Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Prof. Dr. Tobias Kaiser

Zulassungsarbeit

Potenzreihenkörper

Wintersemester 2014/15

Julia Kronawitter

17. November 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In einem Artikel der 53. Ausgabe der MATHEMATICAL GAZETTE (1969) beschrieben Cole and Davie (vgl. [CD69]) ein kleines Spiel für 2 Spieler, das auf dem Euklidischen Algorithmus basiert. Sie nannten es anlässlich dieses Zusammenhangs das SPIEL EUKLID.
Wie bei fast allen Spielen stellt sich die Frage, ob es Strategien gibt, die zu einem sicheren Sieg führen. Wir werden in dieser Arbeit zeigen, dass bei bestimmten Ausgangssituationen ein Spieler durch geschickte Spielzüge immer siegt.
Die Seminararbeit gliedert sich in 3 Kapitel: Nach der Einleitung werden in Kapitel 2 die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt wiederholt. Wir werden sehen, dass sie bei diesem Spiel eine tragende Rolle spielen. In Kapitel 3 werden zunächst kurz die Spielregeln erläutert. Danach werden wir die Gewinnstrategie des Spieles näher betrachten und erkennen, dass das Spiel bereits durch die Anfangskonstellation entschieden ist, falls beide Spieler die Strategie kennen. Abschließend geben wir noch einen kurzen Ausblick auf das Spiel 3-Euklid, welches eine Erweiterung des ursprünglichen Spiels darstellt.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir die Angeordneten Gruppen, deren Eigenschaften sowie die Wohlordnung auf Gruppen einführen. Anschließend betrachten wir die konvexen Untergruppen einer angeordneten Gruppe.

2.1 Angeordnete Gruppen

2.1.1 Definition
Eine Menge A heißt teilweise geordnet, wenn die Relation $\leqslant$ folgende Eigenschaften, für alle a,b,c$\in$ A erfüllt.

T1: *Reflexivität* $a \leqslant a$,

T2: *Antisymmetrie* aus $a \leqslant b$, $b \leqslant a$ folgt $a = b$,

T3: *Transitivät* aus $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ folgt $a \leqslant c$

$\leqslant$ bezeichnet eine teilweise Ordnung auf A.

Die oben definierte Ordnungsrelation wird als Anordnung beziehungsweise totale Ordnung bezeichnet, wenn neben T1-T3 anschließende Bedingung erfüllt ist:

T4 Für alle a, b $\in$ A besteht entweder $a < b$, oder $a = b$, oder $a > b$. (bisher nach Lsazlo Fuchs alles)

2.1.2 Definition
Eine teilweise geordnete Gruppe G ist eine Menge G mit folgenden Eigenschaften: (nach Fuchs)

G1: G ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation,

G2: eine teilweise geordnete Menge wie in 2.1.1 bezüglich einer Relation $\leqslant$

G3: das Monotoniegesetz ist erfüllt: für a, b $\in$ G gilt aus a $\leqslant$ b folgt ca $\leqslant$ cb und ac $\leqslant$ bc für $\forall$ c $\in$ G.

2.1.3 Definition
Eine Gruppe wird als angeordnete Gruppe bezeichnet, wenn ihre Ordnung total ist.

2.1.4 Satz
Eine angeordnete Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis:

Klar, denn angenommen die angeordnete Gruppe wäre nicht torsionsfrei würde sich für die Elemente der Torsionsgruppe ein Widerspruch mit den Monotoniegesetz G4 ergeben. (formal siehe kleiner Block) □

2.1.5 Satz
Genügt eine Teilmenge P einer Gruppe G den Bedingungen P1- P3, so ist (G,$\circ$) anordnungsfähig.

P1 $0 \cup P \cup -P = G$, $P \cap -P = \varnothing$

P2 $P \circ P \subseteq P$

P3 *P ist normal in G /*

2.1.1 Archimedisch angeordnete Gruppen

2.1.6 Definition
Eine Gruppe (G,+) heisst *archimedisch*, wenn es $\forall$ a,b $\in$ G mit 0 < a < b ein n $\in \mathbb{N}$ gibt, mit b < na.

2.1.7 Definition
Seien a,b $\in$ G, wobei G eine angeordnete Gruppe. Das Element a wird als *unendlich kleiner* als b bezeichnet, wenn gilt:

$$|a|^n < |b| \; \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.8 Definition
Sei G eine angeordnete Gruppe, sei $|a|$ der absolute Betrag eines Elements a $\in$ G. Zwei Elemente a,b $\in$ G werden als *archimedisch äquivalent* bezeichnet, a b, wenn positive Zahlen m und n existieren, so dass: $|a| < |b|^m$ und $|b| < |a|^n$.

Daraus folgt, dass für jedes Paar von Elemente a,b$\in$ G genau eine der anschließenden Relationen gilt: (nach Fuchs)

(i) a $\ll$ b, (ii) a $\sim$ b, (iii) b $\ll$ a.

