ECN00075 미시경제학세미나

장정모

jungmoh78@gmail.com

개요

1. '죄수의 딜레마'와 다른 게임들 (1.4-1.5, 1.7)
   - 강우월전략, 강열등전략 소거법
   - 약우월전략, 약열등전략 소거법, 문제점
2. 내쉬균형 (1.6, 3.2, 3.4)
   - 순수전략과 혼합전략
   - 내쉬균형의 정의와 존재
3. 제로섬 게임† (4.2-4.3)
   - 제로섬게임, 최소극대(전략), 최대극소(전략)의 정의
   - 2인 제로섬게임에서 내쉬균형과의 관계
4. 합리화전략† (3.1)
   - 합리화전략의 정의
   - 내쉬균형과의 관계

죄수의 딜레마(Prisoners' dilemma)

- 경제학, 경영학, 사회학, 생물학 등 수많은 분야에서 연구되어 온 게임이다.

	자백	부인
자백	(-5, -5)	(0, -10)
부인	(-10, 0)	(-2, -2)

- 공범으로 보이는 두 용의자가 검거되어 독방에서 취조당하고 있다.
  - 모두 범행을 자백할 경우 각각 5년씩의 실형을 선고받는다.
  - 모두 끝까지 부인할 경우 각각 2년씩의 실형을 선고받는다.
  - 한 명이 부인하고 한 명만 자백할 경우, 부인한 측은 위증죄 추가로 10년을 선고받는다. 자백한 측은 정상참작으로 석방된다.

- 게임의 전략과 보수는, 경기자 $i = 1$에 대하여 $s_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_1, s_2, \cdots s_n)$로 나타낼 수 있다.

죄수의 딜레마 게임은 왜 중요한가?

1. 용의자 1의 입장에서 어느 경우건 상관없이 자백은 부인보다 항상 높은 효용을 가져다준다.
   - 유일한 해는 (자백, 자백)이라고 보는 것이 타당하다.
   - 하지만 둘 다 끝까지 부인했더라면 2년씩만 징역을 살 수 있었다.
2. 경제주체가 각자 자신의 개인이익을 극대화함으로써 달성되는 균형상태의 자원배분이 사회적으로는 비효율적일 수 있다.
   - Aumann 버전의 죄수의 딜레마 게임, 국가들의 군비확장 경쟁, 집단복지를 위한 집단행동 양식, 국회의원들 간의 투표거래
3. 해결방법은 무엇인가?
   - 협조의 중요성? 반복게임?
   - 내쉬균형에서는 결과가 달라지는가?

예시: 광고경쟁 (practice 1-2)

- 두 맥주회사 A와 B가 있다. 개별 회사는 TV광고를 자제하느냐 혹은 대대적 공세를 취하냐 중 하나를 선택한다. 두 기업 모두 매출보다 순이익을 중시한다.
  - 모두 광고를 하지 않을 경우 각 기업은 50억원의 순이익을 올린다.
  - 한 기업만 광고를 하는 경우 광고기업의 광고비는 10억원이며 매출은 70억원으로 증가한다. 한편, 광고를 하지 않은 기업의 매출은 30억원 감소한다.
  - 두 기업이 모두 광고를 경쟁적으로 할 경우 시장점유율은 변함없으며 광고비만 20억원 지출한다.

	광고o	광고x
광고o	(30, 30)	(60, 20)
광고x	(20, 60)	(50, 50)

강우월전략과 강열등전략(정의 1-1)

- 죄수의 딜레마 게임에서 합리적인 경기자라면 절대 ‘부인’을 택하지 않을 것이다.

- 경기자 1의 전략 s_1^*가 경기자 1의 다른 모든 전략 $s_1(\neq s_1^*)$과 경기자 2의 모든 전략 $s_2 \in S_2$에 대해서 $u_1(s_1^*, s_2) > u_1(s_1, s_2)$을 만족한다면, s_1^*을 경기자 1의 강우월전략(strictly dominant strategy)라고 부른다.

- 경기자 2의 모든 전략 s_2에 대해 $u_1(\hat{s}_1, s_2) < u_1(s_1', s_2)$를 만족하는 s_1'가 존재한다면 전략 $\hat{s}_1$을 경기자 1의 강열등전략(strictly dominated strategy)이라고 부른다.

