

CAPÍTULO I

Matemática comercial

I. Razões e proporções

1. Razão

Suponhamos que num determinado ano (denominado ano 1), as vendas de uma empresa tenham sido de 300 mil reais e que as do ano seguinte (chamado de ano 2) sejam de 450 mil reais. Poderíamos comparar esses dois valores dizendo que sua diferença é de 150 mil reais. No entanto, a diferença não nos oferece uma ideia relativa do crescimento das vendas.

Outra forma de efetuarmos a comparação poderia ser dividindo as vendas do ano 2 pelas vendas do ano 1, isto é, calculando $450 : 300$ que é igual a 1,5. Assim, dizemos que as vendas do ano 2 são uma vez e meia maiores que as do ano 1. Essa última forma de comparação é chamada de **razão**.

Dados dois números a e b , com $b \neq 0$, chamamos de **razão de a para b** , ou simplesmente **razão entre a e b** , nessa ordem, ao quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado por $a : b$.

O número a é chamado de **antecedente**, e b é denominado **consequente**. Quando a e b forem medidas de uma mesma grandeza, elas devem ser expressas na mesma unidade de medida.

2. Proporção

Ainda com relação à mesma empresa, suponhamos que as vendas do ano 3 sejam de 600 mil reais e as do ano 4, 900 mil reais. Dessa forma, a razão das vendas do ano 4 para as vendas do ano 3 é 900 : 600 que é igual a 1,5 e, portanto, essa razão equivale à razão 450 : 300, que pode ser representada como mostrado a seguir:

$$\frac{450}{300} = \frac{900}{600}$$

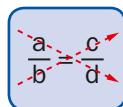
Essa igualdade de duas razões é chamada de **proporção**. Ela pode ser lida da seguinte forma: “450 está para 300 assim como 900 está para 600”.

Dadas as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, à sentença de igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ chamamos de **proporção**. Os valores a e d são denominados **extremos**, e b e c são chamados de **meios**.

3. Propriedade

Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com b e d diferentes de zero. Vale a seguinte propriedade:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a \cdot d = b \cdot c$; isto é, **em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios**. Resumidamente, tal propriedade pode ser expressa dizendo-se que, em toda proporção, os produtos cruzados são iguais.



Nessa proporção, os produtos cruzados são $a \cdot d$ e $b \cdot c$ e $a \cdot d = b \cdot c$.

A justificativa dessa propriedade pode ser feita tomando-se a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e multiplicando-se membro a membro por $b \cdot d$. Assim, teremos:

$$b \cdot d \cdot \frac{a}{b} = b \cdot d \cdot \frac{c}{d}$$

E, portanto:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplos:

- 1º) Um investidor aplicou 20 mil reais, sendo 8 mil reais numa caderneta de poupança e 12 mil reais em ações. Calcule a razão entre:
 a) o valor aplicado em ações e o valor total investido.
 b) o valor aplicado em caderneta de poupança e o valor total investido.
 c) o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança.

Resolvendo, temos:

- a) A razão entre o valor aplicado em ações e o valor total investido foi:

$$\frac{12\,000}{20\,000} = \frac{3}{5}$$

- b) A razão entre o valor aplicado em caderneta de poupança e o valor total investido foi:

$$\frac{8\,000}{20\,000} = \frac{2}{5}$$

- c) A razão entre o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança foi:

$$\frac{12\,000}{8\,000} = \frac{3}{2}$$

- 2º) Um atleta A faz um determinado percurso em 52 minutos, ao passo que um atleta B faz o mesmo percurso em 1 hora e 8 minutos. Qual a razão entre os tempos gastos pelos atletas A e B?

A razão entre os tempos gastos por A e B vale $\frac{52}{60 + 8} = \frac{13}{17}$.

Observe que ambos os tempos foram expressos na mesma unidade de tempo (minutos).

- 3º) Vamos determinar o valor de x em cada uma das proporções:

a) $\frac{x}{5} = \frac{24}{15}$.

b) $\frac{55 - x}{6} = \frac{3}{4}$.

Igualando os produtos cruzados, temos:

a) $15x = 5 \cdot 24 \Rightarrow x = \frac{120}{15} \Rightarrow x = 8$

b) $4 \cdot (55 - x) = 18 \Rightarrow -4x = -202 \Rightarrow x = \frac{202}{4} \Rightarrow x = \frac{101}{2}$

- 4º) Uma empresa pretende alocar 200 mil reais entre pesquisa e propaganda, de modo que a razão entre as quantias seja 2 : 3. Quais os valores alocados para pesquisa e propaganda?

Seja x o valor alocado para pesquisa. O valor alocado para propaganda será $200 - x$. Portanto, devemos ter:

$$\frac{x}{200 - x} = \frac{2}{3}$$

Igualando os produtos cruzados, obtemos:

$$\begin{aligned} 3x &= 2 \cdot (200 - x) \\ 5x &= 400 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Assim, os valores alocados devem ser 80 mil reais para pesquisa e 120 mil reais para propaganda.

Poderíamos também ter resolvido o problema chamando de x o valor alocado para pesquisa e y o valor alocado para propaganda. Os valores de x e y seriam a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- 5º) Uma pessoa recebe um salário mensal S . Quanto vale $\frac{2}{5}$ de S ?

Devemos dividir S em cinco partes iguais e tomar duas dessas partes. Assim, $\frac{2}{5}$ de S vale:

$$2 \cdot \frac{S}{5} = \frac{2}{5} \cdot S$$

De modo geral, quando quisermos calcular uma razão $\frac{a}{b}$ de um valor x , devemos multiplicar a razão pelo valor, isto é, calcular $\frac{a}{b} \cdot x$.

- 6º) Gustavo gasta $\frac{1}{5}$ de seu salário com a prestação do apartamento, $\frac{1}{8}$ do salário com alimentação e ainda lhe sobram R\$ 2430,00. Qual o salário de Gustavo?

