \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=min(-k,-m)}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Wie bereits erwähnt, besitzen formale Laurentreihen nur endliche viele Terme mit negativen Exponenten, das bedeutet der Hauptteil besteht aus nur endlich vielen Summanden. Deswegen kann das Produkt zweier solcher Reihen durch Faltung definiert werden.

$$\cdot: \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-m-k}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i + b_j) z^n.$$

4.2.3 Satz
Sei K ein kommutativer Körper und bezeichne $K((z))$ die Menge der formalen Laurentreihen. Dann ist $K((z))$ ein Körper.

Beweis:

Sei $0 \neq f \in K((z))$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{Z}$, sodass $f = \sum_{n=i}^{\infty} a_n z^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq i$ ungleich Null ist und für alle $n < i$ gleich Null ist. Um zu zeigen, dass $K((z))$ ein Körper ist, muss zu jedem Element von $K((z))$ ein Inverses existieren. Wir definieren $g \in K((z))$ rekursiv und zeigen, dass die so definierte Laurentreihe invers zu f ist.
Setze $g(n) := 0$ für alle $n < -i$ und $g(-i) := f(i)^{-1}$. Sei $w \in \mathbb{N}$ und $g(-i), ..., g(-i+w-1)$ bereits definiert. Dann gilt nach Definition der Multiplikation in $K((z))$ und für $g(-i+w) := -f(i)^{-1} \sum_{m=-i}^{-i+w-1} g(m)f(w-m)$ erhalten wir:

$$(gf)(w) = \sum_{n=i-i}^{\infty} \sum_{k+l=n} (a_k + b_l)\, z^n = \sum_{n=-i}^{-i+w} g(n)f(w-n).$$

Im Fall $w < 0$ ist die Summe $f(w-n)$ für $-i \leq n \leq -i+w$ leer. Für $w = 0$ folgt $gf(0) = g(-i)f(i) = 1$. Es bleibt der Fall $w > 0$ zu berücksichtigen:

$$(gf)(w) = \sum_{n=-i}^{-i+w-1} g(n)f(w-n) + g(-i+w)f(i) = 0.$$

Also ist $gf = 1$ und aufgrund der Kommutativität folgt $fg = 1$, womit $K((z))$ ein Körper ist.

□

Mithilfe von 2.1.8 zeigen wir nun, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht.

4.2.4 Satz
Es gilt $K((z)) = Quot(K[[z]])$.

Beweis:

Nach Konstruktion von $K((z))$ ist klar, dass $K[[z]] \subseteq K((z))$. Betrachte die Abbildung:

$$\Phi : K((z)) \to \ \mathrm{Quot}\,(K[[z]])$$
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} [z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-m}] & \text{, falls } m < 0 \\ [\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n] & \text{, falls } m \geq 0 \end{cases}$$

Wir weisen nach, dass Φ ein Körperisomorphismus ist. Wir beschränken unsere Abbildung, um Fallunterscheidungen zu vermeiden auf $z^k := 1$ für alle $k \leq 0$. Sei $m \leq l$:

$$\Phi\left(\sum_{n=m} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=l} b_n z^n\right)$$

$$= [z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n,\ z^{-m}] =$$

$$[z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-m}] + [z^{-m} \sum_{n=l}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-m}] =$$

$$[z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-m}] + [z^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-l}] =$$

$$\Phi \left(\sum_{n=m} a_n z^n \right) + \Phi \left(\sum_{n=l} b_n z^n \right)$$

Damit ist Φ bezüglich der Addition ein Homomorphismus. Nun zur Multiplikation:

$$\Phi \left(\sum_{n=m} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=l} b_n z^n \right)$$

$$= [z^{-m} \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n \right),\ z^{-m}] =$$

$$[\left(z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right) \left(z^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n \right),\ z^{-m} z^{-l}]$$

$$= [z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-m}] \cdot [z^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} a_n z^n,\ z^{-l}]$$

$$= \Phi \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \Phi \left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n \right)$$

Der Homomorphismus ist bijektiv, denn das Bild jedes Elements
$q := [\sum_{n=m} a_n z^n,\ \sum_{n=l} b_n z^n]$ liegt in $Quot\,(K[[z]])$, für $\sum_{n=l} b_n z^n \neq 0$. Der Kern der Abbildung ist das neutrale Einselement und da Φ ein Homomorphismus ist, gilt die Injektivität. Jede Laurentreihe $f = \sum_{n=l}^{\infty} b_n z^n$ kann deswegen in die Gestalt $z^l \sum_{n=l}^{\infty} c_n z^n$ für $c_0 \neq 0$ gebracht werden. Nach 4.1.1 kann diese Reihe invertiert werden und wir erhalten:

$$[\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)^{-1},\ z^l]$$

$$= \Phi \left(z^{-l} \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)^{-1} \right)$$

Da somit jede Laurentreihe $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ die Gestalt $[g,\ z^- m]$ für ein $m \in \mathbb{N}$ hat, mit $g \in K[[z]]$ und $m \in \mathbb{N}$, ist $K((z))$ der Quotientenkörper (siehe 2.1.8) von $K[[z]]$. $\square$

Für $K((z))$ gilt, dass der Körper nur Reihen mit Hauptteilen aus endlichen vielen Summanden enthält. $K((z))$ entspricht, wie in 4.2.4 gezeigt, dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen. Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 \neq 0$ ist invertierbar in $K[[z]]$ (siehe 4.1.1). In jedem Quotient $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m}$ kann aufgrund dieser Eigenschaft alles, bis auf eine Potenz von z, aus dem Nenner gekürzt werden. Da $\sum_{n \geq k}^{\infty} a_n z^n = z^k \sum_{n \geq 0} a_{n+k} z^n$ ist, enthält $K((z))$ nur Reihen, deren Hauptteil nur endlich viele negative Summanden hat.
Die formalen Laurentreihen bilden einen Oberring der Potenzreihen und stellen als Körper eine Körpererweiterung von K um das transzendente Element z dar.

4.2.5 Satz

Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\langle z \rangle$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen $\mathbb{C}_L\langle z \rangle$.