강열등전략의 단계적 소거법

- 죄수의 딜레마에서 강열등전략의 소거에서는 두 경기자가 모두 자백을 택하게 된다.

- 그림 1-4 간단한 3×2 게임

	Left	Right
Top	(3, 5)	(4, 4)
Middle	(1, 8)	(5, 7)
Bottom	(2, 1)	(0, 9)

- 강열등전략의 소거법으로 (Top, Left)만 남는다. 만약 (Bottom, Right)의 보수가 (5, 9)로 바뀌면 단계적 소거법의 결과는 어떻게 바뀌는가?

약우월전략과 열등전략

- 강우월전략을 정의하는 조건에서 강부등호가 약부등호로 바뀌면 약우월전략이라고 부른다.

- 경기자 1의 전략 s_1^*가 경기자 1의 다른 모든 전략 $s_1 (\neq s_1^*)$과 경기자 2의 모든 전략 $s_2 \in S_2$에 대해서 $u_1(s_1^*, s_2) \geq u_1(s_1, s_2)$을 만족한다면, s_1^*을 경기자 1의 약우월전략(weakly dominant strategy)라고 부른다.

- 경기자 2의 모든 전략 s_2에 대해 $u_1(\hat{s}_1, s_2) \leq u_1(s_1', s_2)$를 만족하는 s_1'가 존재한다면 전략 $\hat{s}_1$을 경기자 1의 약열등전략(weakly dominated strategy)이라고 부른다.

약열등전략의 단계적 소거법

- Practice 1-3

	Left	Middle	Right
Top	(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)
Bottom	(0, 0)	(1, 2)	(1, 2)

- 약열등전략의 단계적 소거법은 소거 순서에 따라 최종 결과가 달라질 수 있다.
- 우월전략이 아예 존재하지 않는 게임(예: 성대결게임, 치킨게임)도 많다. 이런 게임들에 대해서는 경기자들의 전략선택에 관한 예측을 어떻게 해야 하는가?

순수전략 내쉬균형의 정의

- 내쉬균형(Nash equilibrium)에는 모든 경기자들이 순수전략을 사용하는 내쉬균형과 혼합전략을 사용하는 내쉬균형이 있다. 순수전략 내쉬균형의 여러 성질은 혼합전략 내쉬균형에도 동일하게 성립한다.

- 정의 1-3: 순수전략조합 $s^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$이 모든 i와 모든 $s_i \in S_i$에 대하여

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

가 성립하면 순수전략 내쉬균형(pure strategy Nash equilibrium)이라고 부른다.

- $i = 1$, 2로 생각하면 정의 1-2가 된다.

순수전략 내쉬균형의 정의 (계속)

- 주어진 전략조합이 내쉬균형인지 어떻게 검토해야 하는가?
  - 임의의 전략조합을 고정해보자.
  - 다른 경기자들은 현재 주어진 전략조합대로 행동한다는 가정 하에 적어도 한 명이 다른 전략으로 이탈할 유인이 있는가?
  - 어느 누구에게도 이탈할 유인이 없다면, 이들 전략들로 구성된 상태는 흔들리지 않는 안정성을 지닐 것이다.
- 내쉬균형은 최적화(optimization)와 합리적 기대(rational expectation)을 만족하는 유일한 해이다.
- 우리가 지금 다루는 2인 전략형게임에서는 간단히 찾을 수 있다.

예제들 1

- 먼저, 죄수의 딜레마와 사슴사냥 게임을 생각해보자. 죄수의 딜레마에서는 강열등전략 소거법으로 얻은 해가 유일한 내쉬균형이다.

- 사슴사냥 게임은 공조게임(coordination game)의 특수한 예이다.

	사슴	토끼
사슴	(5, 5)	(0, 1)
토끼	(1, 0)	(2, 2)

- 두 개의 순수전략 내쉬균형이 존재한다.

예제들 1 (계속)

- 치킨게임(그림 1-10): 먼저 자동차 핸들을 트는 사람은 겁쟁이(chicken)로 낙인찍히는 반면, 계속 직진한 상대방은 영웅 대접을 받게 된다.

