이산수학 (12744) 4번 레포트

순천향대학교 SW융합대학 컴퓨터소프트웨어공학과
20223519 전한결

2023년 5월 11일

- 작성자 — SW융합대학 컴퓨터소프트웨어공학과 20223519 전한결
- 과목 — 2023학년도 1학기 이산수학 (12744)
- 과제 제시일 — 2023년 5월 9일
- 과제 마감일 — 2023년 5월 16일

차 례

1 Question 17

관계 R에 대한 유향 그래프가 다음과 같을 때, 물음에 답하라.

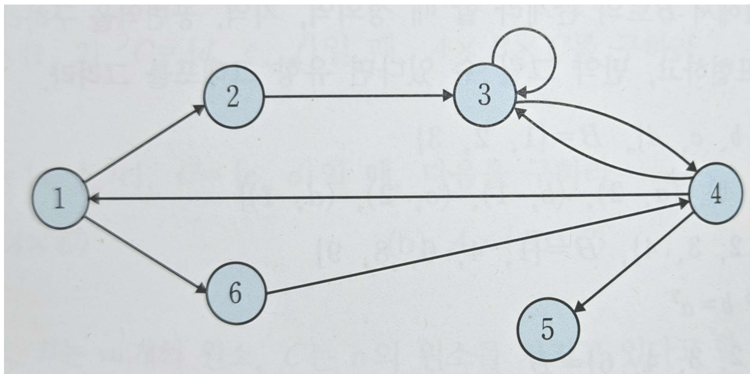

그림 1: 관계 R에 대한 유향 그래프

(a) 길이가 1인 경로들을 모두 나열하라.

(b) 정점 2에서 시작하여 길이가 2인 경로들을 모두 나열하라.

(c) 정점 3에서 시작하여 길이가 3인 경로들을 모두 나열하라.

(d) 정점 2에서 시작하는 모든 순환을 구하라.

(e) 정점 6에서 시작하는 모든 순환을 구하라.

(f) 길이가 2인 경로들을 모두 나열하라.

(g) 길이가 3인 경로들을 모두 나열하라.

(h) R^2의 유향 그래프를 그려라.

(i) M_{R^2}, R^∞, M_{R^∞}을 구하라.

$$R = \{(1,2),(1,6),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,5),(6,4)\}. \tag{1}$$

1.1 길이가 1인 경로들을 모두 나열하라.

길이가 1인 경로란 어떤 정점에서 시작하여 인접한 다른 정점으로 끝나는 경로를 말한다.

R에 있는 모든 순서쌍은 시점과 종점을 나타내므로 그 자체로 길이가 1인 경로가 된다.

따라서 길이가 1인 경로를 모두 나열하면 다음과 같다.

$$\{1,2\},\{1,6\},\{2,3\},\{3,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{4,3\},\{4,5\},\{6,4\}. \tag{2}$$

1.2 정점 2에서 시작하여 길이가 2인 경로들을 모두 나열하라.

정점 2에서 시작하는 길이가 1인 경로는 $\{2,3\}$뿐이다. 이때, 3에서 시작하는 길이가 1인 경로는 $\{3,3\},\{3,4\}$가 있다.

2에서 시작하는 경로는 종점이 3이고 3에서 시작하는 경로는 시점이 3이므로 두 경로를 합성할 수 있다. 두 경로를 합성하면 길이가 2인 경로로 다음을 얻을 수 있다.

$$\{2,3,3\},\{2,3,4\}. \tag{3}$$

1.3 정점 3에서 시작하여 길이가 3인 경로들을 모두 나열하라.

정점 3에서 시작하는 길이가 1인 경로는 $\{3,3\},\{3,4\}$이다. 정점 4에서 시작하는 길이가 1인 경로는 $\{4,1\},\{4,3\},\{4,5\}$이다. 정점 1에서 시작하는 길이가 1인 경로는 $\{1,2\},\{1,6\}$이다. 정점 5에서 시작하는 길이가 1인 경로는 없다.

