Equações do 1º grau com uma variável

Prezado estudante!

Como você já sabe, nosso objetivo nesta Unidade é levar você a revisar conceitos relacionados às equações de primeiro e de segundo grau de uma variável, relembrar assuntos relacionados à inequação de primeiro grau, além de auxiliá-lo na resolução de equações de segundo grau que necessitem da regra de Bhaskara. Não se assuste! Vamos dar um passo de cada vez, de maneira que você possa acompanhar a caminhada. Para tanto, é muito importante que você se dedique ao estudo da Unidade, aproveitando-se do momento que é fundamental para sua formação pessoal e profissional. Bons estudos!

Estas equações e inequações são importantes em resolução de algumas situações práticas. Enquanto as resoluções de equações de 1º grau sempre são os pontos fixos e as inequações de 1º grau sempre são os intervalos na reta real, as equações do segundo grau (às vezes chamamos de polinômios de segunda ordem) sempre são soluções com dois valores fixos. Vamos entender melhor esta explicação nas próximas páginas.

Para resolvermos um problema matemático, quase sempre devemos transformar uma sentença apresentada com palavras em uma sentença escrita em linguagem matemática. Esta é a parte mais importante e talvez seja a mais difícil da Matemática. Veja o exemplo a seguir:

Sentença com palavras	Sentença matemática
8 barras de chocolates marca AAA + 6Kg =14Kg	$8x + 6 = 14$

Normalmente, na sentença matemática, aparecem letras conhecidas como variáveis ou incógnitas. A partir daqui, a Matemática se posiciona perante diferentes situações e será necessário conhecer o valor de algo desconhecido; este é o objetivo do estudo de equações. Por exemplo, adotando a demostração anterior você pode calcular quanto pesa cada barra de chocolate marca AAA?

A palavra *incógnita* significa *desconhecida* e equação tem o prefixo *equa* que provém do Latim e significa *igual*.

Você sabe como fazer este cálculo? Vamos lá?

Bem, se você tem 8 *barras de chocolate marca AAA* + 6*Kg* = 14*Kg*, basta usar uma letra qualquer, por exemplo, x, para simbolizar o peso de cada barra de chocolate. Assim, a equação poderá ser escrita, do ponto de vista matemático, como sendo:

$$8x + 6 = 14$$

Portanto, $x = 1$ o que nos permite afirmar que cada barra de chocolate tem 1kg.

Observe que este é um exemplo simples de uma equação contendo uma variável, mas que é extremamente útil e aparece em muitas situações reais. Valorize este exemplo simples!

Antes de prosseguirmos é importante observar que todas as equações têm:

- Uma ou mais letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas variáveis ou incógnitas;
- Um sinal de igualdade, denotado por =;
- Uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro ou membro da esquerda; e

- Uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro ou membro da direita.

Portanto,

$8x + 6$	$=$	14
1º membro	Sinal de igualdade	2º membro

Observe que neste exemplo a letra x *é* a incógnita da equação e as expressões do primeiro e segundo membro da equação são os *termos* da equação. Para resolver essa equação e encontrar o valor de x podemos utilizar o seguinte processo para obter o valor de x.

$8x+6 = 14$ → equação original

$8x+6 - 6 = 14 - 6$ → subtraímos 6 dos dois membros

$8x = 8$ → dividimos por 8 os dois membros da equação

$x = 1$ → solução.

Atenção! Quando adicionamos (ou subtraímos) valores iguais em ambos os membros da equação, ela permanece em equilíbrio. Da mesma forma, se multiplicamos ou dividimos ambos os membros da equação por um valor não nulo, a equação permanece em equilíbrio. Este processo nos permite resolver uma equação, ou seja, permite obter as raízes da equação.

A resolução de equações e inequações pertence a uma parte da Matemática chamada Álgebra. Essas equações surgem no nosso cotidiano, nas atividades científicas e na resolução de problemas.

Os procedimentos de resolução de equações e de sistemas de equações foram descobertos por matemáticos que se ocuparam deste tema durante muitos anos e em diferentes épocas da história da Matemática

Aqui, vamos descrever as equações do 1º e 2º segundo grau e as inequações de 1º grau com seus métodos de resoluções. Estas últimas aparecem no contexto da vida cotidiana para comparar ofertas, pressupostos etc.

