ECN00075 미시경제학세미나

장정모

jungmoh78@gmail.com

개요 (이번 주와 다음 주)

1. 간단한 게임들: 2×2 게임, 가위바위보 등
   - (순수전략 및 혼합전략) 내쉬균형
2. 과점모형 (oligopoly)
   - 쿠르노 모형과 일반화
   - 베르트랑 모형과 차별화된 재화
3. 입지게임 (location models)
   - 호텔링 모형: 비용함수의 형태
   - 선거모형: 중위투표자정리와 투표의 역설
4. 그 외 응용사례들
   - 공유지의 비극 (tragedy of commons)
   - 소모전 (war of attrition)

2×2 게임: 치킨게임

- 다음과 같은 치킨게임을 고려하자. (practice 3-3)
- 두 명의 십대가 각자의 자동차로 전속력으로 마주보고 달린다.
  - 먼저 자동차 핸들을 트는 사람은 겁쟁이(chicken)으로 낙인찍힌다.
  - 둘 다 핸들을 틀면 무승부가 된다.
  - 둘 다 돌진하는 경우 모두 중상을 입게 된다.

	회피	돌진
회피	(0, 0)	(-4, 4)
돌진	(4, -4)	(-7, -7)

방법 1

- 2×2 게임처럼 각 경기자가 두 개의 순수전략만을 가질 때는 간단한 방법이 있다.
- 먼저, 순수전략 내쉬균형을 찾는다.
  1. 강우월전략이 존재하지 않기 때문에 단계적 소거는 소용없다.
  2. 치킨게임에서는, 순수전략 내쉬균형이 (돌진, 회피)와 (회피, 돌진)이다.
- 혼합전략 내쉬균형이 되기 위해서는, 경기자가 상대방이 혼합전략을 쓴다는 가정 하에 동일한 효용을 양 전략으로부터 얻어야 한다.
  1. 다시 말해, $u_1(\text{회피}, \sigma_2) = u_1(\text{돌진}, \sigma_2)$.
  2. 경기자 2가 '회피'할 확률을 q라고 하면, -4(1-q)=4q -7(1-q)
  3. 대칭적이므로, 경기자 1과 경기자 2 모두' 회피'할 확률은 $\frac{3}{7}$이다.
- 따라서, 혼합전략 내쉬균형은 $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$.

방법 2

- 두 경기자의 BR_i(best response: 최적응수, 최적대응)가 만나는 곳이 혼합전략 내쉬균형이다.

- 혼합전략에 따른 경기자 1의 최적응수를 찾는다. 먼저, $u_1(\text{회피}, \sigma_2) = -4 + 4q)$, $u_1(\text{돌진}, \sigma_2) = 11q - 7$이다.

$$BR_1 = \begin{cases} (1,0) & \text{if } -4 + 4q > 11q - 7 \\ (p, 1-p) \text{ 단, } 0 \le p \le 1 & \text{if } 7q = 3 \\ (0,1) & \text{if } 7q > 3 \end{cases}$$

방법 2 (계속)

- 혼합전략에 따른 경기자 2의 최적응수는 경기자 1과 대칭적이다.

$$BR_2 = \begin{cases} (1,0) & \text{if } 7p < 3 \\ (q, 1-q) \text{ 단, } 0 \le q \le 1 & \text{if } 7p = 3 \\ (0,1) & \text{if } 7p > 3 \end{cases}$$

- 이제 각각의 BR_i를 (p,q)평면에 그린다.

3×3 게임: 가위-바위-보 게임

- 가위바위보에서 이길 경우 1단위위, 질 경우에는 -1단위, 비길 경우에는 0의 보수를 얻는다.

	가위	바위	보
가위	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
바위	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
보	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

- 순수전략 내쉬균형은 존재하지 않는다.
- 이제, 혼합전략 내쉬균형을 구하여 보자.

혼합전략

- 경기자 1과 경기자 2의 혼합전략을 각각 $\sigma_1 = (p, q, 1-p-q)$, $\sigma_2 = (r, s, 1-r-s)$로 표시한다.

- 경기자 1이 각각 가위, 바위, 보를 낼 경우에 기대되는 보수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
EU_1(\text{가위}|\sigma_2) &= r \times 0 + s \times -1 + (1-r-s) \times 1 = 1 - r - 2s \\
EU_1(\text{바위}|\sigma_2) &= r \times 1 + s \times 0 + (1-r-s) \times -1 = -1 + 2r + s \\
EU_1(\text{보}|\sigma_2) &= r \times -1 + s \times 1 + (1-r-s) \times 0 = -r + s
\end{aligned}
$$

- 대칭적인 논리에 의하여, 경기자 2의 보수에 대해서도 r과 s로 나타낼 수 있다.

