

# 1 | Geometria Métrica

Uma das principais utilidades da Geometria Plana é sua capacidade de modelar situações reais e resolver problemas que envolvem conhecimentos sobre cálculos de medidas de comprimento, área e ângulo. Ao longo desse material desenvolveremos algumas técnicas de resolução de problemas da maneira mais prática possível: resolvendo-os.

## 1.1 – Perímetro e Áreas - Noções Básicas



Começamos nosso roteiro com um probleminha simples, em que recordamos a importância das principais unidades de medida de comprimento.

**Problema 1** Fábio está treinando para uma corrida. Ele dividiu seu treino em três etapas: na primeira correu 2 km, na segunda andou 800 metros e na terceira correu 3 km. Quantos metros ele percorreu ao todo, durante esse treino?

Antes de resolvermos esse problema, devemos lembrar que para somarmos comprimentos de caminhos ou objetos calculados em medidas diferentes, devemos, antes, transformar todos os comprimentos para uma mesma medida. No caso do problema em que estamos pensando, isso é fácil, uma vez que as medidas mencionadas no enunciado fazem parte do **sistema métrico**.

O sistema métrico é um sistema de medição internacional **decimalizado**, que surgiu pela primeira vez na França, durante a Revolução Francesa, visando minimizar a dificuldade de funcionamento do comércio e da indústria, devido à existência de diversos padrões de medida.

Esse sistema é ancorado em dois conceitos básicos: uma medida-base, o *metro*, e medidas múltiplas e submúltiplas do metro, as quais são obtidas multiplicando-se a medida-base por potências de dez.


Existem situações nas quais o uso exclusivo da unidade-base deixa de ser prático. Isso ocorre quando queremos medir grandes extensões ou objetos muito pequenos.

Por tais razões, emprega-se os múltiplos e submúltiplos do metro, os quais também são chamados de *unidades secundárias* de comprimento. Elas são definidas de acordo com as tabelas a seguir:

Múltiplo	Nome	Símbolo
$10^0$	metro	m
$10^1$	decâmetro	dam
$10^2$	hectômetro	hm
$10^3$	quilômetro	km
$10^6$	megametro	Mm
$10^9$	gigametro	Gm
$10^{12}$	terametro	Tm
$10^{15}$	petametro	Pm
$10^{18}$	exametro	Em
$10^{21}$	zettametro	Zm
$10^{24}$	iotametro	Ym

Submúltiplo	Nome	Símbolo
$10^0$	metro	m
$10^{-1}$	decímetro	dm
$10^{-2}$	centímetro	cm
$10^{-3}$	milímetro	mm
$10^{-6}$	micrometro	$\mu\text{m}$
$10^{-9}$	nanômetro	nm
$10^{-12}$	picometro	pm
$10^{-15}$	femtômetro	fm
$10^{-18}$	attometro	am
$10^{-21}$	zeptômetro	zm
$10^{-24}$	yoctômetro	ym

Nas tabelas, os expoentes escritos nas potências de dez representam o número de vezes que o metro deve ser multiplicado por 10 para obtermos a referida medida. Por exemplo, o quilômetro está associado com  $10^3$ . Isso significa que devemos pegar um metro e multiplicarmos por 10 três vezes consecutivas para obtermos 1 quilômetro. De forma análoga, um expoente negativo significa o número de vezes que 1 metro é dividido por 10 para obtermos a medida referida. Por exemplo, o nanômetro está associado ao expoente  $-9$  pois um metro precisa ser dividido por 10 vezes para obtermos 1 nanômetro.

 **Solução.** Convertendo quilômetros para metros, temos que  $2 \text{ km} = 2000 \text{ m}$  e  $3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$ . Somando-se todas as medidas em metros, obtemos:

$$2000 + 800 + 3000 = 5800$$

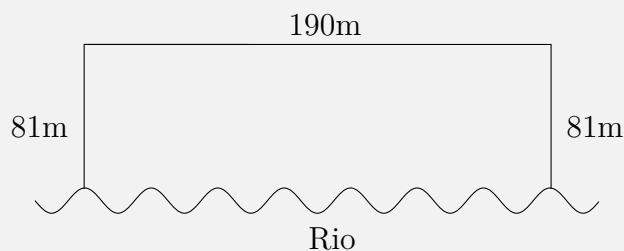
metros. ■

O vídeo a seguir traz uma interessante forma de comparação entre as escalas das unidades de medida do sistema métrico.



 Saiba mais

**Problema 2 — Enem-2013.** Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é


(A) 6.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 11.

(E) 12.

 **Solução.** Uma vez que um dos lados é margeado pelo rio, devemos desconsiderar esse lado ao calcular o perímetro do terreno, pois não utilizaremos tela alguma aí. Desse modo, a quantidade de tela utilizada para cercar todo o terreno é igual a  $81 + 81 + 190 = 352$  metros. Por outro lado, a tela é vendida em rolos de 48 metros. Assim, para calcular a quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar o terreno, devemos começar dividindo 352 por 48:

$$\begin{array}{r|l} 352 & 48 \\ 16 & 7 \end{array}$$

Veja que 7 rolos de tela não são suficientes para cercar o terreno, pois ainda ficariam 16 metros sem cerca. Assim, a quantidade mínima de rolos para cercar o terreno é  $7 + 1 = 8$ , embora o oitavo rolo não seja utilizado completamente. ■

Você pode utilizar a sequência de aulas da Khan Academy para aprender e praticar um pouco mais sobre conversões entre diferentes unidades do sistema métrico.



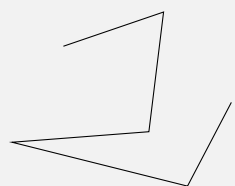
Saiba mais



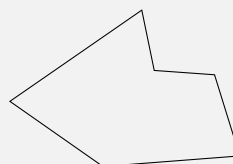
Observe que nas soluções dos problemas anteriores, utilizamos intuitivamente um conceito básico da Geometria: a medida do comprimento de uma **concatenação de dois caminhos abertos** é igual a soma dos comprimentos dos caminhos originais.

Podemos entender um caminho aberto como um traço no plano cujos pontos inicial e final são diferentes. Isso ocorre quando você sai da sua casa e vai a pé até a casa de um amigo que mora próximo.

Já um **caminho fechado** é quando os pontos inicial e final coincidem. Um exemplo é quando você dá uma volta ao redor de uma praça. Caminhos fechados simples (formados por um número finito de segmentos de retas que encontram-se apenas em suas extremidades) geram figuras planas que possuem **área** e **perímetro**.



Caminho Aberto




Caminho Fechado

O perímetro de uma figura plana é a medida do comprimento do seu contorno. Quando a figura é um polígono, cujo contorno é um caminho fechado simples, o perímetro é igual à soma das medidas de seus lados. A seguir, dois problemas que tratam sobre esse assunto.