Para você o que é uma equação?

Muito bem equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. Assim podemos dizer que a equação envolve um sinal de igualdade e uma variável. Por exemplo,

- $2x+8 = 0$;
- $5x - 6 = 6x+8$;
- $5x - 3x = -6+18$.

Em função de nossos objetivos, podemos distinguir três tipos de equações: equações de definição, equações de comportamento e equações de condições de equilíbrio.

- **Equação de definição**: estabelece uma identidade entre duas expressões alternativas que possuem exatamente o mesmo significado. Por exemplo, o lucro total (LT) é definido como sendo o excesso da receita total (RT) sobre o custo total (CT) e podemos escrever:

$$LT = RT - CT.$$

- **Equação de comportamento**: especifica a maneira pela qual uma variável se comporta em resposta a mudanças em outras variáveis. Isto pode envolver comportamento humano (o padrão de consumo em relação à renda), aspectos tecnológicos (a função de produção) e legais (carga tributária). Por exemplo, seja o custo total dado por $CT = 200 + 10x$, onde x denota a quantidade de determinado produto. O custo fixo (o valor de CT quando $x = 0$) é 200. À medida que x aumenta, CT aumenta.

- **Equação de condições de equilíbrio**: temos quando um modelo matemático econômico envolve a noção de equilíbrio. Duas das mais frequentes condições de equilíbrio em Economia são:

$Q_p = Q_o$ (quantidade procurada = quantidade ofertada).

$S = I$ (poupança planejada = investimento planejado).

Resolução de uma equação

Resolver uma equação ou problema por ela proposto significa determinar o seu conjunto solução (S), dentro do conjunto universo (U) considerado que torna a equação verdadeira. As equações de 1° grau são do tipo $ax + b = 0$. Para resolvê-las, normalmente isolamos a variável no lado esquerdo da expressão.

Exemplos 5. 1 Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

- $2x + 3 = –5$.

Resolução: Para resolver $2x + 3 = –5$, você adiciona –3 a ambos os membros desta equação obtendo uma equação equivalente, assim

$2x + 3 = –5 \Rightarrow 2x + 3 – 3 = – 5 – 3$

$\Rightarrow 2x + 0 = – 8$ (pois zero é o elemento neutro da adição)

$\Rightarrow 2x = – 8$.

Agora, você multiplica ambos os membros de $2x = – 8$ por $\frac{1}{2}$ e tem:

$$2x = -8 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times -8$$

$\Rightarrow \frac{2}{2}x = \frac{-8}{2} = -4$, pois 1 é o elemento neutro da multiplicação.

$\Rightarrow 1 \cdot x = -4 \Rightarrow x = -4.$

Omitindo algumas etapas realizadas acima, após compreendê-las, para resolver a equação $2x + 3 = -5$, você isola a variável x no lado esquerdo de $2x + 3 = -5$, vem $2x + 3 = -5 \Rightarrow 2x = -5 - 3$

$\Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{2} = -4.$

Portanto, $S = \{-4\}$.

▶ $5x = 30$.

$5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{5} = 6.$

Portanto, $S = \{6\}$.

▶ $-3x + 5x = -2$.

$-3x + 5x = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} = -1.$

Portanto, $S = \{-1\}$.

▶ $-3(-5 + x) - x = -7x + 1$.

$-3(-5 + x) - x = -7x + 1.$

$\Rightarrow 15 - 3x - x = -7x + 1$

$\Rightarrow 7x - 4x = -15 + 1 = -14$

$\Rightarrow 3x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{3} = -\frac{14}{3}.$

Portanto, $S = \left\{-\frac{14}{3}\right\}$.

Exemplos 5.2 Determine o conjunto solução das seguintes equações:

▶ $\frac{y}{6} = \frac{-8}{3}$.

Resolução: $\frac{y}{6} = \frac{-8}{3} \Rightarrow y = \frac{(-8)\,6}{3} = \frac{-48}{3} = -16.$

Portanto, $S = \{-16\}$.

▶ $\frac{3x}{2} + \frac{x+3}{4} = 2x - \frac{6-x}{6} + \frac{1}{2}$.

