UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CAMPUS BLUMENAU

Relatório 12:

Carlos Eduardo dos Santos Junior
Marco Antônio Priotto Tonon

Blumenau, Setembro de 2019

Sumário

I Introdução

Neste presente relatório iremos fazer cálculos para encontrar o modelo estático do sistema robotizado mostrado na Figura 1 abaixo, utilizando o Jacobiano e conceitos de cinemática diferencial aprendidos em sala de aula, além de outros que utilizamos ao longo dessa disciplina.

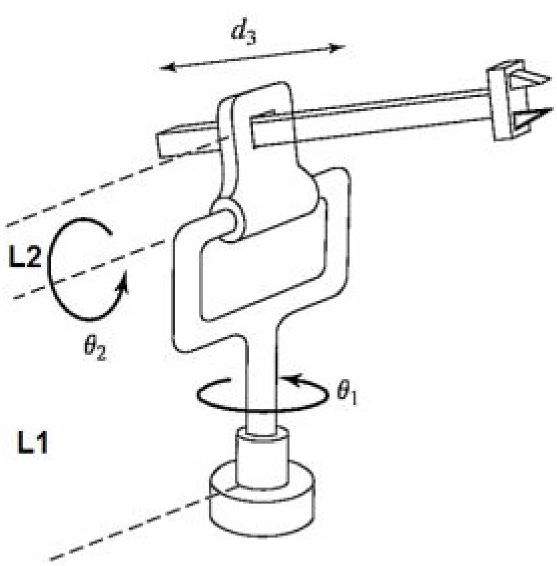

Figura 1: Sistema Robotizado 3DoF.

A Matriz Jacobiana é uma matriz formada por derivadas parciais de uma função vetorial, sua utilidade está presente em várias aplicações, como esta que iremos abordar neste relatório, em linearização para sistema de controle, e para vários teoremas como o de Stokes, Green e Gauss, entre outros, sua definição é mostrada abaixo:

$$\mathbf{J_G}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Figura 2: Matriz Jacobiana.

Com base nos conceitos da mesma, iremos encontrar uma relação de força e torque para nossos modelo, dado por:

$$\tau = J^t * F$$

II Desenvolvimento

Dado o manipulador mostrado no excerto acima, fazendo as devidas projeções para as coordenados dos eixos X,Y e Z, utilizamos os parâmetros de Denavit Hartenberg para descrever seu comportamento.

	Parâmetros de DH			
	θ	d	a	α
OT0	θ1	L1	0	-90°
0T1	θ2 + 90°	0	L2	90°
1T2	0	D3	0	0

Figura 3: Parâmetros de D-H do nosso sistema.

Após isto, com base na convenção de Denavit Hartenberg demonstrada abaixo, montamos nossas matrizes do sistema.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\alpha_i \cos\theta_i & a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 4: Convenção de Denavit Hartenberg.

$$T1 = \begin{vmatrix} \cos(\theta 1) & 0 & -\operatorname{sen}(\theta 1) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta 1) & 0 & \cos(\theta 1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T2 = \begin{vmatrix} \cos(\theta 2 + 90°) & 0 & \operatorname{sen}(\theta 2 + 90°) & L2*\cos(\theta 2 + 90°) \\ \operatorname{sen}(\theta 2 + 90°) & 0 & -\cos(\theta 2 + 90°) & L2*\operatorname{sen}(\theta 2 + 90°) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & D3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Figura 5: Matrizes do sistema.

Por fim, Fazendo o produto dessas matrizes, obtivemos o seguinte resultado:

$$T4=\begin{vmatrix} \cos(\theta1)*\cos(\theta2 + 90°) & -sen(\theta1) & \cos(\theta1)*sen(\theta2 + 90°) & \cos(\theta1)*(D3*sen(\theta2 + 90°) + L2*\cos(\theta2 + 90°)) \\ sen(\theta1)*\cos(\theta2 + 90°) & \cos(\theta1) & sen(\theta1)*sen(\theta2 + 90°) & sen(\theta1)*(-D3*\cos(\theta2 + 90) + L2*sen(\theta2 + 90°)) \\ -sen(\theta2 + 90°) & 0 & \cos(\theta2 + 90°) & D3*\cos(\theta2 + 90) - L2*sen(\theta2 + 90°) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Figura 6: Matriz Final de nosso sistema.

Com base nessa matriz, calculamos nossa matriz Jacobiana que iremos utilizar em nosso modelo estático, para acharmos os resultados requeridos, declaramos os seguintes pontos utilizando-se da matriz da Figura 6 sendo eles, Px = P(1,4) da Figura, Py = P(2,4) e Pz = P(3,4), para calcularmos as 3 primeiras linhas e colunas de nossa matriz jacobiana, iremos utilizar estes mesmos pontos e derivá-los em relação a θ1, θ2 e θ3 conforme a notação Jacobiana já explicada neste relatório.

