선형대수학 중간고사 page1 20180634 최준형

$\boxed{\#1}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ⓐ $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$

ⓑ

$$A_b = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0+0 \\ 1+0+0+0 \\ 1+0+1+0 \\ 1+0+3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ⓒ

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$\sim [I|A^{-1}]$

20180634 최준혁

#2

ⓐ 3row로 expansion

$$\det(A) = 0\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 0\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

이때 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (20+2+0) - (20-4+0)$

$= 22 - 16 = 6$

$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (12+2+2) - (12-1-4)$

$= 16 - (7)$

$= 9$

(이어서 풀면)

$= -1 \times 6 + 4 \times 9 = -6 + 36 = 30$

$\boxed{\therefore \det(A) = 30}$

ⓑ

A는 가역적이다 그 이유는 $\det(A) \neq 0$이기 때문이다.

+참고)

가역행렬의 행렬식이 0이 아닌 이유 증명

가역행렬 A는 기본행렬의 곱으로 나타낼수 있다

$A = E_1 E_2 \cdots E_n$

$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots \times \det(E_n)$

기본행렬의 행렬식 중 0인것은 없다. 따라서 우변은 0이 아니다.

20180634 최준혁

$\boxed{\#3}$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$dot(A) = 0$

$$det(A) = x \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ z \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

이때

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (3+(-6)+8) - (-4+4+9) = 5 - 9 = -4$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5+2-9) - (-1+6-15) = (-12) - (-10) = -12+10 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (10+12-3) - (2-9+20) = 19 - (13) = 6$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-30+24+3) - (4+27-20) = (-3) - (11) = -14$$

∴ 평면의 방정식은

$$-4x + 2y + 6z + 14 = 0$$

2180634 최준혁

#4

ⓐ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad E_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = u$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} A &= E_1^{-1}E_2^{-1}u \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= Lu \end{aligned}}$$

ⓑ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$ a : column of A^{-1}

$I_3 = (i_1, i_2, i_3)$ i : column of I.

$$[L|i_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_3|y_1]$$

$$[U|y_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[L|i_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_3|y_2]$$

$$[U|y_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[L|i_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_3|y_3]$$

$$[U|y_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

2180634 최준경

#5

ⓐ $A^TA = I_n$

$\det(A^T)\det(A) = \det(I_n) = 1$

따라 $\det(A^T) = \det(A)$ 이므로

$(\det(A))^2 = 1$

$\det(A) = 1$ or -1 이다

∴ A는 가역적이다.

A가 가역적일때 $BA = I_n$을 만족하는 B를 A의 inverse라고 하는데 이는 하나 존재한다. 따라서

$A^T = A^{-1}$, A는 가역적이다

또한 $\det(A) \neq 0$ 이므로 A는 가역적이다.

ⓑ $A^T = -A$, A는 skew symetric

n이 홀수일때 $\det(A) = 0$

A는 가역적이지 않다 (비가역적이다)

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A)$$

$\det(A) = -\det(A)$ 이어야 하므로

$\det(A) = 0$ 이어야 한다.

 2018 6634 최준형

$\boxed{\#6}$ True

ⓐ $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ a는 A의 column들

$B=(b_1, b_2, b_3)$ b는 B의 column들

$Ab_1=(a_1+a_2+a_3)b_1$

$Ab_3=(a_1+a_2+a_3)b_3$ 이다.

이때 b_1, b_3가 같으므로

AB의 1열과 3열은 같다

ⓒ 거짓이다

(반례)

행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&1&9\end{bmatrix}$ 일 경우

$\det(A)=0$ 이다.

ⓑ false

A가 n차 정방행렬일때

$\det(-A)=(-1)^n\det(A)$ 이므로

n이 짝수이면 $\det(-A)=-1$

n이 홀수이면 $\det(-A)=1$ 이다

ⓓ True

가역행렬은 $A=E_1E_2\cdots E_n$으로

나타낼 수 있다 이 식과해서

E_i와 A가 행동치임을 이해했다.