Resolução: $\frac{3x}{2} + \frac{x+3}{4} = 2x - \frac{6-x}{6} + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2(3x)+x+3}{4} = \frac{12x-(6-x)+3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+x+3}{4} = \frac{12x-6+x+3}{6} \Rightarrow \frac{7x+3}{4} = \frac{13x-3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7x+3}{2} = \frac{13x-3}{3} \Rightarrow 3(7x+3) = 2(13x-3)$$

$$\Rightarrow 21x+9 = 26x-6 \Rightarrow 21x-26x = -6-9$$

$$\Rightarrow -5x = -15 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, $S = \{3\}$.

Para verificar se você entendeu, reservamos algumas equações para você resolver:

a) $\frac{3z}{4} = \frac{-1}{3}$.

Resposta: $S = \left\{-\frac{4}{9}\right\}$.

b) $\frac{2x-3}{2}+\frac{-x+1}{5}=\frac{-x+5}{10}$.

Resposta: $S = \{2\}$.

Agora que você já sabe tudo sobre equação de 1º grau vamos ver alguns exemplos práticos?

Exemplo 5.3 O lucro mensal (L) da empresa Falida é dado por $L = 30x - 4.000{,}00$, onde x é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro da empresa Falida seja igual a R$ 11.000,00?

Resolução: Sendo $L = 30x - 4.000{,}00$ a equação do lucro mensal da empresa Falida e como ela pretende ter um lucro mensal de R$ 11.000,00, você tem a seguinte equação:

$$30x - 4.000{,}00 = 11.000{,}00$$

e resolvendo,

$30x - 4.000{,}00 = 11.000{,}00$

$\Rightarrow 30x = 11.000{,}00 + 4.000{,}00 = 15.000{,}00$

$\Rightarrow 30x = 15.000{,}00$

$\Rightarrow x = \frac{15.000{,}00}{30} = 500.$

Portanto, a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro seja R$ 11.000,00 é 500 itens de seu produto.

Exemplo 5.4 O custo mensal (C) de produção de x, $x \in \mathbb{R}$, computadores marca AAA de uma fábrica é $C = 800 + 25x$. Determinar a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal é R$ 15.000,00.

Resolução: Você tem o custo mensal de produção que é $C = 800 + 25x$. E como a fábrica deseja calcular a quantidade mensal produzida para um custo mensal de R$ 15.000,00, tem-se a seguinte equação.

$$800 + 25x = 15.000$$

e resolvendo temos:

$800 + 25x = 15.000$

$\Rightarrow 25x = 15.000 - 800 = 14.200$

$\Rightarrow 25x = 14.200$

$\Rightarrow x = \dfrac{14.200}{25} = 568.$

Portanto, a quantidade mensal produzida de computadores marca AAA é 568.

Atividades de aprendizagem

Agora que revisamos o conceito de equação de primeiro grau procure resolver as atividades a seguir.

1. Resolver as seguintes equações de 1º grau em R:

   a) $3z + 1 = 7z - 3$.

   b) $\frac{5}{2x} = \frac{15}{12}$.

   c) $\frac{3}{y-2} = \frac{6}{4}$.

2. Resolver as seguintes equações de 1º grau em R:

   a) $\frac{x-6}{3} = 5x - 7$.

   b) $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{x-4}{6}$

   c) $\frac{3x-2}{4} + \frac{x-3}{2} - 3 = 5x - \frac{2-4x}{6} + \frac{1}{2}x$.

3. A demanda de certo produto pelo consumidor é de $D(p) = -200p + 12.000$ unidades por mês, onde p é o preço de mercado, em reais, por unidade. Determine o preço de mercado por unidade quando a demanda é de 8.000 unidades por mês.

Equações do 2° Grau ou Equações Quadráticas

As equações do segundo grau são abordadas na história da Matemática desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses.

O primeiro registro das equações polinomiais do 2º grau foi feita pelos babilônios. Eles tinham uma álgebra bem desenvolvida e resolviam equações de segundo grau por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Como as resoluções dos problemas eram interpretadas geometricamente, não fazia sentido falar em raízes negativas. O estudo de raízes negativas foi feito a partir do Século XVIII.