혼합전략 내쉬균형

- 먼저, 경기자 1과 2가 모두 세 전략을 무작위 확률로 선택하는 경우를 생각해본다.

- 경기자 1의 경우 이는 다음 두 가지 사실을 의미한다.

$$r,\ s,\ 1-r-s > 0$$

$$\mathrm{EU}_1(\text{가위}|\sigma_2) = \mathrm{EU}_1(\text{바위}|\sigma_2) = \mathrm{EU}_1(\text{보}|\sigma_2)$$

- 따라서, 혼합전략 내쉬균형은 $\sigma_1^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\sigma_2^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$이다.

- 문제는, 이것이 유일한 내쉬균형인가?

다른 혼합전략 내쉬균형의 가능성

- 다음과 같은 가능성들을 고려해야 한다.
  1. 경기자 1이 혼합전략, 경기자 2가 순수전략을 쓰는 경우: $p, q,\ 1-p-q > 0$, $r = 1$
  2. 경기자 1과 2가 두 개의 전략에 대해서만 양(+)의 확률로 사용하는 경우: $p, q > 0,\ p+q = 1$
- 첫 번째 경우는 명백히 존재할 수 없다. 두번째 경우에는 경기자 2가 '가위'($r = 0$)를 사용하지 않을 것이다.
  1. $\text{EU}_2(\text{가위}|\sigma_1) = 1-p-2q = -q$
  2. $\text{EU}_2(\text{바위}|\sigma_1) = -1+2p+q = p$
  3. $\text{EU}_2(\text{보}|\sigma_1) = -p+q$

다른 혼합전략 내쉬균형의 가능성 (계속)

- 만약 다른 균형이 존재한다면 $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$가 되어야 한다.

- 이제, 경기자 1의 보수는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

  1. $\mathrm{EU}_1(\text{가위}|\sigma_2) = 1 - 2s$, $\mathrm{EU}_1(\text{바위}|\sigma_2) = -1 + s$, $\mathrm{EU}_1(\text{보}|\sigma_2) = s$
  2. $\mathrm{EU}_1(\text{가위}|\sigma_2) = \mathrm{EU}_1(\text{바위}|\sigma_2) > \mathrm{EU}_1(\text{보}|\sigma_2)$

- 하지만 이를 만족하는 s는 없다. 따라서 다른 혼합전략 내쉬균형은 존재하지 않으며, 혼합전략 내쉬균형은 가위, 바위, 보를 각각 $\frac{1}{3}$의 확률로 무작위 선택하는 전략이다.

쿠르노 모형(Cournot model)

- 쿠르노(1801-1877)는 프랑스의 철학자, 수학자로 경제학의 발전에도 공헌
  - *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesse* (Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, 1838)
  - 이 책은 쿠르노가 살아있는 동안에 강한 비판을 받았고, 거의 성공하지 못했다. 그럼에도 불구하고 그는 이 책을 두 번이나 다시 쓰려고 시도했다고 한다.

- 1회성, 동시게임 (a simultaneous-move, one-shot game)
  1. 각 기업들은 생산수량을 동시에 선택한다.
  2. 균형가격은 수요와 공급이 만나는 점에서 유일하게 결정된다.
  3. 가상의 경매자(auctioneer)가 균형가격을 결정한다.

- 대표적인 실제사례들: 석유, 가공식품, 트랙터 등

대칭적 선형 복점모형(symmetric linear duopoly)

- 모형의 개요는 다음과 같다.
- 시장전체의 역수요곡선: $P(Q) = a - bQ$
  1. q_i는 기업 i의 개별생산량이며, $i = 1, 2$이다.
  2. Q는 시장생산량으로 $q_1 + q_2$와 같다.
- 각 기업의 비용함수: $C_i = c_i \cdot q_i$
  1. $c_i(i = 1,\ 2)$는 기업 i의 한계비용이다.
  2. 특별한 언급이 없는 한, $c_1 = c_2 = c$을 가정한다.
- 각 기업의 이윤함수: $\pi_i = P(Q) \cdot q_i - C_i$ for $i = 1,\ 2$