3 Des weiteren folgern wir aus Definition 2.1.7, 2.1.8:

(i) aus a $\ll$ b folgt $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx$ $\forall$ x$\in$ G;

(ii) aus a $\ll$ b und a $\sim$ b folgt c $\ll$ b;

(iii) aus a $\ll$ b und b $\sim$ d, folgt a $\ll$ d;

(iv) aus a $\ll$ b und b $\ll$ c folgt a $\ll$ c;

(v) aus a $\sim$ b und b $\sim$ c folgt a $\sim$ c.

Sind alle Elemente einer Gruppe archimedisch äquivalent, so ist die Gruppe archimedisch angeordnet.
Durch die archimedische Äquivalenz werden die Elemente von G in disjunkte Klassen unterteilt, die angeordnet werden können. (nach Fuchs) Bezeichne [x] die archimedische Klasse, in der das Element x $\in$ G liegt, [G] die Gesamtheit aller archimedischen Klassen von G.
Sind zwei Elemente a, b $\in$ G nicht archimedisch äquivalent, gilt entweder: $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$ gilt: n*|a|<|b| oder $\exists$ n $\in$ $\mathbb{N}$ sodass: n*|b| <|a|

2.1.9 Satz
Eine archimedische Gruppe enthält keine konvexen Untergruppen außer sich selbst und der trivialen.

Beweis:

?¿machen! $\square$

2.1.10 Satz
(nach Hölder) Eine angeordnete Gruppe ist genau dann archimedisch, wenn sie einer mit der natürlichen Ordnung versehenen Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist. Folglich sind alle archimedisch angeordneten Gruppen kommutativ.

Beweis:

"$\leftarrow$"Die Rückrichtung ist klar, da jede Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen archimedisch ist und diese Eigenschaft durch den o-Isomorphismus ebenfalls für die angeordnete Gruppe G gelten muss.
"$\rightarrow$"Beweis über archimedische Eigenschaft, o-Isomorphie einer einelementigen Gruppe zu der Gruppe der ganzen Zahlen (siehe S8 priess crampe), kommutativität von G, Dedekindschen Schnitt und Homomorphismus (s. fuchs S75) $\square$

2.1.2 Kette konvexer Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es um konvexe Untergruppen einer angeordneten Gruppe. Eine Untergruppe einer angeordneten Gruppe nennen wir *konvex*, wenn aus a ∈ U, x ∈ G, mit 0 < |x| < |a| folgt x ∈ U. (nach [PC69]) Bezeichne $\sum$ die Kette konvexer Untergruppen einer angeordneten Gruppe G. $\sum$ besitzt folgende Eigenschaften:

(1) Gilt e ∈ $\sum$ und G ∈ $\sum$ dann gilt, wenn C_λ Untergruppe, dann gilt $\cup C_\lambda$ und $\cap C_\lambda$ liegen in $\sum$.

(2) Ist C ∈ $\sum$ und g ∈ $\sum$, so ist $g^{-1}Cg \in \sum$

(3) Sei D ⊂ C und $\sum$ enthält keine Untergruppe zwischen C und D, so ist D normal in C und C/D ist isomorph zu einer Untergruppe der reellen Zahlen.

(4) Sei D ⊂ C und $\sum$ enthält keine Untergruppe zwischen C und D, so erzeugen dei Hauptautomorphismen von C/D einen Integritätsbereich $\Phi C/D$ im Endomorphismenring $\Psi C/D$. Der durch $\Phi C/D$ und durch die Quadratwurzeln der Hauptautomorphismen erzeugte Körper $\Gamma C/D$ ist einem Unterkörper der reellen Zahlen isomorph.

2.1.11 Definition
(nach Malzew) Ein System $\sum$ aus Untergruppen einer Gruppe G ist System aller konvexen Untergruppen einer Anordnung von G, genau dann wenn $\sum$ den obigen Bedingungen (1)-(4) genügt.

2.1.3 Bewertung einer angeordneten abelschen Gruppe

Im Nachfolgenden betrachten wir (G,+) eine angeordnete abelsche Gruppe und eine angeordnete Menge Θ mit einem maximalen Element μ.

2.1.12 Definition
Eine *Bewertung* ωa mit $a \in$ G ist eine Funktion ω: G -> Θ, so dass

(i) $\omega(a) = \mu$ <=> a = 0,

(ii) $\omega(na) = \omega(a) \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\omega(a+b) \geq min(\omega(a), \omega b)$

Die Gleichheit in der Bedingung (iii) gilt dann, wenn $\omega(a) \neq \omega(b)$. Zwei Bewertungen v, v' auf G mit den Wertemengen Γ, Γ' sind äquivalent, wenn es eine ordnungstreue bijektive Abbildung $\sigma : \Gamma\Gamma'$ gibt, so dass $\sigma \circ v = v$ Ein Beispiel für eine Bewertung ist die Polordnung meromorpher Funktionen in einem festen Punkt, wie im Hauptteil (Potenzringe/Laurentreihen) noch erörtert wird.