Na Grécia, a Matemática tinha um cunho filosófico e pouco prático. Euclides, nos *Elementos*, resolve equações polinomiais do 2º grau através de métodos geométricos. Buscando contribuir na busca da resolução de equações do 2º grau Diophanto apresentou outra representação da equação introduzindo alguns símbolos, pois até então a equação e sua solução eram representados em forma discursiva.

Na Índia as equações polinomiais do 2º grau eram resolvidas completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada geometricamente por Al-Khowârizmi, no século IX. Eles descartavam as raízes negativas, por serem "inadequadas" e aceitavam as raízes irracionais. Tinham também uma "receita" para a solução das equações de forma puramente algébrica.

No Brasil, costuma-se chamar de fórmula de Bhaskara àquela que dá as soluções da equação do segundo grau. São equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$. Suas soluções são dadas por

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0.$$

Para resolvermos uma equação do segundo grau devemos lembrar:

i) Δ, lê-se delta, do alfabeto grego e $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado descriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$,

ii) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui soluções reais e distintas;

iii) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui soluções reais e iguais;

iv) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui soluções reais.

Atenção! Se $a = 0$ em $ax^2 + bx + c = 0$, vem $0x^2 + bx + c = 0$ ou $0 + bx + c = 0$, ainda $bx + c = 0$ e você tem uma equação do primeiro grau em x. Se $b = 0$ ou $c = 0$, a equação está na forma incompleta.

Exemplos 5.5 Resolver as equações em $\mathbb{R}$.

▶ $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução: Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, você tem $a = 1$; $b = -5$ e $c = 6$. Aplicando a fórmula acima, você tem:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

ou seja,

$x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ ou $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$ são as soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Portanto, $S = \{2, 3\}$.

▶ $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Resolução: Na equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, você tem, $a = 1$; $b = -4$ e $c = 3$. Aplicando a fórmula acima, teremos:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

ou seja,

$x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ ou $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ são as soluções da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Portanto, $S = \{1, 3\}$.

Para verificarmos se você entendeu, separamos algumas equações para você resolver:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$.

Resposta: $S = \{3\}$.

Você pode estar se perguntando: qual o lado prático de equação do segundo grau? Veja na sequência.

Exemplo 5.6 O lucro mensal, em reais, de uma empresa é dado por $L = -100x^2 + 1000x - 1600$, em que x é a quantidade vendida. Para que valores de x o lucro é igual a R$ 900,00?

Resolução. Para que o lucro seja igual a R$ 900,00 você tem $L = 900$, ou seja,

$$-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900.$$

Para encontrar os valores de x basta resolver a equação do segundo grau:

$$-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900.$$

Dividindo ambos os membros da equação $-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900$ por 100 você tem:

$$- x^2 + 10x - 16 = 9$$
$$\Rightarrow - x^2 + 10x - 16 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow - x^2 + 10x - 25 = 0,$$

onde $a = -1$, $b = 10$ e $c = -25$.

Aplicando a fórmula de Bhaskara para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, você tem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, você tem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \text{x} (-1) \text{x} (25)}}{2 \text{x} (-1)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \text{x}\ 25}}{2 \text{x} (-1)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{-2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-10 \pm 0}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5,$$

ou seja,

$x = 5$.

Portanto, para que o lucro seja igual a R$ 900,00 é necessário que a quantidade vendida seja 5 unidades.

Atividades de aprendizagem

Para verificar se você compreendeu como resolver uma equação do segundo grau, busque realizar as atividades propostas abaixo.

4. Resolva as equações a seguir:

   a) $x^2 - 3x = 0$.

   b) $x^2 + 3x \cdot (x - 12) = 0$.

   c) $3x - \frac{1}{3x} = 0$.

   d) $4 - \frac{x^2}{9} = 0$.

5. Determine a solução para as equações abaixo:

   a) $x\,(x - 3) + 2 = 0$.

   b) $\frac{x^2}{6} = \frac{3x}{2} - 3$.

   c) $x^2 + 2x - 8 = 0$.

