Conjunto dos números: naturais, inteiros, racionais e reais

Até o momento, falou-se sobre conjuntos de um modo geral. Na sequência, serão abordados os conjuntos numéricos.

Conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais tem por símbolo $\mathbb{N}$ e é formado pelos elementos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

Esses números surgiram "naturalmente" pela necessidade de se contar objetos ou seres já nas comunidades primitivas na Antiguidade, por volta de 4.000 anos antes de Cristo. No conjunto dos números naturais, dado um elemento n qualquer, diz-se que o antecessor de n é o elemento n - 1 e o sucessor de n é o elemento n + 1. Logo, 2 é antecessor de 3 e 4 é o sucessor de 3.

Como operações fundamentais para os números naturais, têm-se a adição e a multiplicação. Dados a, b e c $\in \mathbb{N}$, pode-se apresentar as seguintes propriedades:

1. Associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Comutativa da adição: $a + b = b + a$
3. Elemento neutro da adição: $a + 0 = a$
4. Associativa da multiplicação: $(ab)c = a(bc)$
5. Comutativa da multiplicação: $ab = ba$
6. Elemento neutro da multiplicação: $a.1 = a$
7. Distributiva da multiplicação relativamente à adição: $a(b + c) = ab + ac$

No conjunto dos números naturais, as operações de adição e multiplicação são fechadas, ou seja, são possíveis com quaisquer que sejam os números naturais. Porém, o mesmo não é sempre verdade com as operações da subtração e divisão. Por exemplo, admitindo que $a = 3$ e $b = 7$, então $a - b \notin \mathbb{N}$ e a b $\notin \mathbb{N}$. Os conjuntos numéricos a serem apresentados posteriormente são ampliações de $\mathbb{N}^*$.

Observação: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros tem por símbolo $\mathbb{Z}$ e é formado pelos elementos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$$

Este conjunto possui três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\} = \mathbb{N}, \text{ ou seja, } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, -5 \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$$

Os números negativos apareceram, historicamente, em registros contábeis, mas também como símbolo indicativo de faltas ou dívidas.

Para as operações em $\mathbb{Z}$, tem-se também as sete propriedades da adição e da multiplicação explanadas no tópico anterior para o conjunto $\mathbb{N}$. Além delas, pode-se acrescentar a seguinte propriedade:

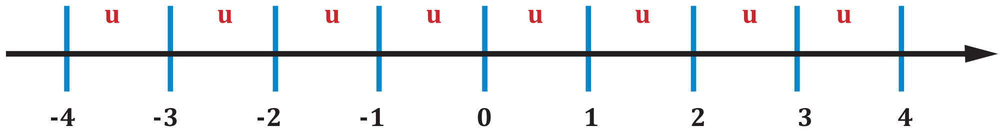
8. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$, tal que $a + (-a) = 0$

Os números inteiros podem ser representados sobre uma reta (Figura 1.9), onde em primeiro lugar marcamos o número 0 (zero). Todos os números à direita do zero são positivos (conjunto $\mathbb{Z}_+$) e aqueles à sua esquerda são os números negativos (conjunto $\mathbb{Z}_-$).

Para cada inteiro positivo n, a partir de 0, marcamos um segmento de medida nu no sentido positivo cuja extremidade representará n, ao passo que u representa uma unidade de medida. Marca-se também de medida nu no sentido negativo cuja extremidade representará o inteiro $-n$. Assim, cada número inteiro corresponderá a um ponto da reta. Portanto, o número -4 corresponderá, partindo-se da origem, 4 unidades para a esquerda, ao passo que o número 3 corresponderá ao ponto partindo-se da origem três unidades para a direita.

Para efetuar uma subtração de 2 – 4, basta caminhar, primeiramente, na reta duas unidades para a direita a partir da origem, e na sequência, caminhar a partir deste ponto, de quatro unidades para a esquerda, resultando em – 2.

Figura 1.9: Reta representando o conjunto dos números inteiros.



No conjunto dos números inteiros, as operações de adição e multiplicação são fechadas, assim como nos naturais, além da operação da subtração. Porém, o mesmo não é sempre verdade com a operação da divisão. Por exemplo, admitindo que a = 3 e b = -7, então $a \div b \notin \mathbb{Z}$.