간단한 예시

- 예시: $a = 100,\ b = 2,$ and $c = 10$
- 기업 2가 $q_2 = 10$을 생산한다고 가정해보자. 기업 1은 $q_1 = Q - 10$으로부터 $\pi_1 = (100 - 2q_1 - 2 \cdot 10)q_1 - 10q_1$을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
q_1 = 1 &\longrightarrow \pi_1 = 68 \\
q_1 = 10 &\longrightarrow \pi_1 = 500 \\
&\cdots \\
q_1 = 20 &\longrightarrow \pi_1 = 600
\end{aligned}
$$

- $q_2 = 10$의 경우에는 $q_1^* = 17.5,\ \pi_1^* = 612.5$을 확인할 수 있다. 이와 같이, 모든 경우의 q_2에 대하여 각기 다른 최적수준의 q_1가 존재할 것이다. (그림 2-1 참조)

기업 1의 이윤극대화 문제

- 기업 1은 기업 2의 생산량(q_2)을 고정변수(a fixed variable)로 간주한다.

$$\begin{aligned}\max_{q_1} \ \pi_1(q_1, q_2) &= P(Q)\cdot q_1 - c\cdot q_1 \\ &= (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1\end{aligned}$$

- 기업 1의 이윤극대화 생산량은 다음 일계조건(FOC)을 만족한다.

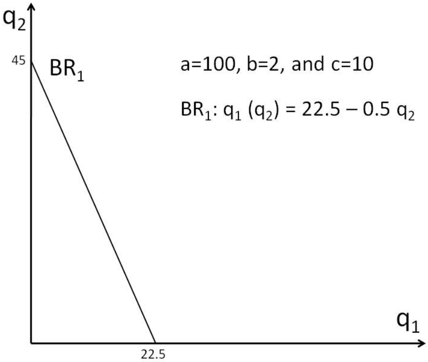
$$\frac{d\pi_1(q_1, q_2)}{dq_1} = a - bq_1 - bq_2 + (-b)q_1 - c = 0$$

- 기업 1의 최선응수(best response)는 다음과 같다.

$$q_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b} = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2}$$

기업 1의 반응곡선

- 기업 1의 반응곡선(best response function)을 그려본다.



기업 2의 이윤극대화 문제

- 기업 1과 2는 대칭적이므로, 다음과 같이 기업 2의 이윤극대화 문제를 풀 수 있다.

$$\max_{q_2} \ \pi_2(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_2 - c \cdot q_2$$
$$= (a - bq_1 - bq_2)q_2 - cq_2$$

- 기업 2의 이윤극대화 생산량은 다음 일계조건(FOC)을 만족한다.

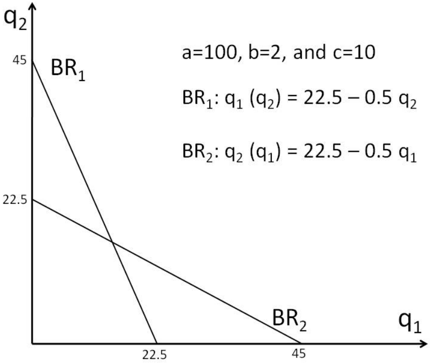
$$\frac{d\pi_2(q_1, q_2)}{dq_2} = a - bq_1 - bq_2 + (-b)q_2 - c = 0$$

- 기업 2의 최선응수(best response)는 다음과 같다.

$$q_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b} = \frac{a - c}{2b} - \frac{q_1}{2}$$

반응곡선과 내쉬균형

- 이전에 다뤘던 예시를 다시 생각해보자: $P = 100 - 2Q$, $c = 10$
- 기업 1과 2의 반응곡선을 함께 그려본다.



다시, 간단한 예시

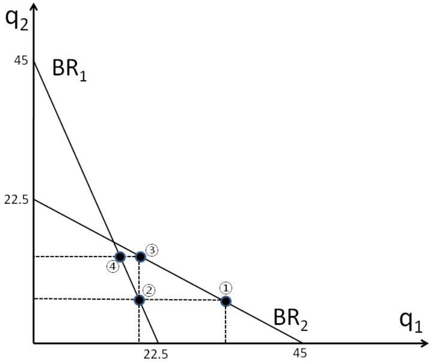
- $MR_1 = MC_1$: $100 - 4q_1(q_2) - 2q_2 = 10 \Longrightarrow q_1(q_2) = \frac{90}{4} - \frac{q_2}{2}$
- 기업 1은 기업 2의 BR_2가 $q_2(q_1) = \frac{90}{4} - \frac{q_1}{2}$라고 알고 있다.
- 기업 1의 예측을 BR_1에 반영하면 다음과 같다.

$$q_1^* = \frac{90}{4} - \frac{q_2(q_1^*)}{2} = \frac{90}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{90}{4} - \frac{q_1^*}{2}\right) \Longrightarrow q_1^* = 15$$

- 대칭에 의해, $q_2^* = 15$. 따라서, $Q^* = 30$ and $P^* = 40$.

