# Unidade I: Introdução - Noções de Complexidade



Instituto de Ciências Exatas e Informática Departamento de Ciência da Computação

#### Agenda

• Exercícios iniciais

• Contagem de operações

• Noção sobre as notações O,  $\Omega$  e  $\Theta$ 

#### Agenda

Exercícios iniciais



Contagem de operações

• Noção sobre as notações O,  $\Omega$  e  $\Theta$ 

## Exercício (1)

Resolva as equações abaixo:

a) 
$$2^0 =$$

d) 
$$2^3 =$$

g) 
$$2^6 =$$

$$j) 2^9 =$$

b) 
$$2^1 =$$

e) 
$$2^4 =$$

h) 
$$2^7 =$$

$$k) 2^{10} =$$

c) 
$$2^2 =$$

f) 
$$2^5 =$$

i) 
$$2^8 =$$

I) 
$$2^{11} =$$

## Exercício (2)

Resolva as equações abaixo:

a) 
$$lg(2048) =$$

d) 
$$lg(256) =$$

$$g) lg(32) =$$

$$j) Ig(4) =$$

b) 
$$lg(1024) =$$

e) 
$$lg(128) =$$

h) 
$$lg(16) =$$

$$k) lg(2) =$$

c) 
$$\lg(512) =$$

f) 
$$lg(64) =$$

i) 
$$lg(8) =$$

I) 
$$lg(1) =$$

Nota: Ig (n) é a mesma coisa que o logaritmo de n na base dois, ou seja, log<sub>2</sub>(n)

## Exercício (3)

Resolva as equações abaixo:

a)
$$4,01=$$

$$d)4,99=$$

g) 
$$lg(17) =$$

$$j) Ig(15) =$$

b)
$$[4,01]$$
=

e) 
$$||g(16)|| =$$

h)
$$[g(17)] =$$

$$k) |g(15)| =$$

c)
$$4,99=$$

f) 
$$||g(16)||=$$

## Exercício (4)

Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

$$a) f(n) = n$$

f) 
$$f(n) = 3n^2 + 5n - 3$$

b) 
$$f(n) = n^2$$

g) 
$$f(n) = -3n^2 + 5n - 3$$

c) 
$$f(n) = n^3$$

h) 
$$f(n) = |-n^2|$$

$$d) f(n) = sqrt(n)$$

i) 
$$f(n) = 5n^4 + 2n^2$$

e) 
$$f(n) = lg(n) = log_2(n)$$
 j)  $f(n) = n * lg(n)$ 

#### Agenda

• Exercícios iniciais

Contagem de operações



Noção sobre as notações O, Ω e Θ

```
...
a--;
a -= 3;
a = a - 2;
```



```
...
a--;
a -= 3;
a = a - 2; //três subtrações
```

```
if (a + 5 < b + 3){
    i++;
    ++b;
    a += 3;
} else {
    j++;
}</pre>
```





#### Cenários Possíveis

 Melhor caso: menor "tempo de execução" para todas entradas possíveis de tamanho n

· Pior caso: maior "tempo de execução" para todas entradas possíveis

 Caso médio (ou esperado): média dos tempos de execução para todas as entradas possíveis (abordado em Grafos / PAA)

## Contagem de Operações com Condicional

Será o custo da condição mais ou o da lista de verdadeira ou o da falsa

```
if ( condição() ){
   listaVerdadeiro();
} else {
   listaFalso();
  Melhor caso: condição() + mínimo(listaVerdadeiro(), listaFalso())
  Pior caso: condição() + máximo(listaVerdadeiro(), listaFalso())
```

```
if (a + 5 < b + 3 || c + 1 < d + 3){
    i++;
    ++b;
    a += 3;
} else {
    j++;
}</pre>
```

Calcule o número de adições que o código abaixo realiza:



```
if (a + 5 < b + 3 || c + 1 < d + 3){
    i++;
    ++b;
    a += 3;
} else {
    j++;
}
```

**Resposta:** O número máximo de adições acontece quando a primeira condição do if é falsa e a segunda, verdadeira. Se a primeira condição for verdadeira, o Java nem executa a segunda condição (ver AND\_OR.java)

Α	В	OR
F	X	X
Т	X	Т

Α	В	AND
F	X	F
Т	X	X

```
for (int i = 0; i < 4; i++){
    a--;
}
```



## Contagem de Operações com Repetição

 Será o custo da condição mais o número de interações multiplicado pela soma dos custos da condição e da lista a ser repetida

```
while ( condição() ){
    lista();
}

Custo: condição() + n x (lista() + condição()), onde n é o número de vezes que o laço será repetido
```

## Contagem de Operações com Repetição

 Quando tivermos uma estrutura de repetição em que o contador começa com zero, repete enquanto menor que n e é incrementado em uma unidade, faremos n interações

```
for (int i = 0; i < n; i++){
    lista();
}</pre>
```

Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:

Sua resposta deve ser em função de n

Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:



Sua resposta deve ser em função de n

```
int i = 0, b = 10;
while (i < 3){
    i++;
    b--;
}</pre>
```



Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:



Se n = 6, temos subtrações quando i vale 3, 4, 5 (6 - 3 = 3, vezes)

$$n = 7$$

$$3, 4, 5, 6 (7 - 3 = 4 \text{ vezes})$$

----

$$n = 10$$

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (10-3=7 vezes)

## Contagem de Operações com Repetição

 Quando tivermos uma estrutura de repetição em que o contador começa com a, repete enquanto menor que n e é incrementado em uma unidade, faremos n - a interações

```
for (int i = a; i < n; i++){
    lista();
}</pre>
```

## Exercício (5)

```
int i = 10;
while (i >= 7){
    i--;
}
```

## Exercício (6)

## Exercício (7)

```
for (int i = 0; i < 5; i++){
    if (i % 2 == 0){
        a--;
        b--;
    } else {
        C--;
    }
}
```



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

· Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

Solução fácil: 3 x 2 x 1

· Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

Solução fácil: 3 x 2 x 1

Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

Solução fácil:  $3 \times 2 \times 1$ 



```
int a = 10; for (int i = 0; i < 3; i++){ for (int j = 0; j < 2; j++){ a--; }}

Solução fácil: 3 \times 2 \times 1
```

Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

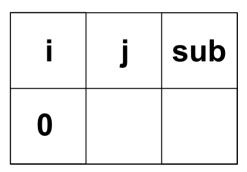
i	j	sub
0	0	0

Solução difícil



```
int a = 10;

for (int i = 0, i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```





```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
0	0	



```
int a = 10;
    true

for (int i = 0; i < 3; i++){
        for (int j = 0; j < 2; j++){
            a--;
        }
}</pre>
```

i	j	sub
0	0	



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
0	0	1



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
0	1	1



i	j	sub
0	1	1



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
0	1	2



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
0	2	2



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
0	2	2



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1		2



i	j	sub
1		2



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1	0	2



i	j	sub
1	0	2



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1	0	3



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1	1	3



i	j	sub
1	1	3



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1	1	4



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1	2	4



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
1	2	4



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2		4



```
int a = 10;

for (int i = 0, i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2		4



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2	0	4



i	j	sub
2	0	4



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2	0	5



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2	1	5



i	j	sub
2	1	5



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2	1	6



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2	2	6



```
int a = 10;
for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
2	2	6



```
int a = 10;

for (int i = 0; i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
3		6



```
int a = 10;
for (int i = 0, i < 3; i++){
    for (int j = 0; j < 2; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

i	j	sub
3		6

# Exercício (8)

```
for (int i = 0; i < n; i++){
    for (int j = 0; j < n; j++){
        a--;
    }
}</pre>
```

# Exercício (9)

```
int i = 1, b = 10;
while (i > 0){
    b--;
    i = i >> 1;
i = 0;
while (i < 15){
     b--;
    i += 2;
```

# Exercício (10)

```
for (int i = 0; i < n; i++)
for (int j = 0; j < n - 3; j++)
a *= 2;
```

# Exercício (11)

```
for (int i = n - 7; i >= 1; i--)
for (int j = 0; j < n; j++)
a *= 2;
```

# Exercício (12)

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2)
a *= 2;
```

# Exercício (13)

```
for (int i = n+4; i > 0; i >>= 1)
a *= 2;
```

### Exercício (14)

```
for (int i = n - 7; i >= 1; i--)
for (int j = n - 7; j >= 1; j--)
a *= 2;
```

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2)
a *= 2;
```

· Calcule o número de multiplicações que o código abaixo realiza:

Quando n é uma potência de 2, realizamos lg(n) + 1 multiplicações

Se n = 8, efetuamos a multiplicação quando i vale 8, 4, 2, 1

Calcule o número de multiplicações que o código abaixo realiza:

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2)
a *= 2;
```

Para um valor qualquer de n, temos [lg(n)]+ 1 multiplicações

# Contagem de Operações com Repetição

 Quando tivermos uma estrutura de repetição em que o escopo de busca é sistematicamente dividido pela metade, temos um custo logarítmico

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2){
    lista();
}
```

# Exercício (15)

```
for (int i = n + 1; i > 0; i /= 2)
a *= 2;
```

# Exercício (16)

```
for (int i = n; i > 1; i /= 2)
a *= 2;
```

# Exercício (17)

```
for (int i = 1; i < n; i *= 2)
a *= 2;
```

# Exercício (18)

```
for (int i = 1; i <= n; i*= 2)
a *= 2;
```

- Faça um método que receba um número inteiro n e efetue o número de subtrações pedido em:
  - a)  $3n + 2n^2$
  - b)  $5n + 4n^3$
  - c) lg(n) + n
  - d)  $2n^3 + 5$
  - e)  $9n^4 + 5n^2 + n/2$
  - f) lg(n) + 5 lg(n)