Define-se como valor absoluto |x| de um número inteiro x como sendo o comprimento do segmento nu partindo da origem 0. Desse modo |+2|=2; |-2|=2; |+4|=4; |-6|=6.

Conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números inteiros, onde são acrescentadas as frações positivas e negativas, de tal forma que:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* e\, q \neq 0 \right\}$$

Onde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Para operações com números racionais, vale a pena lembrar as seguintes definições, largamente utilizadas na matemática (a, b, c e d são números inteiros):

- Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

- Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

- Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Visto isso, podem-se enumerar as seguintes operações com números racionais:

1) Associativa da adição: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

2) Comutativa da adição $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

3) Elemento neutro da adição $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

4) $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$

5) Associativa da multiplicação: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

6) Comutativa da multiplicação: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

7) Elemento neutro da multiplicação: $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$

8) Distributiva da multiplicação relativamente à adição: $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$

9) Quociente: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$

Ao dividirmos um número racional do tipo $\frac{a}{b}$ pode-se deparar com três tipos de situação: essa razão pode ser um número inteiro, um número decimal com uma quantidade finita de algarismos ou um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos, como mostra o exemplo seguinte cada situação respectivamente.

Exemplos:

$$\frac{6}{2}=3; \frac{1}{5}=0,2; \frac{1}{3}=0,3333\ldots$$

Para o terceiro caso, observa-se que os algarismos se repetem periodicamente, o que significa dizer que se trata de uma dízima periódica.

Exemplos:

$\frac{2}{3}=0,6666\ldots$ (dízima periódica de período 6)

$\frac{2}{7}=0,285714285714\ldots$ (dízima periódica de período 285714)

$\frac{26}{33}=0,787878\ldots$ (dízima periódica de período 78)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o valor da expressão numérica:

$$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{10}}$$

Resposta:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{2\cdot 3}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{4-1}{10}=\frac{3}{10}$$

Logo:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{10}}=\frac{7}{6}\cdot\frac{10}{3}=\frac{70}{18}=\frac{35}{9}$$

2. Determine as seguintes dízimas periódicas na forma de fração:

a)0,777... b)0,262626... c)2,7777... d)7,545454... e)2,944444...

Resposta:
a) Faça x = 0,7777...

$$10x = 7{,}7777...$$
$$10x = 7 + 0{,}7777...$$
$$10x = 7 + x$$

Logo, 9x = 7 e $x=\frac{7}{9}$

b) Nesse caso, faça x = 0,262626... Como o período é 26 (duas casas decimais), tem-se:

$$100x = 26{,}262626...$$
$$100x = 26 + 0{,}262626...$$
$$100x = 26 + x$$

Logo, 99x = 74 e $x=\frac{74}{99}$

c) Inicialmente, tem-se que 2,7777... = 2 + 0,7777..., logo x = 0,7777...
Do primeiro exercício $x=\frac{7}{9}$ portanto $2 + 0{,}7777... = 2+\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$

d) Mais uma vez, tem-se que 7,545454... = 7 + 0,545454..., logo x = 0,545454... O período é 54 (duas casas decimais). O procedimento de resolução é, portanto, idêntico ao do segundo exercício, então $x=\frac{54}{99}$ e como resultado tem-se

$$7 + x = 7 + \frac{54}{99} = x = \frac{747}{99}$$

e) Nesse caso x = 2,94444... O período aqui é 4 (número que se repete infinitas vezes), logo:

$$10x = 29{,}4444...$$
$$10x = 29 + 0{,}4444...$$
$$10x = 29 + \frac{4}{9}$$
$$10x = \frac{265}{9}$$
$$x = \frac{265}{90}$$

21

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais: $\frac{14}{15}, \frac{10}{11}, \frac{17}{18}, 1, \frac{46}{47}$ e $\frac{3}{4}$

2. Represente sobre uma reta orientada os seguintes números racionais: $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ e 1.

3. Calcule o valor de: $0{,}888\ldots + \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{7}-\frac{1}{13}}$

4. Coloque na forma de fração irredutível os seguintes números racionais:

a) 0,5　　b) 0,555...　　c) 0,43　　d) 0,43434343...　　e) 65,3

f) 65,323423423...