6. Determinar o valor de m para que a equação $x^2 - 6x + 3m = 0$ admita raízes reais e iguais.

7. Sabendo que a receita diária de estacionamento para automóveis do Shopping Center Aurora é $R(p) = 400p - 20p^2$, onde p é o preço, em reais, cobrado por dia de estacionamento por carro, calcule o preço que deve ser cobrado para dar uma receita diária de R$ 1.500,00.

Inequações do 1° Grau

Antes de começarmos a falar sobre inequações do 1º grau veremos a relação de ordem em R (números reais).

Relação de Ordem em $\mathbb{R}$

A relação de ordem (maior ou menor) em conjunto dos números reais é definida por:

- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$, ou seja,

  a é **maior** que *b* se e somente se a – b for **positivo**.

- $a < b \Leftrightarrow a - b < 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$, ou seja,

  a é **menor** que *b* se e somente se a – b for **negativo**.

O significado geométrico da desigualdade $a < b$ (leia-se "*a* menor que *b*") é simplesmente que *a* está à esquerda de *b*; a desigualdade equivalente $b > a$ (leia-se "*b* maior que *a*") significa que *b* está à direta de *a*. Um número *a* é positivo ou negativo conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Se você quer dizer que *a* é positivo ou igual a zero, escreve-se $a \geq 0$ e lê-se "*a* maior ou igual a zero". Do mesmo modo, $a \geq b$ significa que $a > b$ ou $a = b$. Assim, $5 \geq 3$ e $5 \geq 5$ são desigualdades verdadeiras.

Assim como o conjunto dos Números Reais, as desigualdades também apresentam propriedades fundamentais, dadas a seguir.

Propriedades das desigualdades

Para quaisquer números reais a, b, c e d, valem as propriedades:

P1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, para qualquer real c. Por exemplo, $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$.

P2. $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$. Por exemplo, $6 < 8$ e $5 < 7 \Rightarrow 6 + 5 < 8 + 7$.

P3. $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$. Por exemplo, $5 < 9$ e $9 < 11 \Rightarrow 5 < 11$.

P4. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $3 > 0 \Rightarrow 4 \times 3 < 6 \times 3$.

P5. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a \times c > b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $-3 < 0 \Rightarrow 4 \times (-3) > 6 \times (-3)$.

P6. $0 < a < b$ e $0 < c < d \Rightarrow a \times c < b \times d$. Por exemplo, $0 < 4 < 7$ e $0 < 5 < 8 \Rightarrow 4 \times 5 < 7 \times 8$.

Agora que já falamos sobre a relação de ordem em R e vimos algumas propriedades das desigualdades, vamos iniciar nosso estudo sobre as inequações do 1º grau. Você está pronto? Podemos começar?

Denominamos inequação do 1° grau a toda expressão que pode ser reduzida às formas:

$$ax + b \geq 0,\ ax + b > 0,\ ax + b \leq 0 \text{ ou } ax + b < 0.$$

A resolução de uma inequação (ou desigualdade) do 1º grau é feita de modo análogo ao das equações do 1º grau, porém você deve lembrar que, quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros da inequação (ou desigualdade) por um número negativo, muda ou inverte o sentido da inequação (ou desigualdade).

Observações gerais sobre Inequações

Observando as condições de vida da população do Brasil, obviamente encontraremos um grande mar de desequilíbrio. Essas desigualdades podem ser encontradas em diversas áreas, mas as que mais de destacam são a social e a econômica. Veja alguns exemplos de desigualdades:

- **Salarial**: enquanto muitos brasileiros estão com faixas de salários baixas, mal podendo se sustentar, alguns outros têm seus salários altos.
- **Habitação**: muitos brasileiros têm casas boas em bairros e cidades nobres, outros não têm condições de ter sua casa própria.
- **Moradia**: O número de pessoas que vivem nas ruas aumenta cada vez mais com o passar dos anos.
- **Alimentação**: Cerca de 40% da população que vive em ambiente rural, no campo, vivem em situação precária.

Se pudéssemos pesar estas diferenças apresentadas em uma balança, veríamos com mais clareza as grandes desigualdades.

Conheça agora alguns exemplos de inequações do 1º grau.