**Problema 3** Um pentágono é formado da seguinte maneira: dado o lado com a menor medida, o próximo lado mede o dobro do seu comprimento, o seguinte mede o triplo, e o quarto e o quinto medem o quádruplo do de menor medida. Sabendo que o perímetro desse pentágono é igual a 280 cm, qual é a medida do seu maior lado?

- (a) 10 cm.
- (b) 50 cm.
- (c) 80 cm.
- (d) 100 cm.
- (e) 20 cm.

 **Solução.** Seja  $x$  a medida do menor lado. Os demais lados terão medidas  $2x$ ,  $3x$ ,  $4x$  e  $4x$ . Assim,

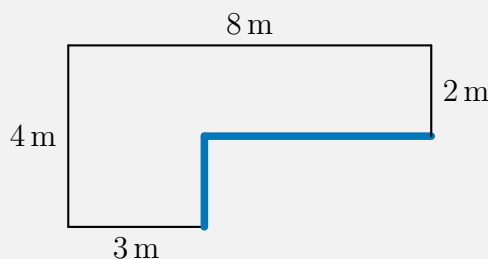
$$x + 2x + 3x + 4x + 4x = 280, \text{ ou seja,}$$

$$14x = 280, \text{ o que dá}$$


$$x = 20.$$

Portanto, o maior lado terá medida  $4x = 80$  cm. **Letra C.** ■

**Problema 4** Na figura a seguir, temos um polígono em forma de “L”, tal que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ . Joaquim deseja criar uma cerca contornando todo o perímetro desse terreno. Qual será o tamanho dessa cerca?



Antes de resolvermos o problema, note que não conhecemos, a princípio, as medidas de alguns trechos da cerca, destacados com segmentos “mais grossos”. Para encontrar o perímetro dessa figura, devemos primeiro descobrir essas medidas.

 **Solução.** Antes de tudo, vamos denotar os vértices do terreno com as letras  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ . Agora, para esse terreno é dito no enunciado que todos os ângulos internos entre lados consecutivos medem  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ . Como um quadrilátero com todos os seus ângulos internos retos é um retângulo, não é difícil perceber que podemos dividir esse primeiro terreno em dois retângulos, conforme mostrado na Figura 1.1 (veja o segmento de reta tracejado  $BF$ ):

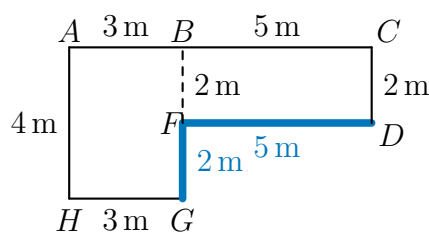


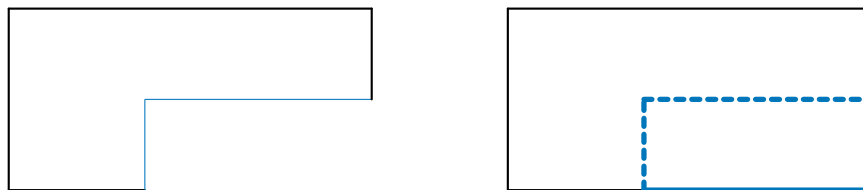
Figura 1.1: cálculo dos comprimentos dos lados remanescentes do “L”.

Como os lados opostos de um retângulo têm as mesmas medidas, o segmento  $BF$  tem a mesma medida do segmento  $CD$ , ou seja,  $\overline{BF} = 2$  m. Da mesma forma, o segmento  $BG$  tem medida igual à do segmento  $AH$ , de forma que  $\overline{BG} = 4$  m e, assim,  $\overline{FG} = \overline{BG} - \overline{BF} = 4 \text{ m} - 2 \text{ m} = 2 \text{ m}$ . Agora, observe que o lado horizontal maior  $AC$ , que mede 8 m, ficou dividido em dois segmentos,  $AB$  e  $BC$ . Novamente pelo fato de  $ABGH$  ser um retângulo, temos  $\overline{AB} = 3$  m. Então,  $\overline{DF} = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 8 \text{ m} - 3 \text{ m} = 5 \text{ m}$ . Portanto, o perímetro do terreno em forma de “L” é

$$4 + 8 + 2 + 5 + 2 + 3 = 24 \text{ metros.}$$



Outro modo de explorar a geometria da figura, para calcular o perímetro do terreno em forma de “L”, consiste em *explorar uma simetria escondida*, mais precisamente, perceber que esse perímetro é igual àquele do retângulo esboçado na figura abaixo, à direita:

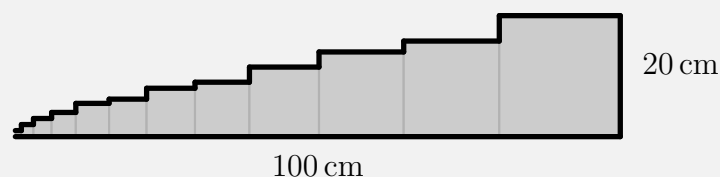


Isto porque, nela, o quadrilátero de bordas destacadas é um retângulo, o que é também consequência da condição sobre os ângulos internos formados por lados consecutivos do polígono “L”. Logo, a soma das medidas de dois lados consecutivos do mesmo é igual à soma das medidas dos outros dois lados. Desse modo, o perímetro pedido é igual a


$$2 \cdot (\overline{AH} + \overline{AC}) = 2 \cdot (4 + 8) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ metros.}$$

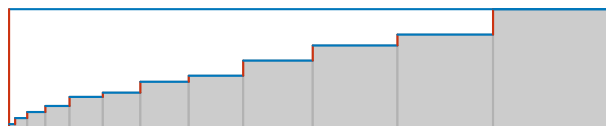
Utilizaremos mais uma vez essa estratégia no problema a seguir.

**Problema 5 — OBMEP.** Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em destaque) da figura formada por esses quadrados?



- (a) 220 cm.
- (b) 240 cm.
- (c) 260 cm.
- (d) 300 cm.
- (e) 400 cm.

 **Solução.** Inicialmente, completamos um retângulo cujos lados medem 100 cm e 20 cm, conforme mostrado a seguir:



Na figura, a soma das medidas dos segmentos verticais, que fazem parte do contorno da figura descrita no enunciado, é igual à medida do lado vertical do retângulo construído. Do mesmo modo, a soma das medidas dos segmentos horizontais, que estão da figura original, é igual à medida do lado horizontal do retângulo construído. Assim, o seu perímetro que se quer calcular é igual a

$$2 \cdot (100 + 20) = 2 \cdot 120 = 240 \text{ cm.}$$

A alternativa correta é a letra **(b)**.