쿠르노의 주장: 균형의 안정성†

- 거미집동학(cobweb)에 의해 각 경기자의 선택은 내쉬균형으로 수렴한다.



분석결과

1. 두 반응곡선이 만나는 점을 쿠르노-내쉬 균형이라고 부른다.
2. 쿠르노-내쉬 균형에서 상대방에 대한 예측은 상호일관적이며, 각 기업은 이들 예측에 근거하여 이윤극대화를 하게 된다.
3. 따라서, 선형 복점모형(symmetric linear duopoly)에서 균형은 $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a-c}{3b}$에서 유일하게 결정된다.

분석결과 (계속)

- 아래에서, O는 쿠르노기업, M은 독점기업, C는 완전경쟁기업을 나타낸다.
- 쿠르노모형에서 균형 시장생산령 Q^c는 독점가격보다 낮지만, 완전경쟁시장가격보다 높다.

$$Q^C = \frac{a-c}{b} \;>\; Q^O = q_1^O + q_2^O = \frac{2(a-c)}{3b} \;>\; Q^M = \frac{(a-c)}{2b}$$

- 균형가격을 시장수요곡선에서 도출하여 비교한다.

$$P^C = c \;<\; P^O = \frac{a+2c}{3} \;<\; P^M = \frac{(a+c)}{2}$$

- 기업 i의 이윤은 $\pi_i^O \;=\; (P^c - c)q_i^O \;=\; \frac{(a-c)}{3} \cdot \frac{(a-c)}{3b} \;=\; \frac{(a-c)^2}{9b}$.

분석결과 (계속)†

- $P = a - bQ$, $MC = c$일 때 쿠르노, 독점, 완전경쟁기업의 사회후생을 비교해보자.

	소비자잉여	생산자잉여	사회후생
완전경쟁시장	$\frac{(a-c)^2}{2b}$	0	$\frac{(a-c)^2}{2b}$
독점	$\frac{(a-c)^2}{8b}$	$\frac{(a-c)^2}{4b}$	$\frac{3(a-c)^2}{8b}$
쿠르노 경쟁	$\frac{(a-c)^2}{9b}$	$\frac{2(a-c)^2}{9b}$	$\frac{(a-c)^2}{3b}$

쿠르노 모형의 일반화

- 시장 전체에 n개의 동질적 기업이 있다. 다시 말해, $P = a - bQ$, $c_i = c$ $(i = 1, \cdots, n)$

- 이제, 시장 수요는 다음과 같이 나타난다.

$$Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \implies P = a - b\sum_{i=1}^{n} q_i$$

- 기업 i 외의 모든 다른 기업을 $-i$로 표시한다.

$$\begin{aligned} P &= (a - bq_1 - bq_2 - bq_{i-1} - bq_{i+1} - \cdots - bq_n) - bq_i \\ &= a - bQ_{-i} - bq_i \end{aligned}$$

기업 i의 최적응수

- 기업 i의 이윤극대화 문제를 살펴보자.

$$\pi_i = P(Q)q_i - cq_i = (a - bQ_{-i} - bq_i)q_i - cq_i$$

- FOC는 다음과 같다.

$$\frac{d\pi_i}{dq_i} = (a - bQ_{-i} - bq_i) - bq_i - c = 0$$

- 기업 i의 BR_i는 $q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_{-i}}{2}$.

균형 찾기

- 대칭적이므로 이는 모든 $i = 1, 2, \cdots, n$에 해당한다.

- 균형에서 각 기업 i는 Q^*_{-i}를 정확히 예측하여 q^*_i를 선택한다.

$$q^*_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q^*_{-i}}{2}$$

- n개의 기업들이 동질적이므로, $q^*_1 = q^*_2 = \cdots = q^*_n = q^*$

$$Q^*_{-i} = (N-1)q^* \implies q^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{(n-1)q^*}{2}$$

분석 결과

- 기업 i의 균형생산량과 시장 균형생산량은 각각 다음과 같다.

$$q^* = \frac{a-c}{(n+1)b} \implies Q^* = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}$$

- 균형가격은 $P^* = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}c$이다.
- $n = 1$인 경우는 독점기업에 해당한다.

$$Q^* = \frac{a-c}{2b} \quad P^* = \frac{a+c}{2}$$

- $n \to \infty$의 경우는 완전경쟁시장에 해당한다.