레포트 3: 연습문제 풀이 (1주)

- 작성자 – SW융합대학 컴퓨터소프트웨어공학과 20223519 전한결

- 과목 – 2023학년도 1학기 이산수학(12744) Report 3
- 과제 제시일 – 2022년 4월 5일
- 과제 마감일시 – 2022년 4월 12일 24:00

Question 13

다음 명제들이 항진 명제인지, 모순 명제인지, 사건 명제인지를 보여라.

(d) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$$\begin{array}{rl} P & 0\ 0\ 1\ 1 \\ Q & 0\ 1\ 0\ 1 \\ P \wedge Q & 0\ 0\ 0\ 1 \\ \neg(P \wedge Q) & 1\ 1\ 1\ 0 \\ \neg P & 1\ 1\ 0\ 0 \\ \neg Q & 1\ 0\ 1\ 0 \\ \neg P \vee \neg Q & 1\ 1\ 1\ 0 \\ \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q & 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

따라서 (d)에서 제시된 명제 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$는 항진 명제이다.

(h) $(P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$Q \vee R$	0	1	1	1	0	1	1	1
$P \wedge (Q \vee R)$	0	0	0	0	0	1	1	1
$P \wedge Q$	0	0	0	0	0	0	1	1
$P \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	1
$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	0	0	0	0	0	1	1	1
$(P \wedge (Q \vee R)) \to ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	1	1	1	1	1	1	1	1

따라서 (h)에서 제시된 명제 $(P \wedge (Q \vee R)) \to ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$는 항진 명제이다.

Question 14

다음의 역과 대우를 설명하라.

(a) “비가 오면 나는 외출하지 않겠다.”

$A \to B$의 형태의 명제에서, 역은 $B \to A$, 대우는 $\neg B \to \neg A$의 형태를 가진 명제를 의미한다. 따라서, 명제를 $A \to B$의 형태로 만들면 역과 대우를 쉽게 구할 수 있다.

A는 “비가 오다.”, B는 “외출하지 않는다.”라고 하자.

- 역은 $B \to A$의 형태인 “외출하지 않는다면 비가 오지 않는다.”이고,
- 대우는 $\neg B \to \neg A$의 형태인 “외출한다면 비가 오지 않는 것이다.”가 된다.

(b) “네가 외출하는 한 나는 집에 머무르겠다.”

역시 A를 “네가 외출한다.”, B를 “내가 집에 머무른다.”로 하면

- 역은 $B \to A$의 형태인 “내가 집에 머무르면 네가 외출을 한다.”이고,
- 대우는 $\neg B \to \neg A$의 형태인 “내가 집에 머무르지 않는다면 네가 외출을 하지 않는다.”이다.

(c) “어떤 도움이 없으면 나는 일을 마칠 수 없다.”

이 문제에서는 한정자 “어떤”이 포함된 것에 주목해야 한다. A를 “어떤 도움이 없다.”라고 하면 $\neg A$는 “어떤 도움이 있다.”가 아니라 “모든 도움이 있다.”가 된다. 여기에 B를 “나는 일을 마칠 수 없다.”라고 하면

- 역은 $B \to A$의 형태인 “내가 일을 마칠 수 없으면 어떤 도움이 없다.”이고,
- 대우는 $\neg B \to \neg A$의 형태인 “내가 일을 마칠 수 있으면 모든 도움이 있다.”이다.

표현의 자연스러움을 위해서 A를 “내가 어떤 도움도 받지 않는다.”로 설정할 수도 있다. 이 경우 $\neg A$는 “내가 모든 도움을 받는다.”로 설정할 수 있다. 이렇게 해석하는 경우,

- 역은 “내가 일을 마칠 수 없으면 내가 어떤 도움도 받지 않는다.”가 되고,
- 대우는 “내가 일을 마칠 수 있으면 모든 도움을 받는다.”가 된다.

Question 18

다음의 가정에서 추록되는 결론을 구하라.

(a)

> 나의 프로그램이 수행 중이면 나는 행복하다. 내가 행복하면 태양이 빛난다. 지금은 11시이므로 어둡다.