	회피	돌진
회피	(0, 0)	(-4, 4)
돌진	(4, -4)	(-7, -7)

- 순수공조게임(그림 1-12): 두 내쉬균형 가운데 어느 것이 실현되는가는 역사적 진화과정과 사회적 전통에 따라 결정된다.

	좌측주행	우측주행
좌측주행	(1, 1)	(0, 0)
우측주행	(0, 0)	(1, 1)

예제들 1 (계속)

- 가위-바위-보 게임

	가위	바위	보
가위	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
바위	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
보	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

- 이 게임에서는 순수전략 내쉬균형이 존재하지 않는다.
- 가위바위보는 무작위로 내는 것이 일반적이다. 그런 의미에서 혼합전략을 생각해보자.

혼합전략의 정의

- 혼합전략(mixed strategy)이란 여러 순수전략들 중 하나를 확률분포에 의하여 무작위로 추출, 선택하는 전략이다.

- 경기자 i가 k개의 순수전략을 가지고 있다고 가정하자. 이제 $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{ik}\}$. 경기자 i의 혼합전략 σ_i는 다음과 같이 표시한다.

$$\sigma_i = (p_1, \cdots, p_k).$$

여기서, (1) $p_j \geq 0$, $j = 1, \cdots k$이며, (2) $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

- 가위-바위-보 게임을 다시 생각해보자.

혼합전략 내쉬균형의 정의

- 혼합전략조합 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \cdots, \sigma_n^*)$이 모든 i와 모든 $\sigma_i \in \sum_i$에 대하여

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

  가 성립하면 혼합전략 내쉬균형(mixed strategy Nash equilibrium)이라고 부른다.

- $s^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$이 순수전략 내쉬균형이면 혼합전략 내쉬균형이다. 따라서, 순수전략과 혼합전략을 통칭하여 내쉬균형으로 부르기도 한다.

- 정리 3-1: 혼합전략 내쉬균형에서 특정 경기자가 양(+)의 확률로 선택할 가능성이 있는 행동들은 해당 경기자에게 동일한 기대보수를 가져다준다.

예제1: 성대결게임

- 성대결 게임: 경기자 1이 남편, 경기자 2가 아내

	미술관	야구장
미술관	(3, 5)	(0, 0)
야구장	(0, 0)	(5, 3)

- 경기자 1과 2의 혼합전략을 각각 $\sigma_1 = (p, 1-p)$과 $\sigma_2 = (q, 1-q)$로 표시하자.

예제1: 성대결게임과 홀짝게임 (계속)

- 경기자 1의 입장에서 생각해보자. 경기자 2가 혼합전략 $\sigma_2 = (q, 1-q)$을 사용할 경우 경기자 1의 각 순수전략을 선택하여 얻는 기대보수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{EU}_1(\text{미술관}|\sigma_2] &= 3 \times q + 0 \times (1-q) = 3q \\ \mathrm{EU}_1(\text{야구장}|\sigma_2] &= 0 \times q + 5 \times (1-q) = 5(1-q) \end{aligned}$$

- 만약 $3q < 5(1-q)$이면 경기자 1은 미술관을 택할 것이다. 반대로, $q > 5/8$이면 경기자 1은 야구장을 택한다. $q = 5/8$인 경우에는 경기자 1은 미술관과 야구장 사이에서 무차별하다.

예제1: 성대결게임과 홀짝게임 (계속)

- 다시 말해, 경기자 1의 최적반응(best response)은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
q > \frac{5}{8}: &\qquad BR_1 = (1,0) \\
q = \frac{5}{8}: &\qquad BR_1 = (p, 1-p), \text{단}, \ 0 \leq p \leq 1 \\
q < \frac{5}{8}: &\qquad BR_1 = (0,1)
\end{aligned}
$$

- 유사하게, 경기자 2의 최적반응(best response)은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
p > \frac{3}{8}: &\qquad BR_2 = (1,0) \\
p = \frac{3}{8}: &\qquad BR_2 = (q, 1-q), \text{단}, \ 0 \leq q \leq 1 \\
p < \frac{3}{8}: &\qquad BR_2 = (0,1)
\end{aligned}
$$

예제1: 성대결게임과 홀짝게임 (계속)

- 이제 각각의 BR_i를 (p, q)평면에 그린다. 혼합전략 내쉬균형을 찾을 수 있는가?