Beweis:

Wie in Beweis 4.2 konstruieren wir das formale Inverse zu einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}\langle z \rangle$ mit $a_0 \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass das Inverse konvergiert. Nach Voraussetzung konvergiert f und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in f beschränkt ist, also $|a_n| \leq a$, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $a \in \mathbb{C}$.
Betrachte $f(z_0) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z_0{}^n$ eine konvergente Laurentreihe mit $|z_0| > 0$. Da $f(z_0)$ konvergiert, ist die Folge $(a_n|z_0|)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und für die Potenzreihe gilt:

$$\overline{f}(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0{}^n \frac{z}{z_0}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \text{ mit } \omega := \frac{z}{z_0}$$

Wir nehmen an, dass die Schranke a der Koeffizientenfolge a_n größer 1 ist und es sei ohne Einschränkung $a_0 = 1$. Wir betrachten die Koeffizientenfolge b_n des Inversen wie in 4.2. Es gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Indem wir zeigen, dass $|b_n|$ beschränkt ist durch ein Vielfaches von a^n geben wir eine positive untere Schranke des Konvergenzradius an und zeigen somit, das Inverse konvergiert. Wir beweisen durch Induktion, es existiert ein $C > 1$ mit $C \in \mathbb{R}$ sodass:

$$|b_n| \leq (aC)^n$$

Nach Konstruktion des Inversen 4.2 ist die Ungleichung für b_0 erfüllt. Gelte die Abschätzung für b_n. Wähle $C := \frac{a}{a-1}$. Dann erhalten wir:

$$|b_{n+1}| = |-\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq a \sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq a\ C^n \sum_{k=1}^{n+1} a^k$$

$$\leq a\, C^n \, \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (a\, C)^{n+1}\,.$$

Wie in 4.2.4 zeigt man nun, dass es einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper der konvergenten Potenzreihen und dem Körper der konvergenten Laurentreihen gibt. Des weiteren ist noch zu zeigen, dass die Summe sowie das Produkt zweier konvergenter Laurentreihen wieder konvergent ist. Dies wurde bereits in 4.1.4 für Potenzreihen gezeigt. Die Summe zweier konvergenter Laurentreihen f, g ist ebenso konvergent, es genügt, den Nebenteil betrachten. Um die Konvergenz des Produktes zweier konvergenter Laurentreihen zu beweisen, multipliziere man diese so mit den Potenzen von z, dass man eine konvergente Potenzreihe erhält und geht wie in 4.1.4 vor. Nun definieren wir wie in 4.2.4 die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}_L\langle z\rangle \to Quot(\mathbb{C}\langle z\rangle)$$

$$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n \mapsto \begin{cases} [(z^m \sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n,\ z^m)] & \text{wenn } m < 0, \\ [\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n] & \text{wenn } m > 0. \end{cases}.$$

Die Abbildung Φ ist, wie in 4.2.4 bereits gezeigt, ein Isomorphismus und die Behauptung ist bewiesen. □

Nun versuchen wir auf dem Körper der Laurentreihen eine Bewertung finden. Dazu betrachten wir zunächst den Träger 4.2.2 der Laurentreihe $\text{supp}(f) := \{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$. Nach 2.2.2 suchen wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus (nach B3' 2.2.2). Betrachte $\min\{(\text{supp}(f))\}$, eindeutig bestimmt durch den kleinsten Index n_0 der Laurentreihe, ab dem der Koeffizient $a_{n_0} \neq 0$ ist. Die Menge all dieser Elemente bildet eine angeordnete abelsche Gruppe Ψ und es gibt einen Isomorphismus von $\psi :\ \Psi \to \mathbb{Z}$.

4.2.6 Satz

Die Abbildung v: $K((z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $v(f) = min\,(supp(f))$ ist eine diskrete Bewertung.

Beweis:

Klar: Die Abbildung ist surjektiv, da es zu jeder ganzen Zahl eine Laurentreihe mit diesem Startwert gibt und damit $v(f) = \min\{(\text{supp}(f))\}$. Nach 2.2.2 sind noch (B1'-B3') nachzuweisen mit der angeordneten abelschen Gruppe $(\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, +)$ als Bildmenge.

zu B1' : Klar nach Definition.

zu B2' : Sei $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m z^m$, mit $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Dann ist v(f) $= n_0$ und v(g) $= m_0$. Damit gilt: v(f) + v(g) $= n_0 + m_0$.

$$v(fg) = v(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{n=m+k} a_m b_k z^n) \overset{!}{=} v(f) + v(g)$$

, wobei $a_m = 0$ für $m < n_0$ und $b_k = 0$ für $k < m_0$. Betrachte $n < n_0 + m_0$. Da $n = m+k$ folgt m $< n_0$ oder k $< m_0$. Nach Voraussetzung folgt entweder $a_m = 0$, oder $b_k = 0$ und somit ist auch das Produkt $a_m b_k = 0$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{m_0} \neq 0$. Sei n $= n_0 + m_0$. Das Produkt $a_{n_0} b_{m_0}$ ist ungleich Null und daher folgt: v(fg) $= n_0 + m_0 = v(f) + v(g)$.

zu B3' : Für $v(f+g)$ gilt, wenn f, g wie oben definiert:

$$v\,(f+g) =$$

$$v\left(\sum_{n=\min\{n_0,m_0\}}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\right) = \min\,\{n_0, m_0\} \leqslant \max\,\{n_0, m_0\} \overset{\text{def}}{=} \max\,\{v(f), v(g)\}.$$

□

Wie wir in 4.2.4 gezeigt haben, ist der Körper der Laurentreihen eine Obermenge des Rings der Potenzreihen $K[[z]]$. Nachdem wir auf $K((z))$ bereits eine Bewertung definiert haben, weisen wir nach, dass es sich auch bei $K[[z]]$ um einen diskreten Bewertungsring 4.2.7 handelt und wir darauf eine Bewertung definieren können.

4.2.7 Satz
$K[[z]]$ ist ein diskreter Bewertungsring.

Beweis:

Wie im vorherigen Satz gezeigt, existiert auf dem Körper der Laurentreihen eine diskrete Bewertung. Wie wir in 4.2.4 bewiesen haben, ist der Quotientenkörper von $K[[z]]$ dieser Körper der Laurentreihen. Nach Definition des diskreten Bewertungsring 4.2.7 gilt der Satz. Nach 4.1.1 folgt, $K[[z]]$ besitzt genau ein maximales Ideal nämlich $\mathfrak{m} = (z)$. Für eine Potenzreihe P, mit $P \notin K[[z]]^*$ gilt $a_0 \neq 0$. Somit lässt sich jede derartige Potenzreihe schreiben als $P = T\widetilde{P}$, wobei $\widetilde{P}$ die umindizierte Potenzreihe bezeichnet.
Die Nullteilerfreiheit folgt wie in 4.1.3 ausführlicher gezeigt, denn: Für die Produktreihe FG, wobei $F, G \in K[[z]]$ und F, G von Null verschieden, gilt, dass ab den Indizes i, j gilt a_i, $b_j \neq 0$ und somit $c_n := a_i b_j \neq 0$. Der Hauptidealring $K[[z]]$ ist noethersch, denn jedes Ideal ist erzeugt von z^j, wobei j der kleinste Index ist, ab dem die Koeffizienten c_n der Potenzreihen ungleich 0 in dem Ideal sind. Für das maximale Ideal muss nämlich gelten, dass es von einem Element erzeugt wird, für das gilt $a_0 = 0$. Andernfalls wäre die entsprechende Potenzreihe eine Einheit und würde somit ganz $K[[z]]$ erzeugen. □

Damit folgt, dass $K[[z]]$ isomorph zu einem, wie in Punkt 3 beschriebenen Bewertungsring

$A := 0 \cup \{x \in K * | v(x) \geqslant 0\}$ ist.
Wie in obigem Beweis 4.2.7 gezeigt, gilt: $(z) \subset (z^2) \subset (z)^3 \subset (z)^4 \subset ....$

4.2.8 Lemma
Ist R ein diskreter Bewertungsring, so ist Quot(R) ein diskret bewerteter Körper mit der Bewertung $v(a/b) = v(a) - v(b)$.