정점 3에서 시작하는 길이가 2인 경로는 각 길이가 1인 경로의 종점을 시점으로 하는 길이가 1인 경로를 합성하여 다음과 같이 얻어낼 수 있다.

$$\{3,3,3\},\{3,3,4\},\{3,4,1\},\{3,4,3\},\{3,4,5\}. \tag{4}$$

이때, 같은 방법으로 정점 3에서 시작하는 길이가 3인 경로는 각 길이가 2인 경로의 종점을 시점으로 하는 길이가 1인 경로를 합성하여 다음과 같이 얻어낼 수 있다.

$$\begin{aligned}&\{3,3,3,3\},\{3,3,4,1\},\{3,3,4,3\},\{3,3,4,5\},\\&\{3,4,1,2\},\{3,4,1,6\},\{3,4,3,3\},\{3,4,3,4\}.\end{aligned} \tag{5}$$

1.4 정점 2에서 시작하는 모든 순환을 구하라.

$\{2, 3, 4, 1, 2\}$는 정점 2에서 시작하는 길이가 4인 순환이다.

이때, 3에 4가 대응되고 4에 3이 대응되므로 경로 중간의 3은 $3, 4, 3$, 4는 $4, 3, 4$로 바꿀 수 있다. 또한, 3에 3 자신이 대응되므로 경로 중간의 3은 $3, 3$, $3, 3, 3$, $3, 3, 3, 3$과 같이 3이 반복되는 부분으로 바꿀 수 있다.

이때, 3 또는 4와 바꿀 수 있는 경로의 수가 무한하므로 정점 2에서 시작하는 순환의 개수는 무한하다. 따라서 모든 순환을 구할 수 없다.

1.5 정점 6에서 시작하는 모든 순환을 구하라.

정점 6을 종점으로 하는 경로는 존재하지 않는다. 따라서 6에서 시작하고 6으로 끝나는 경로가 존재하지 않으므로 정점 6에서 시작하는 순환은 존재하지 않는다.

1.6 길이가 2인 경로들을 모두 나열하라.

길이가 2인 경로는 길이가 1인 경로의 종점을 시점으로 하는 길이가 1인 경로를 합성하여 다음과 같이 얻어낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3\}, \{1,6,4\}, \{2,3,3\}, \{2,3,4\}, \{3,3,3\},\\
&\{3,3,4\}, \{3,4,1\}, \{3,4,3\}, \{3,4,5\}, \{4,1,2\},\\
&\{4,1,6\}, \{4,3,3\}, \{4,3,4\}, \{6,4,1\}, \{6,4,3\},\\
&\{6,4,5\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

1.7 길이가 3인 경로들을 모두 나열하라.

길이가 3인 경로는 길이가 1인 경로의 종점을 시점으로 하는 길이가 2인 경로를 합성하여 얻어낼 수 있다.

길이가 2인 경로는 이미 (7)에서 구했으므로 이것을 길이가 1인 경로와 합성하여 다음과 같이 얻어낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\{1,2,3,3\},\{1,2,3,4\},\{1,6,4,1\},\{1,6,4,3\},\{1,6,4,5\},\\
&\{2,3,3,3\},\{2,3,3,4\},\{2,3,4,1\},\{2,3,4,3\},\{2,3,4,5\},\\
&\{3,3,3,3\},\{3,3,3,4\},\{3,3,4,1\},\{3,3,4,3\},\{3,3,4,5\},\\
&\{3,4,1,2\},\{3,4,1,6\},\{3,4,3,3\},\{3,4,3,4\},\{4,1,2,3\},\\
&\{4,1,6,4\},\{4,3,3,3\},\{4,3,3,4\},\{4,3,4,1\},\{4,3,4,3\},\\
&\{4,3,4,5\},\{6,4,1,2\},\{6,4,1,6\},\{6,4,3,3\},\{6,4,3,4\}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

1.8 R^2의 유향 그래프를 그려라.

R^2는 R을 두 번 합성한 것이므로 길이가 2인 경로들을 모두 나열한 (7)에서 시점과 종점을 왼쪽과 오른쪽 요소로 하는 순서쌍의 집합으로 표현되는 대응 관계이다. 이는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
R^2 = \{&(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),\\
&(4,2),(4,3),(4,4),(4,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

이것을 유향 그래프로 나타내면 그림 2과 같다.