Indicando por S o salário de Gustavo, teremos a seguinte equação:

$$\frac{1}{5}S + \frac{1}{8}S + 2430 = S$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} 8S + 5S + 97\,200 &= 40S \\ 27S &= 97\,200 \\ S &= \frac{97\,200}{27} = 3\,600 \end{aligned}$$

Portanto, o salário de Gustavo é R\$ 3 600,00.

EXERCÍCIOS

- 1.** Calcule as razões abaixo, simplificando o resultado, quando possível:
 - a) de 2 horas para 45 minutos;
 - b) de 300 m para 2 km;
 - c) de 2 m^2 para 400 cm^2 ;
 - d) de 5 meses para 2 anos;
 - e) de 5 minutos e 20 segundos para 2 horas e meia.

- 2.** Numa data t o preço de um produto é o triplo do que era na data 0.
 - a) Qual a razão entre o preço na data t e o preço na data 0?
 - b) Qual a razão entre o aumento de preço ocorrido entre as duas datas e o preço na data 0?

- 3.** Uma pessoa comprou uma ação e a vendeu um mês depois pela metade do preço que pagou na compra.
 - a) Qual a razão entre os preços de venda e de compra?
 - b) Qual a razão entre a diferença dos preços de venda e compra e o preço de compra?

- 4.** Um carro percorre 180 km gastando 9 litros de gasolina. Qual a razão entre o número de quilômetros percorridos e o número de litros de gasolina gastos?

- 5.** (UF-GO) Antônio possui um carro a álcool que consome 1 litro de combustível a cada 8 km percorridos, enquanto José possui um carro a gasolina cujo consumo é de 12 km por litro. Sabendo-se que o litro de álcool custa R\$ 1,14 e o litro de gasolina R\$ 1,60, e que José e Antônio dispõem da mesma quantia em dinheiro, quantos quilômetros irá percorrer José, tendo em vista que Antônio percorreu 320 km?

- 6.** Calcule o valor de x em cada uma das proporções abaixo:

a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{2}$	b) $\frac{4}{x} = \frac{5}{12}$	c) $\frac{1}{5} = \frac{3x}{8}$
---------------------------------------	--	--

- 7.** Determine o valor de x na proporção $\frac{3x - 1}{4} = \frac{2}{5}$.

- 8.** Obtenha o valor de m na proporção $\frac{m}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{3 - \frac{2}{5}}$.

- 9.** Certo doce utiliza 3 copos de leite para a produção de 80 unidades. Se a razão entre o número de doces produzidos e o número de copos de leite utilizados for constante, quantos copos de leite serão necessários para se produzirem 720 doces?
- 10.** Um filantropo destina R\$ 350 000,00 para serem doados a dois hospitais, A e B. A razão entre a quantia recebida por A e a recebida por B é igual a 4 : 3. Quanto recebeu cada hospital?
- 11.** Dois sócios resolvem repartir seu lucro de R\$ 80 000,00 na razão 2 : 3. Quanto caberá a cada um?
- 12.** Numa festa há moças e rapazes num total de 300 pessoas. A razão do número de moças para o de rapazes é $\frac{8}{7}$. Qual o número de rapazes?
- 13.** Uma empresa deseja alocar R\$ 200 000,00 entre propaganda e pesquisa. A razão entre a verba destinada à propaganda e a destinada à pesquisa é $\frac{1}{3}$. Quantto deverá ser destinado à propaganda?
- 14.** Quanto vale:
- a) $\frac{5}{12}$ de 300? b) $\frac{1}{3}$ de 450? c) $\frac{2}{7}$ de 350?
- 15.** Uma família gasta $\frac{7}{9}$ de sua renda mensal e poupa R\$ 800,00. Qual o valor da renda mensal?
- 16.** (Unicamp-SP) Dois estudantes, A e B, receberam Bolsas de Iniciação Científica de mesmo valor. No final do mês, o estudante A havia gasto $\frac{4}{5}$ do total de sua Bolsa e o estudante B havia gasto $\frac{5}{6}$ do total de sua Bolsa, sendo que o estudante A ficou com R\$ 8,00 a mais que o estudante B.
- a) Qual era o valor da Bolsa?
 b) Quantos reais economizou cada um dos estudantes naquele mês?
- 17.** (Unisinos-RS) Colocando-se 27 litros de gasolina no tanque de um carro, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passa a indicar $\frac{5}{8}$. Qual a capacidade total desse tanque de gasolina?
- 18.** (U.F. Viçosa-MG) Suponha que os 169 milhões de reais desviados na construção do TRT de São Paulo sejam reavidos, e que o Governo Federal decida usá-los para investimento nas áreas de saúde, educação e segurança pública, fazendo a seguinte distribuição: a área de educação receberia 2 vezes o que receberia a área de segurança pública e a área de saúde receberia $\frac{2}{3}$ do que receberia a área de educação. Assim sendo, quanto receberia cada área?

II. Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

4. Grandezas diretamente proporcionais

Uma pequena loja vende certo tipo de bolsa por R\$ 40,00 a unidade. Chamando de x a quantidade vendida e y a receita (em reais) proveniente da venda dessas bolsas, teremos a seguinte correspondência:

x	1	2	3	4	5	...	n	...
y	40	80	120	160	200	...	$40n$...

Observe que, quando o valor de x dobra, também dobra o de y ; quando triplica o valor de x , também triplica o de y , e assim por diante. Em consequência disso, a razão entre cada valor de y e o seu correspondente x vale 40; e a razão entre cada valor de x e o correspondente y também é constante e vale $\frac{1}{40}$. Nesse caso, dizemos que as grandezas expressas por x e y são **diretamente proporcionais**.

De modo geral, dizemos que duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando a razão entre a medida y de uma e a correspondente x da outra ($x \neq 0$) for constante e diferente de zero, isto é, $\frac{y}{x} = k$, em que k é uma constante diferente de zero. A razão entre cada valor de x e seu correspondente y também é constante e vale $\frac{1}{k}$.