Duas figuras planas estão concatenadas quando compartilham um lado (ou parte de lado) comum. Uma propriedade intuitiva sobre áreas afirma que, ao concatenarmos duas figuras planas, a figura resultante possui área cuja medida é igual à soma das medidas das áreas das figuras originais. Essa propriedade torna-se especialmente útil quando a aplicamos do sentido reverso. Mais especificamente, quando estamos em uma situação na qual devemos calcular a área de uma figura complexa, podemos particioná-la em figuras menores e mais simples, cujas áreas sabemos calcular. Um exemplo dessa estratégia é encontrado na solução do problema a seguir:

**Problema 6** Calcule a área do polígono a seguir, em que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ .

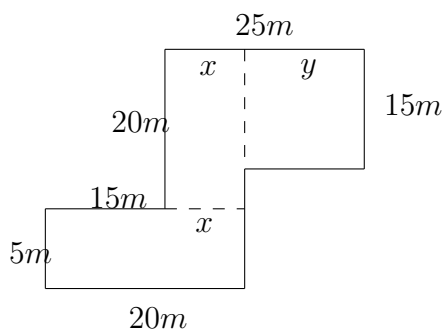
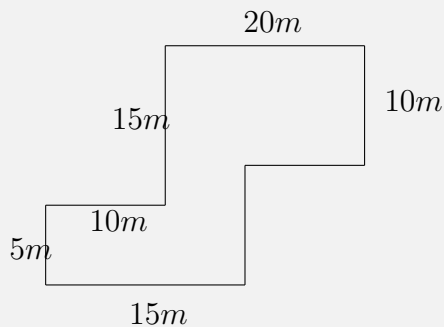



Figura 1.2: Decompondo uma figura complexa em outras mais simples.

 **Solução.** Em primeiro lugar, iremos decompor a figura do enunciado em três retângulos, utilizando segmentos tracejados paralelos aos lados do polígono original, conforme a Figura 1.2. Utilizando o fato de um retângulo ter pares de lados paralelos, podemos encontrar as medidas dos segmentos  $x$  e  $y$ . De fato,  $x = 20 - 15 = 5$  e  $y = 25 - x = 20$ . Assim, a área  $A$  da figura é a soma das áreas dos três retângulos, ou seja,

$$\begin{aligned} A &= (5 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 15 \cdot 20) \, m^2 \\ &= 20 \cdot (5 + 5 + 15) \, m^2 = 20 \cdot 25 \, m^2 = 500 \, m^2. \end{aligned}$$

■

**Obs** O problema anterior também pode ser resolvido “completando” o retângulo, com lados paralelos aos do polígono, no qual o polígono está inscrito. Em seguida, calcula-se a área desse retângulo e subtrai-se as áreas dos dois retângulos que foram acrescentados ao polígono. Veja a Figura 1.3.

Cabe lembrar que o perímetro de uma figura, que é obtida através da concatenação de outras, **não é igual** à soma dos perímetros das figuras originais. Isso ocorre pelo fato dos lados compartilhados deixarem, obrigatoriamente, de ser contabilizados no cálculo do perímetro da figura resultante. Veja o problema a seguir em que um mesmo conjunto de retângulos pode ser organizado para formar duas figuras com perímetros diferentes.

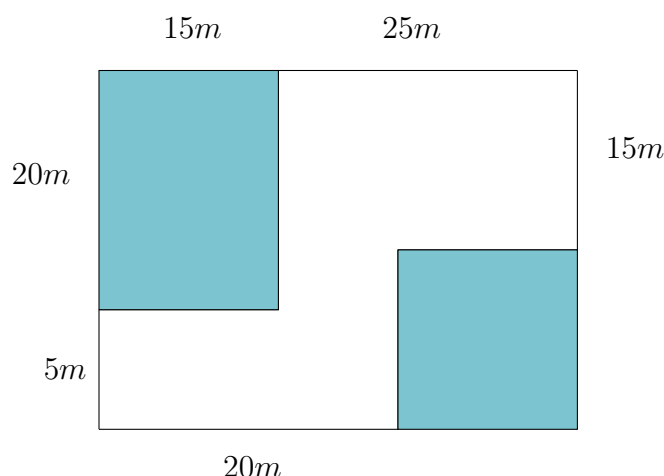


Figura 1.3: Completando um retângulo e subtraindo a área do que foi acrescentado.

**Problema 7** Oito retângulos idênticos foram utilizados para formar as duas seguintes figuras retangulares. O perímetro da primeira é 42 cm e o da segunda é 48 cm. Qual é o perímetro de cada um dos quatro retângulos idênticos?



Perímetro 42 cm



Perímetro 48 cm

**Solução.** Sejam  $x$  e  $y$  as dimensões dos quatro retângulos idênticos, sendo  $x$  a menor. As dimensões da primeira figura são  $y$  (a menor) e  $4x$  (a maior), de forma que seu perímetro vale  $8x + 2y$ . Assim,  $8x + 2y = 42$ . As dimensões da segunda figura são  $x$  (a menor) e  $4y$  (a maior), de forma que seu perímetro é  $2x + 8y$ . Assim  $2x + 8y = 48$ .

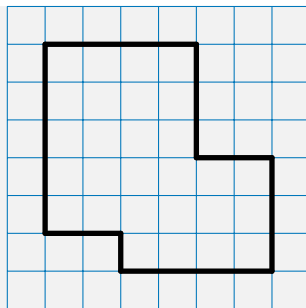
Somando-se as duas equações, temos que  $10x + 10y = 90$ . Dividindo ambos os lados por 5, chegamos a  $2x + 2y = 18$ , que é o perímetro dos quatro retângulos iguais. ■


**Obs**

Veja que utilizamos as incógnitas na resolução anterior apenas para facilitar a explicação, não tendo sido necessário resolver o sistema de equações. De fato, ao somarmos os perímetros das duas figuras, cada um dos quatro lados do retângulo original é somado 10 vezes. Assim, para calcularmos o perímetro deste retângulo basta dividir o resultado de  $48 + 42 = 90$  por 5, obtendo-se 18 cm.

Polígonos, cujos lados e vértices estão sobre as grades de um reticulado, podem ter seus perímetros e áreas calculados facilmente através de contagem manual. Veja o próximo problema.

**Problema 8 — CMF-2017.** Na malha quadriculada abaixo, a figura em destaque representa uma ciclovia. Um ciclista deu quatro voltas completas nessa pista, percorrendo um total de 288 metros. É correto afirmar que a área delimitada por essa pista, em metros quadrados, é igual a:

(a)  $243 \text{ m}^2$ .(b)  $252 \text{ m}^2$ .(c)  $279 \text{ m}^2$ .(d)  $2016 \text{ m}^2$ .(e)  $4032 \text{ m}^2$ .