4.3 Der Potenzreihenkörper

Die Grundlagen zur Konstruktion eines Körpers über sehr allgemein definierten formalen Potenzreihen untersuchte Hahn 1907 in seiner Arbeit „Über nichtarchimedische Größensysteme". Er stellte im Rahmen seines Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes 3.4 zuallererst die sogenannten Hahnschen Potenzreihen zunächst als Gruppen 3.4.2 vor. Die so definierten Potenzreihen erlaubten nicht nur Exponenten der Unbestimmten aus der Menge der ganzen Zahlen, sondern aus beliebigen wohlgeordneten Untergruppen der Wertegruppe. Hahn formulierte als einer der ersten Mathematiker Potenzreihen mit verallgemeinerten Exponenten, wie:

$$f = 1 + z^{log2} + z^{log3} + z^{log4} + ...$$
$$g = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}z^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{8}z^{\frac{7}{8}} + ... + z + \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + ... + 2z^2 + ...$$

Hahn konnte im Laufe des Beweises des Hahnschen Einbettungssatzes zeigen, dass die nach ihm benannten Potenzreihen nicht nur eine Gruppe, wie ursprünglich angenommen, bilden. Während seiner Beschäftigung mit Hilberts siebzehntem Problem untersuchte er die Hahnschen Potenzreihen hinsichtlich ihrer Körpereigenschaften. Neben Hahn beschäftigten sich auch die beiden Mathematiker Neumann und Mal'cev mit den von Hahn konstruierten Reihen und deren Einbettung in einen Körper.
Bevor wir uns der Konstruktion der formalen Potenzreihen zuwenden, wird die Rolle des Trägers der Potenzreihen bei der Konstruktion von Potenzreihenkörpern genauer erörtert.

4.3.1 Potenzreihenstrukturen mit Träger über den ganzen Zahlen

Wir kennen bereits die in 4.1 definierten Potenzreihen sowie ihre Verallgemeinerung, die Laurentreihen. Bisher haben wir uns nur mit Potenzreihen beschäftigt, deren Elemente auf einer Teilmenge der ganzen Zahlen indiziert werden. Die Exponenten der Unbestimmten der induzierten algebraischen Struktur $(K[[z]], K((z)))$ gehören in beiden Fällen ebenso einer Teilmenge der ganzen Zahlen an.
Betrachten wir den Körper der formalen Laurentreihen über dem Körper K. Wie in 4.2.2 definiert, ist `T` eine Teilmenge der ganzen Zahlen und da für jede Teilmenge ein Minimum existiert, ist `T` wohlgeordnet nach 2.3.5. Die Wohlordnung des Trägers ist eine Voraussetzung

zur Definition der Multiplikation im Körper $K((z))$. Nun stellt sich die Frage, ob es noch allgemeinere Gruppen, als die Menge der natürlichen, oder ganzen Zahlen gibt, auf denen ein wohlgeordneter Träger von Potenzreihen definiert werden kann.

4.3.2 Formale Potenzreihen auf angeordneten abelschen Gruppen

Wir haben im vorherigen Gliederungspunkt festgestellt, dass die bisher betrachteten Potenzreihen immer auf Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (Potenzreihenring $K[[z]]$) oder den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (Laurentreihenkörper $K((z))$) konstruiert waren. In 4.3.1 wurde gezeigt, dass den Mengen, auf denen wir Potenzreihenringe definieren können, eine bestimmte, unverzichtbare Eigenschaft innewohnt: die Wohlordnung. Im Folgenden betrachten wir bestimmte Arten von Mengen, nämlich die bereits in dem vorherigen Kapitel 3 vorgestellten angeordneten abelschen Gruppen. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Fuc66, S. 194 - 199], [Hah, S. 601 - 655] und [PC83, S. 49 - 64].

Sei Γ eine total geordnete abelsche Gruppe. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit ausschließlich mit der additiv geschriebenen Gruppe Γ. Die Äquivalenzklassen, die durch die archimedische Gleichheit 3.2.4 entstehen, bilden eine total geordnete Menge, wir bezeichnen sie mit Π. Durch jedes positive Element $a \in \Gamma$, respektive seine Äquivalenzklasse $[a] = \pi$ werden zwei konvexe Untergruppen L_π, U_π definiert.
Für einen Körper K und $(\Gamma, +)$ eine angeordnete, abelsche Gruppe, bezeichnen wir mit $\mathrm{H}\ (\Gamma, K)$ die Menge aller Funktionen von Γ nach K. Wir nennen eine derartige Funktion $F\colon \Gamma \to K$, die in der Anordnung von Γ einen wohlgeordneten Träger besitzt eine formale Potenzreihe auf Γ über K.
Die Addition derartiger Funktionen F, G ist definiert durch:

$$(F+G)\,(x) = F(x) + G(x) \text{ für alle } x \in \Gamma.$$

Sei $\lambda \in K$ dann ist

$$(\lambda G)\,(x) = \lambda F(x) \text{ für } x \in \Gamma,\ \ \lambda \in K \text{ und } F \in K[[\Gamma]].$$

Dementsprechend definieren wir die Gesamtheit dieser Elemente. Sei $(\Gamma, +)$ eine angeordnete, abelsche Gruppe und K ein Körper.

4.3.1 Definition
Sei $F := \sum_{x\in\Gamma} \Phi_x z^x$ mit den Koeffizienten $\Phi_x \in K$. Man nennt F eine *formale Potenzreihe* auf Γ über K. Die Gesamtheit dieser formalen Potenzreihen wird im Folgenden mit $K[[z^\Gamma]]$ bezeichnet.