Exemplo 5.7 Resolva as inequações em $\mathbb{R}$ a seguir:

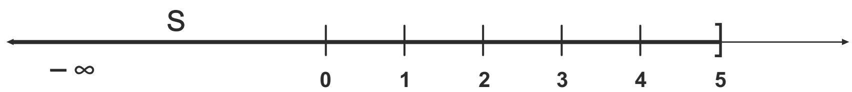
Resolução: $5x - 3 \leq 2x + 12 \Rightarrow 5x - 2x \leq 12 + 3$

$$\Rightarrow 3x \leq 15 \Rightarrow x \leq \frac{15}{3} \Rightarrow x \leq 5.$$

Portanto,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, 5]\}$.

Graficamente você tem a solução abaixo:



Chegou sua vez de verificar se aprendeu. Para tanto resolva a inequação a seguir e faça sua representação gráfica.

a) $-3x + 7 > 0$.

Resposta: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{7}{3} \right\}$.

Exemplo 5.8 Resolva as seguintes inequações em R:

$$-2 \leq 3x + 4 < 8.$$

Resolução: Para resolver $-2 \leq 3x + 4 < 8$ você adiciona -4 aos membros de $-2 \leq 3x + 4 < 8$ e obtém o elemento neutro da adição, assim:

$-2 \leq 3x + 4 < 8 \Rightarrow -2 - 4 \leq 3x + 4 - 4 < 8 - 4$

$\Rightarrow -6 \leq 3x + 0 < 4 \Rightarrow -6 \leq 3x < 4$.

Agora, você multiplica todos os membros de $-6 \leq 3x < 4$ por $\frac{1}{3}$ para isolar a variável x. Logo,

$$\frac{1}{3} \times (-6) \leq \frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 4 \Rightarrow \frac{1 \times (-6)}{3} \leq \frac{1 \times 3}{3} x < \frac{1 \times 4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{3} \leq \frac{3}{3} x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2 \leq 1\, x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2 \leq 1\ x < \frac{4}{3} .$$

Resolvendo diretamente, observe as etapas.

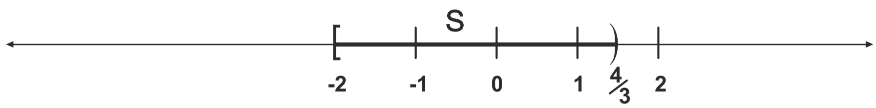
$-2 - 4 \leq 3x + 4 - 4 < 8 - 4$

$\Rightarrow -6 \leq 3x < 4 \Rightarrow \frac{-6}{3} \leq \frac{3}{3}x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2 \leq x < \frac{4}{3}.$

Portanto,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 \leq x < \frac{4}{3}) \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \left[-2,\ \frac{4}{3} \right) \right\}.$$

Graficamente você tem a solução abaixo:



Exemplo 5.9 Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

$$\frac{x}{x-2} \geq 5, \text{ com } x - 2 \neq 0, \text{ ou seja, } x \neq 2.$$

Resolução: Para eliminar o denominador de $\frac{x}{x-2} \geq 5$, com $x - 2 \neq 0$, você precisa multiplicar os dois membros por $x - 2$, usando as propriedades (4) e (5) das desigualdades; e para isto você divide o problema em duas etapas:

Etapa 1: Para $x - 2 > 0$ ou $x > 2$, pelo fato de que o denominador não pode ser nulo.Você deve multiplicar os dois membros da desigualdade por $x - 2$. Observe a seguir:

$\frac{x}{x-2} \geq 5 \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times (x-2) \geq 5 \times (x-2)$ (Propriedade 4)

$\Rightarrow x \geq 5 \times (x - 2) \Rightarrow x \geq 5x - 10$

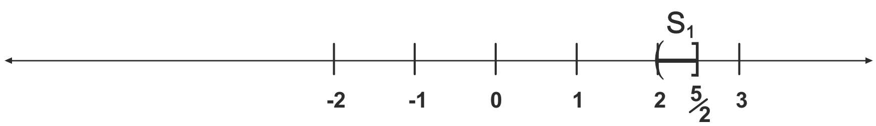
$\Rightarrow x - 5x \geq -10 \Rightarrow -4x \geq -10 \Rightarrow 4x \leq 10$ (Propriedade 5)

$$x \quad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \quad \frac{5}{2}.$$

