

Unidade II:

Somatórios (Σ)



PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

- **Motivação** Σ
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

Principal Motivação na Ciência da Computação

- Levantamento de custo (e.g., tempo e memória) de algoritmos
- O custo de um algoritmo é a soma dos custos das suas operações

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^n i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

início

Matemática

$$\sum_{i=1}^n i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^n i$$

condição de
parada

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros



Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

termo

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {  
    int menor = i;  
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){  
        if (array[menor] > array[j]){  
            menor = j;  
        }  
    }  
    swap(menor, i);  
}
```

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?



```

for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}

```

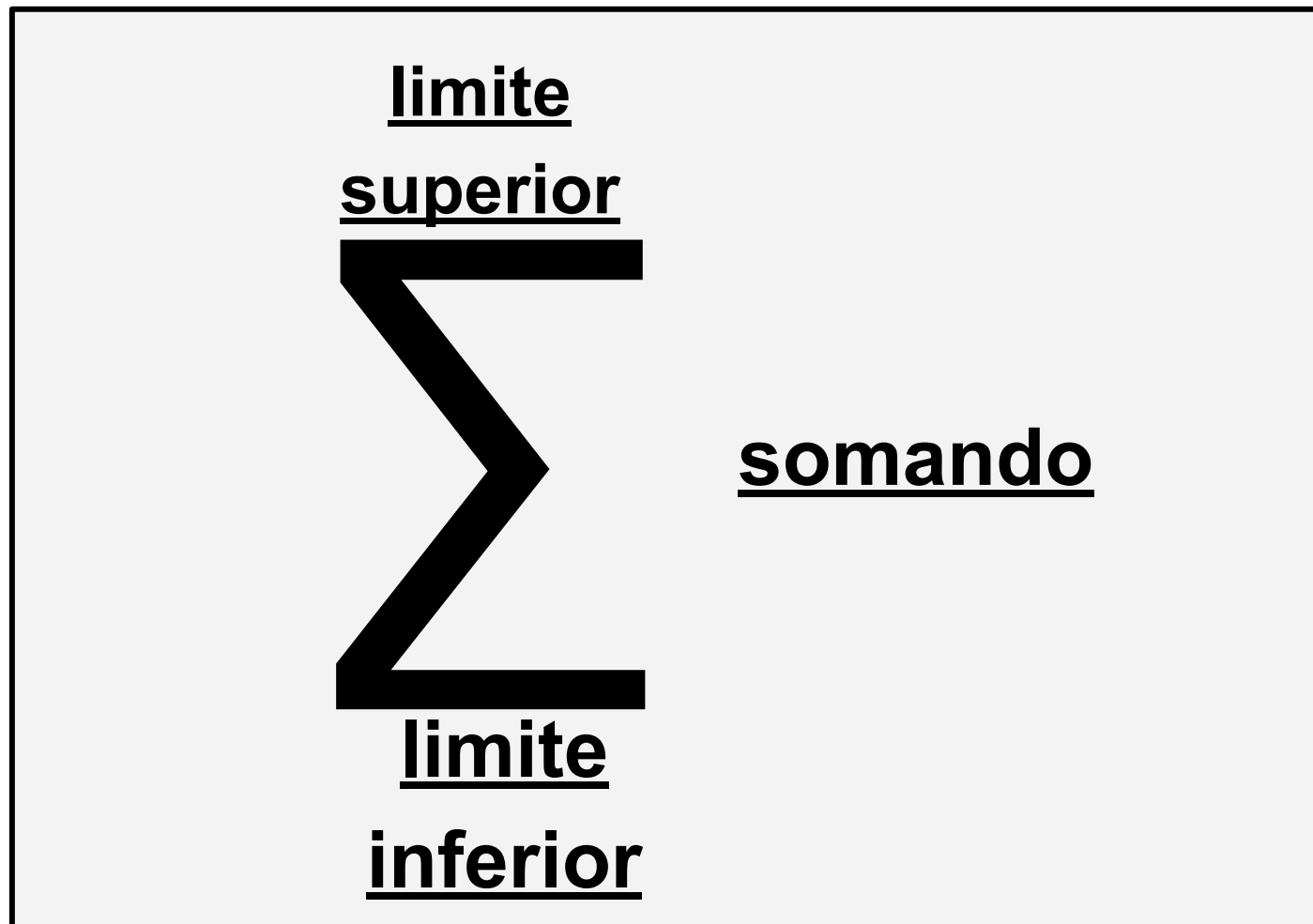
i	0	1	2	3	...	n-2
$c(i) = (n - (i+1))$	n-1	n-2	n-3	n-4	...	1

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

- Motivação
- **Notação** Σ
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

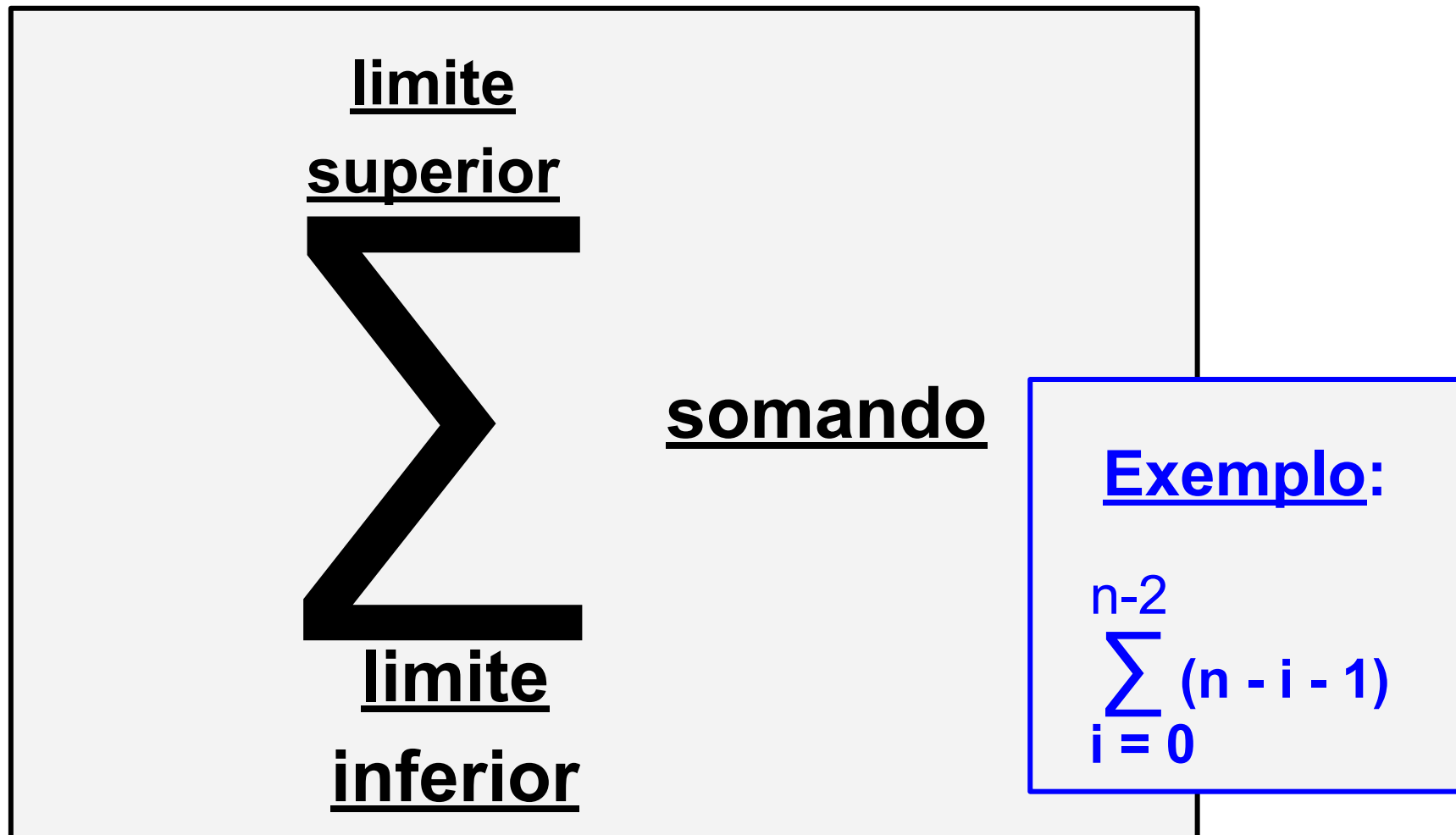
Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente



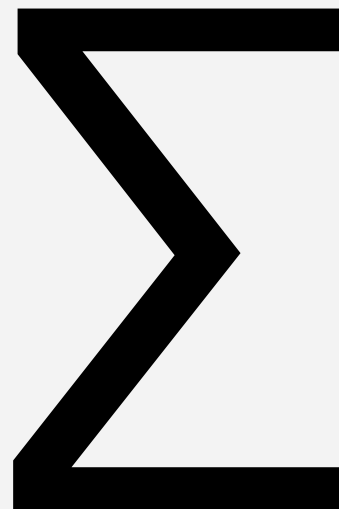
Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente



Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente

A large, bold, black sigma symbol (Σ) is centered within a light gray rectangular box. The symbol is stylized with thick strokes.

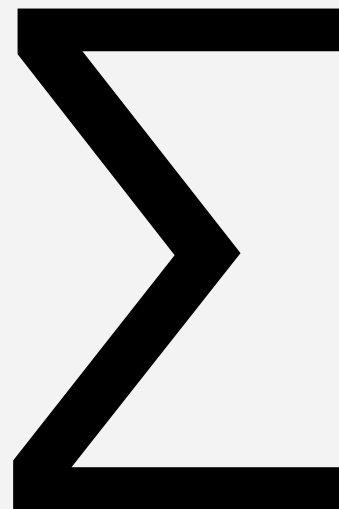
somando

os dois

limites

Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente



os dois

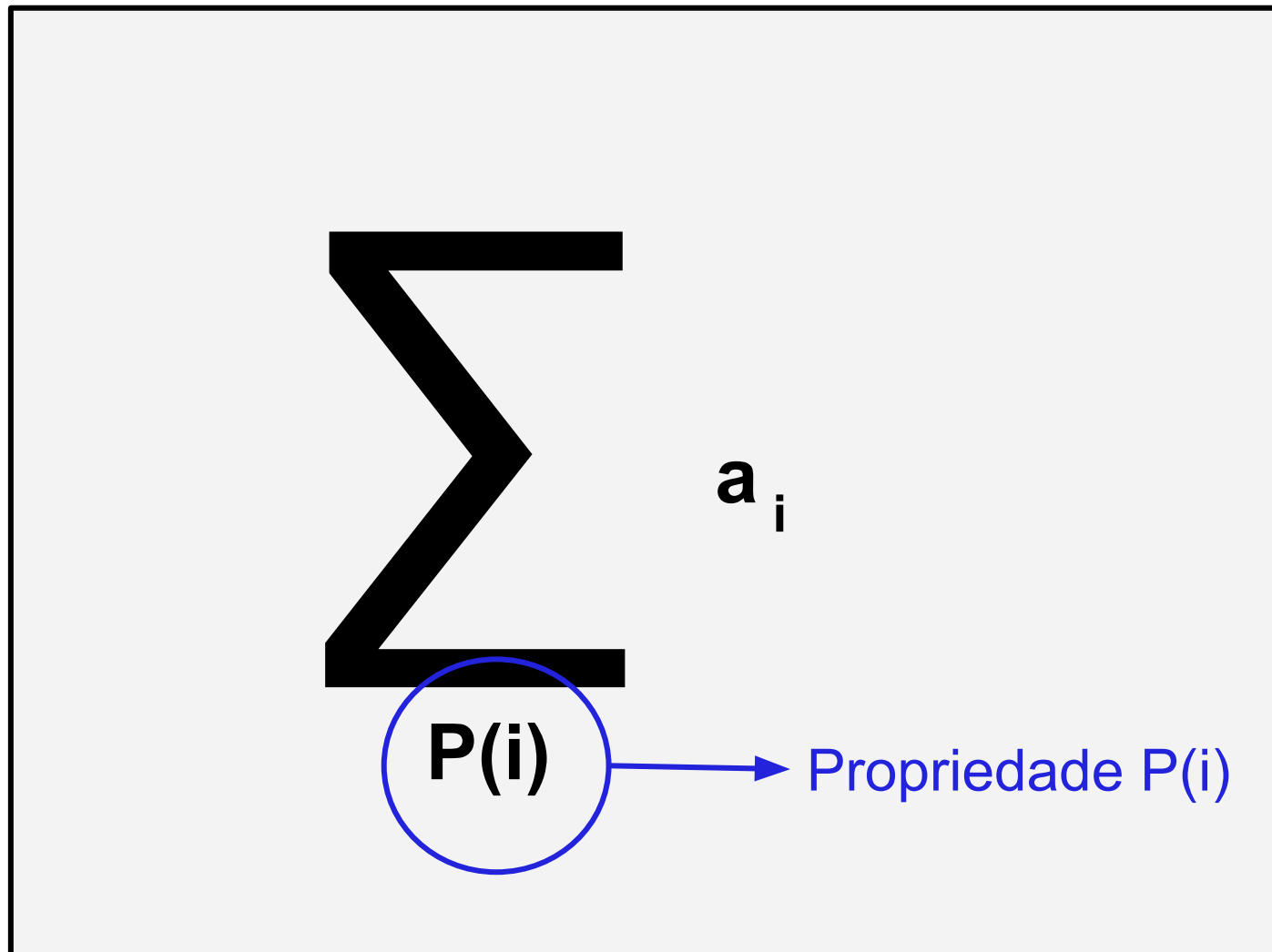
limites

somando

Exemplo:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$$

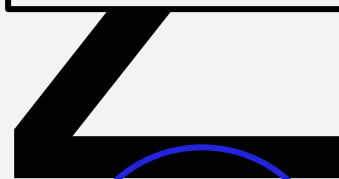
Notação Sigma



Notação Sigma

Exemplo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ é ímpar}}} a_i = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_n \text{ (se } n \text{ é ímpar)}$$

**P(i)**

→ Propriedade P(i)

Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} a_i = \sum_1^n a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \sum_{i=1}^{i \leq n} a_i$$

Exercício Resolvido (3)

$$\sum_{n=1}^4 n^2 = ?$$



Escolha 1 resposta:

☐ $1 + 2 + 3 + 4$

☐ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

☐ $(1 + 2 + 3 + 4)^2$

☐ $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (3)

$$\sum_{n=1}^4 n^2 = ?$$



Escolha 1 resposta:

☐ $1 + 2 + 3 + 4$



☒ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

☐ $(1 + 2 + 3 + 4)^2$

☐ $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{i=1}^4 3i = ?$$

Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{i=1}^4 3i = ?$$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação $\sum_{i=1}^n$ incrementa o índice i . Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação $\sum_{i=1}^n$

Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{i=1}^4 3i = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 4) = 30$$



Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{i=1}^4 3i = 3 \cdot \sum_{i=1}^4 i = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$



Exercício Resolvido (5)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = ?$$

Exercício Resolvido (5)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = (3 - (2 \cdot 1)) + (3 - (2 \cdot 2)) + (3 - (2 \cdot 3)) + (3 - (2 \cdot 4)) = -8$$



Exercício Resolvido (5)

$$\sum_{1}^4 (3 - 2i) = \sum_{1}^4 3 - 2 \sum_{1}^4 i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$



Exercício Resolvido (6)

$$\sum_{i=1}^3 (2i + x) = ?$$

Exercício Resolvido (6)

$$\sum_{i=1}^3 (2i + x) = 2(1+2+3) + (x+x+x) = 12 + 3x$$



Exercício Resolvido (7)

$$\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = ?$$

Exercício Resolvido (7)



$$\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \begin{array}{l} 0 \cdot (-1) \cdot 5 + \\ 1 \cdot 0 \cdot 4 + \\ 2 \cdot 1 \cdot 3 + \\ 3 \cdot 2 \cdot 2 + \\ 4 \cdot 3 \cdot 1 + \\ 5 \cdot 4 \cdot 0 = 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0 = 30 \end{array}$$

Exercício Resolvido (8)

Podemos afirmar que $\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_{i=2}^4 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) ?$

Exercício Resolvido (8)



Podemos afirmar que $\sum_{i=0}^5 i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_{i=2}^4 i \cdot (i-1) \cdot (5-i)$?

Sim, pois como os termos a_0 , a_1 e a_5 são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a $(a_2 + a_3 + a_4)$

Exercício Resolvido (9)