Die Definition von F verlangt, dass die Koeffizienten $\Phi_x \in K$ liegen und der Träger

supp(F) = $[x \in \Gamma | \Phi_x \neq 0]$ wohlgeordnet ist bezüglich der Anordnung von Γ.
Die Exponenten x der Unbestimmten z sind ebenfalls Element der angeordneten Gruppe Γ. Die Potenzreihen werden aufsummiert über einer Untermenge U bestehend aus Elementen x aus Γ. Die Anordnung von Γ überträgt sich auf die Untermenge U nach 2.3.3. Der Träger einer formalen Potenzreihe, besitzt als wohlgeordnete Teilmenge von Γ, bezüglich der Anordnung von Γ ein kleinstes Element. Alternativ lässt sich die Reihe

$$F = \Phi_{x_1} z^{x_1} + \Phi_{x_2} z^{x_2} + ... + \Phi_{x_p} z^{x_p} + ...,$$

als Summation über den Ordinalzahlen p bis zu einem fixierten $a \in \Gamma$ und Exponenten $x_1 \leq ... \leq x_p ...$ die bezüglich der Anordnung " $\leq$ " von Γ monoton steigend geordnet sind, schreiben. [Car48]
Eine formale Potenzreihe bezeichnet eine Funktion $\Phi : G \mapsto K$, die in der Anordnung von Γ einen wohlgeordneten Träger $\mathrm{supp}(\Phi) = \{g \in G | \Phi(g) \neq 0\}$ besitzt. Wir bezeichnen die Menge aller formalen Potenzreihen auf Γ über K folgendermaßen:

$$K[[z^\Gamma]] = \{F := \sum_{x \in \Gamma} a_x z^x | \text{supp(F) ist wohlgeordnet.}\}$$

4.3.3 Definition der Addition und Multiplikation in $K[[z^\Gamma]]$

Seien F, G zwei formale Potenzreihen auf Γ, mit $F = \sum_{a \in \Gamma} \Phi_a z^a$ und $G = \sum_{a \in \Gamma} \Psi_a z^a$ wobei $\Phi_a, \Psi_a \in K)$ und $\mathrm{supp}(F)$, $\mathrm{supp}(G)$ wohlgeordnet.
Die Potenzreihen F, G sind genau dann gleich wenn:

1. "$a \in$ supp(F), $a \notin$ supp(G)", impliziert dass $\Phi_a = 0$,
2. "$a \notin$ supp(F), $a \in$ supp(G)", impliziert dass $\Psi_a = 0$,
3. "$a \in$ supp(F), $a \in$ supp(G)", impliziert dass $\Phi_a = \Psi_a$.

Man kann leicht nachprüfen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. [Car48]
Die Summe

$$F + G := \sum_{a \in \Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a \in \Gamma} \Psi_a z^a = \sum_{a \in \Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a$$

ist gegeben durch die Addition der Koeffizientenfolgen.
Der Träger der Summe $F + G$ ist wohlgeordnet, da offensichtlich $\mathrm{supp}(F + G) \subseteq$ supp(F) $\cup$ $\mathrm{supp}(G)$ist. Nach dem Lemma 3.1.3 ist die Vereinigung zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet und jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wiederum wohlgeordnet, nach Definition der Wohlordnung. Nach Voraussetzung sind $\mathrm{supp}(F) = \{g \in \Gamma | \Phi_g \neq 0\}$ und supp(G)=$\{g \in \Gamma | \Psi_g \neq 0\}$ wohlgeordnet. Das kleinste Element von $\mathrm{supp}(F + G)$ existiert und $\min(\mathrm{supp}(F + G)) = \min\{\min(\mathrm{supp}(F)), \min(\mathrm{supp}(G))\}$. Somit ist $\Phi + \Psi$ eine

formale Potenzreihe.
Für jedes Element $\lambda \in K$ ist das Produkt mit einem Körperelement definiert durch:

$$\lambda F = \lambda(\sum_{x\in\Gamma} a_x z^x) = \sum_{x\in\Gamma} \lambda a_x z^x \in K[[z^\Gamma]].$$

Bevor wir die Multiplikation der Koeffizienten zweier formaler Potenzreihen betrachten, schauen wir uns zunächst an, was bei der multiplikativen Verknüpfung mit den Exponenten der Variablen z geschieht. Sei $F,\ G \in K[[z^\Gamma]]$ mit $F = \sum_{g\in\Gamma} \Phi_g z^g$ und $G = \sum_{h\in\Gamma} \Psi_h z^h$.
Alternativ lassen sich unsere Reihen folgendermaßen schreiben:

$$F \cdot G = \left(\Phi_{g_1} z^{g_1} + \Phi_{g_2} z^{g_2} + ... + \Phi_{g_p} z^{g_p} + ...\right) \cdot \left(\Psi_{h_1} z^{h_1} + \Psi_{h_2} z^{h_2} + ... + \Psi_{h_p} z^{h_p} + ...\right)$$

Betrachten wir zunächst das Produkt einzelner Monome: $\Phi_g z^g \Psi_h z^h = \Phi_g \Psi_h z^{g+h}$. Für die Variable z gilt nach den Potenzgesetzen $z^{g_1} \cdot z^{h_1} = z^{g_1+h_1}$. Die distributive Fortsetzung führt zur Definition der Multiplikation in $K[[z^\Gamma]]$. Wir erhalten das Produkt als Summe über der Summe des Produkts der einzelnen Koeffizienten:

$$\text{Sei } F = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a \text{ und } G = \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a \text{ wobei } \Phi_a, \Psi_a \in K.$$

$$\cdot : H := F \cdot G = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a. \tag{4.3}$$

Um eine Aussage treffen zu können, ob dieses Produkt wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass der Träger des Produkts wohlgeordnet ist. Beachte, dass $\mathrm{supp}(F\cdot G) \subseteq \mathrm{supp}(F)+\mathrm{supp}(G)$. Die Summe $\sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2}$ kann reduziert werden auf $a_1 \in$ supp(F) und $a_2 \in$ supp(G), da ansonsten der Summand null ist.
Nach Voraussetzung sind sowohl supp(F), als auch supp(G) wohlgeordnet. Die so entstandene Menge von Elementen aus Γ ist also selbst wohlgeordnet. Nach dem Lemma von B.H. Neumann 3.1.7 ist damit $\mathrm{supp}(F) + \mathrm{supp}(G)$ wohlgeordnet. Es ist bekannt, dass $\mathrm{supp}(F \cdot G) \subseteq \mathrm{supp}(F)$ $+ \mathrm{supp}(G)$ und jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist wieder wohlgeordnet nach der Definition der Wohlordnung (2.3.5). Da jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, ist diese Teilmenge selbst wohlgeordnet. Wir erhalten die Wohlordnung des Trägers der Produktreihe $\mathrm{supp}(F \cdot G)$. Wir behaupten weiter, dass die Summe $\sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1} \Psi_{a_2} z^a$ (siehe 4.3) endlich ist. Es gibt also nur eine endliche Anzahl von Paaren a_1, a_2, sodass $a_1 + a_2$ ein vorgegebenes Element a $\in \Gamma$ ergibt. Die Folgerung aus dem Lemma von Neumann 3.1.8 führt direkt zu dieser Aussage.
Wir haben gezeigt, dass eine Darstellung von a als Summe von $a_1 + a_2$ nur auf endlich viele Arten möglich ist, wenn Träger der beiden zu multiplizierenden Potenzreihen wohlgeordnet sind. Der Koeffizient Λ von z^a sei dann gegeben durch:

$$\Lambda_a = \Phi_{a_{11}}\Psi_{a_{21}} + \Phi_{a_{12}}\Psi_{a_{22}} + ... + \Phi_{a_{1n}}\Psi_{a_{2n}}$$