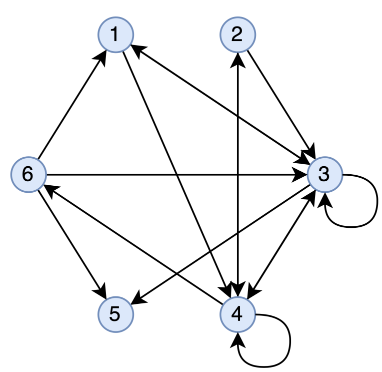

그림 2: R^2의 유향 그래프

1.9 M_{R^2}, R^∞, M_{R^∞}을 구하라.

M_{R^2}는 R^2의 행렬 표현이다. 이는 R^2의 요소의 첫 번째 요소를 행, 두 번째 요소를 열로 하는 행렬의 해당 위치에 1을 채우고 나머지 위치에 0을 채운 것이다.

$$M_{R^2} = \left[\begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in R^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

R^∞는 임의의 정점에서 출발하여 임의의 길이인 경로를 따라가는 것이 가능한지 여부를 나타내는 대응 관계이다. 이는 가능한 경우의 수를 직접 하나하나 계산해보면 알 수 있다.

- $(1,1)$의 경우 $\{1,2,3,4,1\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(1,2)$의 경우 $\{1,2\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(1,3)$의 경우 $\{1,2,3\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(1,4)$의 경우 $\{1,2,3,4\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(1,5)$의 경우 $\{1,4,5\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(1,6)$의 경우 $\{1,6\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(2,1)$의 경우 $\{2,3,4,1\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(2,2)$의 경우 $\{2,3,4,1,2\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(2,3)$의 경우 $\{2,3\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(2,4)$의 경우 $\{2,3,4\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(2,5)$의 경우 $\{2,3,4,5\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(2,6)$의 경우 $\{2,3,4,1,6\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(3,1)$의 경우 $\{3,4,1\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(3,2)$의 경우 $\{3,4,1,2\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.

- $(3, 3)$의 경우 $\{3, 3\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(3, 4)$의 경우 $\{3, 4\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(3, 5)$의 경우 $\{3, 4, 5\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(3, 6)$의 경우 $\{3, 4, 1, 6\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(4, 1)$의 경우 $\{4, 1\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(4, 2)$의 경우 $\{4, 1, 2\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(4, 3)$의 경우 $\{4, 3\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(4, 4)$의 경우 $\{4, 3, 4\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(4, 5)$의 경우 $\{4, 5\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(4, 6)$의 경우 $\{4, 1, 6\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(5, 1)$의 경우 5에서 1로 끝나는 경로가 없으므로 불가능하다.
- $(5, 2)$의 경우 5에서 2로 끝나는 경로가 없으므로 불가능하다.
- $(5, 3)$의 경우 5에서 3로 끝나는 경로가 없으므로 불가능하다.
- $(5, 4)$의 경우 5에서 4로 끝나는 경로가 없으므로 불가능하다.
- $(5, 5)$의 경우 5에서 5로 끝나는 경로가 없으므로 불가능하다.
- $(5, 6)$의 경우 5에서 6로 끝나는 경로가 없으므로 불가능하다.
- $(6, 1)$의 경우 $\{6, 4, 1\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(6, 2)$의 경우 $\{6, 4, 1, 2\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(6, 3)$의 경우 $\{6, 4, 1, 2, 3\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(6, 4)$의 경우 $\{6, 4\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(6, 5)$의 경우 $\{6, 4, 5\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.
- $(6, 6)$의 경우 $\{6, 4, 1, 6\}$을 따라갈 수 있으므로 가능하다.

따라서 R^∞는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R^\infty = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

(10)를 통해 R^∞을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

2 Question 26

A와 A에 관한 관계 R이 다음과 같을 때 R이 반사, 비반사, 대칭, 비대칭, 반대칭, 또는 추이 관계인가를 결정하라.