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?



Escolha todas as respostas aplicáveis:

☐ $\sum_{i=0}^3 (i^2 + 2i + 4)$

☐ $\sum_{i=0}^3 (3i + 2)^2$

☐ Nenhuma das anteriores

Exercício Resolvido (9)

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?



Escolha todas as respostas aplicáveis:

☐ $\sum_{i=0}^3 (i^2 + 2i + 4)$

☒ $\sum_{i=0}^3 (3i + 2)^2 = (3 \times 0 + 2)^2 + (3 \times 1 + 2)^2 + (3 \times 2 + 2)^2 + (3 \times 3 + 2)^2 = 4 + 25 + 64 + 121$

☐ Nenhuma das anteriores

Exercício Resolvido (10)

$$\sum_{m=1}^4 8k - 6m = ?$$



Escolha 1 resposta:

☐ $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$

☐ $2 + 4 + 6 + 8$

☐ $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$

☐ $0 + 2 + 4 + 6$

Exercício Resolvido (10)

$$\sum_{m=1}^4 8k - 6m = ?$$



Escolha 1 resposta:



☒ $8k - 6$ + $8k - 12$ + $8k - 18$ + $8k - 24$

☐ $2 + 4 + 6 + 8$

☐ $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$

☐ $0 + 2 + 4 + 6$

- Motivação
- Notação
- **Somas e Relações de Recorrência** Σ
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

Somas e Relações de Recorrência

- Calculamos uma soma usando, por exemplo, relações de recorrência

$$S_0 = a_0$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n, \text{ para } n > 0$$

As relações de recorrência serão discutidas em Teoria dos Grafos e Computabilidade (3813)

Exemplo de Equação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fib}(0) = 1 \\ \text{fib}(1) = 1 \\ \text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) \end{array} \right.$$

Exemplo de Equação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fib}(0) = 1 \\ \text{fib}(1) = 1 \\ \text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) \end{array} \right.$$

i	0	1	2	3	4	5	
fib(i)	1	1	2	3	5	8	...

Exemplo de Equação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{cases}$$

Exemplo de Equação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = ?$$

Exemplo de Equação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fat}(1) = 1 \\ \text{fat}(n) = n \cdot \text{fat}(n-1) \end{array} \right.$$

$$\text{fat}(4) = 4 \cdot \text{fat}(3)$$

$$\text{fat}(3) = 3 \cdot \text{fat}(2)$$

$$\text{fat}(2) = 2 \cdot \text{fat}(1), \text{ contudo, sabemos que } \text{fat}(1) = 1$$

- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- **Manipulação de Somas** Σ
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

Frase de [GRAHAM, 95]

A chave do sucesso na manipulação de somas está na habilidade de transformar uma soma em outra mais simples ou mais perto de algum objetivo



- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- **Manipulação de Somas** Σ
 - Regras Básicas de Transformação
 - Propriedades
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- **Manipulação de Somas** Σ
 - **Regras Básicas de Transformação**
 - Propriedades
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais

Regras Básicas de Transformação

- Distributividade
- Associatividade
- Comutatividade

Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**: permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

Por exemplo, por distributividade, $c \cdot a_{-1} + c \cdot a_0 + c \cdot a_1 = c \cdot (a_{-1} + a_0 + a_1)$

Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**: permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

Também se aplica à divisão

$$\sum_{i \in I} \frac{a_i}{c} = \frac{1}{c} \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

Regras Básicas de Transformação

- **Associatividade**: permite quebrar um somatório em duas partes ou combinar dois somatórios em um

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

Por exemplo, por associatividade, $(a_{-1} + b_{-1}) + (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) = (a_{-1} + a_0 + a_1) + (b_{-1} + b_0 + b_1)$

Regras Básicas de Transformação

- **Associatividade**: permite quebrar um somatório em duas partes ou combinar dois somatórios em um

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

Também se aplica à subtração

$$\sum_{i \in I} (a_i - b_i) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^n a_i + \sum_{1}^n b_i$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{i=3}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$



$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_{i=3}^n (a_i + b_i)$$

$$= -a_1 - a_2 + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$$

Regras Básicas de Transformação

- **Comutatividade**: permite colocar os termos em qualquer ordem

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

Por exemplo, por comutatividade, $a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_{-1} + a_0$

Exemplo de Aplicação da Comutatividade

- Os programas abaixo apresentam o mesmo resultado devido a regra de comutatividade