- 그림 3-2 홀짝게임의 BR과 혼합전략 내쉬균형을 알아보자. (그림 3-3 참조)

	홀(Head)	짝(Tail)
홀(H)	(-1, 1)	(1, -1)
짝(T)	(1, -1)	(-1, 1)

두 경기자, 전략형게임에서의 혼합전략 내쉬균형 구하기

- 혼합전략에 따른 BR_i(best response: 최적응수, 최적대응)를 구한 후 (p, q) 평면에 그린다. 두 경기자의 BR_i이 만나는 곳이 혼합전략 내쉬균형이다.
- 2인 게임에서 각 경기자가 두 개의 순수전략만을 가질 때는 더 간단한 방법이 있다. 하지만 이는 세 개 이상의 전략을 가진 경우에는 적용하기 힘들다.
- 세번째 방법은 한 경기자가 두 개의 전략을 가지며, 다른 경기자는 세 개 이상의 전략을 가진 경우에도 적용가능하다.

예제2: 가위-바위-보 게임

- 순수전략 내쉬균형은 존재하지 않는다.

- 경기자 2이 가위를 p, 바위를 q, 보를 $1-p-q$의 확률로 선택한다고 가정하자. 이제 경기자 1이 각각 가위, 바위, 보를 낼 경우에 기대되는 보수는 다음과 같다.

$$\mathrm{EU}(\text{가위}|\sigma_2) = p\times 0 + q\times -1 + (1-p-q)\times 1 = 1-p-2q$$

$$\mathrm{EU}(\text{바위}|\sigma_2) = p\times 1 + q\times 0 + (1-p-q)\times -1 = -1+2p+q$$

$$\mathrm{EU}(\text{보}|\sigma_2) = p\times -1 + q\times 1 + (1-p-q)\times 0 = -p+q$$

- 혼합전략 내쉬균형의 후보로 생각할 수 있는 경기자 2의 혼합전략들을 생각해보자.
  - (A) $p=0,\ q>0$; (B) $p>0,\ q=0$; (C) $p,q,1-p-q>0$
  - (D) $p,q=0$; (E) $q=0, 1-p-q=0$; (F) $p=0, 1-p-q=0$

예제2: 가위-바위-보 게임 (계속)

- 먼저 (A)의 경우를 생각해보자. 하지만 아래 부등식을 만족하는 $q > 0$은 존재하지 않는다.
  - $\text{EU}(\text{바위}|\sigma_2) = \text{EU}(\text{보}|\sigma_2); -1 + q = q$
- 대칭적인 논리에 의하여 (B)의 경우도 만족하는 p도 존재하지 않는다.
- 이제 (C)의 경우를 생각해보자.
  - $\text{EU}(\text{가위}|\sigma_2) = \text{EU}(\text{바위}|\sigma_2) = \text{EU}(\text{보}|\sigma_2)$
  - $1 - p - 2q = -1 + 2p + q = -p + q \;\Rightarrow\; p = q = \frac{1}{3}$
- 혼합전략 내쉬균형은 $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = ((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$가 유일하다.

내쉬균형의 존재와 증명

- 내쉬균형의 존재: 경기자 수가 유한하고, 각 경기자가 유한한 개수의 순수전략을 가진 전략형 게임에서는 반드시 최소한 하나의 (혼합전략) 내쉬균형을 가진다.

- 내쉬의 증명은 내쉬균형이 존재한다는 것만을 보여줄 뿐, 어떻게 찾아야 하는 지에 대한 답은 주지 않았다.

- 순수전략 내쉬균형과는 달리 일반적으로 혼합전략 내쉬균형은 쉽게 구하는 방법이 없다.

내쉬균형에 대한 해석

- 정태적 해석
  - 안정성(stability)은 정태적인 관점인가?
  - 혼합전략은 직관적인가?

- 동태적 해석
  - 학습(learning)으로 내쉬균형에 다달하는 것은 용이한가?
  - 진화론적 게임이론(evolutionary game theory)의 역할은 무엇인가?

다음 수업까지

- 교과서 복습: 1.4-1.7, 3.2, 3.4
- 교과서 예습: 2.1-2.5, 3.1, 4.2-4.3