Como nesta etapa $x>2$, da solução aqui encontrada só constitui solução da desigualdade dada a parte desta que é maior do que 2. E, assim você obtém o conjunto-solução da Etapa 1, isto é,

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x > 2 \text{ e } x \leq \frac{5}{2} \right\} \text{ ou } S_1 = \left(2, \frac{5}{2} \right].$$

Graficamente você tem a solução abaixo:



Etapa 2: Para $x - 2 < 0$ ou $x < 2$, você multiplica os dois membros da desigualdade por $x - 2$, e tem:

$$\frac{x}{x-2} \geq 5 \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times (x-2) \leq 5 \times (x-2) \text{(Propriedade 5)}$$

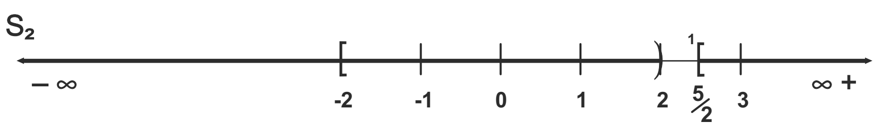
$$\Rightarrow x \leq 5 \times (x-2) \Rightarrow x \leq 5x - 10 \Rightarrow x - 5x \leq -10$$

$$\Rightarrow -4x \leq -10 \Rightarrow 4x \geq 10 \text{ (Propriedade 5)}$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

Como nesta etapa $x < 2$, da solução aqui encontrada só constitui solução da desigualdade dada a parte desta que é menor do que 2.

Graficamente você tem a solução abaixo:



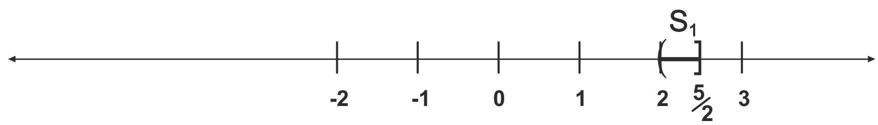
Como $x < 2$ e $x \geq \frac{5}{2}$, você não encontra número real algum que seja solução da desigualdade proposta. Então a Etapa 2 leva ao seguinte conjunto solução:

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}\ ;\ x < 2 \text{ e } x \geq \frac{5}{2} \right\} = \varnothing.$$

Logo, a resolução da desigualdade proposta é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left(2, \frac{5}{2}\right] \cup \varnothing = \left(2, \frac{5}{2}\right], \text{ ou seja, } S = S_1 = \left(2, \frac{5}{2}\right].$$

Graficamente você tem a solução abaixo:



Você pode estar se perguntando: qual o uso prático de inequação? Vamos ver juntos?

Exemplo 5.10 Sabendo que o custo (C) diário de produção de certo item é $C = 300 + 20x$, onde x é o número de itens produzidos em um dia e sabendo que em determinado mês o custo diário variou entre um máximo de R$ 9.000,00 e um mínimo de R$ 4.000,00, em que intervalo variou a produção diária nesse mês?

Resolução: Como o custo $C = 300 + 20x$ em determinado mês no máximo é de R$ 9.000,00 e no mínimo é de R$ 4.000,00, você tem a seguinte desigualdade ou inequação:

$$4.000 \le 300 + 20x \le 9.000.$$

E resolvendo você tem:

$4.000 - 300 \le 300 - 300 + 20x \le 9.000 - 300$ (subtraindo 300 em cada lado)

$\Rightarrow 3.700 \le 0 + 20x \le 8.700$

$\Rightarrow 3.700 \le 20x \le 8.700$

$\Rightarrow \frac{1}{20} \times 3.700 \le \frac{1}{20} \times 20x \le \frac{1}{20} \times 8.700$ (multiplicando $\frac{1}{20}$ em cada lado)

$\Rightarrow \frac{1x\ 3.700}{20} \le \frac{1x\ 20}{20}\, x \le \frac{1x\ 8.700}{20}$

$$\Rightarrow \frac{1x\,3.700}{20} \leq \frac{20}{20}x \leq \frac{8.700}{20}$$

$$\Rightarrow 185 \leq 1x \leq 435$$

$$\Rightarrow 185 \leq x \leq 435.$$

Portanto, a produção diária de x itens nesse mês variou no intervalo $185 \leq x \leq 435$, ou seja, $x \in [185, 435]$.