```
for(int i = 0; i < n; i++)  
    for(int j = 0; j < n; j++)  
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int j = 0; j < n; j++)  
    for(int i = 0; i < n; i++)  
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int i = n-1; i >= 0; i--)  
    for(int j = n-1; j >= 0; j--)  
        soma += mat[i][j];
```

Regras Básicas de Transformação

- Distributividade**

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Associatividade**

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Comutatividade**

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

Exercício Resolvido (12)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a) \quad (\quad) \quad \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b) \quad (\quad) \quad \sum_{p=0}^{1000} (3 + p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c) \quad (\quad) \quad \sum_{\ell=1}^n (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^n \ell;$$

$$d) \quad (\quad) \quad \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k \right)^p ;$$

$$e) \quad (\quad) \quad \sum_{t=8}^{32} (3 + t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

Exercício Resolvido (12)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) (✓) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$

b) (✗) $\sum_{p=0}^{1000} (3 + p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$

c) (✓) $\sum_{\ell=1}^n (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^n \ell;$

d) (✗) $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k \right)^p ;$

e) (✓) $\sum_{t=8}^{32} (3 + t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$

Exercício Resolvido (13)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

Exercício Resolvido (13)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$



No primeiro somatório temos $(3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)$ e no segundo, $(3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4])$. Logo, por comutatividade, temos o mesmo somatório alterando apenas a ordem dos elementos.

- Dado o exercício anterior, podemos afirmar que:

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq n} (3 + 2.(n-i))$$

- Nesse caso, no primeiro somatório, temos $(3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + \dots + (3 + 2.n)$ e no segundo, $(3 + 2.[n-0]) + (3 + 2.[n-1]) + (3 + 2.[n-2]) + \dots + (3 + 2.[n-n])$. Logo, por comutatividade, temos o mesmo somatório alterando apenas a ordem dos elementos
- **Note que o $(n-i)$ “simula” um decremento no valor de i**

- Uma PA é uma sequência cuja diferença (razão) entre dois termos consecutivos é constante
 - O termo inicial, é o **a** e
 - A razão é **b** . **i** onde **b** uma constante e **i** a ordem do termo
- Por exemplo, na sequência 5, 7, 9, 11, 13, ..., os valores a e b são 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: $(5 + 2.0)$, $(5 + 2.1)$, $(5 + 2.2)$, $(5 + 2.3)$, $(5 + 2.4)$, ...

Exercício Resolvido (14)

- Mostre os valores de a e b na sequência 1, 4, 7, 10, 13, ...

Exercício Resolvido (14)

- Mostre os valores de a e b na sequência 1, 4, 7, 10, 13, ...



Os valores a e b são 1 e 3, respectivamente, logo, temos:

$$1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$1 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$1 + 3 \cdot 2 = 7$$

$$1 + 3 \cdot 3 = 10$$

$$1 + 3 \cdot 4 = 13$$

...

Exercício Resolvido (15)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PA

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a + b.i$$

Exercício Resolvido (15)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PA

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a + b.i$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando i por $(n-i)$:

$$S_n = \sum_{0 \leq (n-i) \leq n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (15)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (15)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i + a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (15)

- Como $S = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

- Aplicando associatividade, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i + a + b.n - b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n]$$

- **Simplificando**, temos

Exercício Resolvido (15)

- **Usando distributividade**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Lembre que $[2.a + b.n]$
não depende de i , logo,
pode “sair” do somatório

Exercício Resolvido (15)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

$(n+1)$

Exercício Resolvido (15)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

Exercício Resolvido (15)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

- **Dividindo por dois**, temos:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (16)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{0 \leq i \leq n} i$

Exercício Resolvido (16)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{0 \leq i \leq n} i$

Resposta: Nesse caso, temos uma progressão cujos valores a e b são zero e um, respectivamente

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [0 + 1 \cdot i] = \frac{(2 \cdot 0 + 1 \cdot n) \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$



Exercício Resolvido (17)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos n primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

Exercício Resolvido (17)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos n primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){  
    int soma = 0;  
    for(int i = 1; i <= n; i++){  
        soma += i;  
    }  
    return soma;  
}
```

```
int somatorio(int n){  
    return ((n * (n+1))/2);  
}
```