Para as 3 colunas e linhas restantes, utilizamos o conceito das juntas ao qual, duas serão de revolução e uma prismática, ao qual podemos dizer que as juntas prismáticas nos dá um vetor de zeros para nosso Z, onde Z descreve um vetor de 3 linhas e 1 coluna que iremos utilizar em nossa matriz Jacobiana, para as juntas de revolução, teremos que nosso Z será descrito pela 3° coluna das matrizes, T1 e T3, que são matrizes de origem de juntas de revolução, após a realização destes cálculos chegaremos na seguinte matriz Jacobiana.

$$J=\begin{vmatrix} -sen(\theta1)*(D3*(sen(\theta2 + 90°) + L2*\cos(\theta2 + 90°)) & \cos(\theta1)*(-D3*sen(\theta2) -L2*\cos(\theta2)) & \cos(\theta1)*sen(\theta2 + 90°) \\ \cos(\theta1)*(-D3*\cos(\theta2 + 90°) +L2*sen(\theta2 + 90°)) & sen(\theta1)*(D3*\cos(\theta2) -L2*sen(\theta2)) & -D3*\cos(\theta2) + L2*sen(\theta2) \\ \cos(\theta1)*(sen(\theta2 + 90)) & -sen(\theta1)*\cos(\theta2 + 90°) & \cos(\theta2 + 90°) \\ -sen(\theta1) & \cos(\theta1)*sen(\theta2 + 90°) & 0 \\ \cos(\theta1) & -sen(\theta1)*\cos(\theta2 + 90°) & 0 \\ 0 & \cos(\theta2 + 90°) & 0 \end{vmatrix}$$

Figura 7: Matriz Jacobiana.

Para facilitar nossos cálculos, substituímos todos os valores da matriz e transpomos ela, os valores foram dados, sendo estes:

Variaveis	Valores
θ1	45°
θ2	45°
L1	0.5m
L2	0.1m
D3	0.3m

Figura 8: Valores das variáveis.

Após a substituição e utilizando-se dos valores da Figura 8 ficamos com:

$$J = \begin{vmatrix} 0,010 & 0,200 & 0,500 \\ 0,010 & 0,010 & -1,414 \\ 0,500 & 0,500 & -0,707 \\ -0,707 & 0,500 & 0,000 \\ 0,707 & 0,500 & 0,000 \\ 0,000 & -0,707 & 0,000 \end{vmatrix}$$

Figura 9: Matriz Jacobiana substituída.

Então, transpomos a nossa matriz Jacobiana para utilizá-la na fórmula descrita na introdução deste relatório para enfim, obter o modelo estático.

$$\begin{vmatrix} \tau 1 \\ \tau 2 \\ F3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,01 & 0,01 & 0,5 & -0,707 & 0,707 & 0 \\ 0,2 & 0,01 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,707 \\ 0,5 & -0,1414 & -0,707 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \\ Mx \\ My \\ Mz \end{vmatrix}$$

Figura 10: Modelo Estático do sistema robotizado.

Fazendo a multiplicação dessa matriz, obtemos os seguintes valores para as forças e momentos, dados que o Torque 1 é = 2 [Nm], Torque 2 = 1 [Nm] e Força 3 = 1 [N]:

Segue-se abaixo as equações do modelo estático:

$$\tau 1 = 0.01Fx + 0.01Fy + 0.5Fz - 0.707Mx + 0.707My = 2$$

$$\tau 2 = 0.2Fx + 0.01Fy + 0.5Fz + 0.5Mx + 0.5My - 0.707Mz = 1$$

$$F3 = 0.5Fx - 0.1414Fy - 0.707Fz = 1$$

Para obtermos a força pura orientada para o chão, zeramos todas as componentes diferentes de Z, portanto, segue-se que:

$1 - \ F3 = -0.707Fz,\ logo:\ Fz = -F3/0.707$ subst (1) na equação que relaciona os torques, temos:

$\tau 1 = (-0.5/0.707) * F3$ e também,

$\tau 2 = (-0.5/0.707) * F3$, conhecidindo com $\tau 1$, para orientação oposta ao chão, consideramos que o eixo positivo para Z é orientado para ‘cima’.

$2 - \ F3 \ = \ 0.707Fz, \ logo: \ Fz \ = \ F3/0.707$ subst (2) na equação que relaciona os torques, temos:

$\tau 1 \ = \ (0.5/0.707) * F3$ e também,

$\tau 2 \ = \ (0.5/0.707) * F3$

Vemos que ambos os resultados possuem módulos iguais, porém com sinais distintos, e isto já era esperado, pois para o mesmo modelo, estamos apenas considerando direções opostas.

Caso queiramos estudar o comportamento da força pura em vários eixos em nosso modelo, basta utilizarmos valores conhecido de Torque e Força e assim, acharemos os valores de todas as componentes de força do modelo, pois zerando os momentos, ficaremos com uma equação S.P.D com 3 variáveis e 3 equações.

III Conclusão

Foi aprendido como obter modelos de sistemas robotizados utilizando-se da ferramenta poderosa que é a matriz Jacobiana, e também de características do funcionamento de forças e torques em um sistema mecânico, concluímos a veracidade do teorema que relaciona torques e forças e da descrição fiel que o mesmo se dá para o manipulador.

IV Referências

[1] Corke, Peter. Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB. Springer Verlag NY, 1, 2011. ISBN: 3642201431

[2] John, J. Craig. Robótica: Introdução a Robótica Industrial. Pearson Brasil, 3, 2013. ISBN: 9788581431284.