2.1.4 Der Hahnsche Einbettungssatz

Wie in den vorherigen Paragraphen ausgeführt sind archimedische Gruppen abelsch und Untergruppen der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Das heißt es gibt einen injektiven monotonen Homomorphismus f: G $\mapsto$ ($\mathbb{R}$, +). Existiert ein weiterer solcher Homomorphismus, g: G $\mapsto$ ($\mathbb{R}$, +), dann existiert genau eine reelle Zahl $\lambda > 0$, mit g(x) = r*f(x), wobei x $\in$ G

2.1.13 Satz
Jede angeordnete abelsche Gruppe ist zu einer Untergruppe eines angeordneten Vektorraumes über $\mathbb{Q}$ ordnungsisomorph.

2.1.14 Satz
(Hahn Einbettung nach Fuchs) Jeder angeordnete Vektorraum G über K(x), wobei K(x) der rationales Funktionenkörper, ist einem Unterraum des lexikographisch geordneten Funktionenraums W(G) o-isomorph.

2.1.15 Satz
(Hahn Einbettung nach Priess Crampe) (Hahnscher Einbettungssatz, Hahn 1907) Eine angeordnete abelsche Gruppe A lässt sich ordnungstreu in die Hahn-Gruppe H(Γ, $\mathbb{R}$) einbinden, wobei Γ = [A]{[0] .

Kapitel 3

Potenzreihenkörper

Zunächst wird die Menge der formalen Potenzreihen definiert und nachgewiesen, dass es sich bezüglich komponentweiser Addition und Faltung um einen Ring handelt. Über die Eigenschaften des Potenzreihenrings weisen wir nach, dass der Körper der formalen Laurentreihen dem Quotientenkörper des Ringes der formalen Potenzreihen entspricht. Allgemein ist ein Ring folgendermaßen definiert:

3.0.16 Definition
Sei R eine nichtleere Menge und seien $\oplus : R \times R \to R$ und $\odot : R \times R \to R$ zwei Verknüpfungen auf R. Das Tripel (R, $\oplus, \odot$)

R1: (R, $\oplus$) ist eine abelsche Gruppe,

R2: (R, $\odot$) ist ein Monoid,

R3: (Distributivgesetze) Für alle a,b,c $\in$ R gilt a $\cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Das neutrale Element bezüglich der Addition wird mit 0_R, das neutrale Element bezüglich der Multiplikation mit 1_R bezeichnet. Hervorzuheben ist, dass z keine Variable, die für eine Zahl steht repräsentiert, sondern eine Unbestimmte darstellt. Daraus ergibt sich die Irrelevanz von Konvergenzfragen in der Theorie der formalen Potenzreihenringe und -körper.

3.1 Der Potenzreihenring

Wir betrachten im Folgenden zunächst den Ring der formalen Potenzreihen über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Mit $\mathbb{C}[[z]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | a_n \in \mathbb{C}\}$ wird die Menge der formalen Potenzreihen in z über $\mathbb{C}$ mit komplexen Koeffizienten bezeichnet. $\mathbb{C}[[z]]$ ist ein Ring bezüglich der Addition und Multiplikation wie in 3.1.1 bewiesen.

3.1.1 Rechnen im Potenzreihenring

Im Folgenden werden Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}[[z]]$ definiert sowie durch einen Nachweis der Ringaxiome (R1-R3) 3.0.16 gezeigt, dass $\mathbb{C}[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen ist.

Die Addition zweier formaler Potenzreihen erfolgt komponentenweise:

$+ : \mathbb{C}[[z]] \times \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]]\ ,\ (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$

$\cdot : \mathbb{C}[[z]] \times \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]] : \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (a_j b_k) z^n$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0)\, x_n$

Das neutrale Element der Addition 0_R ist die Nullreihe. Denn es gilt für $a_k = 0$ für alle k $\in \mathbb{N}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
Wir bezeichnen $-f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$ als das Inverse der Addition.

3.2 Der Potenzreihenkörper

3.2.1 Träger über ganzen Zahlen

3.2.2 Träger über angeordneter abelscher Gruppe

3.2.3 Addition und Multiplikation im Potenzreihenkörper

3.2.4 Algebraische Abgeschlossenheit

3.3 Der Körper der Laurentreihen

Literaturverzeichnis

[CD69] *Kapitel* A game based on the Euclidean algorithm and a winning strategy for it. In: COLE, A. J. ; DAVIE, A. J. T.: The Mathematical Association, 1969, S. 354–357

[Fuc66] FUCHS, László: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen.* Goettingen : Vandenhoeck & Rupprecht, 1966

[PC69] PRIESS-CRAMPE, Sibylla: *Archimedische Klassen von Kommutatoren in angeordneten Gruppen.* link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF01220929.pdf. Version: 1969

[PC83] PRIESS-CRAMPE, Sibylla: *Angeordnete Strukturen.* Springer-Verlag, 1983