Λ_a sei null, wenn es für a keine Darstellung als Summe der Elemente der Träger von F und G gibt.
Das Produkt zweier formaler Potenzreihen auf Γ über K ist somit wohldefiniert; der Träger der erhaltenen formalen Potenzreihe wohlgeordnet und der entstandene Koeffizient Λ liegt, als endliche Summe des Produkts zweier Körperelemente Φ und Ψ, ebenfalls im Körper K.
Damit ist $K[[z^\Gamma]]$ bezüglich der definierten Addition und Multiplikation abgeschlossen. [Hah, Seite 601ff], [Neu, S. 210- 213].

4.3.2 Beispiel
Bei der Reihe $F := z^{\frac{-1}{p}} + z^{\frac{-1}{p^2}} + z^{\frac{-1}{p^3}}$... handelt es sich um eine formale Potenzreihe über einem beliebigen Körper, da der Träger $\{\frac{-1}{p}, \frac{-1}{p^2}, \frac{-1}{p^3}, ...\}$ wohlgeordnet ist.

4.3.4 Der Ring der formalen Potenzreihen

Auf der Menge der formalen Potenzreihen auf der additiven, angeordneten abelschen Γ über dem Körper K, $K[[z^\Gamma]]$ haben wir nun die Addition und Multiplikation definiert. In der verwendeten Literatur ([PC83], [Fuc66]) findet sich die multiplikative Schreibweise der angeordneten Gruppe Γ, da diese eine noch allgemeinere Definition der Multiplikation zum Beispiel mithilfe von Faktorsystemen ermöglicht. Auf Basis dieser Definition konnte B.H. Neumann 1949 Schiefkörper von formalen Potenzreihen konstruieren. Diese lieferten wichtige Beispiele zur Einordnung der projektiven Ebenen. Im Fall einer additiv geschriebenen, abelschen, angeordneten Gruppe erhalten wir den direkten Bezug zu dem anfangs beschriebenen Laurentreihenkörper und dem darin eingebetteten Potenzreihenring. Diese entstehen für den Fall, dass es sich bei der angeordneten, abelschen Gruppe um $\mathbb{Z}$ respektive $\mathbb{N}$ handelt. Wir zeigen zunächst, dass $K[[z^\Gamma]]$ ein Ring über K ist.

4.3.3 Satz
$K[[z^\Gamma]]$ ist ein Ring über K.

Beweis:

Es gilt $K[[z^\Gamma]]$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.

- *Assoziativität:* Für alle $F, G, H \in K[[z^\Gamma]]$ gilt nach Definition der Addition:

$$F + (G + H) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \left(\sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Lambda_a z^a \right) = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Lambda_a) z^a$$

$$= \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a + \Lambda_a) z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a) z^a + \sum_{a\in G} \Lambda_a z^a.$$

- *Neutrales Element der Addition:* Bezeichne e das neutrale Element der Addition $e := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a$, wobei ähnlich wie in 4.1.1 gilt $\Phi_a = 0$ für alle $a \in \Gamma$. Der Träger von e ist die leere Menge, welche nach Definition wohlgeordnet ist.

- *Inverses Element der Addition:* Zu jedem Gruppenelement F gibt es ein inverses Element der Addition $-F := \sum_{a\in\Gamma} -\Phi_a z^a$, wobei $\mathrm{supp}(F) = \mathrm{supp}(-F)$, mit $F + F^{-1} = e$.

- *Kommutativität:* $K[[z^\Gamma]]$ ist abelsch, da K ein Körper und nach Definition der Addition gilt:
$$F + G = \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a = \sum_{a\in\Gamma} (\Phi_a + \Psi_a)\, z^a \overset{\Phi,\Psi\in K}{=}$$
$$\sum_{a\in\Gamma} (\Psi_a + \Phi_a)\, z^a = \sum_{a\in\Gamma} \Psi_a z^a + \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a = G + F.$$

Die oben definierte Multiplikation in $K[[z^\Gamma]]$ ist kommutativ, wie sich leicht sehen lässt, da für $F, G \in \mathrm{K}[[z^\Gamma]]$ mit $F := \sum_{a_1\in\Gamma} \Phi_{a1} z^{a_1}$ und $G := \sum_{a_2\in\Gamma} \Phi_{a2} z^{a_2}$ gilt:

$$FG = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_1+a_2=a} \Phi_{a_1}\Psi_{a_2} z^a = \sum_{a\in\Gamma} \sum_{a_2+a_1=a} \Phi_{a_2}\Psi_{a_1} z^a = GF$$

Die Gleichheit folgt unmittelbar aus der Kommutativität von Γ und der Kommutativität der Multiplikation im Körper K.
Des weiteren können wir die Assoziativität der Multiplikation nachweisen. Seien F, G, H $\in$ $\mathrm{K}[[z^\Gamma]]$ mit:
$$F := \sum_{a_1\in\Gamma} \Phi_{a1} z^{a_1}$$
$$G := \sum_{a_2\in\Gamma} \Psi_{a2} z^{a_2}$$
$$H := \sum_{a_3\in\Gamma} \Phi_{a3} z^{a_3}$$
Zur Bildung des Produkts $(F \cdot G) \cdot H$ beziehungsweise $F \cdot (G \cdot H)$ gilt die Instruktion des Index a des gesuchten Koeffizienten Ω auf sämtliche Weisen als Summe $a_1 + a_2 + a_3$, beispielsweise:

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = ... = a_{1n} + a_{2n} + a_{3n}.$$

Dann hat der Koeffizient Ω die Form:

$$\Phi_{a_{11}}\Psi_{a_{21}}\Lambda_{a_{31}} + \Phi_{a_{12}}\Psi_{a_{22}}\Lambda_{a_{32}} + ... + \Phi_{a_{1n}}\Psi_{a_{2n}}\Lambda_{a_{3n}}.$$

Falls keine Darstellung von a als Summe der Elemente der Träger der Potenzreihen F, G, H existiert, ist Ω gleich null.

