20180634 최준형

1

ⓐ

$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\1&0&2&1\end{bmatrix}$ 를 rref로 만들면

$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 이다.

pivot이 1열, 2열에 있으므로

column space의 dim = 2

basis = $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&1&1&0&0\\1&0&2&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$

$x_3=s,\ x_4=t$

$x_1+2s+t=0$, $x_1=-2s-t$

$x_2+s=0$, $x_2=-s$

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

null space의 dim = 2

basis = $\left\{\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 가 A를 rref한 것이므로

row space의 dim = 2

basis = $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

ⓑ

$L(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$=(x_1+x_2,\ x_3+x_4)$

$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right]$

$x_1=s$, $x_2=-s$

$x_3=t$, $x_4=-t$

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$

L의 kernel은 span$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$

20180634 최준형

#2

ⓐ 케일리-해밀턴 정리는

$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} \cdots a_1\lambda a_n = 0$

이 n차 정방행렬 A의 특성방정식이라 할때 다음 행렬방정식이 성립한다는 것이다

$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2}$

$\cdots\cdots \; a_1A + a_nI = 0$

ⓑ $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3) - (-2)$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

즉 케일리 해밀턴 정리에 의해

$P(A) = A^2 - 4A + 5I = 0$

$5I = -A^2 + 4A = A(-A + 4I)$

$I = A\frac{1}{5}(-A + 4I)$

$\therefore \; A^{-1} = \frac{1}{5}(-A + 4I)$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+4 & 1 \\ -2 & -3+4 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= 2 \pm i$

$A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I$ 의

고유값은

$i+2$ $\quad (2+i)^2 = A^2 = 4 + i^2 + 4i = 3 + 4i$

$A^3 = (3+4i)(2+i) = 6 - 4 + 11i$

$= 2 + 11i$

$A^4 = 9 + 16i^2 + 14i = -7 + 14i$

$-7 + 14i - 3(2+11i) + 3(3+4i)$

$-2(2+i) + 8$

$= \cancel{-7} + 14i \cancel{-6} - 33i \cancel{+9} + 12i \cancel{-4} - 2i \cancel{+8}$

$= 0 - 9i$

$2-i$ $\quad (2-i)^2 = A^2 = 4 + i^2 - 4i = 3 - 4i$

$A^3 = (3-4i)(2-i) = (6 + 4i^2 - 11i)$

$= 2 - 11i$

$A^4 = (3-4i)^2 = -7 - 14i$

$-7 - 14i - 3(2-11i) + 3(3-4i)$

$-2(2-i) + 8$

$= -7 - 14i - 6 + 33i + 9 - 12i$

$-4 + 2i + 8$

$= 0 + 9i$

∴ 고유값은 $\pm 9i$이다.

20180634 최준혁

#3.

ⓐ A가 Hermitian 이려면 $A = A^H$ 이어야 한다

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & +i & -1-i \\ -i & 1 & 1-i \\ 1-i & -1-i & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix} \neq A$$

∴ Hermitian이 아니다

ⓑ A가 unitary 이려면 $A^H A = I$ 여야한다

$$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$= 4I$

∴ unitary 행렬이 아니다.

하지만 $\frac{1}{\sqrt{4}}A$는 unitary이고

Let, $\frac{1}{2}A = U$, $U^{-1} = U^H$

$$U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

이때 $U = \frac{1}{2}A$ 이므로

$U^{-1} = 2A^{-1}$ 이다

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

20180634 최준혁

4.

ⓐ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot V_1}{V_1 \cdot V_1} V_1$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{6}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-6 \\ 4-6 \\ 4-6 \\ -1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot V_1}{V_1 \cdot V_1} V_1 - \frac{x_3 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2} V_2$$

$$= x_3 - \frac{4}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-28}{106} \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{98}{53} \\ \frac{28}{53} \\ \frac{28}{53} \\ \frac{98}{53} \end{bmatrix}$$

$$= \Big[$$

ⓑ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)(\lambda-3) + 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 20$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-5), \quad \lambda = 4, 5$$

(i) $\lambda = 4$

$$4I - A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Let, $x_1 = s$, $-2s + x_2 = 0$, $x_2 = 2s$

$\lambda = 4$에 대한 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda = 5$

$$5I - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda = 5$에 대한 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

즉 A를 대각화하는 행렬 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

대각화한 결과 Λ는 주대각성분이

고유값이므로 $\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

20180634 최준혁

5

$Ax=b$의 최소제곱해 $\hat{x} = R^{-1}Q^T b$이다.

A는 각 열이 선형독립이므로 QR분해 할 수 있다.

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{17} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1172}{289}}} \begin{bmatrix} -\frac{4}{17} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$