5. Grandezas inversamente proporcionais

Consideremos o seguinte problema:

Numa estrada, a distância entre duas cidades é 240 km. Se um carro percorrer essa estrada a uma velocidade média x (em km/h), o tempo correspondente para ir de uma cidade à outra será y (em horas). Teremos a seguinte correspondência:

x	10	20	30	40	50	...	v	...
y	24	12	8	6	4,8	...	$\frac{240}{v}$...

Observemos que, se a velocidade dobra, o tempo de viagem se reduz à metade; se a velocidade triplica, o tempo de viagem se reduz à terça parte, e assim por diante. Consequentemente, o produto de cada valor de x pelo correspondente y é constante e vale 240. Dizemos, então, que as grandezas expressas por x e y são **inversamente proporcionais**.

De modo geral, dizemos que duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando o produto da medida y de uma e a correspondente x da outra for constante e diferente de zero, isto é, $y \cdot x = k$, em que k é uma constante diferente de zero.

Se x e y forem inversamente proporcionais, y será diretamente proporcional ao inverso de x , pois $\frac{y}{x} = k$.

Exemplos:

1º) Três sócios A, B e C resolveram abrir uma pizzaria. O primeiro investiu 30 mil reais, o segundo investiu 40 mil reais e o terceiro 50 mil reais. Após 1 ano de funcionamento, a pizzaria deu um lucro de 24 mil reais. Se esse lucro for distribuído aos sócios de forma que a quantia recebida seja diretamente proporcional ao valor investido, quanto recebeu cada um?

Indicando por a , b e c as quantias (em milhares de reais) recebidas por A, B e C, respectivamente, devemos ter:

$$a + b + c = 24 \text{ (I)} \quad \text{e} \quad \frac{a}{30} = \frac{b}{40} = \frac{c}{50} = k$$

Assim:

$$a = 30k \text{ (II)}$$

$$b = 40k \text{ (III)}$$

$$c = 50k \text{ (IV)}$$

Substituindo em (I), temos:

$$30k + 40k + 50k = 24$$

$$120k = 24 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

Logo:

$$\text{Em (II): } a = 30 \cdot \frac{1}{5} = 6$$

$$\text{Em (III): } b = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$$

$$\text{Em (IV): } c = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10$$

Assim, A recebeu R\$ 6 000,00, B recebeu R\$ 8 000,00 e C recebeu R\$ 10 000,00.

2º) Três máquinas levam 2 horas para produzir um lote de 1 000 peças. Se o número de máquinas for inversamente proporcional ao número de horas para produzir o mesmo lote de 1 000 peças, quanto tempo será necessário para se produzir o lote com 4 máquinas?

Seja t o número de horas para se produzir o lote com 4 máquinas. Como o número de máquinas e o tempo de produção são inversamente proporcionais, teremos:

$$t \cdot 4 = (2) \cdot (3) \text{ e, portanto, } t = 1,5 \text{ hora}$$

EXERCÍCIOS

- 19.** Na tabela abaixo as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Obtenha os valores de m e p .

x	4	m	7
y	2	7	p

- 20.** As grandezas x e y apresentadas na tabela são inversamente proporcionais. Obtenha os valores de s e p .

x	s	2	8
y	4	5	p

- 21.** A tabela a seguir fornece o tempo de assinatura de uma revista e o correspondente preço. Obtenha os valores de a , b e c sabendo que as grandezas são diretamente proporcionais.

Tempo de assinatura (em meses)	Preço (em reais)
6	30,00
12	a
b	90,00
24	c

- 22.** A renda de um profissional liberal é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas. Se ele trabalha 20 horas, sua renda é R\$ 600,00. Qual será sua renda se ele trabalhar 65 horas?
- 23.** O número de litros de gasolina que um carro consome na estrada é diretamente proporcional ao número de quilômetros percorridos. Se ele consome 5 litros para percorrer 74 quilômetros, quanto consumirá para percorrer 380 quilômetros?

- 24.** Augusto e César investiram R\$ 12 000,00 e R\$ 15 000,00, respectivamente, num negócio que proporcionou um lucro de R\$ 7 500,00. Quanto coube a cada um, se o lucro recebido for diretamente proporcional ao valor investido?
- 25.** Dividir a quantia de R\$ 22 000,00 em 3 partes diretamente proporcionais aos números 2, 4 e 5.
- 26.** Três sócios, A, B e C, investiram R\$ 80 000,00, R\$ 90 000,00 e R\$ 120 000,00, respectivamente, na construção de uma casa. A casa foi vendida por R\$ 360 000,00. Quanto coube a cada sócio, se cada um recebeu uma quantia diretamente proporcional ao valor que investiu?
- 27.** O lucro de uma empresa foi dividido entre seus 3 sócios, A, B e C, em partes diretamente proporcionais a 3, 2 e 5, respectivamente. Sabendo que A recebeu R\$ 50 000,00 a mais que B, obtenha quanto recebeu cada sócio.
- 28.** Um escritório leva 60 horas para ser pintado por 4 pintores. Se o número de horas trabalhadas para pintar o escritório for inversamente proporcional ao número de pintores, em quantas horas 5 pintores pintarão o escritório?
- 29.** Quatro pedreiros gastam 10,5 dias para construir um muro. Se o número de pedreiros for inversamente proporcional ao número de dias gastos na construção do muro, em quantos dias 7 pedreiros construirão o muro?
- 30.** Mantida a temperatura constante de um gás, a sua pressão P e o seu volume V são inversamente proporcionais (Lei de Boyle). Se a pressão sofrer um acréscimo de $\frac{1}{5}$, qual a correspondente diminuição do volume?
- 31.** Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais. Quando $x = 4$, temos $y = 20$. Qual o valor de x para $y = 18$?
- 32.** Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais. Quando $x = 3$, temos $y = 12$. Qual o valor de x para $y = 18$?
- 33.** A grandeza y é diretamente proporcional ao quadrado de x . Quando $x = 4$, temos $y = 10$. Qual o valor de y para $x = 5$?
- 34.** A grandeza y é inversamente proporcional ao cubo de x . Quando $x = 4$, temos $y = 100$. Qual o valor de y para $x = 5$?
- 35.** (UF-GO) Diz-se que duas grandezas positivas, x e y , são diretamente proporcionais quando existe uma função linear $f(x) = k \cdot x$, com $k > 0$, chamada constante de proporcionalidade, tal que $y = f(x)$ para todo $x > 0$. De modo análogo, diz-se que x e y são inversamente proporcionais quando existe uma função $g(x) = \frac{c}{x}$, com $c > 0$, tal que $y = g(x)$, para todo $x > 0$. De acordo com essas definições, julgue os itens a seguir.