Exemplo 5.11 A administração da Bolsa de Valores da cidade XZ estimou que fosses necessários x milhares de reais para comprar ações da empresa Beta no valor dado por $100.000 \times \left(-1 + \sqrt{1 + (0{,}001)x}\right)$. Determine a quantia, em reais, que a administração da Bolsa precisa para comprar pelo menos 100.000 ações da empresa Beta.

Resolução: Assim, temos a seguinte inequação:

$$100.000 \times \left(-1 + \sqrt{1 + (0{,}001)x}\right) \geq 100.000\ .$$

Resolvendo,

$$100.000 \times \left(-1 + \sqrt{1 + (0{,}001)x}\right) \geq 100.000 \text{ (÷ por 100.000)}$$

$$1 \quad \sqrt{1 \quad 0{,}001x} \quad \geq \qquad \sqrt{1 \quad 0{,}001x} \geq$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 0{,}001x} \geq 2 \Rightarrow (\sqrt{1 + 0{,}001x})^2 \geq 2^2$$

$$\Rightarrow 1 + 0{,}001x \geq 2^2 \Rightarrow 1 + 0{,}001x \geq 4$$

$$\Rightarrow 0{,}001x \geq 4 - 1 = 3 \Rightarrow 0{,}001x \geq 3$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{3}{0{,}001} = 3.000.$$

Portanto, a administração da Bolsa de Valores necessita, no mínimo, R$ 3.000,00.

Exemplo 5.12 Supondo que o lucro (L) mensal da empresa Alegria é $L = 40x - 7000$, onde x é a quantidade mensal vendida, acima de qual quantidade mensal vendida o lucro é superior a R$ 20.000,00?

Resolução: Para que a empresa Alegria tenha lucro superior a R$ 20.000,00 é necessário que o lucro $L = 40x - 7000$ seja maior que R$ 20.000,00. Você tem com isso uma inequação ou desigualdade do tipo:

$$40x - 7000 > 20.000,$$

e resolvendo temos

$40x - 7.000 > 20.000$

$\Rightarrow 40x - 7.000 + 7.000 > 20.000 + 7.000$ (somando 7.000 em ambos os lados)

$\Rightarrow 4x + 0 > 27.000 \Rightarrow 40x > 27.000$

$\Rightarrow \frac{1}{40} \times 40x > \Rightarrow \frac{1}{40} \times 27.000$ (multiplicando por $\frac{1}{40}$ ambos os lados)

$$\frac{1 \text{ x } 40}{40} x > \frac{1 \text{ x } 27.000}{40} \qquad \frac{40}{40} x > \frac{27.000}{40}$$

$\Rightarrow 1x > 675 \Rightarrow x > 675.$

Portanto, acima da quantidade mensal vendida de 675 o lucro será superior a R$ 20.000,00.

Atividades de aprendizagem

Para saber se você está entendendo, procure, então, resolver as atividades propostas e, caso tenha dúvidas, faça uma releitura cuidadosa dos conceitos, preste atenção nos exemplos apresentados e tente resolver as atividades antes de prosseguir seus estudos. Lembre-se: você pode contar com o auxílio de seu tutor.

8. Resolva as inequações do 1º grau abaixo em $\mathbb{R}$.

a) $3x - 12 > 2x + 3$.

b) $3(2x + 2) > 2(9 - 3x)$.

c) $(x - 2)\,(x + 3) \leq 0$.

d) $\dfrac{5x+2}{3} - \dfrac{x-3}{2} > 1$.

e) $\dfrac{3x}{2} + 3 < 5x - \dfrac{1}{2}$

9. Determine as inequações em $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$.

b) $\dfrac{-2x-3}{x+2} < 0$.

c) $\dfrac{3x-5}{x+3} \geq 4$.

d) $\dfrac{2x-3}{x+4} < 1$.

10. O custo mensal de produção de ternos da fábrica Bem Vestir é $C(x) = 4.000 + 8x$. Determinar a quantidade mensal mínima produzida sabendo-se que a fábrica Bem Vestir dispõe de R$ 28.000,00 para investir nessa produção.