 Faça um método que receba um número inteiro n e efetue o número de subtrações pedido em:

- a) 3n + 2n<sup>2</sup>
- b)  $5n + 4n^3$
- c) lg(n) + n
- d)  $2n^3 + 5$
- e)  $9n^4 + 5n^2 + n/2$
- f) lg(n) + 5 lg(n)

```
i = 0;
while (i < n){
     j++:
     a--; b--; c--;
for (i = 0; i < n; i++){
     for (j = 0; j < n; j++){
          a--: b--:
```

• Encontre o menor valor em um array de inteiros

```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
    if (min > array[i]){
        min = array[i];
    }
}
```

1°) Qual é a operação relevante?

2°) Quantas vezes ela será executada?

Encontre o menor valor em um array de inteiros



```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
    if (min > array[i]){
        min = array[i];
    }
}
```

1°) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do array

2°) Quantas vezes ela será executada?

Encontre o menor valor em um array de inteiros



```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
    if (min > array[i]){
        min = array[i];
    }
}
```

1°) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do array

2°) Quantas vezes ela será executada?

R: Se tivermos n elementos: T(n) = n - 1

• Encontre o menor valor em um array de inteiros



```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
    if (min > array[i]){
        min = array[i];
    }
}
```

 $3^{\circ}$ ) O nosso T(n) = n – 1 é para qual dos três casos?

#### Agenda

• Exercícios iniciais

Contagem de operações

Noção sobre as notações O, Ω e Θ



#### Noção sobre as Notações O, Ω e Θ

· "Mão na roda" e podem ser lidas como aproximadamente

Abordadas mais à frente da disciplina (Unidade III)

Neste ponto, apresentamos "somente" noções sobre as notações

# Noção sobre as Notações O, $\Omega$ e $\Theta$

- A partir deste ponto, utilizaremos as notações O,  $\Omega$  e  $\Theta$  para identificar a complexidade (número de operações) de um algoritmo, assim:
  - $\circ$  Um algoritmo que realiza 1 operação é O(1),  $\Omega(1)$  e  $\Theta(1)$
  - o Um algoritmo que realiza **n** operações é O(n),  $\Omega(n)$  e O(n)
  - o Um algoritmo que realiza  $n^2$  operações é  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$  e  $\Theta(n^2)$
  - $\circ$  Um algoritmo que realiza **lg(n)** operações é  $m{O}(m{lg(n)}),\,m{\Omega}(m{lg(n)})$  e  $m{\Theta}(m{lg(n)})$

### Noção sobre as Notações O, $\Omega$ e $\Theta$

- Nas notações, ignoramos as constantes:
  - $\circ$  Um algoritmo que realiza 2, 3 ou 5 operações é O(1),  $\Omega(1)$  e  $\Theta(1)$
  - o Um algoritmo que realiza 2n, 3n ou 5n operações é O(n),  $\Omega(n)$  O(n)
  - $\circ$  Um algoritmo que realiza  $2n^2$ ,  $3n^2$  ou  $5n^2$  operações é  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$  e  $\Theta(n^2)$
  - Um algoritmo que realiza 2lg(n), 3lg(n) ou 5lg(n) operações é O(lg(n)), Ω
     (lg(n)) e Θ(lg(n))

### Noção sobre as Notações O, $\Omega$ e $\Theta$

- Nas notações, ignoramos termos com menor crescimento:
  - Um algoritmo que realiza  $3n + 2n^2$  operações é  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$  e  $\Theta(n^2)$
  - Um algoritmo que realiza  $5n + 4n^3$  operações é  $O(n^3)$ ,  $\Omega(n^3)$  e  $\Theta(n^3)$
  - $\circ$  Um algoritmo que realiza **lg(n) + n** operações é  $oldsymbol{O}$ (n),  $oldsymbol{\Omega}$ (n) e  $oldsymbol{\Theta}$ (n)
  - $\circ$  Um algoritmo que realiza  $2n^3 + 5$  operações é  $O(n^3)$ ,  $\Omega(n^3)$  e  $\Theta(n^3)$
  - Um algoritmo que realiza  $9n^4 + 5n^2 + n/2$  operações é  $O(n^4)$ ,  $\Omega(n^4)$  e  $O(n^4)$
  - Um algoritmo que realiza Ig(n) + 5 Ig(n) operações é O(lg(n)), Ω(lg(n)) e Θ
     (lg(n))

# Exercício (19)

• Qual é a diferença entre as notações O,  $\Omega$  e  $\Theta$ ?