Conjunto dos números irracionais

Um número irracional é um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos que não são periódicos, como por exemplo:

$$0,987654321...$$

$$5,101001000...$$

$$98,123987...$$

Pode-se dizer também que um número irracional é um número que representa o comprimento de um segmento de reta que é incomensurável com relação a qualquer outro segmento de reta.

Exemplos clássicos de números irracionais na matemática são:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$

Conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais é uma extensão do conjunto dos números racionais, onde se tem a união dos números racionais com os irracionais, portanto é formado por todos os números com representação decimal, periódico ou não, de tal forma que:

$\mathbb{R}$= {x | x é um número racional ou x é um número irracional}

Onde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

As operações em $\mathbb{R}$ são as mesmas para o conjunto $\mathbb{Q}$.

Já vimos que os números inteiros podem ser representados em uma reta e são pontos na mesma. Analogamente, os números racionais que não são inteiros são representados da mesma maneira como pontos sobre a reta.

Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, pois ainda devemos representar os números irracionais. Quando a reta representa todos esses números, chamamos de reta real ou numérica, onde, quando se trata de números reais, a representação é feita na forma de intervalos.

Um intervalo fechado da reta é qualquer subconjunto da reta do tipo:

$$[a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Um intervalo aberto da reta é um subconjunto da reta da seguinte forma:

$$]a, b[=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Tem-se também o intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita), representado da seguinte maneira:

$$[a, b[=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

E ainda o intervalo fechado à direita (e aberto à esquerda) do tipo:

$$]a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Tem-se ainda as condições de infinito pela esquerda e pela direita:

$$]-a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid -a < x \leq a\}$$

$$]b, +a]=\{x \in \mathbb{R} \mid b < x < +\infty\}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os seguintes subconjuntos da reta:

a) $]2,5] \cap [4,6]$

b) $]-3,4] \cup [1,\infty[$

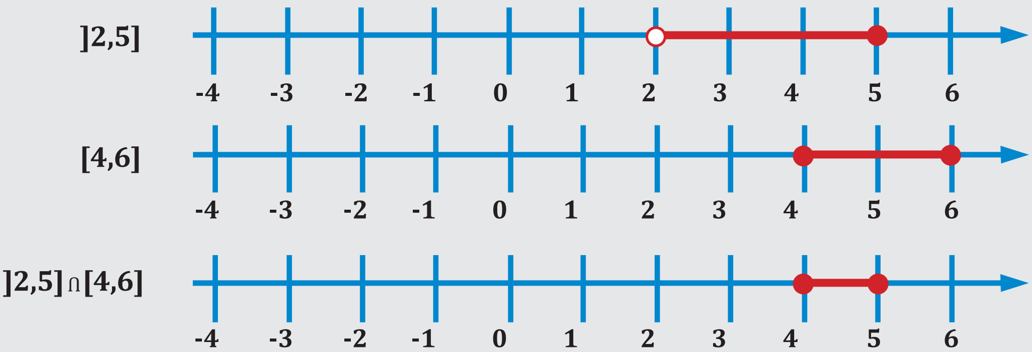
Resposta:

a) Sabe-se que $]2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$ e $[4,6] = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x \leq 6\}$

A interseção de dois intervalos é o conjunto de todos os números que estão simultaneamente em ambos os conjuntos, e é dado por

$$]2, 5] \cap [4, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$$

Pode-se representar também graficamente do seguinte modo:

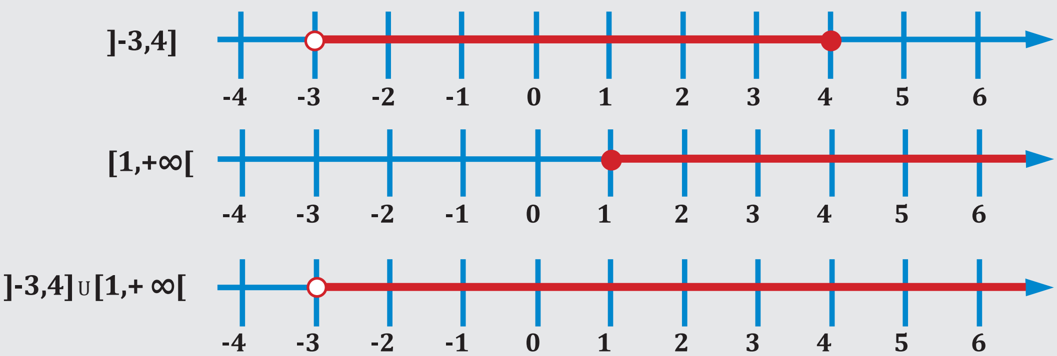


b) Sabe-se que $]-3, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 4\}$ e $[1, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

A união de dois intervalos é o conjunto dos números que pertencem a um ou ao outro conjunto, dado por

$$]-3,4] \cup [1,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$$

Pode-se representar também graficamente do seguinte modo:



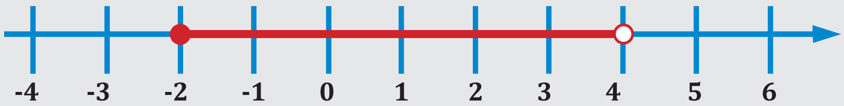
2. Dados os intervalos reais A = [-2, 4[, B =]-4, 4] e C =]-3, 1[, represente graficamente:

a) (A ∪ C) ∪ B

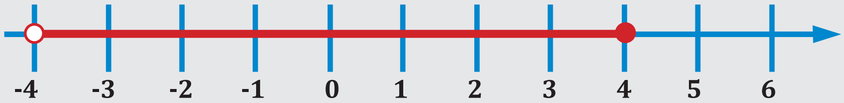
d) (B ∩ A) ∩ C

Resposta
Em primeiro lugar, determinam-se os três conjuntos A, B e C, onde:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 4\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$
Os conjuntos A, B e C são representados na reta real como:

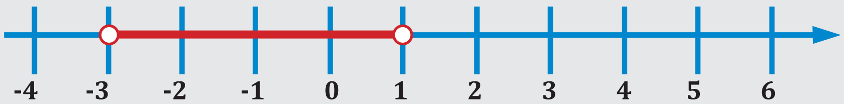
A= [-2,4[



B =]-4, 4]

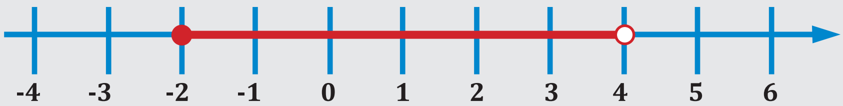


C =]-3, 1[

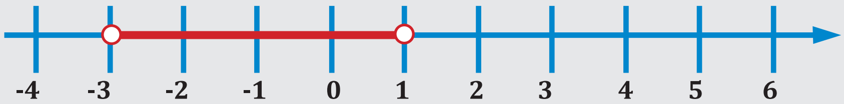


a) (A ∪ C) ∪ B
Inicialmente, obtem-se o conjunto (A ∪ C):

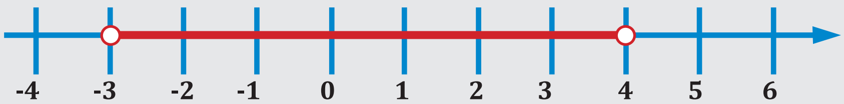
A= [-2,4[



C=]-3, 1]

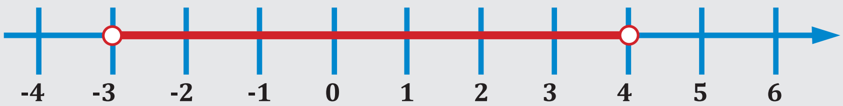


A U C

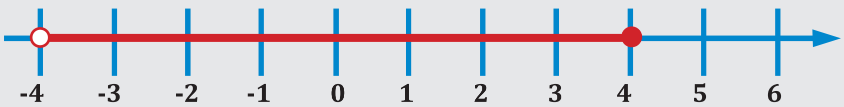


Na sequência, (A ∪ C) ∪ B:

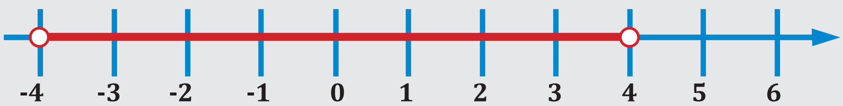
A U C =]-3, 4[



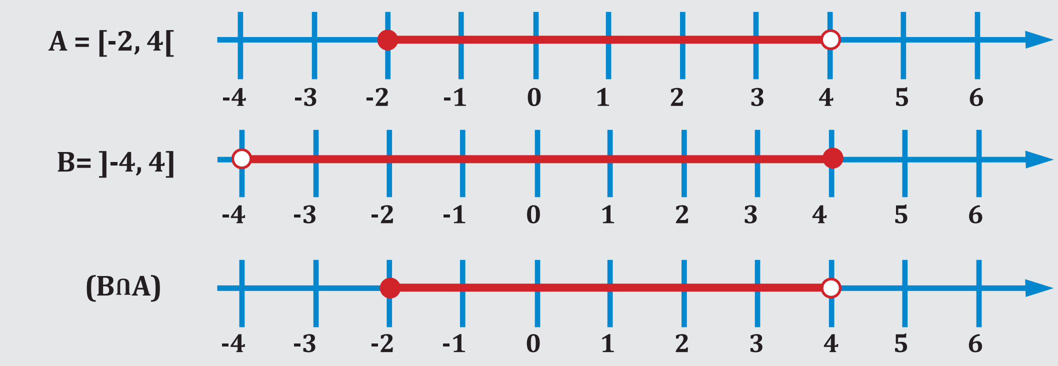
B=]-4, 4]



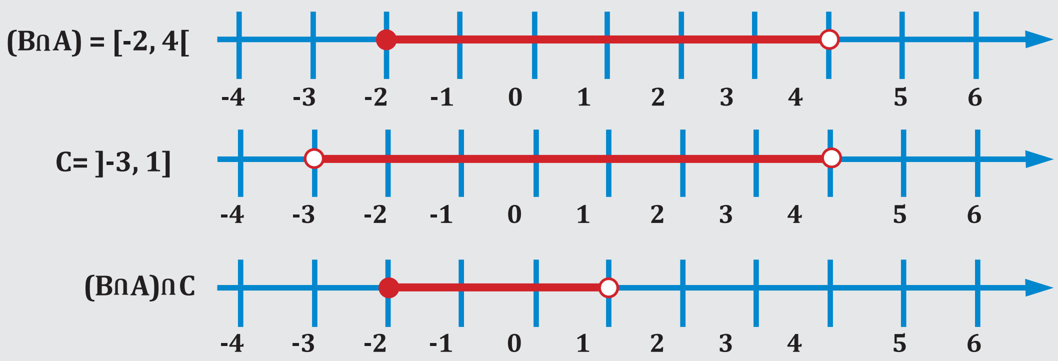
(A U C) U B =]-4, 4[



b) (B ∪ A) ∩ C
Da mesma forma que no item anterior, inicialmente obtem-se o conjunto (B ∩ A):



Nota-se que o elemento 4 está aberto em (B ∩ A), pois tal elemento faz parte do conjunto B (intervalo fechado), mas não faz parte do conjunto A (intervalo aberto), portanto com a interseção, o elemento 4 não pertencerá ao conjunto (B ∩ A). Além do mais, (B ∩ A) = A.
Na sequência, (B ∩ A) ∩ C:



EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine os seguintes subconjuntos da reta:

a)]2, 5[∩ [4, 6]   b)]-3, 4] ∪ [1, ∞[

2. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$, calcule A ∪ B.

3. Sejam A =]-∞, 3] e B =]0, +∞] intervalos de números reais. Determine B ∩ A.

4. Determine, para os conjuntos a seguir:

a) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ b) $(\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$ c) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q})$

RESUMO:

Nesta unidade, revisou-se a noção intuitiva de conjuntos, tipos de conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos. A Figura 1.10 mostra uma representação esquemática dos conjuntos numéricos.

Figura 1.10: Representação esquemática dos conjuntos numéricos.

Onde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$