Exercício (1)

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial a e razão b .

Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Aplicando associatividade, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$



Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

$n \cdot (n-1)$ $1 \cdot (n-1)$

Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - (n-1)$$



Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Sabendo que:

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$



Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$



Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) &= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) \\
 &= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}
 \end{aligned}$$



Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) &= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) \\
 &= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2} \\
 &= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2}
 \end{aligned}$$



Exercício Resolvido (18)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) &= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) \\
 &= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2} \\
 &= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2} \\
 &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)
 \end{aligned}$$



Exercício Resolvido (19)

- Justifique a igualdade:

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=0}^n i$$

Exercício Resolvido (19)

- Justifique a igualdade:

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=0}^n i$$

Resposta: Os dois somatórios são iguais, entretanto, o segundo faz uma soma a mais que é com seu primeiro termo cujo valor é zero.



Exercício Resolvido (20)

- Justifique a diferença:

$$\sum_{1}^n a_i \neq \sum_{0}^n a_i$$

Exercício Resolvido (20)

- Justifique a diferença:

$$\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{i=0}^n a_i$$

Resposta: Os somatórios são diferentes, porque, não necessariamente, o primeiro termo (a_0) é igual a zero



Exercício Resolvido (21)

- Justifique a igualdade:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

Exercício Resolvido (21)

- Justifique a igualdade:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

Resposta: O resultado dos dois somatórios é $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$



Exercício Resolvido (22)

- Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1$ e n)

$$\sum_{i=2}^{n-1} i \cdot (i-1) \cdot (n-i) = \sum_{i=0}^n i \cdot (i-1) \cdot (n-i)$$

Exercício Resolvido (22)

- Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1$ e n)

$$\sum_{i=2}^{n-1} i \cdot (i-1) \cdot (n-i) = \sum_{i=0}^n i \cdot (i-1) \cdot (n-i)$$



Resposta: O primeiro somatório desconsidera os termos a_0 , a_1 e a_n cujo valor é zero.

$$2 \cdot 1 \cdot (n-2)$$

$$3 \cdot 2 \cdot (n-3)$$

$$4 \cdot 3 \cdot (n-4)$$

$$5 \cdot 4 \cdot (n-5)$$

...

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot 1$$

$$\cancel{0 \cdot (-1) \cdot n}$$

$$\cancel{1 \cdot 0 \cdot (n-1)}$$

$$2 \cdot 1 \cdot (n-2)$$

$$3 \cdot 2 \cdot (n-3)$$

...

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot 1$$

$$\cancel{n \cdot (n-1) \cdot 0}$$

- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- **Manipulação de Somas** Σ
- Somas Múltiplas
- Alguns Métodos Gerais
 - Regras Básicas de Transformação
 - **Propriedades**

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 5, 7\}$, então
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $A \cap B = \{3\}$

Aplicando P1 em Conjuntos Quase Disjuntos

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m}^n a_i = a_m + \sum_{i=1}^n a_i, 1 \leq m \leq n$$

Exercício (2)

- Aplique P1 para unificar os somatórios abaixo

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_m^n a_i = a_m + \sum_1^n a_i, 1 \leq m \leq n$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$
- Podemos reescrever $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{(n+1)}$ de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$
- Podemos reescrever $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{(n+1)}$ de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$
- Podemos reescrever $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{(n+1)}$ de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Em ambos: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n+1}$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$
- Podemos reescrever $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{(n+1)}$ de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$
- Podemos reescrever $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{(n+1)}$ de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Resumindo, temos as duas igualdades:

$$\cancel{S_{n+1}} = S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

1^{a} Forma 2^{a} Forma

Na prática, para perturbar,
resolveremos a igualdade abaixo

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Isso, frequentemente, **resulta na equação fechada para S_n**

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

$$a_i = a.x^i \quad \text{COLA}$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$\cancel{S_{n+1}} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}$$

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}$$

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}$$

$$x \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i)$$

Aplicando
a distributiva

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + x \sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i)$$

Aplicando
a distributiva

$$x \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i)$$

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + x \sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i)$$

Sabendo
que

$$x \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i) = x.S_n$$

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n$$

$$x \cdot \sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i) = x.S_n$$

Temos

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n(a.x^i)$$

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n(a.x^i)$$

$$a.1$$

Exercício Resolvido (23)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2:**

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n(a.x^1)$$

Exercício Resolvido (23)

- Fazendo algebrismo, temos:

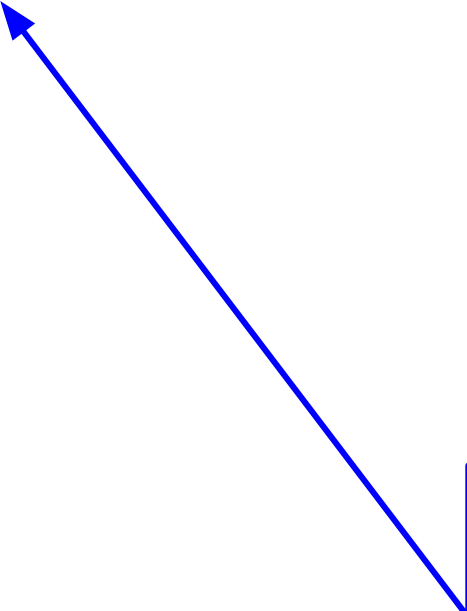
$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n$$