- A를 “나의 프로그램이 수행중이다.”,
- B를 “나는 행복하다.”,
- C를 “태양이 빛나다.”,
- D를 “어둡다.”

로 설정하자. C와 D가 어떠한 관계에 있는지 문제에서 주어지지 않았으나, 실질적으로 태양이 빛난다면 어둡지 않다, 즉 밝게 된다는 것을 상정할 수 있다. 이 경우 “태양이 빛나면 어둡지 않다”라는 문장을 가정할 수 있다.

만약 **이 가정이 참이라면** 다음과 같은 구조로 추론이 가능하다.

$$
\begin{aligned}
&A \to B. \\
&B \to C. \\
&C \to \neg D. \\
&D. \\
&D \to \neg C && \because C \to \neg D. \\
&\neg C && \because D \to \neg C \land D. \\
&\neg C \to \neg B && \because B \to C. \\
&\neg B && \because \neg C \to \neg B \land \neg C. \\
&\neg B \to \neg A && \because A \to B. \\
&\neg A && \because \neg B \to \neg A \land \neg B.
\end{aligned}
$$

따라서 A는 거짓이라는 결론을 얻을 수 있다. 즉, 나의 프로그램은 수행중이 아니다.

(b)

> 모든 삼각 함수는 주기(periodic) 함수이고, 모든 주기 함수는 연속 함수이다.

- A를 "삼각함수이다.",
- B를 "주기함수이다.",
- C는 "연속함수이다."

라고 하면 다음과 같은 구조로 추론이 가능하다.

$$
\begin{aligned}
A \to B. \\
B \to C. \\
A \to C \quad \because A \to B \land B \to C.
\end{aligned}
$$

따라서 A이면 C라는 결론을 얻을 수 있다. 즉, 모든 삼각함수는 연속함수이다.

Question 19

> 다음 명제가 참인지 거짓인지를 증명하라: "오늘이 화요일이면 나는 컴퓨터 또는 수학 시험을 본다. 수학 교수님이 편찮으시면 수학 시험은 치

> 르지 않을 것이다. 오늘은 화요일이고 수학 교수님이 편찮으시다. 그러면 나는 컴퓨터 시험을 본다.”

- A를 “오늘이 화요일이다.”,
- B를 “나는 컴퓨터 시험을 본다.”,
- C를 “나는 수학 시험을 본다.”,
- D를 “수학 교수님이 편찮으시다.”

라고 하면 다음과 같은 구조로 추론이 가능하다.

$$\begin{aligned}
&A \to B \vee C. \\
&D \to \neg C. \\
&A \wedge D. \\
&B? \\
&B \vee C && \because (A \wedge D) \wedge (A \to B \vee C). \\
&\neg C && \because (A \wedge D) \wedge (D \to \neg C). \\
&B && \because (B \vee C) \wedge \neg C.
\end{aligned}$$

따라서 B, 즉 나는 컴퓨터 시험을 본다는 결론을 얻을 수 있다.

Question 27

다음이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하라.

(b) $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n+1) \quad (n \geq 1)$

수학적 귀납법은 어떤 자연수에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 $\forall n \in \mathbb{N}$에 대해 성립함을 보이는 방법으로, $P(1)$을 먼저 증명하고 $P(n) \to P(n+1)$을 증명하는 증명법이다. 이 두 명제가 증명되면 모든 자연수에 대해 $P(n)$가 증명되는 것과 동일하다.

$P(n) := [4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n+1)]$이라고 하자.

이때 $P(1) = [4 = 2 \cdot 1 \cdot (1+1) = 4]$이므로 $P(1)$은 참이다.

$P(n)$이 참이라고 가정하자. 그렇다면

$$\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n+1)$$

이고,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 4k + 4(n+1) &= 2n(n+1) + 4(n+1) \\
4 + 8 + \cdots + 4n + 4(n+1) &= (2n+4)(n+1) \\
\sum_{k=1}^{n+1} 4k &= 2(n+1)(n+2),
\end{aligned}
$$

즉 $P(n+1)$도 참이 된다. 따라서 $P(n)$은 모든 자연수에 대해 참이다. 따라서 주어진 명제

$$
4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n+1) \quad (n \geq 1)
$$

는 참이다. $\square$