4

ⓐ 참

ⓑ 거짓 , 모든 벡터공간은
벡터합, 스칼라배 연산에
닫혀있다

ⓒ 참

ⓓ 참

ⓔ 참

ⓕ 참

ⓖ 거짓 , 벡터공간 차원 = 기저의 벡터수

ⓗ 참

ⓘ 참

6

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

s.t $u_{11}u_{22} = u_{12}u_{21}$, $v_{11}v_{22} = v_{12}v_{21}$

$u+v =$

$$\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ v_{21}+u_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(u+v) = (u_{11}+v_{11})(v_{22}+v_{22})$$
$$- (u_{12}+v_{12})(v_{21}+u_{21})$$
$$= (\cancel{u_{11}v_{12}} + \cancel{v_{11}v_{22}} + u_{11}v_{22} + v_{11}u_{22})$$
$$- \cancel{u_{12}u_{21}} - \cancel{v_{12}v_{21}} - v_{12}u_{21} - u_{12}v_{21}$$
$$= u_{11}v_{22} + v_{11}u_{22} - v_{12}u_{21} - u_{12}v_{21}$$
$$\neq 0$$

∴ 벡터공간이 아니다.

11

$u = (2, 0, 0)$

$v = (0, \frac{1}{2}, 0)$

$u+v = (2, \frac{1}{2}, 0)$

$2 - 2 + 0 = 0 \neq 2$

∴ 벡터공간이 아니다

8

$c_1 \times 1 + c_2 \times (1+x) + c_3 \times$
$(1+x)^2 = 2 + 3x - x^2$

$c_1 + c_2 + c_2x + c_3 + c_3 \times 2x$
$+ c_3x^2$

$= c_3x^2 + (c_2 + 2c_3)x + c_1 + c_2 + c_3$

$= -x^2 + 3x + 2$

$c_3 = -1$, $c_2 = 5$, $c_1 = -2$

$\therefore -2 \times (1) + 5(1+x) - 1(1+x)^2$
$= 2 + 3x - x^2$

13

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -49 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$c_1 = -7$, $c_2 = -2$

$-c_1 + 2c_2 = h = 7 - 4 = 3$

$\therefore h = 3$

17

(i) S의 부분집합중 크기가 3인 경우

$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ 과 $\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}$ 이 같이 속하면

선형독립이 아니므로 기저가 아니고

$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ 과

$\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ 는 확인

하면

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&6&1\\1&-2&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1&2&1\\2&6&1\\-1&-2&3\end{vmatrix} = 0$$

이므로 3이 크기 인경우는 없다.

(ii) 크기가 2인 경우

마찬가지로 $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ 과 $\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}$ 이 같이있는

경우는 제외하면

$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{bmatrix}2\\6\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ 이 있다.

모두 선형독립이고 $\mathbb{R}^3$공간는 생성하므로

위의 5가지 모두 답이다.

24

$$\text{proj}_y x = \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y$$

ⓐ $\dfrac{(2,-1)\cdot(1,3)}{(1,3)\cdot(1,3)} \cdot (1,3)$

$= \dfrac{2-3}{10}(1,3) = -\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

ⓑ $\dfrac{(2,-2,4)\cdot(-1,1,2)}{(-1,1,2)(-1,1,2)} \cdot (-1,1,2)$

$= \dfrac{-2-2+8}{1+1+4}(-1,1,2)$

$= \dfrac{4}{6}(-1,1,2) = \dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$

ⓒ $\dfrac{(1,2,1,3)\cdot(1,-3,3,2)}{(1,-3,3,2)\cdot(1,-3,3,2)}(1,-3,3,2)$

$= \dfrac{1-6+3+6}{1+9+9+4}(1,-3,3,2)$

$= \dfrac{4}{23}\begin{bmatrix}1\\-3\\3\\2\end{bmatrix}$

ⓓ

$\dfrac{(2,-2,4)\cdot(-1,1,1)}{(-1,1,1)\cdot(-1,1,1)}(-1,1,1)$

$= \dfrac{-2-2+4}{1+1+1}(-1,1,1)$

$= 0(-1,1,1)$

$= \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

33

ⓐ $\int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \int_{-1}^{1} x \, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