Exercício Resolvido (23)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + \mathbf{a.x^{n+1}} = a + \mathbf{x.S_n} \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1}$$



Invertendo o lado dos termos em vermelho

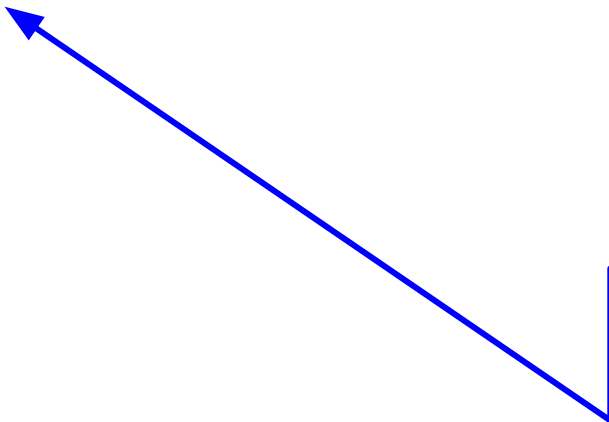
Exercício Resolvido (23)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$\mathbf{S_n - x.S_n} = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x) S_n = a - a.x^{n+1}$$



Colando S_n em evidência

Exercício Resolvido (23)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x) S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$



Invertendo o lado de (1-x)

Exercício Resolvido (23)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x) S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1 \Rightarrow$$

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (23)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x) S_n = a$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}$$

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Observe que quando $x = 1$, temos:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a.1^i) = \sum_{0 \leq i \leq n} a = (n+1).a$$

Exercício Resolvido (24)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (24)

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 0.2^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1).2^{i+1}$$

$$a_i = i.2^i \quad \text{COLA}$$

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i \quad \text{COLA}$$

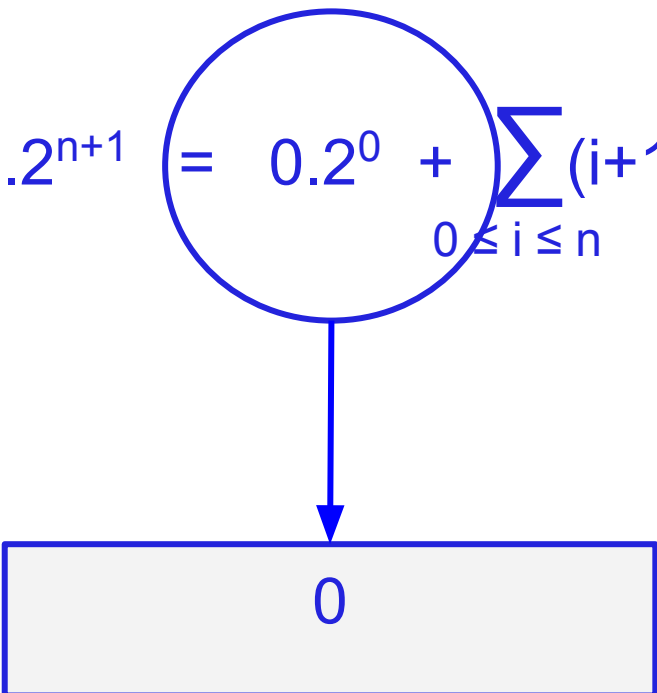
$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA



Exercício Resolvido (24)

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 0 \cdot 2^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1) \cdot 2^{i+1}$$




Exercício Resolvido (24)

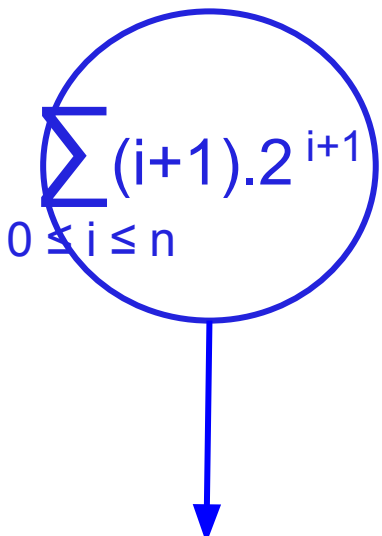
- Como $0.2^0 = 0$, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1).2^{i+1}$$



Exercício Resolvido (24)

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1) \cdot 2^{i+1}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \leq i \leq n} 2^{i+1}$$



Exercício Resolvido (24)

- Aplicando associatividade, temos:

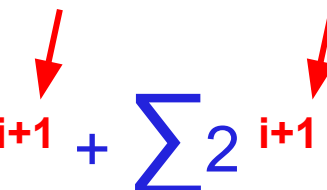
$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \leq i \leq n} 2^{i+1}$$

The diagram illustrates the application of associativity. A box at the bottom contains the sum formula $\sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \leq i \leq n} 2^{i+1}$. An upward arrow points from this box to an oval above it, which also contains the same sum formula. This oval is then equated to the original expression $S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1}$.



Exercício Resolvido (24)

- **Aplicando distributividade**, temos:

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \leq i \leq n} 2^{i+1}$$


Lembre que $2^{i+1} = 2 \times 2^i$

Exercício Resolvido (24)

- **Aplicando distributividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2 \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$



Exercício Resolvido (24)

- **Aplicando distributividade**, temos:

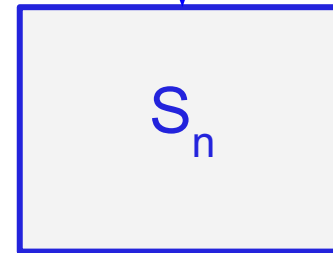
$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$



Exercício Resolvido (24)

- Substituindo S_n , temos:

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$



S_n

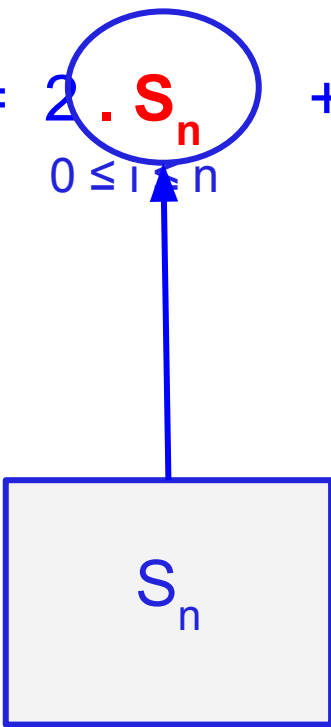
$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i$$

COLA



Exercício Resolvido (24)

- Substituindo S_n , temos:

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot \underbrace{S_n}_{0 \leq i \leq n} + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$




Exercício Resolvido (24)

- Substituindo S_n , temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$



Exercício Resolvido (24)

- E agora José?

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora
José?



Exercício Resolvido (24)

- Vimos que:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora
José?

Vimos
que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$



Exercício Resolvido (24)

• Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora
José?

Vimos
que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo $a = 1$ e $x = 2$, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 1.2^i$



Exercício Resolvido (24)

• Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora
José?

Vimos
que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo $a = 1$ e $x = 2$, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$



Exercício Resolvido (24)

• Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora
José?

Vimos
que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo $a = 1$ e $x = 2$, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1}$



Exercício Resolvido (24)

• Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora
José?

Vimos
que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo $a = 1$ e $x = 2$, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$



Exercício Resolvido (24)

• Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 \cdot (2^{n+1} - 1)$$

E agora
José?