(a) $A = \mathbb{Z},\ R = \{(a,b) \in A \times A \mid a \le b+1\}$

(b) $A = \mathbb{Z}^+,\ R = \{(a,b) \in A \times A \mid |a-b| \le 2\}$

(c) $A = \mathbb{Z},\ R = \{(a,b) \in A \times A \mid a+b\text{는 짝수}\}$

(d) $A = \mathbb{Z},\ R = \{(a,b) \in A \times A \mid |a-b| = 2\}$

(e) $A = \text{모든 실수의 집합},\ R = \big\{(a,b) \in A \times A \mid a^2+b^2 = 4\big\}$

2.1 $A = \mathbb{Z},\ R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \leq b + 1\}$

반사 관계 $\forall x \in A$에 대해

$$\begin{aligned} x &\leq x + 1 \\ 0 &\leq 1 \end{aligned} \tag{12}$$

은 참이므로 $x\ R\ x$이다. 따라서 R은 반사 관계이다.

비반사 관계 (12)에 의해 $\forall x \in A,\ x\ R\ x$이므로 R은 비반사 관계가 아니다.

대칭 관계 $x = 1,\ y = 3$일 때

$$\begin{aligned} x &\leq y + 1 \\ 1 &\leq 3 + 1 = 4 \end{aligned} \tag{13}$$

는 참이므로 $x\ R\ y$이다. 하지만 이때

$$\begin{aligned} y &\leq x + 1 \\ 3 &\leq 1 + 1 = 2 \end{aligned} \tag{14}$$

는 거짓이므로 $y\ \not R\ x$이다. $A \times A$의 임의의 원소 $(y, x) = (3, 1)$에 대해 $y\ \not R\ x$ 이므로 R은 대칭 관계가 아니다.

비대칭 관계 $x = 1,\ y = 2$에 대해

$$\begin{aligned} x &\leq y + 1 \\ 1 &\leq 2 + 1 = 3 \end{aligned} \tag{15}$$

는 참이므로 $x\ R\ y$이다. 이때

$$\begin{aligned} y &\leq x + 1 \\ 2 &\leq 1 + 1 = 2 \end{aligned} \tag{16}$$

역시 참이므로 $y\ R\ x$이다. A의 임의의 원소 $x = 1,\ y = 2$에 대해 $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$ 이므로 R은 비대칭 관계가 아니다.

반대칭 관계 (15)과 (16)를 통해 A의 임의의 원소 $x = 1,\ y = 2$에 대해 $x\ R\ y$ 이고 $y\ R\ x$이다. $x \neq y \Rightarrow x\ R\ y \wedge y\ R\ x$이므로 (x, y)는 반대칭관계의 조건에

대한 반례가 된다. 따라서 R은 반대칭 관계가 아니다.

추이 관계 $x = 2,\ y = 1,\ z = 0$이라면 (16)을 통해 $x\ R\ y$이고,

$$\begin{aligned} y &\le z + 1 \\ 1 &\le 0 + 1 = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

가 참이므로 $y\ R\ z$이다. 하지만

$$\begin{aligned} x &\le z + 1 \\ 2 &\le 0 + 1 = 1 \end{aligned} \tag{18}$$

이므로 $x \not R\ z$이다. 즉, $(x, y, z) = (2, 1, 0)$은 추이 관계의 조건에 대한 반례이므로 R은 추이 관계가 아니다.

따라서 R은 반사 관계이지만 비반사 관계가 아니며 대칭 관계가 아니고 비대칭 관계가 아니고 반대칭 관계가 아니고 추이 관계가 아니다.

2.2 $A = \mathbb{Z}^+,\ R = \{(a, b) \in A \times A \mid |a - b| \le 2\}$

반사 관계 $\forall x \in A$에 대해

$$|x - x| = 0 \le 2 \tag{19}$$

가 참이므로 $x\ R\ x$이다. 따라서 R은 반사 관계이다.

비반사 관계 (19)에 의해 $\forall x \in A,\ x\ R\ x$이므로 R은 비반사 관계가 아니다.

대칭 관계 $\forall x, y \in A,\ |x-y| \le 2$라면 $|y-x| = |x-y| \le 2$이므로 $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$이다. 따라서 R은 대칭 관계이다.