 **Solução.** O ciclista deu 4 voltas e percorreu 288 metros. Logo, em cada volta ele percorreu  $\frac{288}{4} = 72$  metros. Contando diretamente na figura, observamos que, em cada volta, o ciclista passa por 24 lados de quadrados da malha. Assim, o lado de cada quadrado representa uma distância de  $\frac{72}{24} = 3$  metros. Logo, a área de cada quadrado corresponde a  $3^2 = 9 \text{ m}^2$ . Por fim, também contando diretamente na figura, vemos que o número de quadrados na região delimitada pela ciclovia é 28. Portanto, a área dessa região é  $28 \cdot 9 = 252 \text{ m}^2$ . ■



## 1.2 – Recorte e remonte de áreas

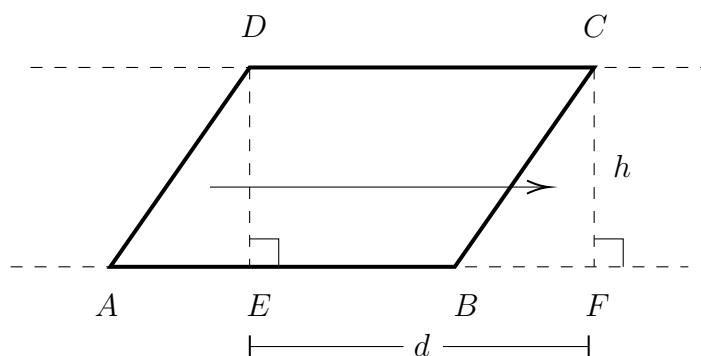
Além das figuras que podem ser particionadas em retângulos, também podemos encontrar as áreas de figuras simples através de estratégias do tipo “recorte e remonte”. Essas figuras são os paralelogramos, os triângulos e os trapézios.

**Definição 1.2.1** Um **paralelogramo** é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos.

Paralelogramos possuem diversas propriedades que podem ser demonstradas com o uso do conceito de *congruência de triângulos*. Como essa ferramenta só será formalmente desenvolvida no próximo módulo de Geometria, utilizaremos essas propriedades de forma intuitiva.

Considere um paralelogramo  $ABCD$ , ilustrado na figura a seguir. Obteremos, com auxílio desta figura, a fórmula para a área do paralelogramo. Para isso, sejam  $F$  e  $E$  as *projeções ortogonais* dos pontos  $C$  e  $D$ , respectivamente, sobre a reta que contém o lado  $AB$  — reta suporte de  $AB$ .

**Obs** Nas notações da figura abaixo, dizer que  $E$  é a **projeção ortogonal** de  $D$  sobre a reta  $AB$ , significa dizer que  $E$  pertence à reta suporte de  $AB$ , e que esta reta é perpendicular à reta suporte de  $DE$ , isto é, formam um ângulo de  $90^\circ$  uma com a outra.





Como  $CD$  e  $AB$  são paralelos, temos  $CF = DE$ . A medida comum dos segmentos  $CF$  e  $DE$  será denotada por  $h$ , sendo conhecida como a **altura** do paralelogramo  $ABCD$ , relativa ao lado  $AB$ . Nesse caso,  $AB$  é chamado de **base** relativa à altura  $h$ .

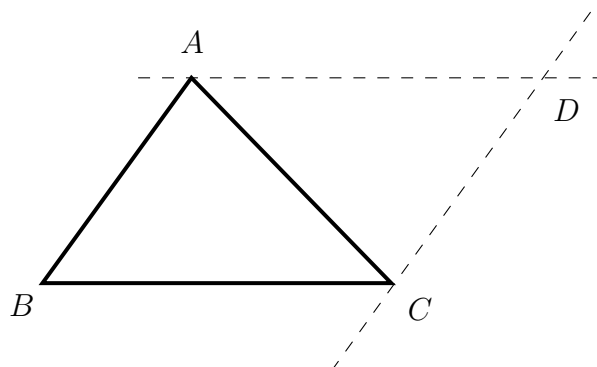
Observe que  $DEFC$  é um retângulo, logo, sua área é igual ao produto de suas dimensões. Como  $AB = CD = d$ , concluímos que a medida da área de  $DEFC$  é igual a  $d \times h$ .

Por outro lado, os triângulos  $ADE$  e  $BCF$  são *congruentes*, isto é, são “essencialmente iguais”, dizendo isso que podemos deslocar um deles no plano até superpô-lo ao outro, sem que haja “sobras ou faltas”. Assim, podemos “transportar” a área de  $ADE$  para a área de  $BCF$ , de forma que a medida da área do paralelogramo  $ABCD$  é igual à medida da área do retângulo  $DEFC$ . Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Obs

De agora em diante, utilizaremos colchetes para denotar a área de figuras planas. Por exemplo,  $[XYZ]$  denota a área do triângulo  $XYZ$  e  $[PQRS]$  denota a área do quadrilátero  $PQRS$ .

Agora, obteremos a fórmula para a área de um triângulo  $ABC$ , por meio de um raciocínio construtivo baseado na figura a seguir. Para isso, considere a reta  $r$ , paralela ao lado  $AB$  e passando por  $C$ , e a reta  $s$ , paralela ao lado  $BC$  e passando por  $A$ . Seja  $D$  o ponto de encontro dessas duas retas. Note que  $ABCD$  é um paralelogramo, pois, por construção, possui lados opostos paralelos. Além disso, os triângulos  $ABC$  e  $CDA$  são congruentes (porque?), logo, possuem áreas iguais.

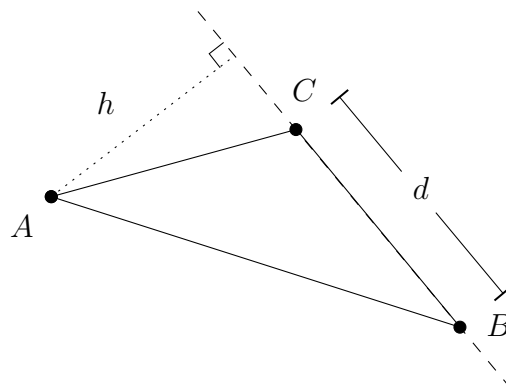


Portanto, a área do triângulo  $ABC$  é igual à metade da área do paralelogramo  $ABCD$ ; assim sendo, é igual à metade do produto do lado  $BC = d$  — que funciona como base do paralelogramo — pela altura  $h$ , que é a distância do vértice  $A$  até a reta  $BC$ . Em resumo,

$$[ABC] = \frac{d \times h}{2}.$$


Obs

Qualquer lado do triângulo pode ser considerado como base. A base sempre é relativa a uma altura, que, por sua vez, corresponde ao segmento que liga um vértice à projeção ortogonal deste vértice sobre a reta que contém o lado oposto. A altura pode, inclusive, estar fora do triângulo, conforme mostrado na figura a seguir:



Na figura anterior, temos um triângulo  $ABC$  e a altura relativa ao lado  $BC$ , a qual é exterior ao triângulo. Além disso, observe que a base  $BC$  não está “na horizontal”, quando dispomos a folha de papel na posição natural de leitura.

**Problema 9** No triângulo  $ABC$ , a medida do lado  $BC$  é 60 cm e a medida do lado  $AC$  é 50 cm. Além disso, a altura relativa do lado  $BC$  mede 25 cm. Calcule a medida da altura relativa ao lado  $AC$ .