- a) Se $y = g_1(x)$ e $z = g_2(y)$ e os pares de grandezas x, y e y, z são ambos inversamente proporcionais, então x e z são grandezas diretamente proporcionais.
- b) Se $y = f(x)$, com x e y sendo grandezas diretamente proporcionais, e $w = g(z)$, com z e w sendo grandezas inversamente proporcionais, então o quociente $\frac{y}{w}$ e o produto $x \cdot z$ formam um par de grandezas diretamente proporcionais.
- c) Se x_1, y_1 e x_2, y_2 são pares de grandezas diretamente proporcionais, com a mesma constante de proporcionalidade, então $x_2y_1 = x_1y_2$.
- d) A área a e o lado ℓ de um hexágono regular ($a = f(\ell)$, para todo $\ell > 0$) são grandezas diretamente proporcionais.

III. Porcentagem

Consideremos os valores do Produto Interno Bruto (PIB) de dois países, A e B, em bilhões de dólares, em dois anos consecutivos que chamaremos de 0 e 1.

País	PIB (ano 0)	PIB (ano 1)	Crescimento do PIB (entre 0 e 1)
A	400	432	32
B	600	642	42

Verificamos que a razão entre o crescimento do PIB e o PIB do ano 0 vale:

- $\frac{32}{400}$ para o país A;
- $\frac{42}{600}$ para o país B.

Uma das maneiras de compararmos essas razões consiste em expressarmos ambas com o mesmo denominador, por exemplo, 100. Assim:

- País A: $\frac{32}{400} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 8$; portanto, a razão vale $\frac{8}{100}$.
- País B: $\frac{42}{600} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 7$; portanto, a razão vale $\frac{7}{100}$.

Dessa forma, concluímos que o país A teve uma razão (ou taxa) maior de crescimento do PIB.

Essas razões de denominador 100 são chamadas de **razões centesimais, taxas percentuais** ou simplesmente de **porcentagens**.

As porcentagens costumam ser indicadas pelo numerador seguido do símbolo % (lê-se: “por cento”). Assim, a taxa percentual de crescimento do PIB do país A foi de 8% e a do país B, de 7%.

As porcentagens também costumam ser expressas sob a forma decimal, obtida dividindo-se o numerador por 100. Essa é a maneira habitual quando se utiliza uma calculadora. Por exemplo:

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$32\% = \frac{32}{100} = 0,32$$

$$27,5\% = \frac{27,5}{100} = 0,275$$

$$250\% = \frac{250}{100} = 2,5$$

A porcentagem pode ser utilizada quando queremos expressar alguma quantidade como porcentagem de um valor. Suponhamos que um produto que custava R\$ 80,00 foi vendido com um desconto de 5%. O desconto de 5% sobre 80 corresponde à divisão do preço por 100, tomando 5 partes, isto é:

$$5\% \text{ de } 80 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{80}{100} = \frac{5}{100} \cdot 80 = 4$$

De modo geral, calcular $a\%$ de x corresponde a multiplicar $\frac{a}{100}$ por x .

Exemplos:

- 1º) Converta as razões abaixo para a forma decimal, arredondando para quatro casas decimais, quando for o caso, e em seguida coloque-as na forma de porcentagem. Se possível, use uma calculadora.

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{8}{50}$

c) $\frac{45}{18}$

d) $\frac{14}{42}$

Convertendo as razões, temos:

a) $\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = 75\%$

c) $\frac{45}{18} = 2,5 = \frac{250}{100} = 250\%$

b) $\frac{8}{50} = 0,16 = \frac{16}{100} = 16\%$

d) $\frac{14}{42} = 0,3333 = \frac{33,33}{100} = 33,33\%$

- 2º) Um investidor comprou um terreno por R\$ 15 000,00 e vendeu-o, um ano depois, por R\$ 18 750,00. Qual o lucro, em porcentagem, do preço de custo?

Temos o lucro (em reais): $18\,750 - 15\,000 = 3\,750$

Assim, o lucro (em porcentagem) do preço de custo será:

$$\frac{3\,750}{15\,000} = 0,25 = 25\%$$

- 3º) Em um curso de Biologia, a razão entre o número de homens e o de mulheres é $\frac{2}{5}$.

Em relação ao total de alunos, qual a porcentagem de homens?

Seja x o número de homens e y o de mulheres:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \text{ (I)}$$

Para saber o valor de $\frac{x}{x+y}$ (II), calculamos (I):

$$x = \frac{2y}{5} = 0,4y$$

Substituindo em (II), obtemos:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{0,4y}{0,4y+y} = \frac{0,4y}{1,4y} = 0,2857 = 28,57\%$$

Então, a porcentagem de homens é 28,57%.

- 4º) Uma corrente de ouro cujo preço de tabela é R\$ 360,00 é vendida com um desconto de 15%. Qual o preço após sofrer o desconto?
O desconto (em reais) é:

$$\frac{15}{100} \cdot 360 = (0,15) \cdot 360 = 54$$

Então, o preço, em reais, após o desconto é:

$$\text{R\$ } 360 - \text{R\$ } 54 = \text{R\$ } 306$$

- 5º) Uma geladeira é vendida por R\$ 1200,00. Se seu preço sofrer um acréscimo igual a 8% desse preço, quanto passará a custar?

O preço original, em reais, é 1200.

Calculando o acréscimo, temos:

$$\frac{8}{100} \cdot 1200 = (0,08) \cdot 1200 = 96$$

Dessa forma, o preço (em reais) após o acréscimo será:

$$\text{R\$ } 1200,00 + \text{R\$ } 96,00 = \text{R\$ } 1296,00$$

- 6º) Um funcionário de uma empresa cujo salário mensal vale S paga uma prestação P do financiamento de seu apartamento. Se o seu salário sofrer um acréscimo de 10% e a prestação do apartamento sofrer um acréscimo de 12%:

- qual o valor do salário reajustado?
- qual o valor da prestação reajustada?