비대칭 관계 $x = 1,\ y = 2$에 대해

$$|x - y| = |1 - 2| = |-1| = 1 \le 2 \tag{20}$$

이므로 $x\ R\ y$이고

$$|y - x| = |2 - 1| = |1| = 1 \le 2 \tag{21}$$

이므로 $y\ R\ x$이다. A의 임의의 원소 x, y에 대해 $x\ R\ y \land y\ R\ x$이므로 (x, y)는 비대칭 관계의 조건에 대한 반례가 된다. 따라서 R은 비대칭 관계가 아니다.

반대칭 관계 $x = 1,\ y = 2$, 즉 $x \neq y$일 때 (20)과 (21)에 의해 $x\ R\ y \wedge y\ R\ x$ 이므로 $(x, y) = (1, 2)$는 반대칭 관계의 조건에 대한 반례가 된다. 따라서 R은 반대칭 관계가 아니다.

추이 관계 $x = 0,\ y = 2,\ z = 4$라면

$$|x - y| = |0 - 2| = |-2| = 2 \leq 2 \tag{22}$$

$$|y - z| = |2 - 4| = |-2| = 2 \leq 2 \tag{23}$$

이므로 $x\ R\ y$이고 $y\ R\ z$이다. 하지만

$$|x - z| = |0 - 4| = |-4| = 4 \leq 2 \tag{24}$$

가 거짓이므로 $x \not R\ z$이다. 따라서 $(x, y, z) = (0, 2, 4)$는 추이 관계의 조건에 대한 반례이므로 R은 추이 관계가 아니다.

따라서 R은 반사 관계이고 대칭 관계이지만 비반사 관계가 아니며 비대칭 관계가 아니고 반대칭 관계가 아니고 추이 관계가 아니다.

2.3 $A = \mathbb{Z},\ R = \{(a, b) \in A \times A \mid a + b$**는 짝수**$\}$

반사 관계 $\forall x \in A$에 대해 $x + x = 2x$이므로 $x + x$는 짝수이다. 따라서 $x\ R\ x$ 이므로 R은 반사 관계이다.

비반사 관계 $\forall x \in A$에 대해 $x\ R\ x$이므로 R은 비반사 관계가 아니다.

대칭 관계 $\forall x, y \in A$에 대해 $x + y$가 짝수이면 $x\ R\ y$이다. 이때, $y + x = x + y$ 이므로 $y + x$ 역시 짝수가 된다. 따라서 $y\ R\ x$이다. 따라서 R은 대칭 관계이다.

비대칭 관계 $x = 1,\ y = 1$일 때 $x\ R\ y$이고 $y\ R\ x$이므로 $(x, y) = (1, 1)$은 비대칭관계의 조건에 대한 반례가 된다. 따라서 R은 비대칭 관계가 아니다.

반대칭 관계 $x = 0,\ y = 2$일 때 $x + y = 0 + 2 = 2$이고 2는 짝수이므로 $x\ R\ y$ 이다. 또한

$$y + x = 2 + 0 = 2 \tag{25}$$

이고 2는 짝수이므로 $y\ R\ x$이다. 따라서 $x\ R\ y \wedge y\ R\ x$이고, 이것은 반대칭 관계에 대한 조건의 반례가 된다. 따라서 R은 반대칭 관계가 아니다.

추이 관계 x_1, x_2가 모두 홀수인 경우 $x_1 + x_2$는 짝수이므로 $x_1 \, R \, x_2$이다. 만약 x가 홀수라면 $x_2 + x$도 짝수이므로 $x_2 \, R \, x$가 된다. 이때, x_1 역시도 홀수이므로 $x_1 + x$는 짝수가 되어 $x_1 \, R \, x$이다.

y_1, y_2가 모두 짝수인 경우 $y_1 + y_2$는 짝수이므로 $y_1 \, R \, y_2$이다. 만약 y가 짝수라면 $y_2 + y$도 짝수이므로 $y_2 \, R \, y$가 된다. 이때, y_1 역시도 짝수이므로 $y_1 + y$는 짝수가 되어 $y_1 \, R \, y$이다.

홀수와 짝수가 서로 좌·우변에 위치하는 경우에는 R을 만족하지 않으므로 추이 관계에서 다루지 않는다.

모든 경우에 대해서 추이 관계의 조건을 만족하므로 R은 추이 관계이다.