 **Solução.** Considerando  $BC$  como base, temos que

$$[ABC] = \frac{60 \cdot 25}{2} = 750 \text{ cm}^2.$$

Por outro lado, considerando  $AC$  como base e chamando de  $h$  a altura correspondente, temos que

$$[ABC] = \frac{h \cdot 50}{2} = 750 \text{ cm}^2.$$

Assim,  $h = 30$  cm. ■

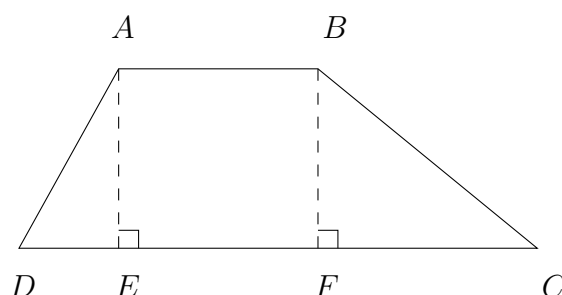


Observe que, em todo triângulo retângulo, os **catetos** — os dois menores lados — podem funcionar tanto como base quanto como altura. Mais ainda, se considerarmos um cateto como base, então o outro será a altura correspondente, e vice-versa.

Agora, vejamos como calcular as áreas de *trapézios*.

**Definição 1.2.2** Um **trapézio** é um quadrilátero que tem um par de lados opostos paralelos. Estes lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio, e a distância entre eles é chamada de **altura** do trapézio.

Para calcularmos a área do trapézio, multiplicamos sua altura pela média aritmética das medidas das bases. Podemos verificar essa fórmula através da sua decomposição ilustrada pela figura a seguir.



Seja  $ABCD$  um trapézio onde  $AB$  é a sua base menor e  $CD$  é a sua base maior. Sejam  $E$  e  $F$  as projeções ortogonais de  $A$  e  $B$  sobre a reta  $CD$ , respectivamente. Veja que

$$[ABCD] = [ADE] + [ABFE] + [BFC].$$

Sejam  $\overline{AE} = \overline{BF} = h$ ,  $\overline{DE} = x$ ,  $\overline{FC} = y$ ,  $\overline{AB} = \overline{EF} = b$  e  $\overline{CD} = a = x + b + y$ . Temos que

$$[ABCD] = \frac{xh}{2} + bh + \frac{hy}{2}.$$

Colocando o fator  $\frac{h}{2}$  em evidência, obtemos

$$[ABCD] = \frac{h}{2} (x + 2b + y) = \frac{h}{2} (a + b).$$

**Obs**

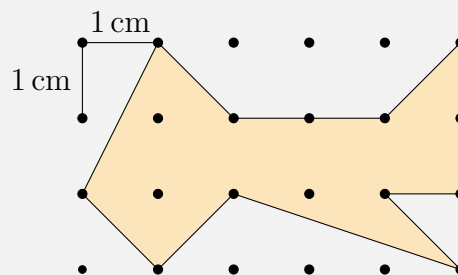
A dedução que fizemos acima, para a fórmula da área de um trapézio, não está completa, pois ela não funciona se  $\widehat{ADC} > 90^\circ$  ou  $\widehat{BCD} > 90^\circ$ . Contudo, tal dedução pode ser facilmente adaptada a esse caso, e lhe convidamos a fazer essa adaptação a título de exercício.

**Obs**

Um trapézio  $ABCD$  de bases  $AB$  e  $DC$  é **isósceles** quando  $AD = BC$ . O trapézio será chamado de **retângulo** quando um dos lados  $AD$  ou  $BC$  for perpendicular às bases.

Agora vamos avançar um pouco e encontrar a área de polígonos cujos os vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado. Aqui não exigiremos que os lados do polígono estejam sobre as retas do reticulado.

**Problema 10 — OBM.** No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância.

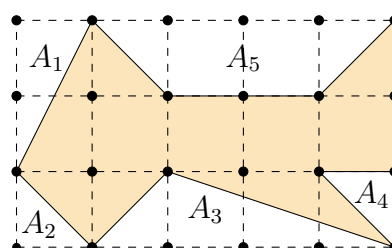



Qual é a área da região sombreada?

- (a)  $7 \text{ cm}^2$ .  
(b)  $8 \text{ cm}^2$ .

- (c)  $8,5 \text{ cm}^2$ .  
(d)  $9 \text{ cm}^2$ .

- (e)  $9,5 \text{ cm}^2$ .



 **Solução.** Vamos completar o retângulo que dá forma ao reticulado, calcular a área desse retângulo e calcular as áreas dos polígonos cuja soma representa a diferença entre a área sombreada e a área do retângulo. Depois disso, para calcular a área da região sombreada que foi pedida no problema, basta subtrair a soma das áreas dos polígonos da área do retângulo. A área do retângulo é igual a

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2.$$

Já a soma das áreas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , e  $A_5$  é igual a


$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &= 1 + 0,5 + 2 + 0,5 + 3 \\ &= 7 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Assim, a área sombreada é igual a

$$15 - 7 = 8 \text{ cm}^2.$$



Você pode assistir a resolução do Problema 10 no canal do Portal do Saber da OBMEP.

 Saiba mais

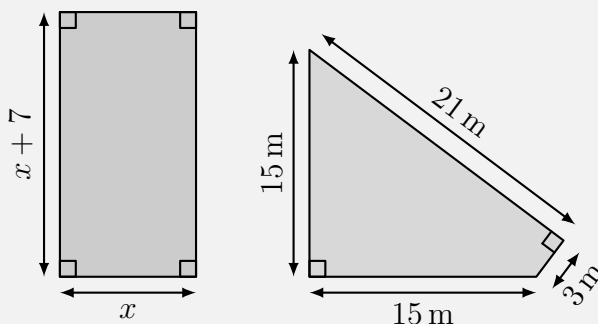



Finalizaremos essa sequência de exercícios com um problema do ENEM sobre áreas, que pode ser resolvido pela decomposição (partição, subdivisão) de uma figura em outras mais simples.

**Problema 11 — Enem 2016.** Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional, como se observa na Figura B, agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno de formato retangular, como mostrado na Figura A, cujo comprimento seja 7 m maior que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular tal que as medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

- (a) 7,5 e 14,5.
- (b) 9,0 e 16,0.
- (c) 9,3 e 16,3.
- (d) 10,0 e 17,0.
- (e) 13,5 e 20,5.



 **Solução.** Divida o quadrilátero da figura B em dois triângulos retângulos, da maneira óbvia. Somando as áreas desses dois triângulos, chegamos à área do quadrilátero:

$$\frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} = \frac{288}{2} = 144 \text{ m}^2.$$

A fim de calcular as medidas do terreno adequado ao filho mais novo, temos de encontrar o valor de  $x$  tal que

$$x(x + 7) = 144.$$

Analisando os valores dos itens, concluímos que a solução é  $x = 9$  e  $x + 7 = 16$ . ■

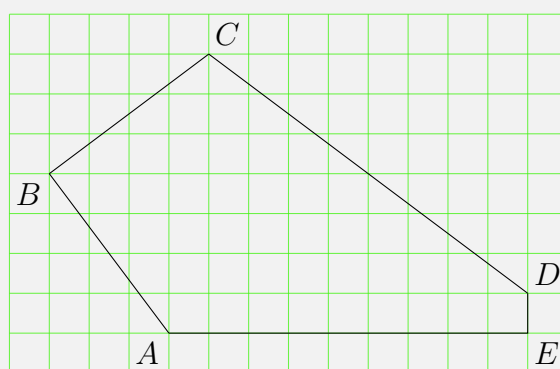
**Obs**

De maneira geral, em situações como essa, o procedimento-padrão seria resolver a equação quadrática  $x(x + 7) = 144$  para encontrar o valor de  $x$ . Porém, em um exame, pode-se utilizar a técnica da tentativa para ganhar tempo.