Resolvendo, temos:

- Acréscimo salarial:

$$\frac{10}{100} \cdot S = 0,10 \cdot S$$

Assim, o salário reajustado é:

$$S + 0,10 \cdot S = 1,10 \cdot S$$

b) Acréscimo na prestação:

$$\frac{12}{100} \cdot P = 0,12 \cdot P$$

A prestação reajustada é:

$$P + 0,12 \cdot P = 1,12 \cdot P$$

- 7º) Uma televisão foi vendida com um desconto de R\$ 42,00, sendo esse valor igual a 3,5% do preço original. Qual o preço da televisão após o desconto?

Seja x o preço original da televisão.

O desconto é:

$$0,035x = 42$$

Portanto, o preço original da TV (em reais) é:

$$x = \frac{42}{0,035} = 1\,200$$

O preço da televisão após o desconto (em reais) será:

$$1\,200 - 42 = 1\,158$$

- 8º) Quando uma empresa produz determinado produto, ela incorre em dois tipos de custos: o **custo fixo**, que não depende da quantidade produzida (como, por exemplo, o aluguel) e o **custo variável**, que depende da quantidade produzida. Geralmente, o custo variável é dado por $c \cdot x$, em que c é o custo por unidade (depende, entre outros, do custo da matéria-prima e da mão de obra) e x é a quantidade produzida.

Sendo p o preço de venda, chamamos de **margem de contribuição por unidade** à diferença $p - c$. A margem de contribuição unitária multiplicada pela quantidade produzida e vendida serve para cobrir o custo fixo e proporcionar lucro.

A margem de contribuição por unidade pode ser expressa como porcentagem do preço de custo ou como porcentagem do preço de venda.

Suponhamos $p = 120$ e $c = 90$, expressos em reais. Então:

A margem de contribuição vale:

$$120 - 90 = 30$$

A margem de contribuição como porcentagem do preço de custo é:

$$\frac{30}{90} = 0,3333 = 33,33\%$$

A margem de contribuição como porcentagem do preço de venda é:

$$\frac{30}{120} = 0,25 = 25\%$$

9º) Num determinado país, o **imposto de renda** (IR) é descontado dos salários mensais da seguinte forma:

- Para salários de até \$ 1 000,00, o IR é zero.
- A parte do salário entre \$ 1 000,00 e \$ 3 000,00 é tributada em 10%.
- A parte do salário que excede \$ 3 000,00 é tributada em 20%.

Calcule o valor do imposto de renda de quem ganha:

- \$ 800,00;
- \$ 1 800,00;
- \$ 4 500,00;

d) Chamando de x a renda e de y o imposto de renda, expresse y em função de x .

Assim, temos:

- O IR vale 0, pois o salário é inferior a \$ 1 000,00.
- O IR é calculado sobre \$ 800,00, que é a parte do salário entre \$ 1 000,00 e \$ 3 000,00.
Portanto, $IR = (0,10) \cdot 800,00 = 80,00$.
- A parte do salário entre \$ 1 000,00 e \$ 3 000,00 e que vale \$ 2 000,00 é tributada em 10% e vale, portanto:

$$(0,10) \cdot 2 000,00 = 200,00.$$

A parte do salário que excede \$ 3 000,00 e que vale \$ 1 500,00 é tributada em 20% e vale, portanto:

$$(0,20) \cdot 1 500,00 = 300,00.$$

Assim, o IR de quem ganha \$ 4 500,00 vale:

$$\$ 200,00 + \$ 300,00 = \$ 500,00.$$

- Se $x \leq 1 000$, então $y = 0$.

Se $1 000 < x \leq 3 000$, então

$$y = (0,10) \cdot (x - 1 000) = 0,10 \cdot x - 100.$$

Se $x > 3 000$, então

$$y = (0,10) \cdot 2 000 + (0,20) \cdot (x - 3 000) = 0,20 \cdot x - 400.$$

Esses resultados geralmente são indicados pela tabela seguinte:

Salário	Alíquota de IR	Parcela a deduzir
Até \$ 1 000,00	Isento	–
Acima de \$ 1 000,00 até \$ 3 000,00	10%	\$ 100,00
Acima de \$ 3 000,00	20%	\$ 400,00

EXERCÍCIOS

36. Calcule as seguintes razões com quatro casas decimais e, em seguida, expresse-as em forma de porcentagem. (Se possível, use uma calculadora.)

a) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{234}{5}$

g) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{7}{8}$

e) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{15}{9}$

f) $\frac{8}{5}$

37. Calcule as porcentagens dos seguintes valores:

a) 12% de 300

c) 18% de 550

e) 3,4% de 2 500

b) 32% de 450

d) 60% de 80

f) 10,5% de 600

38. (UF-RJ) A organização de uma festa distribuiu gratuitamente 200 ingressos para 100 casais. Outros 300 ingressos foram vendidos, 30% dos quais para mulheres. As 500 pessoas com ingresso foram à festa.

a) Determine o percentual de mulheres na festa.

b) Se os organizadores quisessem ter igual número de homens e de mulheres na festa, quantos ingressos a mais eles deveriam distribuir apenas para as pessoas do sexo feminino?

39. (UF-MS) Em um determinado município, a porcentagem de crianças que estão fora da escola é de 15%. O prefeito desse município iniciou uma campanha com a finalidade de que 5 em cada 9 dessas crianças passem a frequentar uma escola imediatamente. Se a meta da campanha for atingida, o número de crianças que estarão fora da escola nesse município ficará reduzido a 1 200 crianças. Assim, se N era o número de crianças desse município, quando do início da campanha, calcule $\frac{N}{250}$.

