지수

1 거듭제곱근

(1) 거듭제곱근

실수 a와 2 이상인 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다. 이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, … 을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

예 • -8의 세제곱근은 방정식 $x^3=-8$의 근이므로

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근은 -2, $1\pm\sqrt{3}i$이다.

• 81의 네제곱근은 방정식 $x^4=81$의 근이므로

$x^4-81=0$, $(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$ $\quad\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근은 ±3, $\pm3i$이다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것

① n이 홀수인 경우

a의 n제곱근 중 실수인 것은 오직 하나뿐이고, 이를 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

② n이 짝수인 경우

(i) $a>0$일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것은 양수와 음수 각각 하나씩 있고, 이를 각각 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

(ii) $a=0$일 때, a의 n제곱근은 0 하나뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

(iii) $a<0$일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

예 • -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다. ⇨ $\sqrt[3]{-8}=-2$

• 81의 네제곱근 중 실수인 것은 ±3이다. ⇨ $\sqrt[4]{81}=3$, $-\sqrt[4]{81}=-3$

주의 'a의 n제곱근'과 'n제곱근 a'는 다름에 주의한다.

⇨ 16의 네제곱근은 ±2, $\pm2i$, 네제곱근 16은 $\sqrt[4]{16}=2$

참고 (1) $f(x)$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 x의 값의 범위는

① n이 홀수일 때, $f(x)<0$ ② n이 짝수일 때, $f(x)>0$

(2) $f(x)$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하도록 하는 x의 값의 범위는

① n이 홀수일 때, $f(x)>0$ ② n이 짝수일 때, $f(x)>0$ ⟶ n의 값에 관계없이 $f(x)>0$이야.

고1 다시보기

이차식으로 주어진 실수의 n제곱근에 대한 문제에서 이차부등식의 해를 이용하므로 다음을 기억하자.

• 이차부등식의 해

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$일 때

(1) 이차부등식 $x^2+ax+b>0$의 해 ⇨ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$에서 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

(2) 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해 ⇨ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$에서 $\alpha<x<\beta$

2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상인 자연수일 때

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

예 (1) $(\sqrt[3]{4})^3=4$

(2) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2\times8}=\sqrt[3]{16}$

(3) $\dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{15}{3}}=\sqrt[4]{5}$

(4) $(\sqrt[3]{2})^4=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[3\times2]{5}=\sqrt[6]{5}$

(6) $\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[4]{2}$

• a의 n제곱근
⟺ n제곱하여 a가 되는 수
⟺ 방정식 $x^n=a$의 근 x

• 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있다.

• $\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라 읽는다.

• 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

• 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것에 대한 문제는 n이 홀수, 짝수인 경우로 나누어 a의 부호를 판단한다.

• $a>0$이고 n이 2 이상인 자연수일 때,
$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$

고1 다시보기

이차방정식의 두 근이 거듭제곱근으로 주어지거나 함숫값이 거듭제곱근으로 주어지는 문제에서 이용하는 다음 개념을 기억하자.

• 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

• 역함수

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때,

$$f^{-1}(a)=b \iff f(b)=a$$

• 역함수 구하기

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(1) x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

(2) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

3 지수의 확장과 지수법칙

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a>0$이고 m, $n\ (n\geq2)$이 정수일 때

① $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

② $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

예 (1) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$

(2) $16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$

(3) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$

② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$

④ $(ab)^x=a^xb^x$

예 (1) $5^2\times5^{-4}=5^{2+(-4)}=5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$

(2) $7^{\frac{2}{3}}\div7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$

(3) $(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}}=3^2=9$

(4) $(2^{2\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=2^4\times3^2=144$

참고 거듭제곱근을 포함한 계산을 할 때, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$임을 이용하여 거듭제곱근을 유리수인 지수로 변형한 후 지수법칙을 이용하면 편리하다.

예 $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2$

4 지수의 실생활에의 활용

주어진 관계식에서 각 문자가 나타내는 것이 무엇인지 파악한 후 조건에 따라 수를 대입하고 지수법칙을 이용하여 값을 구한다.

• **밑이 다른 식이 주어질 때의 식의 값**

$a^x=k$, $b^y=k\ (a>0,\ b>0,\ xy\neq0)$일 때, 식의 값을 구하는 문제는

$$a=k^{\frac{1}{x}},\ b=k^{\frac{1}{y}}$$

임을 이용하여 밑을 통일한 후

$$ab=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},\ \frac{a}{b}=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$$

임을 이용한다.

• **거듭제곱근이 자연수가 되는 조건**

세 자연수 a, m, $n\ (a\geq2,\ n\geq2)$에 대하여 $\sqrt[n]{a^m}$이 자연수이려면 $a^{\frac{m}{n}}$에서

(1) a가 소수일 때

⇨ m은 n의 배수, n은 m의 약수이어야 한다.

(2) m, n이 서로소인 자연수일 때

⇨ a는 어떤 자연수의 n제곱이어야 한다.