## 1.3 – Teorema de Pitágoras

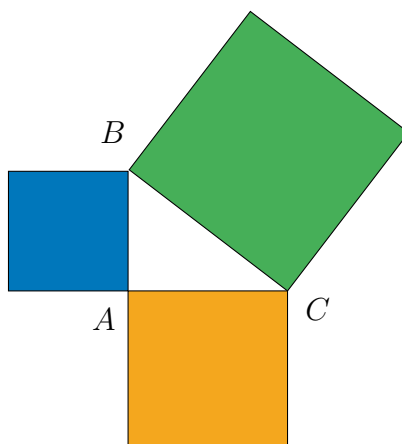
No Problema 10, nos deparamos com uma situação na qual calculamos a área de polígono cujos vértices estavam sobre uma malha quadriculada. Desse modo, é natural se questionar se *é possível calcular o perímetro de um polígono cujos vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado, mas que os lados não necessariamente estejam sobre as retas do reticulado?* Um exemplo de tal situação é apresentada no problema a seguir.

**Problema 12** O pentágono  $ABCDE$  a seguir possui seus vértices sobre uma reticulado formado por quadrados de lado 1 cm. Qual é o perímetro desse pentágono?



Para encontrar o perímetro de polígonos como esse, precisamos de um resultado muito importante na Matemática: O Teorema de Pitágoras.

**Teorema 1.1 — Pitágoras.** Se  $ABC$  é um triângulo retângulo, com o ângulo reto situado no vértice  $A$ , então a área do quadrado cujo lado é  $BC$  é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os dois outros lados do triângulo.




**Observação 1.2** Dizemos que um triângulo é **retângulo** se um dos seus ângulos internos é **reto**, isto é, mede  $90^\circ$ . Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, ou seja,  $180^\circ$ , a soma das medidas dos dois outros ângulos internos de um triângulo retângulo é  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Quando a soma de dois ângulos é igual a um ângulo reto, dizemos que esses ângulos são **complementares**.

**Observação 1.3** O lado maior de um triângulo retângulo é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados de **catetos**. O Teorema de Pitágoras afirma que, se o triângulo é retângulo, então a *soma das áreas dos quadrados dos catetos – quadrados construídos sobre os catetos – é igual à área do quadrado da hipotenusa – quadrado construído sobre a hipotenusa*. Se  $\widehat{ABC} = 90^\circ$ ,  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ , então as áreas desses quadrados valem  $a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2$ , sendo  $a^2$  a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Assim, o resultado geométrico do Teorema de Pitágoras pode ser escrito algebricamente da seguinte forma:

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (1.1)$$

É importante notar também que a **recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida**, ou seja, a identidade (1.1) entre as medidas dos lados de um triângulo implica que ele é retângulo (no ângulo oposto ao lado de medida  $a$ ).

Existem diversas demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras. Por enquanto, iremos apenas aplicar o resultado na solução de alguns problemas, a começar pelo Problema 12.

 **Solução.** Em primeiro lugar, veja que é fácil determinar o comprimento dos lados  $AE$  e  $DE$ , pois eles estão sobre as grades da malha. Temos que  $\overline{AE} = 9$  cm e que  $\overline{DE} = 1$  cm. Para determinar os comprimentos dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  construa três triângulos retângulos, todos eles com catetos sobre a grade e cada um deles tendo como hipotenusa um dos lados  $AB$ ,  $BC$  ou  $CD$ . Para tanto, considere os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  da figura.

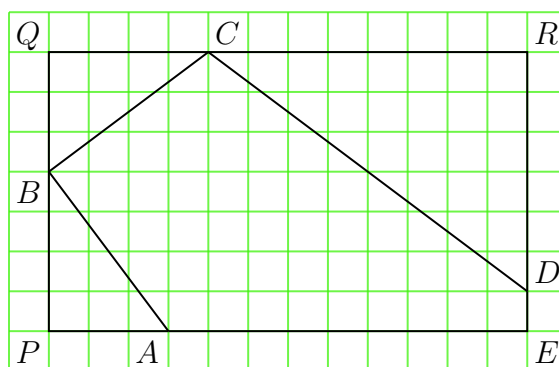
Agora, pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos  $PAB$ ,  $QBC$  e  $RDC$ , temos que

$$\overline{AB}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PA}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ e}$$

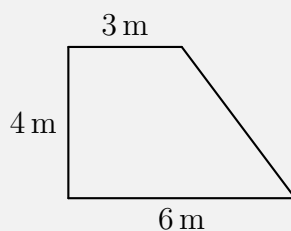
$$\overline{CD}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{RD}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100.$$

Portanto,  $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$  e  $\overline{CD} = 10$ . Consequentemente, o perímetro do pentágono é  $5 + 5 + 10 + 1 + 9 = 30$  cm. ■



Note ainda que, a aplicação do Teorema de Pitágoras, também pode ser feita em situações nas quais não há a presença de uma malha quadriculada. Nesses casos, podemos construir triângulos retângulos com o auxílio de retas perpendiculares entre si.

**Problema 13** Calcule o perímetro do seguinte terreno em formato de trapézio retângulo.



**Solução.** Em primeiro lugar, vamos denotar os vértices da figura por  $J$ ,  $K$ ,  $L$  e  $I$ . Para calcular o perímetro do terreno, em formato de trapézio retângulo, é preciso calcular a medida do segmento  $KL$  que aparece destacado na Figura 1.4. Fazemos isso traçando o segmento  $MK$ , perpendicular à base do trapézio, o qual divide o trapézio no retângulo  $IJKM$  e no triângulo retângulo  $KLM$ , conforme a Figura 1.4.

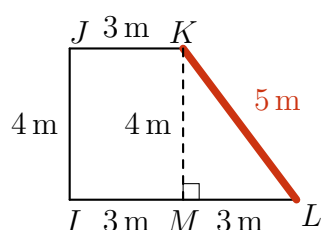


Figura 1.4: cálculo dos comprimento do lado oblíquo do trapézio retângulo.