40. (UF-PF) Em 1995 o Banco do Brasil (BB) renegociou a dívida de R\$ 7,1 bilhões dos agricultores, que foi dividida em parcelas a serem pagas até o final de cada ano. O valor total da primeira parcela era R\$ 700 milhões, mas somente metade foi pago; da segunda parcela (totalizando R\$ 1,1 bilhão) vencida em 1997 somente foi pago 26% do devido. Em 1997 o lucro líquido do BB foi de R\$ 646,4 milhões. Quantas vezes a dívida restante dos agricultores no início de 1998 vale o lucro líquido do BB em 1997?

- 41.** (UF-CE) Manuel compra 100 caixas de laranjas por R\$ 2000,00. Havendo um aumento de 25% no preço de cada caixa, quantas caixas ele poderá comprar com a mesma quantia?
- 42.** (UF-PA) Um terreno retangular, cujas dimensões são 400 m e 500 m, será usado para abrigar famílias remanejadas da área de macrodrenagem. Pretende-se fazer lotes de 20 m × 20 m para cada família e usar uma área equivalente a 20% da área total para um complexo de lazer e para circulação. Quantas famílias podem ser alocadas?
- 43.** (UF-GO) O sr. Manuel contratou um advogado para receber uma dívida cujo valor era de R\$ 10 000,00. Por meio de um acordo com o devedor, o advogado conseguiu receber 90% do total da dívida. Supondo que o sr. Manuel pagou ao advogado 15% do total recebido, quanto dinheiro lhe restou?
- 44.** (U.F. Lavras-MG) Desde janeiro de 1994 que não se paga determinado imposto por um salário anual de até R\$ 10 000,00. Acima desse valor, paga-se uma taxa de 17,5% do valor recebido que exceda os R\$ 10 000,00. Em janeiro de 1994, o dólar valia R\$ 1,00. Considere que, para o ano de 2000, o valor seja de R\$ 1,60.
- Calcule o valor, em reais, do imposto a ser pago no ano de 2000, por um salário anual de 10 000 dólares.
 - Calcule o valor, em dólares, de um salário anual no ano de 2000, não sujeito ao imposto.
- 45.** (UF-CE) Um vendedor recebe a título de rendimento mensal um valor fixo de R\$ 160,00 mais um adicional de 2% das vendas por ele efetuadas no mês. Com base nisso, responda:
- Qual o rendimento desse vendedor em um mês no qual o total de vendas feitas por ele foi de R\$ 8 350,00?
 - Qual a função que expressa o valor do seu rendimento mensal em função de sua venda mensal?
- 46.** (UF-GO) O jovem Israel trabalha em uma sapataria. Ele gasta do seu salário: 25% no pagamento do aluguel da pequena casa onde mora; $\frac{1}{10}$ na compra de vale-transporte; 15% na prestação do aparelho de TV que adquiriu; e ainda lhe sobram R\$ 84,00. Qual o salário de Israel?
- 47.** (UF-GO) O sr. José gasta hoje 25% do seu salário no pagamento da prestação de sua casa. Se a prestação for reajustada em 26%, e o salário somente em 5%, qual será a porcentagem do salário que ele deverá gastar no pagamento da prestação, após os reajustes?

- 48.** (UFF-RJ) A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal, esta confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em cada pacote, 20% a mais de balas e aumentou em 8% o preço do pacote. Determine a variação, em porcentagem, que essa promoção acarretou no preço de cada bala do pacote.
- 49.** Um casaco cujo preço original era de R\$ 250,00 sofreu um desconto de 15% em função de uma liquidação. Qual o preço após o desconto?
- 50.** (EEM-SP) Uma lanchonete vende cada quibe por R\$ 0,19 e um copo com 300 mL de refrigerante por R\$ 1,00. Com o objetivo de estimular as vendas, a empresa pretende vender um combinado constituído de 10 quibes e um copo com 480 mL de refrigerante. Qual deve ser o preço a ser cobrado, se a lanchonete deseja dar 10% de desconto?
- 51.** Um fogão que custava R\$ 500,00 sofreu um aumento de 8%. Em razão da falta de demanda, o vendedor resolveu oferecer um desconto de 8% sobre o preço com acréscimo.
Qual o preço final do fogão, após o acréscimo seguido de desconto?
- 52.** (U.F. Uberlândia-MG) No mês de agosto, Pedro observou que o valor da sua conta de energia elétrica foi 50% superior ao valor da sua conta de água. Em setembro, tanto o consumo de energia elétrica quanto o de água, na residência de Pedro, foram iguais aos consumos do mês de agosto. Porém, como as tarifas de água e energia elétrica foram reajustadas em 10% e 20%, respectivamente, Pedro desembolsou R\$ 20,00 a mais do que em agosto para quitar as duas contas. Quanto Pedro pagou de energia elétrica no mês de setembro?
- 53.** Um aparelho de som que custava R\$ 700,00 sofreu um acréscimo de 6% sobre o preço original.
- Qual o novo preço do aparelho de som?
 - Suponhamos um desconto de 3% sobre o novo preço. Qual será o preço do aparelho com esse desconto?
 - Se o preço de R\$ 700,00 sofresse um acréscimo de 120%, qual seria o novo preço?
- 54.** (Vunesp-SP) Um determinado carro popular custa numa revendedora R\$ 11.500,00 à vista. Numa promoção de Natal, realizada no mês de dezembro de 1998, com R\$ 5.000,00 de entrada, um comprador tem o valor restante do carro facilitado pela revendedora em 36 prestações mensais, sendo que as prestações num mesmo ano são iguais e que a cada ano a prestação sofre um aumento de 10%, relativamente à do ano anterior. Sabendo-se que a primeira prestação, a ser paga no mês de janeiro de 1999, é R\$ 200,00, determine:

- 62.** Nas contas telefônicas, em São Paulo, incide o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS) que corresponde a 25% do valor total a ser pago. Um consumidor recebeu uma conta a pagar de R\$ 165,00.
- Qual o valor da conta antes da incidência do ICMS?
 - Se a alíquota de 25% incidisse sobre o valor obtido no item a, qual o valor da conta a ser paga?
- 63.** (UnB-DF) Em uma cidade, há 10 000 pessoas aptas para o mercado de trabalho. No momento, apenas 7 000 estão empregadas. A cada ano, 10% das que estão empregadas perdem o emprego, enquanto 60% das desempregadas conseguem se empregar. Considerando que o número de pessoas aptas para o mercado de trabalho permaneça o mesmo, calcule o percentual de pessoas empregadas daqui a 2 anos. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.
- 64.** (Unicamp-SP) Segundo dados do Ministério do Trabalho e Emprego (MTE), no período de julho de 2000 a junho de 2001, houve dez milhões, cento e noventa e cinco mil, seiscentos e setenta e uma admissões ao mercado formal de trabalho no Brasil, e os desligamentos somaram nove milhões, quinhentos e cinquenta e quatro mil, cento e noventa e nove. Pergunta-se:
- Quantos novos empregos formais foram criados durante o período referido?
 - Sabendo-se que esse número de novos empregos resultou em um acréscimo de 3% no número de pessoas formalmente empregadas em julho de 2000, qual o número de pessoas formalmente empregadas em junho de 2001?
- 65.** (Vunesp-SP) Uma empresa agropecuária desenvolveu uma mistura, composta de fécula de batata e farinha, para substituir a farinha de trigo comum. O preço da mistura é 10% inferior ao da farinha de trigo comum. Uma padaria fabrica e vende 5 000 pães por dia. Admitindo-se que o kg da farinha comum custa R\$ 1,00 e que com 1 kg de farinha ou da nova mistura a padaria fabrica 50 pães, determine:
- a economia, em reais, obtida em um dia, se a padaria usar a mistura em vez de farinha de trigo comum;
 - o número inteiro máximo de quilos da nova mistura que poderiam ser comprados com a economia obtida em um dia e, com esse número de quilos, quantos pães a mais poderiam ser fabricados por dia.
- 66.** (UnB-DF) Duas empresas de táxi, X e Y, praticam regularmente a mesma tarifa. No entanto, com o intuito de atrair mais passageiros, a empresa X decide oferecer um desconto de 50% em todas as suas corridas, e a empresa Y, descontos de 30%. Com base nessas informações e considerando o período de vigência dos descontos, julgue os itens a seguir:

- 1) Se um passageiro pagou R\$ 8,00 por uma corrida em um táxi da empresa Y, então, na tarifa sem desconto, a corrida teria custado menos de R\$ 11,00.
 - 2) Ao utilizar um táxi da empresa Y, um passageiro paga 20% a mais do que pagaria pela mesma corrida, se utilizasse a empresa X.
 - 3) Considere que, no mês de fevereiro, com 20 dias úteis, uma pessoa fez percursos de ida e volta ao trabalho, todos os dias, nos táxis da empresa Y, e, no final do mês, pagou R\$ 80,00. Nessas condições, para fazer os mesmos percursos de ida e volta ao trabalho, no mês seguinte, com 24 dias úteis, nos táxis da empresa X, a pessoa pagaria mais de R\$ 70,00.
- 67.** (UnB-DF, adaptado) Em uma empresa, o salário mensal de um estagiário é de R\$ 400,00, o de um técnico é o dobro desse valor e o de cada gerente é igual a R\$ 2800,00. O valor total da folha de pagamento de pessoal dessa empresa é de R\$ 20800,00 mensais e o salário médio mensal é de R\$ 520,00. A direção da empresa decide, por questões de economia, reduzir a folha de pagamento mensal em 2%, distribuídos da seguinte maneira: uma redução de 1% nos salários dos estagiários, de 3% nos dos técnicos e de 5% nos dos gerentes. Sendo E a quantidade de estagiários, T a de técnicos e G a de gerentes, julgue os itens a seguir:
- 1) $E + T + G \leq 52$
 - 2) $396E + 776T + 2660G = 20\,384$
- 68.** Calcule:
- a) Quanto vale 20% de 30% de um valor?
 - b) Quanto vale 10% de 50% de um valor?
 - c) Quanto vale 160% de 300% de um valor?
- 69.** Em uma pesquisa de opinião foram ouvidas x pessoas, dentre as quais 63% eram mulheres. Entre os homens, 45% tinham nível universitário. Qual é, em função de x , o número de homens entrevistados sem formação universitária?
- 70.** A primeira fase de um vestibular foi feita por 48 000 candidatos, dos quais 65% não passaram para a fase seguinte. Entre os que fizeram a segunda fase, 68% não foram aprovados. Quantos candidatos conseguiram ingressar na faculdade por meio desse exame?
- 71.** (UF-PE) Em um exame de vestibular 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre esses candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a porcentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração.

72. Calcule e expresse o resultado em forma de porcentagem:

- a) $(10\%)^2$ b) $(20\%)^2$ c) $(10\%) \cdot (20\%)$ d) $(120\%) \cdot (350\%)$

73. (FGV-SP) Chama-se margem de contribuição unitária à diferença entre o preço unitário de venda e o custo unitário de um produto.

Se o preço unitário de venda é p e o custo unitário é c :

- a) Qual o valor de p em função de c , sabendo-se que a margem de contribuição unitária é 10% do preço de venda?
 b) Se a margem de contribuição unitária for 30% do preço de venda, qual a margem de contribuição unitária, em porcentagem, do custo unitário?

74. Calcule o valor solicitado em cada caso:

- a) A margem de contribuição unitária é igual a 18% do preço de venda de um produto. Qual a margem como porcentagem do custo por unidade?
 b) A margem de contribuição unitária é igual a 140% do custo por unidade. Qual a margem como porcentagem do preço de venda?

75. De acordo com uma reportagem publicada na revista *Veja São Paulo*, cerca de 100 unidades de churrasco grego são vendidas diariamente, em média, em cada barraca. A porção de churrasco mais um copo de suco custam apenas R\$ 0,70. O custo do referido produto aparece discriminado na tabela ao lado.

Pão	R\$ 0,11
Carne	R\$ 0,20
Legumes	R\$ 0,03
Suco	R\$ 0,07
Total	R\$ 0,41

Fonte: *Veja São Paulo*, 11 fev. 2003.

a) Qual a margem de contribuição por unidade do produto?