In $K[[z^\Gamma]]$ gelten die Distributivgesetze, denn:

(i)

$$F\cdot(G+H):=\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\left(\sum_{a\in\Gamma}\Psi_a z^a+\sum_{a\in\Gamma}\Lambda_a z^a\right)=\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\left(\sum_{a\in\Gamma}(\Psi_a+\Lambda_a)\,z^a\right)=$$

$$\sum_{a\in\Gamma}\sum_{a_1+a_2=a}\Phi_{a_1}(\Psi+\Lambda)_{a_2}z^a=\sum_{a\in\Gamma}\sum_{a_1+a_2=a}\Phi_{a_1}\left(\Psi_{a_2}+\Lambda_{a_2}\right)z^a=$$

$$\sum_{a\in\Gamma}\sum_{a_1+a_2=a}\Phi_{a_1}\Psi_{a_2}z^a+\sum_{a\in\Gamma}\sum_{a_1+a_2=a}\Phi_{a_1}\Lambda_{a_2}z^a=FG+FH$$

(ii)

$$(F+G)\cdot H=\left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\sum_{a\in\Gamma}\Psi_a z^a\right)\cdot\sum_{a\in\Gamma}\Lambda_a z^a=\left(\sum_{a\in\Gamma}(\Phi_a+\Psi_a)\,z^a\right)\cdot\sum_{a\in\Gamma}\Lambda_a z^a=$$

$$\sum_{a\in\Gamma}\Lambda_a z^a\cdot\left(\sum_{a\in\Gamma}(\Phi_a+\Psi_a)\,z^a\right)=F\cdot H+G\cdot H$$

In den Beweis der Distributivgesetze und die Gültigkeit der Gleichheit fließen die im Körper K gültige Kommutativität der Multiplikation, die Potenzgesetze, beziehungsweise die Kommutativität der angeordneten abelschen Gruppe Γ mit ein. So gilt für alle a, b $\in\Gamma$, dass:

$$z^a\cdot z^b=z^{a+b}=z^{b+a}=z^b\cdot z^a.$$

□

4.3.5 Die Konstruktion des Inversen in $K[[z^\Gamma]]$

Die Menge $K[[z^\Gamma]]$ stellt bezüglich der definierten Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring dar. Wir gehen bei der Konstruktion und dem Beweis des Inversen ähnlich wie [Fuc66, S. 196- 198] und [Neu, S. 210- 213] vor. Wir zeigen zunächst, dass die unendliche Summe des Produkts aus einem beliebigen Körperelement mit einem Element des formalen Potenzreihenrings, mit positivem Träger wohldefiniert ist und wieder in $K[[z^\Gamma]]$ liegt. Dieses Element spielt eine wichtige Rolle zur Konstruktion eines Inversen. Wir definieren die folgende Reihe:

$$\overline{F}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\cdot F^n,\ \text{ mit } F\in K[[z^\Gamma]],\ \text{ wobei } \min\left(\operatorname{supp}(F)\right)>0,\lambda_n\in K^*.$$

Wieso λ eine Einheit und der kleinste Exponent der Unbestimmten z, für das der zugehörige Koeffizient ungleich null ist, positiv sein muss, klären wir im Folgenden. Die Potenzreihe $\overline{F}$

kann umgeschrieben werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n \cdot F)^n = \lambda_0 F^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \cdot F)^n = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \cdot F)^n .$$

Diese Darstellung erinnert für $\lambda_0 = e$, wobei e das neutrale Element der angeordneten abelschen Gruppe Γ ist, an die geometrische Reihe. Jedes Element $G \in K[[z^\Gamma]]$ besitzt eine äquivalente Darstellung durch das Vielfache der Summe des neutralen Gruppenelements und einer formalen Potenzreihe deren Träger positiv ist. Denn für jede formale Potenzreihe $G \in K[[z^\Gamma]]$ mit $G := \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\infty} \Psi_\gamma z^\gamma$ ist supp(G) wohlgeordnet und es existiert damit ein kleinstes Element $g \in G$ mit g =min(supp(G)). Da Γ eine angeordnete abelsche Gruppe ist und damit für jedes Element ein additives Inverses existiert, lässt sich G folgendermaßen schreiben

$$G = z^g \sum_{\gamma\in\Gamma} \Psi_\gamma z^{\gamma-g}$$

$$= z^g \left(e\Psi_g + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{g\}} \Psi_\gamma z^{\gamma-g} \right) = z^g \ \Psi_g \left(e + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{g\}} \frac{\Psi_\gamma}{\Psi_g{}^{-1}} z^{\gamma-g} \right)$$

, wobei supp($\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{g\}} \frac{\Psi_\gamma}{\Psi_g{}^{-1}} z^{\gamma-g}) \geq 0$ ist. Das Inverse zu b_g existiert, da der Koeffizient im Körper K liegt und da für g als Minimum des Trägers von G gelten muss, $\Psi_g \neq 0$. Nach dieser Argumentation ist klar ersichtlich, dass sich jede beliebige formale Potenzreihe G aus $K[[z^\Gamma]]$ für $\lambda \in K,\ g \in \Gamma,\ F \in K[[z^\Gamma]],$ wobei $\min(\operatorname{supp}(F)) > 0$ darstellen lässt.

$$G = \lambda \cdot z^g \cdot (e + F)$$

Wir assozieren jetzt mit jedem Element $F := \sum_{a\in\Gamma} \Phi_a z^a$ des formalen Potenzreihenrings ein Symbol $e + F$ und betrachten die Menge Υ aller $\mathfrak{F} = e + F$ mit e als neutrales Element von Γ, $F \in K[[z^\Gamma]]$ und $\min(\operatorname{supp}(F)) > 0$. Diese Menge Υ ist eine Gruppe bezüglich der folgenden Verknüpfung

$$(e + F)(e + G) = e + (F + G + FG)$$

, wobei die Operationen zwischen den Ringelementen der Addition und Multiplikation in $K[[z^\Gamma]]$ entsprechen. Die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation ist aus deren Definition klar ersichtlich. Das neutrale Element von Υ ist e. Mithilfe der geometrischen Reihe konstruieren wir das Inverse zu jedem Gruppenelement $\mathfrak{F}$ und zeigen in 4.3.4, dass dieses wohldefiniert ist und ein Element des Potenzreihenrings. Nach Definition der geometrischen Reihe gilt:

$$\frac{1}{e - F} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} F^n$$

oder in äquivalenter Darstellung:

$$\frac{1}{e+F} == e + \sum_{n=1}^{\infty} (-F)^n.$$

Man sieht sofort, dass für jedes Gruppenelement $e+F$ die Reihe $e+\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$ invers ist. Wir müssen allerdings noch zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$ im formalen Potenzreihenring $K[[z^\Gamma]]$ liegt.

4.3.4 Lemma

Sei $F \in K[[z^\Gamma]]$ mit $min(supp(F)) > 0$, dann liegt für beliebige Körperelemente λ_n die unendliche Reihe

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F^n$$

in $K[[z^\Gamma]]$ und ist wohldefiniert.