Utilizando novamente o fato de que os lados opostos de um retângulo têm medidas iguais, obtemos  $\overline{MK} = \overline{IJ} = 4$  m e  $\overline{MI} = \overline{JK} = 3$  m. Logo,  $\overline{ML} = \overline{IL} - \overline{MI} = 6$  m  $-$   $3$  m  $=$   $3$  m. Por fim, uma vez que o triângulo  $KLM$  é retângulo em  $M$ , podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa  $KL$ :

$$\overline{KL}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{LM}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

isto é,  $\overline{KL} = 5$  m. Portanto, o perímetro do terreno em forma de trapézio retângulo é igual a

$$4 + 3 + 5 + 6 = 18 \text{ metros.}$$

■

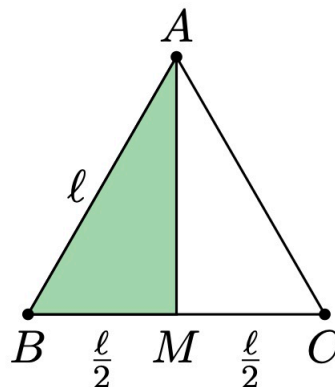
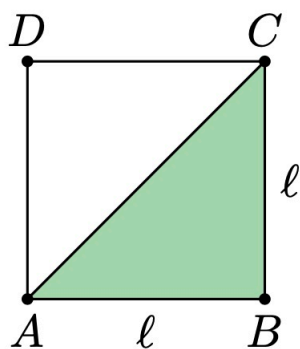
Duas consequências importantes do Teorema de Pitágoras são enunciadas nos problemas a seguir.

**Problema 14** Mostre que a diagonal de um quadrado de lado  $\ell$  tem medida  $\ell\sqrt{2}$ .

**Prova.** Considere o lado esquerdo da Figura 1.3. Se  $ABCD$  é um quadrado de lado  $\ell$ , então o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $B$  e possui catetos de medida  $\ell$ . Assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2, \text{ ou seja, } AC = \ell\sqrt{2}.$$

■



**Problema 15** Mostre que as alturas de um triângulo equilátero de lado  $\ell$  têm medidas iguais a  $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ .

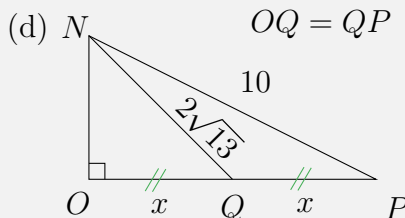
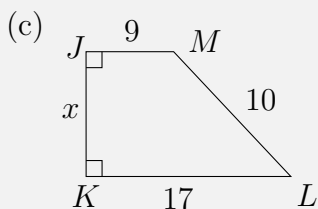
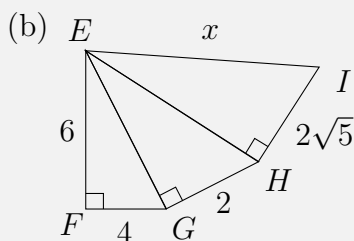
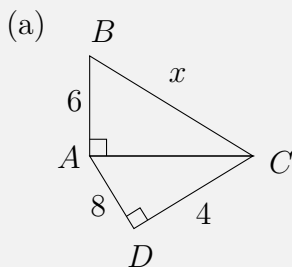
**Prova.** Considere o lado direito da Figura 1.3. Seja  $ABC$  um triângulo equilátero de lado  $\ell$ . Sendo  $M$  o ponto médio do lado  $BC$ , já sabemos que  $AM$  também é altura de  $ABC$ . Portanto, o triângulo  $ABM$  é retângulo em  $M$ , possui um cateto de medida  $\frac{\ell}{2}$  e uma hipotenusa de medida  $\ell$ . Sendo  $AM = h$ , segue do Teorema de Pitágoras que

$$\ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2. \text{ Daí, } h^2 = \frac{3\ell^2}{4}, \text{ ou seja, } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

■

A seguir, mais situações que exploram o Teorema de Pitágoras fora da malha quadriculada.

**Problema 16** Determine o valor de  $x$  nas seguintes figuras.



**Solução.**

- (a) Usando Pitágoras no  $\triangle ACD$ , temos  $\overline{AC}^2 = 4^2 + 8^2 = 80$ . Usando Pitágoras no  $\triangle ABC$ , temos  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 36 + 80 = 116$ . Assim,  $x = \overline{BC} = \sqrt{116}$ .
- (b) No  $\triangle EFG$ , temos  $\overline{EG}^2 = 6^2 + 4^2 = 52$ . No  $\triangle EGH$ , temos  $\overline{EH}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GH}^2 = 52 + 4 = 56$ . No  $\triangle EHI$ , temos  $\overline{EI}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HI}^2 = 56 + 20 = 76$ . Logo,  $x = \overline{EI} = \sqrt{76}$ .



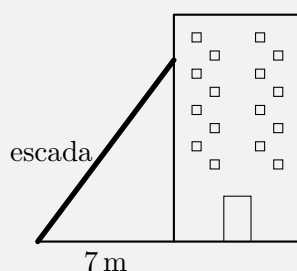
- (c) Seja  $P$  o pé da perpendicular de  $M$  até  $KL$  (faça uma figura para acompanhar). Note que o quadrilátero  $KJMP$  tem todos os ângulos retos, logo é um retângulo. Como todo retângulo é paralelogramo, os seus lados opostos são iguais, logo  $\overline{KP} = \overline{JM} = 9$ . Também,  $MPL$  é um triângulo retângulo em  $P$ , com  $\overline{PL} = \overline{KL} - \overline{KP} = \overline{KL} - \overline{JM} = 17 - 9 = 8$ . Usando Pitágoras no  $\triangle MPL$ , temos  $\overline{MP}^2 + \overline{PL}^2 = \overline{ML}^2$ , ou seja,  $\overline{MP}^2 + 8^2 = 10^2$ . Logo,  $\overline{MP}^2 = 36$  e, daí,  $\overline{MP} = 6$ . Por fim, novamente pelo fato de  $JMPK$  ser um retângulo, temos  $x = \overline{JK} = \overline{MP} = 6$ .
- (d) Sejam  $\overline{OQ} = \overline{QP} = x$  e  $\overline{NO} = y$ . Usando Pitágoras nos triângulos  $NOQ$  e  $NOP$ , obtemos o sistema de equações


$$\begin{cases} y^2 + x^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52, \\ y^2 + 4x^2 = 10^2 = 100. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, vem que  $3x^2 = 100 - 52 = 48$ , logo  $x^2 = 48 \div 3 = 16$ . Portanto,  $x = 4$ .



**Problema 17 — OBMEP 2005.** O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como mostrado na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo, ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?