- b) Se o produtor trabalhar 25 dias por mês e tiver um custo fixo mensal de R\$ 40,00, qual será seu lucro nesse período?

76. (Ibmec-SP adaptado) Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações e justifique sua resposta.

- a) O Produto Nacional Bruto (PNB) de um país cresceu 30% em um ano, enquanto no mesmo período sua população cresceu 20%. Então, para esse mesmo período, o crescimento do PNB *per capita* (PNB dividido pela população) foi de 10%.
 b) Carlos vendeu um apartamento com um lucro de 20% em relação ao preço de venda, então seu lucro em relação ao custo foi de 25%.

77. (UF-GO) Um comerciante que compra e revende coco adquire cada unidade do produto por R\$ 0,34. Esse comerciante tem uma despesa, na comercialização, que representa, em média, por unidade, 10% do preço final de venda ao consumidor. O lucro em cada unidade é de 50% do custo total (preço de compra mais custo de comercialização). Com base no exposto, classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir:

- 1) O preço de venda, de cada unidade, ao consumidor é maior que R\$ 0,70.
 - 2) Se o comerciante faturou R\$ 600,00 com a venda dos cocos, seu lucro foi de R\$ 200,00.
 - 3) Se o comerciante vender em determinado dia o dobro de unidades do dia anterior, seu lucro será o dobro do lucro do dia anterior.
 - 4) Para que o comerciante tenha lucro de R\$ 500,00, ele deverá vender 2500 cocos.
- 78.** O dono de uma padaria comprou um pacote de chocolate com 100 unidades pagando R\$ 120,00. Se ele vender 40 unidades com uma margem de contribuição unitária igual a 50% do custo unitário, e 60 unidades com uma margem de 30% sobre o custo unitário, qual a receita de venda das 100 unidades?
- 79.** (UF-PA) Para produzir determinado artigo, uma indústria tem dois tipos de despesa: uma fixa e uma variável. A despesa fixa foi estimada em R\$ 90,00 (noventa reais), e a variável deverá corresponder a 30% do total das vendas. Se para o mês de março de 2001 pretende-se que o lucro em relação ao produto represente 20% do total de vendas, qual deve ser, em reais, o volume de vendas e de quanto será o lucro?
- 80.** (UF-ES) Humberto comprou seis exemplares de um livro, um para ele e cinco para dar de presente a seus amigos. Os livros foram comprados com 20% de desconto sobre o preço original. Pela remessa de cada um dos cinco livros, ele pagou 5% sobre o valor unitário de compra (com desconto) mais R\$ 1,00 pela embalagem. Ao todo, ele gastou R\$ 289,00. Qual o preço original do livro?
- 81.** (U.F. Viçosa-MG) Uma indústria fabrica dois tipos de produto, X e Y, com custo por unidade de R\$ 4,00 e R\$ 10,00, respectivamente. Sabendo que essa indústria vendeu 260 unidades dos produtos X e Y com preços 50% e 40%, respectivamente, acima de seu valor de custo, obtendo R\$ 2680,00 com a venda, determine a quantidade de cada produto.
- 82.** (Fuvest-SP) No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões que ele começou a vender ao preço unitário de R\$ 2,00. A partir das dez horas reduziu o preço em 20% e a partir das onze horas passou a vender cada melão por R\$ 1,30. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de R\$ 461,00.
- a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?
 - b) Sabendo que $\frac{5}{6}$ dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

- 83.** (FGV-SP) No Brasil, quem ganha um salário mensal menor ou igual a R\$ 900,00 está isento do pagamento do imposto de renda (IR). Quem ganha um salário mensal acima de R\$ 900,00 até R\$ 1 800,00 paga um IR igual a 15% da parte de seu salário que excede R\$ 900,00; quem ganha um salário mensal acima de R\$ 1 800,00 paga um IR igual a R\$ 135,00 (correspondente a 15% da parte do salário entre R\$ 900,00 e R\$ 1 800,00) mais 27,5% da parte do salário que excede R\$ 1 800,00.
- Qual o IR pago por uma pessoa que recebe um salário mensal de R\$ 1 400,00?
 - Uma pessoa pagou um IR de R\$ 465,00 num determinado mês. Qual o seu salário nesse mês?

Observação: os dados são do ano 2000.

- 84.** (UF-PR, adaptado) O imposto de renda (IR) a ser pago mensalmente é calculado com base na tabela da Receita Federal, da seguinte forma: sobre o rendimento base aplica-se a alíquota correspondente; do valor obtido, subtrai-se a “parcela a deduzir”; o resultado é o valor do imposto a ser pago.

Rendimento base (R\$)	Alíquota	Parcela a deduzir (R\$)
Até 900,00	Isento	–
De 900,01 a 1 800,00	15%	135,00
Acima de 1 800,00	27,5%	360,00

Fonte: Receita Federal, ago. 1999.

Em relação ao IR do mês de agosto de 1999, considerando apenas as informações da tabela, classifique como verdadeiro ou falso cada um dos itens a seguir:

- Sobre o rendimento base de R\$ 1 000,00, o valor do imposto é R\$ 15,00.
 - Para rendimentos base maiores que R\$ 900,00, ao se triplicar o rendimento base, triplica-se também o valor do imposto.
 - Sendo x o rendimento base, com $x > 1 800$, uma fórmula para o cálculo do imposto y é: $y = 0,275x - 360$, considerando x e y em reais.
- 85.** Em fevereiro de 2013, vigorava no Brasil a seguinte tabela para o cálculo do imposto de renda sobre os salários:

Rendimento em R\$	Alíquota %	Deduzir – R\$
Até R\$ 1 710,78	Isento	–
De 1 710,79 até 2 563,91	7,5	128,31
De 2 563,92 até 3 418,59	15,0	320,60
De 3 418,60 até 4 271,59	22,5	577,00
Acima de R\$ 4 271,59	27,5	790,58

Fonte: Receita Federal, fev. 2013.