Vimos
que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo $a = 1$ e $x = 2$, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$



Exercício Resolvido (24)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1)$$



Exercício Resolvido (24)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n$$

Invertendo os termos em
vermelho de lado



Exercício Resolvido (24)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = \mathbf{2.S_n - S_n} \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

Invertendo S_n de lado



Exercício Resolvido (24)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

Resolvendo $(n+1).2^{n+1}$



Exercício Resolvido (24)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

Resolvendo $2^{n+1} - 2.2^{n+1}$



Exercício Resolvido (24)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1}-1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Colocando 2^{n+1} em evidência



Exercício Resolvido (24)

- Finalmente:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$



- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- **Somas Múltiplas** Σ
- Alguns Métodos Gerais

Somas Múltiplas

- Os termos de um somatório podem ser especificados por dois ou mais índices, por exemplo:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_i b_j = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \\ a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \\ a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$$

Somas Múltiplas

- Outra forma de representação é utilizando dois somatórios, por exemplo:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_i b_j = \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} a_i \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} b_j \right)$$

- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- **Alguns Métodos Gerais** Σ

- Procure!!!
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- Perturbe a soma



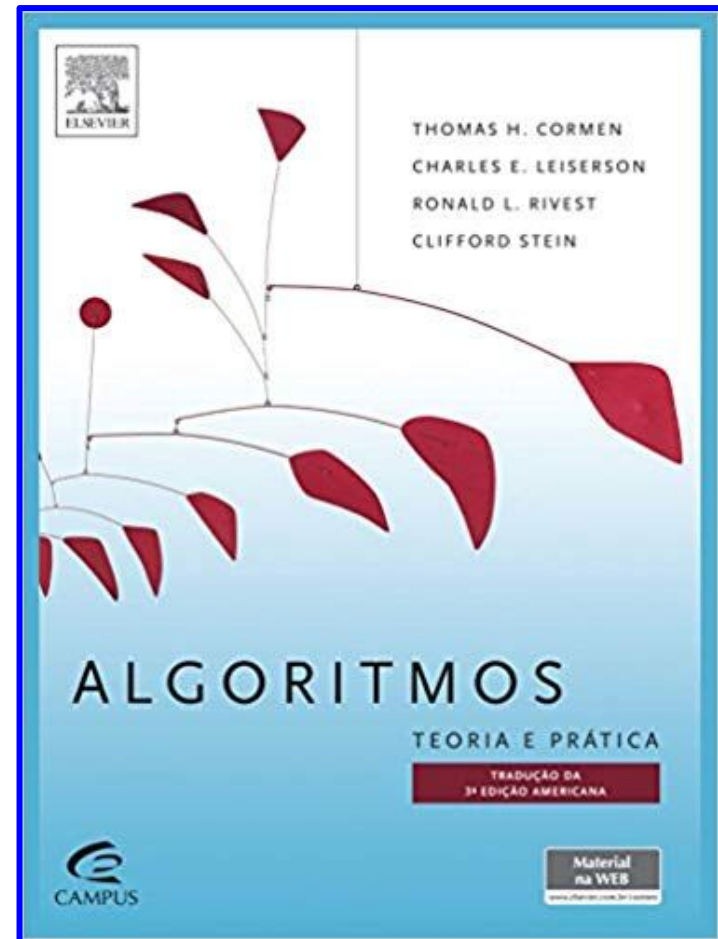
- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- **Alguns Métodos Gerais** Σ

- **Procure!!!**
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- Perturbe a soma



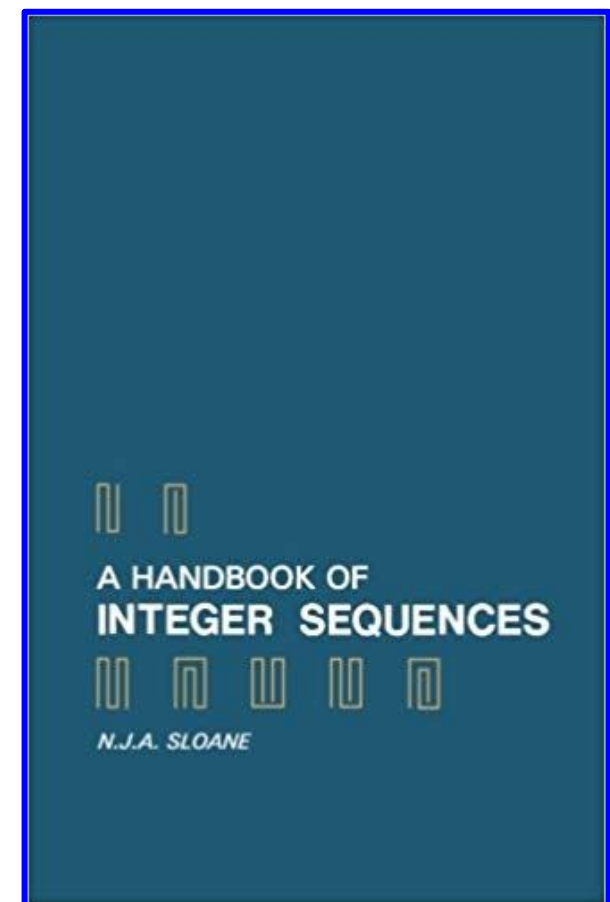
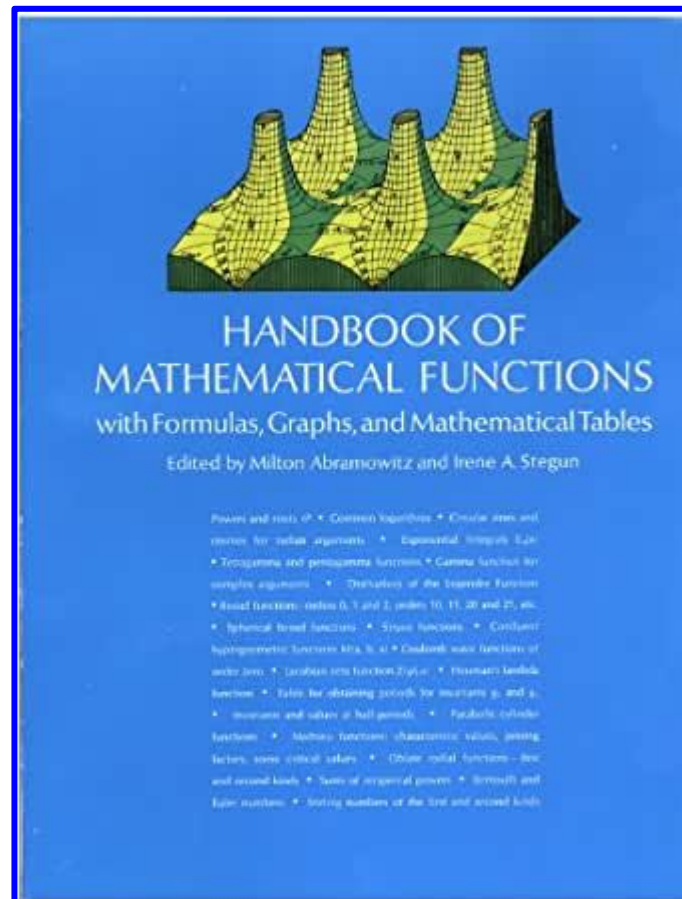
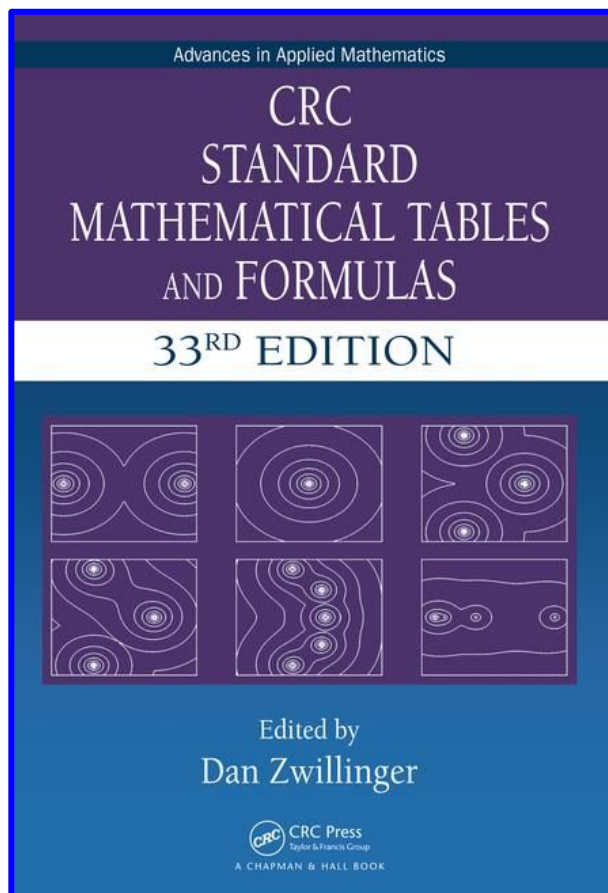
Método Procure!!!