Beweis:

Das Element liegt im Potenzreihenring, wenn der die Vereinigung der Träger supp(F^n) wohlgeordnet ist in der Anordnung von G und es für jedes Element des Trägers $a \in$ supp(F)nur endliche viele ganze Zahlen n gibt, sodass der a-te mit n potenzierte Koeffizient ungleich null ist.

Die erste Bedingung gilt als erfüllt wenn es keine unendlich abfallende Folge gibt

$$[u_1 = a_{11}+a_{12}+...+a_{1n1} > u_2 = a_{21}+a_{22}+...+a_{2n2} > ... > u_i = a_{i1}+a_{i2}+...+a_{ini}, \quad (4.4)$$

mit $(a_{ik} \neq 0)$. Wir bezeichnen mit $a_i{}^*$ =max(a_{ik}) das Maximum über allen k. Offensichtlich entspricht die von u_i erzeugte konvexe Untergruppe, wir bezeichnen sie mit $\langle u_i \rangle$, der von dem größten Element $max_k(a_{ik})$ konvexen Untergruppe. Die anderen Summanden von u_i sind nach Definition des Maximums kleiner als dieses und liegen aufgrund der Konvexität der Untergruppe in dieser. Also gilt die Gleichheit$\langle u_i \rangle = \langle \max(a_{ik}) \rangle$. Da der Träger supp($F^n$) wohlgeordnet ist, gibt es unter den erzeugten Untergruppen aller Elemente des Trägers eine kleinste Untergruppe U von Γ. Die konstruierte Folge 4.4 ist so gewählt, dass die kleinste Untergruppe möglichst klein ist. Damit bleibt die Ordnung der Folgenglieder auch für die davon erzeugten konvexen Untergruppen erhalten:

$$\langle u_1 \rangle \supseteq \langle u_2 \rangle \supseteq ... \supseteq \langle u_i \rangle \supseteq ...$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die von u_i, wobei i natürliche Zahlen sind, erzeugten konvexen Untergruppen die gesamte Untergruppe erzeugt. Wir wählen nun aus jeder Folge von a_{iki} ein $a_i{}^*$, sodass die von diesem Element erzeugte konvexe Untergruppe den von u_i erzeugten konvexen Untergruppen, eventuell unter weglassen endlich vieler Elemente der Folge, entspricht. Diese ist, wie oben ohne Beschränkung angenommen, ganz U. Da unsere Elemente a aus dem Träger der Potenzreihe stammen, kann es zwar mehrere geben, die ganz U erzeugen, allerdings aufgrund der Wohlordnung des Trägers nur ein kleinstes, nennen wir es a^*. Die von a^*, ${a_1}^*$ und u_1 erzeugten konvexen Untergruppen sind nach Annahme gleich. Für die erzeugenden Element gilt jedoch, da a^* das kleinste erzeugende Element ist und u_1 den Summanden ${a_1}^*$ enthält, die folgende Ungleichung bezüglich der Anordnung von G:

$$a^* \leq {a_1}^* \leq u_1$$

Aufgrund der Eigenschaften von konvexen Untergruppe einer angeordneten Gruppe existiert ein $p \in \mathbb{N}$ sodass $u_1 \leq pa^*$ und da $u_1 > u_2 > ... > u_i > ...$ gilt $u_i \leq pa^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir wählen p kleinstmöglich. Jedes Element unserer anfangs gewählten Folge u_i kann in einer der folgenden Formen geschrieben werden, wobei v_i Summen aus Elementen von a_{ik} sind:

$$u_i = {a_i}^* \qquad\qquad u_i = v_i + {a_i}^*$$

Da Γ abelsch ist folgt aus diesen beiden Fällen ebenso: $u_i = {a_i}^* + v_i$. Die Elemente ${a_i}^*$ sind Elemente des Trägers und da dieser wohlgeordnet ist, gibt es keine unendlich abnehmende Folge von ${a_i}^*$ und damit existieren nur endlich viele u_i der ersten Form. Da nach Voraussetzung u_i eine unendlich abnehmende Folge ist muss eine unendlich abnehmende Folge v_i existieren: $v_{i1} > v_{i2} > ... > v_{ij} > ....$ Diese Folge hat die selbe Form wie 4.4 und die von v_i erzeugte konvexe Untergruppe entspricht der minimalen von u_i erzeugten konvexen Untergruppe, da $v_i \leq u_i$. Wir können also wieder eine natürliche Zahl q finden, sodass $v_i \leq q\ a^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Diese natürliche Zahl q ist kleiner gleich dem vorher gewählten p, da $v_i \leq u_i$ und $u_i \leq p\ a^*$. Daraus folgt also, dass eine Folge v_i aus u_i konstruiert werden kann, was ein Widerspruch zur Wahl unserer Folge und der Minimaleigenschaft darstellt. Die Vereinigung der Träger $\mathrm{supp}(F^n)$ muss somit wohlgeordnet sein.
Der erste Teil des Lemmas ist bewiesen. Wir nehmen nun an es existieren für jedes festgehaltene Element der angeordneten abelschen Gruppe Γ existieren unendlich viele ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$,sodass

$$a = a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in},\ i \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } n_1 < n_2 < ... < n_i < ... \text{ und } a_{ik} \in \mathrm{supp}(F)$$

da die Vereinigung der Träger $\mathrm{supp}(F^n)$ wohlgeordnet ist existiert ein kleinstes Element a der oben definierten Form. Da $\mathrm{supp}(F^n)$ wohlgeordnet ist, enthält die Folge $(a_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ nach 3.1.4 eine nichtabnehmende unendliche Teilfolge, die wir gleich indizieren:

$$a_{11} \leq a_{i1} \leq ... \leq a_{i1} \leq ...$$

und wir nehmen deshalb an, dass $(a_{i1})_{i\in\mathbb{N}}$ nicht wachsend ist. Damit muss die durch $(a_i)' =$

$-(a_{i1}) + a = a_{i2} + ... + a_{in_i},\ i \in \mathbb{N}$ bestimmte Folge nicht wachsend und aufgrund der Wohlordnung der Vereinigung der Träger somit konstant sein. Es gibt also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $(a_{j+m})' = (a_j)' = a'$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit liegt a' in der Vereinigung der Träger $\operatorname{supp}(F^n)$, für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt $a' < a$, da $a' = -(a_{i1}) + a$ und $a_{i1} > e$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von a. Damit existieren nur endlich viele ganze Zahlen n für die $(\Phi^n)_n \neq 0$ ist. $\square$

Das Lemma liefert uns die gewünschte Aussage, $\sum_{n=1}^{\infty}(F)^n$ liegt im formalen Potenzreihenring $K[[z^\Gamma]]$. Also enthält der Potenzreihenring ebenso $\overline{F} := \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$, weil die negative formale Potenzreihe $(-F)$ die Voraussetzungen des Lemmas für $\lambda_n = 1$ erfüllt, $\min(\operatorname{supp}(-F)) > 0$. Wir wissen also, dass für ein Element $\mathfrak{F} := e + F$, mit $F \in K[[z^\Gamma]]$ der Gruppe Υ ein Element $\overline{\mathfrak{F}} := e + \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n$ in Υ existiert, sodass das Produkt der beiden Gruppenelemente die folgende Form hat:

$$\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}$$
$$= (e+F)\left(e+\overline{F}\right)$$
$$= e + \left(F + \overline{F} + F \cdot \overline{F}\right)$$
$$= e + \left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a + \sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n + \left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n\right)\right)$$
$$= e + \left(\sum_{n=2}^{\infty}(-F)^n + \left(-\sum_{n=2}^{\infty}(-F)^n\right)\right)$$
$$= e + e = e$$
$$= e + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n + \sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-F)^n\right)\cdot\left(\sum_{a\in\Gamma}\Phi_a z^a\right)\right)$$
$$= \left(e+\overline{F}\right)(e+F)$$
$$= \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$$

Die Menge Υ stellt also tatsächlich eine Gruppe dar und wir finden zu jedem Element ein Inverses. Mithilfe dieser Erkenntnisse sind wir nun in der Lage den zentralen Satz der Ausarbeitung zu beweisen.

4.3.5 Satz
Die formalen Potenzreihen auf einer angeordneten Gruppe Γ über einem Körper K bilden einen Körper $K[[z^\Gamma]]$.

Beweis:

Wie oben gezeigt, kann jedes Element $G \neq 0$ des Ringes $K[[z^\Gamma]]$ in der Form $G = \lambda \cdot z^g \cdot (e+F)$ geschrieben werden, mit $\lambda \in K^*, g \in \Gamma,\ F \in K[[z^\Gamma]],$ wobei $\min(\operatorname{supp}(F)) > 0$. Wir bezeichnen mit $e+\overline{F}$ das Inverse von $e+F$ in der Gruppe Υ. Mit selbiger Argumentation wie oben wissen wir $H := \left(e+\overline{F}\right) z^{-g}\lambda^{-1} \in K[[z^\Gamma]]$. Da $\lambda \in K^*$ liegt, handelt es sich um eine Einheit und es existiert ein Inverses, welches wir mit λ^{-1} bezeichnen. Da g ein Element unserer angeordneten, abelschen, additiv geschriebenen Gruppe Γ ist, gibt es auch zu g ein inverses Element, das wir $-g$ nennen. Nach den Potenzgesetzen und den definierten Rechenoperationen in dem Potenzreihenring $K[[z^\Gamma]]$ ergibt sich, dass

$$\begin{gathered} G \cdot H \\ = (\lambda \cdot z^g (e+F)) \cdot \left(\left(e+\overline{F}\right) z^{-g}\lambda^{-1}\right) \\ = \left(\lambda \cdot z^g z^{-g} \lambda^{-1}\right) = \left(\lambda z^{g-g}\lambda^{-1}\right) = \left(\lambda\lambda^{-1}\right) \\ = e \\ = \left(e+\overline{F}\right) z^{-g}\lambda^{-1} \cdot \lambda z^g (e+F) \\ = H \cdot G \end{gathered}$$

Offensichtlich erweist sich e als Einselement von $K[[z^\Gamma]]$ $\square$

Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe mit wohlgeordnetem Träger formen über einem Körper K somit den Körper der formalen Potenzreihen $K[[z^\Gamma]]$.
Die Grundsteine dieser Theorie wurden von Hans Hahn 1907 in seinem Beweis, dass formale Potenzreihen auf einer angeordneten abelschen Gruppe über $\mathbb{R}$ einen Körper bilden gelegt. Neumann verallgemeinerte Hahns Ergebnisse und zeigte, dass formale Potenzreihen auf einer multiplikativen Gruppe in der nicht-kommutativen Sichtweise einen Schiefkörper formen. Im Laufe der Jahre konnte die Theorie der formalen Potenzreihen, als Verallgemeinerung der Laurentreihen und Pusieuxreihen, immer weiter ausgebaut werden.
Hier schließt sich der Kreis zu dem, zu Beginn des Kapitels, betrachteten Potenzreihenring $K[[z]]$ und dem Laurentreihenkörper $K((z))$. Die Menge der ganzen Zahlen ist eine angeordnete abelsche additive Gruppe. Über einem beliebigen Körper K wissen wir nun, dass der Laurentreihenkörper mit $\Gamma = \mathbb{Z}$ ein Beispiel für einen formalen Potenzreihenkörper darstellt.

Literaturverzeichnis

[Ban56] In: Banachschewski, Bernhard: *Totalgeordnete Moduln.* Math. Arch., 1956, S. 430 – 440

[Car48] Carruth, Philip W.: Generalized Power Series Fields. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), May, Nr. 3, S. 548 – 559

[Fis08] Fischer, Gerd: *Lehrbuch der Algebra.* 1. Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2008

[Fuc66] Fuchs, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Göttingen : Vandenhoeck und Rupprecht, 1966

[Hö01] In: Hölder, Otto: *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß.* Leipzig : Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1901, S. 1 – 64

[Hah] In: Hahn, Hans: *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*

[Hul12] Hulek, Klaus: *Elementare algebraische Geometrie.* Wiesbaden : Springer Spektrum, Vieweg und Teubner Verlag, 2012

[Lü08] In: Lüneburg, Heinz: *Von Zahlen und Größen - Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis, Band 1.* Basel : Birkhäuser Verlag, 2008, S. 507 – 577

[Neu] Neumann, Bernhard H.: On ordered division rings. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 66, Nr. 1, S. 202 – 252

[Neu92] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992

[PC70] Priess-Crampe, Sibylla: Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen. In: *Archiv der Mathematik* 21 (1970), Nr. 1, S. 362 – 365

[PC83] Priess-Crampe, Sibylla: *Angeordnete Strukturen.* Springer-Verlag, 1983

[Rib92] Ribenboim, Paulo: Noetherian rings of generalized power series. In: *Journal of pure and applied algebra* 79 (1992), Nr. 3, S. 293 – 312

[SP08] Schulze-Pillot, Rainer: *Einfuehrung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[Tar12] Taraz, Anusch: *Diskrete Mathematik - Grundlagen und Methoden*. Basel : Birkhäuser, 2012

[Xin05] Xin, Guoce: A residue theorem for Malcev–Neumann series. In: *Advances in Applied Mathematics* 35 (2005), Nr. 3, S. 271 – 293