∴ 직교한다

ⓑ $\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \, dx}$

$= \sqrt{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}}$

$= \sqrt{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)}$

$= \sqrt{\frac{2}{3}}$

ⓒ $f(x) = x-1, \ g(x) = x$

$\frac{\langle f(x), g(x) \rangle}{\langle g(x), g(x) \rangle} g(x)$

$= \frac{\int_{-1}^{1} (x-1)x \, dx}{\int_{-1}^{1} x^2} g(x)$

이때 $\int_{-1}^{1} (x-1)x) \, dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 - x) \, dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{3} \cancel{- \frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}$

즉 $\frac{2}{3} / \frac{2}{3} \ g(x) = g(x) = \boxed{x}$

36

$c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0$

$c_1, c_2, c_3 \neq 0$ 이어야 한다

$\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$

$\det \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$ 이므로

선형독립이므로

$\det \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$ 이어야 한다

$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 2x^2) - (0 + 3x + 0)$

$= 1 + 2x^2 - 3x$

$= 2x^2 - 3x + 1$

$= (2x-1)(x-1)$

$\boxed{x = \frac{1}{2}, 1}$

159

$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4x_2 \\ 4x_2 - 4x_1 \end{bmatrix}$

$\nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1 - 4x_2 \\ 4x_2 - 4x_1 \end{bmatrix}$

$\nabla f(1,2) = \begin{bmatrix} 6-8 \\ 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\boxed{60}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial F_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6x_1 + 2x_2 & 4x_2^2 \\ 2x_1 & 8x_1x_2 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$= J_F$$

$$J_F(1,2) = \begin{bmatrix} 6+4 & 16 \\ 2 & 16+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$$

$\boxed{61}$

$$H(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_1^2 + 1 + 4x_2)$$

$$= 12x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 4x_2 - 3) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}(6x_1^2 + 1 + 4x_2) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + 4x_2 - 3) = 4$$

$$\therefore H(f) = \begin{bmatrix} 12x_1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(f(2,1)) = \begin{bmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

In [25]:
```python
import numpy as np

def orthProj(u, x): # 정사영 계산
    xu_dot = np.dot(x.T, u)
    uu_dot = np.dot(u.T, u)
    projux = (xu_dot/uu_dot)*u
    return projux
```

In [26]:
```python
u1 = np.array([[2], [-1]]) ; v1 = np.array([[1], [3]])
u2 = np.array([[2], [-2], [4]]) ;v2 = np.array([[-1], [1], [2]])
u3 = np.array([[1], [2], [-1], [3]]) ;v3 = np.array([[2], [-3], [1], [4]])
u4 = np.array([[2], [-2], [4]]) ;v4 = np.array([[-1], [1], [1]])

D = {'a':[u1,v1],'b':[u2,v2],'c':[u3,v3],'d':[u4,v4]}
D_keys = list(D.keys()); D_values = list(D.values())

for i in range(len(D)):
    print('24-{}번 문제'.format(D_keys[i]))
    print("u의 v 위로의 정사영 : ₩n", orthProj(D_values[i][1], D_values[i][0]))
    print()
```

```
24-a번 문제
u의 v 위로의 정사영 :
 [[-0.1]
 [-0.3]]

24-b번 문제
u의 v 위로의 정사영 :
 [[-0.66666667]
 [ 0.66666667]
 [ 1.33333333]]

24-c번 문제
u의 v 위로의 정사영 :
 [[ 0.46666667]
 [-0.7       ]
 [ 0.23333333]
 [ 0.93333333]]

24-d번 문제
u의 v 위로의 정사영 :
 [[-0.]
 [ 0.]
 [ 0.]]
```