따라서 R은 반사 관계이고 대칭 관계이고 추이 관계이지만 비반사 관계가 아니고 비대칭 관계가 아니고 반대칭 관계가 아니다.

2.4 $A = \mathbb{Z},\ R = \{(a, b) \in A \times A \mid |a - b| = 2\}$

반사 관계 $\forall x \in A$에 대해,

$$|x - x| = |0| = 0 \neq 2 \tag{26}$$

이므로 $x \not R \, x$이다. 따라서 R은 반사관계가 아니다.

비반사 관계 $\forall x \in A$에 대해,

$$|x - x| = |0| = 0 \neq 2 \tag{27}$$

이므로 $x \not R \, x$이다. 따라서 R은 비반사관계이다.

대칭 관계 $\forall x, y \in A$에 대해 $|x - y| = 2$라면 $x \, R \, y$이다. 이때,

$$|y - x| = |x - y| = 2 \tag{28}$$

이므로 $f \, R \, x$이다. 따라서 R은 대칭 관계이다.

비대칭 관계 $\forall x, y \in A$에 대해 $|x - y| = 2$라면 $x \, R \, y$이다. 따라서 R은 비대칭 관계가 아니다.

반대칭 관계 $x = 1,\ y = 3$이라면

$$|x - y| = |1 - 3| = |-2| = 2 \tag{29}$$

이므로 $x\ R\ y$이다. 또한,

$$|y - x| = |x - y| = 2 \tag{30}$$

이므로 $y\ R\ x$이다. A의 임의의 원소 x, y에 대해 $x\ R\ y \wedge y\ R\ x$이므로 R은 반대칭 관계가 아니다.

추이 관계 $x = 0,\ y = 2,\ z = 4$라면

$$|x - y| = |0 - 2| = |-2| = 2 \tag{31}$$

이므로 $x\ R\ y$이고

$$|y - z| = |2 - 4| = |-2| = 2 \tag{32}$$

이므로 $y\ R\ z$이다. 하지만

$$|x - z| = |0 - 4| = |-4| = 4 \neq 2 \tag{33}$$

이므로 $x \not R\ z$이다. $(x, y, z) = (0, 2, 4)$는 추이 관계의 조건에 대한 반례이므로 R은 추이 관계가 아니다.

2.5 $A =$ 모든 실수의 집합, $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a^2 + b^2 = 4\}$

반사 관계 $x = 0$이라면

$$x^2 + x^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \neq 4 \tag{34}$$

이므로 $x \not R\ x$이다. 이것은 반사 관계의 조건에 대한 반례가 된다. 따라서 R은 반사 관계가 아니다.

비반사 관계 $x = \sqrt{2}$라면

$$x^2 + x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 + 2 = 4 \tag{35}$$

이므로 $x\ R\ x$이다. 이것은 비반사 관계의 조건에 대한 반례가 된다. 따라서 R은 비반사 관계가 아니다.

대칭 관계 $\forall x, y \in A$에 대해 $x\ R\ y$라면 $x^2 + y^2 = 4$이다. 이때,

$$y^2 + x^2 = x^2 + y^2 = 4 \tag{36}$$

이므로 $y\ R\ x$이다. 따라서 R은 대칭 관계이다.

비대칭 관계 $x = y = \sqrt{2}$라면 (35)와 같이 $x\ R\ y$이다. 이것은 비대칭 관계의 조건에 대한 반례가 된다. 따라서 R은 비대칭 관계가 아니다.

반대칭 관계 $x = 0,\ y = 2$라면

$$x^2 + y^2 = 0^2 + 2^2 = 0 + 4 = 4 \tag{37}$$

이므로 $x\ R\ y$이다. 또한

$$y^2 + x^2 = x^2 + y^2 = 4 \tag{38}$$

이므로 $y\ R\ x$이다. A의 임의의 원소 x, y에 대해 $x\ R\ y \wedge y\ R\ x$이므로 $(x, y) = (0, 2)$는 반대칭 관계의 조건에 대한 반례이다. R은 반대칭 관계가 아니다.