- Possivelmente, todas as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure



Método Procure!!!

- Possivelmente, todos as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure



- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- **Alguns Métodos Gerais** Σ

- Procure!!!
- **Adivinhe a resposta, prove por indução**
- Perturbe a soma



Somatório do Quadrado Perfeito

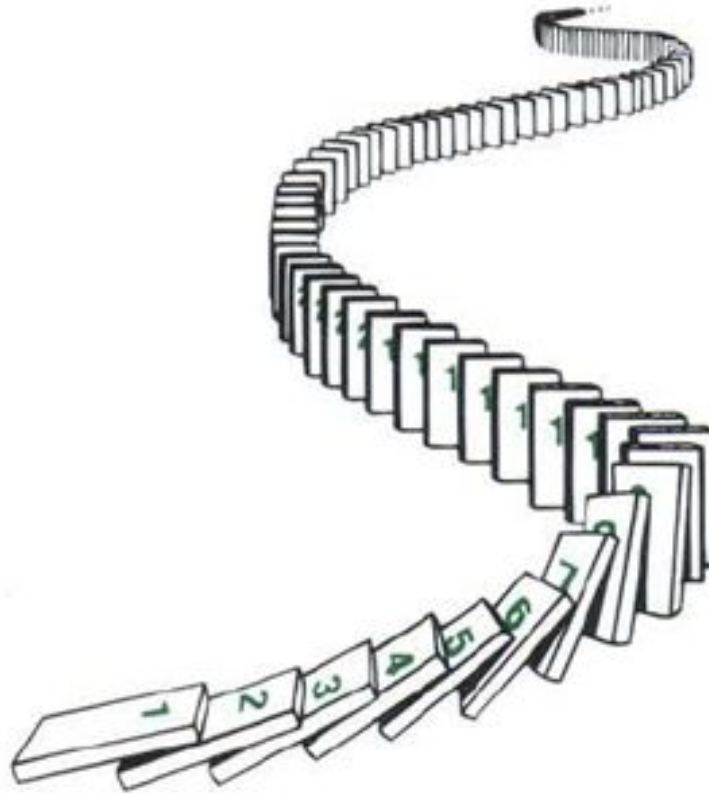
- Este material explica cada método mostrando a fórmula do somatório do quadrado perfeito dos n primeiros inteiros

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n²	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	
S_n	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Prova por Indução

- **1º Passo (passo base)**: Provar que a fórmula é verdadeira para o primeiro valor (na equação substituir n pelo primeiro valor)
- **2º Passo (indução propriamente dita)**: Supondo que $n > 0$ e que a fórmula é válida quando trocamos n por $(n-1)$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

S_{n-1} = é a equação substituindo n por $(n-1)$

a_n = n -ésimo termo da sequência

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Assim, temos a fórmula a ser provada:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

- 1º Passo (passo base):**

$$S_0 = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0 \Rightarrow \text{verdadeiro}$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n \longrightarrow a_n = n^2$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2$$



Substituindo S_{n-1} e a_n

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2$$

Multiplicando a equação
por seis

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n - 1) + 6n^2$$

Resolvendo $(n-1)(n)$



Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2$$

Resolvendo $(n^2-n)(2n-1)$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n - 1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo os termos com n^2 e invertendo o lado do "6"

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n - 1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

cqd

Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i =$$



Usando associatividade



Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

Sabendo o valor dos dois somatórios



Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$



Efetuando algebrismo



Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (3 + i) &= \\ \sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \\ \frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} &= \\ \frac{n^2 + 7n + 6}{2}\end{aligned}$$

Continuando nosso
algebrismo



Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (3 + i) &= \\ \sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \\ \frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} &= \\ \frac{n^2 + 7n + 6}{2}\end{aligned}$$

Provando por indução

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned}\sum_0^n (3 + i) &= \\ \sum_0^n 3 + \sum_0^n i &= \\ 3(n + 1) + \frac{n(n + 1)}{2} &= \\ \frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} &= \\ \frac{n^2 + 7n + 6}{2}\end{aligned}$$

Passo base

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2 + 7 \cdot 0 + 6}{2} = 3 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (25)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned}\sum_0^n (3 + i) &= \\ \sum_0^n 3 + \sum_0^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \\ \frac{6n+6+n^2+n}{2} &= \\ \frac{n^2+7n+6}{2}\end{aligned}$$

Indução
propriamente dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2 + 7 \cdot 0 + 6}{2} = 3 \text{ (verdadeiro)}$$



2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + 7(n-1) + 6}{2} + (3+n)$$

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (7n - 7) + 6}{2} + \frac{2(3+n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (7n - 7) + 6 + (6 + 2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{2} \text{ (verdadeiro) } \textbf{cqd}$$

Exercício Resolvido (26)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

Exercício Resolvido (26)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$



Resolvendo

Exercício Resolvido (26)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (26)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base



Exercício Resolvido (26)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Indução
propriamente
dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ (verdadeiro)}$$



2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + (4n+1)$$

$$S_n = 2(n^2 - 2n + 1) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = (2n^2 - 4n + 2) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = 2n^2 + 3n \text{ (verdadeiro) } \textbf{cq d}$$

Exercício Resolvido (27)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] =$$

Exercício Resolvido (27)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] =$$

$$\sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] =$$

$$\sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] =$$

$$\sum_{i=1}^n [20i] =$$

$$20 \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2 + 10n$$



Resolvendo

Exercício Resolvido (27)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] = \\
 & \sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] = \\
 & \sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] = \\
 & \sum_{i=1}^n [20i] = \\
 & 20 \frac{n(n+1)}{2} = \\
 & 10n^2 + 10n
 \end{aligned}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (27)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] = \\
 &\sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] = \\
 &\sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] = \\
 &\sum_{i=1}^n [20i] = \\
 &20 \frac{n(n+1)}{2} = \\
 &10n^2 + 10n
 \end{aligned}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 20 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base



Exercício Resolvido (27)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] &= \\ \sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] &= \\ \sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] &= \\ \sum_{i=1}^n [20i] &= \\ 20 \frac{n(n+1)}{2} &= \\ 10n^2 + 10n \end{aligned}$$

Indução
propriamente
dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 20 \text{ (verdadeiro)}$$