 **Solução.** Em primeiro lugar, vamos calcular a altura do topo da escada antes dela escorregar. Denotando esse valor por  $x$  e utilizando o Teorema de Pitágoras, temos

$$25^2 = 7^2 + x^2.$$

Passando o termo  $7^2$  para o lado esquerdo da equação e utilizando a diferença de quadrados, obtemos

$$x^2 = 25^2 - 7^2 = (25 - 7)(25 + 7) = 18 \cdot 32 = 9 \cdot 64.$$

Portanto,  $x = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$ . Ao descer quatro metros, a altura do topo da escada passará ser igual a  $24 - 4 = 20$  metros. Sendo  $y$  a nova distância do pé da escada ao prédio, utilizando mais uma vez Pitágoras, obtemos

$$25^2 = 20^2 + y^2.$$

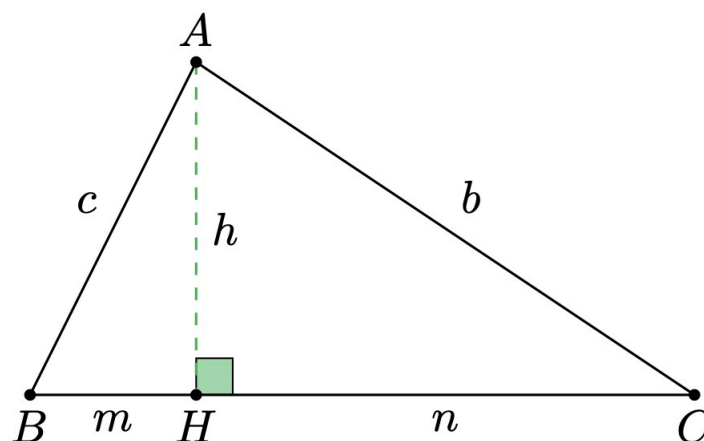
Passando o termo  $20^2$  para o lado esquerdo da equação e utilizando a diferença de quadrados, obtemos

$$y^2 = 25^2 - 20^2 = (25 - 20)(25 + 20) = 5 \cdot 45 = 25 \cdot 9.$$

Portanto,  $y = 5 \cdot 3 = 15$ . Logo, o deslocamento horizontal foi de  $15 - 7 = 8$  metros.



Antes de partirmos para o próximo problema, iremos apresentar algumas relações que existem entre a altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Para tanto, consideraremos um triângulo retângulo  $ABC$ , com hipotenusa  $BC$ , desenhado na próxima figura. Sendo  $H$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  a  $BC$ , nosso objetivo nesta seção é calcular os comprimentos de  $AH$ ,  $BH$  e  $CH$  em função das medidas dos lados do  $\triangle ABC$ .



Por simplicidade de notação, sejam  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AH} = h$ ,  $\overline{BH} = m$  e  $\overline{CH} = n$ . Note que há duas formas de calcularmos a área do  $\triangle ABC$ : a primeira é considerando  $BC$  como base e a segunda é considerando  $AB$  como base. Comparando as fórmulas geradas por essas duas possibilidades, obtemos

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Simplificando as frações e isolando o termo  $h$ , chegamos a

$$h = \frac{b \cdot c}{a}. \quad (1.2)$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $AHB$ , temos que  $m^2 + h^2 = c^2$ . Substituindo o valor de  $h$  encontrado na equação (1.2) e isolando o termo  $m^2$ , obtemos

$$m^2 = c^2 - h^2 = c^2 - \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = c^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{c^4}{a^2}.$$

Note que, na última igualdade, utilizamos o Teorema de Pitágoras em  $\triangle ABC$  para obter  $a^2 - b^2 = c^2$ .

Extraindo raízes quadradas em ambos os lados da igualdade  $m^2 = \frac{c^4}{a^2}$ , obtemos

$$m = \frac{c^2}{a}. \quad (1.3)$$

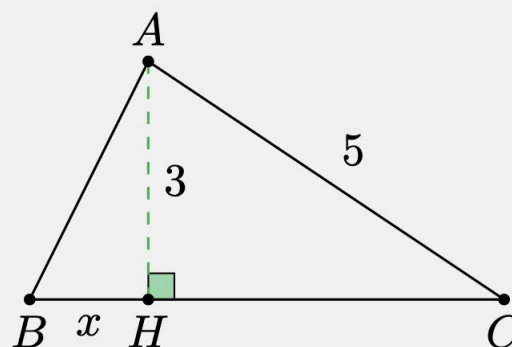
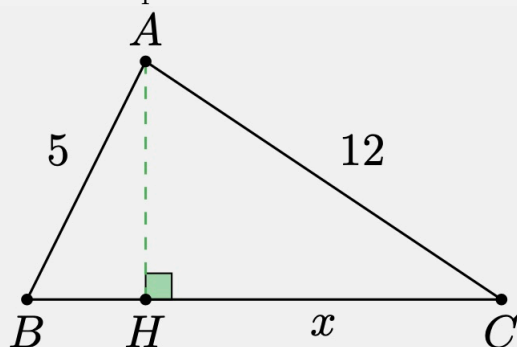
De modo análogo, o Teorema de Pitágoras aplicado ao  $\triangle AHC$  dá

$$n = \frac{b^2}{a}. \quad (1.4)$$

As fórmulas (1.2), (1.3) e (1.4) são conhecidas como as *relações métricas do triângulo retângulo*. Elas também podem ser deduzidas utilizando semelhança de triângulos. Optamos por aplicar diretamente o conceito de área e o Teorema de Pitágoras para apresentar uma perspectiva diferente da maioria dos livros didáticos.

A seguir, resolveremos um exercício simples em que podemos empregar as relações métricas do triângulo retângulo de maneira quase imediata.

**Problema 18** Nas seguintes figuras temos o desenho de um triângulo retângulo e da altura relativa à hipotenusa. Calcule o valor  $x$ .



 **Solução.**

- (a) Usando Pitágoras no triângulo  $ABC$ , temos que  $\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ . Logo,  $\overline{BC} = 13$ . Agora, usando a relação (1.4), temos  $x = \frac{12^2}{13} = \frac{144}{13}$ .
- (b) Usando Pitágoras no triângulo  $AHC$ , temos  $\overline{HC}^2 + 3^2 = 5^2$ . Logo,  $\overline{HC}^2 = 25 - 9 = 16$ . Assim,  $\overline{HC} = 4$ . Seja  $\overline{BC} = a$ . Pela relação (1.4),  $\overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}$ . Assim,  $4 = \frac{25}{a}$ . Portanto,  $a = \frac{25}{4}$ . Por fim,  $x + \overline{HC} = \overline{BC}$ . Assim,  $x = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$ .

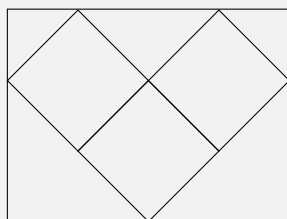
■


## 1.4 – Construindo Malhas



Na Sequência de Problemas anterior, percebemos que a utilização de uma grade quadriculada facilita os cálculos dos perímetros e áreas de figuras planas. Porém, nem todos os enunciados dos problemas de Geometria trazem uma figura desenhada sobre uma grade. Entretanto, isso não significa que não podemos construir nossa própria grade como forma de facilitarmos a solução. Veja os seguintes problemas.

**Problema 19 — OBM.** Na figura abaixo, temos um retângulo circunscrito a três quadrados, cada um com  $1 \text{ cm}^2$  de área. Qual é a área do retângulo?



 **Solução.** Divida o retângulo em 12 quadrados menores através de cortes paralelos às diagonais dos três quadrados originais, formando uma grade quadriculada, conforme a seguinte ilustração.