추이 관계 $x = 0,\ y = 2,\ z = 0$라면 (37)와 같이 $x\ R\ y$이고

$$y^2 + z^2 = 2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4 \tag{39}$$

이므로 $y\ R\ z$이다. 하지만

$$x^2 + z^2 = 0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0 \neq 4 \tag{40}$$

이므로 $x\ \not R\ z$이다. 즉, $(x, y, z) = (0, 2, 0)$은 추이 관계의 조건에 대한 반례이다. 따라서 R은 추이 관계가 아니다.

따라서 R은 대칭 관계이지만 반사 관계가 아니고 비반사 관계가 아니고 비대칭 관계가 아니고 반대칭 관계가 아니고 추이 관계가 아니다.

3 Question 53

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$이다. A에 관한 관계 R의 관계 행렬이 다음과 같을 때, 연결 관계를 와샬 알고리즘을 이용하여 구하라.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = W_0. \tag{41}$$

M_R이 5×5 행렬이므로 W_5까지 계산해야 한다.

일단 초기 상태인 M_R을 W_0으로 설정한다.

이후, W_0에서 1열의 원소 중 1인 원소가 있는 행 번호의 집합 P_1와 1행의 원소 중 1인 원소가 있는 열 번호의 집합 Q_1를 구한다.

$$P_1 = \{1, 4\},\ Q_1 = \{1, 4\}. \tag{42}$$

이때, $P_1 \times Q_1$ 위치에 있는 원소를 모두 1로 바꾼다. 이렇게 얻어진 행렬을 W_1이라고 하자. W_1은 다음과 같다.

$$W_1 = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

이 작업을 W_5를 구할 때까지 반복한다.

W_1에서 2열의 원소 중 1인 원소가 있는 행 번호의 집합 P_2와 2행의 원소 중 1인 원소가 있는 열 번호의 집합 Q_2를 구한다.

$$P_2 = \{2, 5\},\ Q_2 = \{2\}. \tag{44}$$

이때, $P_2 \times Q_2$ 위치에 있는 원소를 모두 1로 바꾼다. 이렇게 얻어진 행렬을 W_2

이라고 하자. W_2은 다음과 같다.

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

이후, W_2에서 3열의 원소 중 1인 원소가 있는 행 번호의 집합 P_3와 3행의 원소 중 1인 원소가 있는 열 번호의 집합 Q_3를 구한다.

$$P_3 = \varnothing,\ Q_3 = \{4, 5\}. \tag{46}$$

이때, $P_3 \times Q_3$ 위치에 있는 원소를 모두 1로 바꾼다. 하지만 $P_3 = \varnothing$이므로 $P_3 \times Q_3 = \varnothing$이다. 따라서 $W_3 = W_2$이다.

이후, W_3에서 4열의 원소 중 1인 원소가 있는 행 번호의 집합 P_4와 4행의 원소 중 1인 원소가 있는 열 번호의 집합 Q_4를 구한다.

$$P_4 = \{1, 3, 4\},\ Q_4 = \{1, 4\}. \tag{47}$$

이때, $P_4 \times Q_4$ 위치에 있는 원소를 모두 1로 바꾼다. 이렇게 얻어진 행렬을 W_4 이라고 하자. W_4은 다음과 같다.

$$W_4 = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ \underline{1} & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

이후, W_4에서 5열의 원소 중 1인 원소가 있는 행 번호의 집합 P_5와 5행의 원소 중 1인 원소가 있는 열 번호의 집합 Q_5를 구한다.

$$P_5 = \{3, 5\},\ Q_5 = \{2, 5\}. \tag{49}$$

이때, $P_5 \times Q_5$ 위치에 있는 원소를 모두 1로 바꾼다. 이렇게 얻어진 행렬을 W_5

이라고 하자. W_5은 다음과 같다.

$$W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 0 & 1 & \underline{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

이렇게 얻어진 W_5가 M_{R^∞}이 된다. M_{R^∞}를 토대로 R의 연결 관계 R^∞을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R^\infty = \{&(1,1),(1,4),(2,2),(3,1),(3,2),\\ &(3,4),(3,5),(4,1),(4,4),(5,2),\\ &(5,5)\}. \end{aligned} \tag{51}$$