2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 10(n-1)^2 + 10(n-1) + (20n)$$

$$S_n = 10(n^2 - 2n + 1) + (10n - 10) + 20n$$

$$S_n = (10n^2 - 20n + 10) + (10n - 10) + 20n$$

$$S_n = 10n^2 + 10n \text{ (verdadeiro) } \textbf{cqd}$$

Exercício Resolvido (28)

- No Exercício Resolvido (24), encontramos a fórmula abaixo. Prove por indução que a mesma está correta

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Exercício Resolvido (28)

- No Exercício Resolvido (24), encontramos a fórmula abaixo. Prove por indução que a mesma está correta

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (28)

- No Exercício Resolvido (24), encontramos a fórmula abaixo. Prove por indução que a mesma está correta

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$(0 - 1)2^{0+1} + 2 = 0 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base



Exercício Resolvido (28)

- No Exercício Resolvido (24), encontramos a fórmula abaixo. Prove por indução que a mesma está correta

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Indução
propriamente
dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$(0 - 1)2^{0+1} + 2 = 0 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = [(n-1) - 1]2^{(n-1)+1} + 2 + (n2^n)$$

$$S_n = (n-2)2^n + 2 + n2^n$$

$$S_n = (2n-2)2^n + 2$$

$$S_n = (n-1)2^n 2 + 2$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \text{ (verdadeiro)}$$

cqd



- Motivação
- Notação
- Somas e Relações de Recorrência
- Manipulação de Somas
- Somas Múltiplas
- **Alguns Métodos Gerais** Σ

- Procure!!!
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- **Perturbe a soma**



Método: Perturbe a Soma

- Aplicamos:

- Regras básicas de transformação (distributividade, associatividade e comutatividade)
- Propriedades P1 e P2

Exercício Resolvido (29)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

Exercício Resolvido (29)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$a_i = i^2 \quad \text{COLA}$$

$$S_n + a_{n+1} = 0^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1} \quad \text{COLA}$$

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1)$$



Resolvendo $(i+1)^2$

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



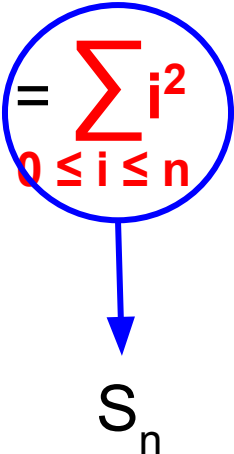
Aplicando associatividade

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$


The term $\sum_{0 \leq i \leq n} i^2$ is circled in blue, and a blue arrow points down from it to S_n .

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \textcolor{red}{S}_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Substituindo

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Duas vezes o
somatório de Gauss,
ou seja, $n(n+1)$

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

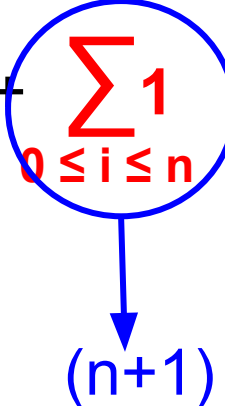
Substituindo

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$


$(n+1)$

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \textcolor{red}{(n+1)}$$

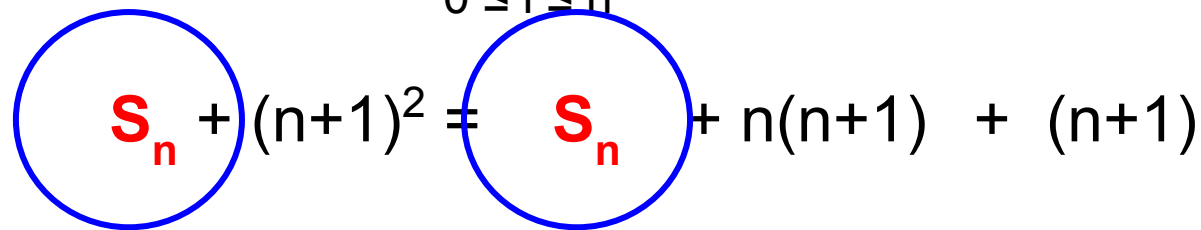
Substituindo

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$


Temos um problema, pois
as somas se anulam...

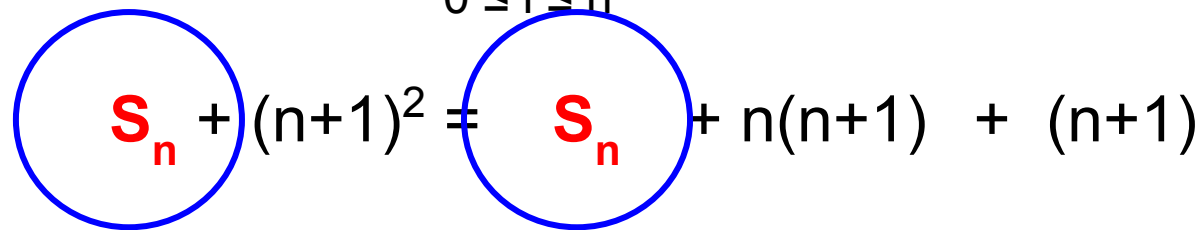
E agora José?

Exercício Resolvido (29)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$


Temos um problema, pois as somas se anulam...

... vamos tentar o somatório dos cubos!!!

Exercício Resolvido (29)

- Perturbando o somatório dos cubos para encontrar a fórmula fechada do somatório dos quadrados

$$\text{ScUBO}_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3$$

Exercício Resolvido (29)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}}_n + a_{\text{CUBO}}_{n+1} = 0^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

$$a_i = i^3$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (29)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$Scubo_n + acubo_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$$



Resolvendo $(i+1)^3$

Exercício Resolvido (29)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}_n} + a_{\text{CUBO}_{n+1}} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



Aplicando associatividade

Exercício Resolvido (29)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$Scubo_n + acubo_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} i^3}_{Scubo_n} + \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2}_{3S_n} + \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} 3i}_{\frac{3n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} 1}_{(n+1)}$$

Exercício Resolvido (29)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + a_{CUBO_{n+1}} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1 \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Substituindo

Exercício Resolvido (29)

- Continuando:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

Exercício Resolvido (29)

- Continuando:

$$\text{Scubo}_n + (n+1)^3 = \text{Scubo}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$



Eliminando Scubo_n

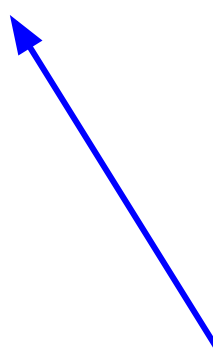
Exercício Resolvido (29)

- Continuando:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$



Multiplicando a equação por dois e invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (29)

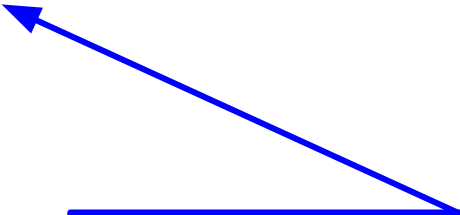
- Continuando:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)} \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$



Resolvendo expressão
em vermelho

Exercício Resolvido (29)

- Continuando:

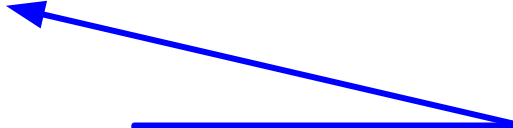
$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$



Resolvendo expressão
em vermelho

Exercício Resolvido (29)

- Continuando:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo expressão
em vermelho

Exercício Resolvido (29)

- Continuando:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Resolvendo expressão em vermelho

Exercício (2)

- Faça um vídeo explicando como encontramos o somatório dos quadrados perfeitos (tempo máximo de 5 minutos)

Exercício (3)

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso