COMO CRESCIMENTO E DESIGUALDADE AFETAM A POBREZA?

Rodrigo O. Orair e Rodolfo Hoffmann[1]

RESUMO. Utilizando regressões com as elasticidades teóricas das medidas de pobreza, concluímos que os modelos que utilizaram as elasticidades em relação ao L de Theil pelo Método Log-normal foram capazes de explicar razoavelmente bem as mudanças observadas no índice de insuficiência de renda e na medida de Foster, Greer e Thorbecke (FGT) com $\alpha = 2$ nas Unidades da Federação no Brasil (UF) de 1992 a 2004, verificando-se que esse modelo mostra desempenho significativamente melhor do que os demais. Argumentamos que a aplicação empírica das estimativas das elasticidades-desigualdade da classe de medidas de FGT pelo Método Log-normal, cuja expressão geral para $\alpha > 1$ foi deduzida neste trabalho, é mais adequada do que a utilização das elasticidades-desigualdade derivadas por Kakwani (1990) e amplamente difundidas na literatura. Apresentamos e analisamos os valores das elasticidades da medida de FGT com $\alpha = 2$ em relação ao rendimento médio e ao L de Theil pelo Método Log-normal para as UF no ano de 2004. Verificamos que a medida de pobreza é elástica em relação ao rendimento médio e em relação à desigualdade em todas UF, muito embora os efeitos relativos do crescimento na média e da redução na desigualdade sejam consideravelmente distintos entre as UF, sendo menores nos estados de mais alta desigualdade e baixo rendimento médio. Com base nos resultados, definimos algumas diretrizes para uma estratégia de combate à pobreza no Brasil argumentando pela necessidade da combinação de políticas de crescimento e redistributivas associadas a uma política regionalizada de combate à pobreza.

Palavras-chave: Pobreza, elasticidade, distribuição log-normal.

ABSTRACT. Fitting regressions with the theoretical elasticities of poverty measures, the paper shows that the models that used the elasticities with respect to the Theil's L index computed by the Log-normal Method were able to explain reasonably well the observed changes in the poverty gap index and in the Foster, Greer and Thorbecke measure (FGT) with $\alpha = 2$ for the Brazilian Federation Units from 1992 to 2004, verifying that the performance of this model is significantly better than the others. It is shown that the empirical application of the inequality elasticities for the class of FGT measures under the Lognormal Method, whose general expression for $\alpha > 1$ is derived in this paper, is more adequate than the utilization of the inequality elasticities derived by Kakwani (1990) and commonly used in the literature. This paper presents an analysis of the values of the elasticities for the FGT measure with $\alpha = 2$ in relation to the mean income and to the Theil's L index by the Log-normal method for the Brazilian Federation Units in 2004. It is shown that the poverty measure is elastic with respect to the mean income and to the inequality in each Federation Unit, but the values of the elasticities differ substantially among Federation Units, being lower in the states with high inequality and low mean income. Based on the results, policies that might be implemented to reduce poverty in Brazil are discussed, pointing out the importance of combining growth and redistributive policies, taking into account the regional differences.

Key words: Poverty, elasticity, lognormal distribution.

[1] Mestrando do curso de Teoria Econômica do Instituto de Economia da UNICAMP e Professor do Instituto de Economia da UNICAMP, respectivamente.

1 Introdução

Neste trabalho objetivamos explorar como o crescimento econômico, aqui entendido como a taxa de crescimento do rendimento médio da população, e as mudanças na desigualdade afetam as medidas de pobreza. Partimos do princípio de que a medida de pobreza, a renda média e a desigualdade são aspectos inter-relacionados de uma dada distribuição de renda. Portanto, para se compreender os determinantes das mudanças nas medidas de pobreza, devemos considerar não apenas as propriedades da distribuição de renda inicial (nível prévio da renda média e da desigualdade na distribuição dos rendimentos), como também avaliar separadamente os impactos das variações no rendimento médio e das mudanças na desigualdade da distribuição de rendimentos.

O estudo de Kakwani (1990) introduz as fórmulas das elasticidades para uma série de medidas de pobreza em relação ao rendimento médio e ao índice de Gini, esta última derivada a partir do pressuposto de que, sendo λ a mudança relativa no índice de Gini, e sendo p e $L(p)$ as coordenadas da curva de Lorenz inicial, a mudança da ordenada é $\Delta L(p) = -\lambda\,[p - L(p)]$. Isso significa que um crescimento de $100\lambda\%$ no índice de Gini é obtido aumentando na mesma proporção as discrepâncias $[p - L(p)]$. Por simplicidade, denominaremos este padrão de mudança da curva de Lorenz de Suposto Kakwani. Datt e Ravallion (1992) introduziram uma metodologia para a decomposição das mudanças nas medidas de pobreza entre *componente-crescimento*, que mede o impacto das variações do rendimento médio sobre a medida de pobreza, e *componente-distribuição*, que capta o impacto das mudanças na distribuição dos rendimentos.

Hoffmann (1995) discute as relações entre pobreza absoluta, renda média e desigualdade da distribuição de renda a partir do suposto de que a distribuição de renda é log-normal, mas não obtém valores das elasticidades das medidas de pobreza. Neste artigo, o autor procurou mostrar de que forma as medidas de pobreza variam em função dos níveis prévios do índice de Gini e da relação entre a renda média e a linha de pobreza. Também utilizando o Suposto Log-normal, Bourguignon (2002) apresenta a elasticidade-crescimento e a elasticidade-desigualdade para a proporção de pobres e para o índice de insuficiência de renda. Hoffmann (2005) analisa as elasticidades das medidas de pobreza em relação à renda média e ao índice de Gini, derivadas a partir do Suposto Log-normal, para a distribuição da renda domiciliar *per capita* nas Unidades da Federação no Brasil nos anos de 1999, 2001 e 2002.

Uma questão crucial nesta discussão, que cabe explicitar aqui, consiste no fato de que a especificação de um padrão de mudança na curva de Lorenz é um requisito necessário para explorarmos o impacto das mudanças na desigualdade sobre a medida de pobreza. Um trabalho interessante é o de Barros e Mendonça (1997), que obtém o impacto das mudanças na distribuição de renda sobre a medida de pobreza fazendo simulações em que admite que o grau de desigualdade no Brasil se reduzisse aos níveis observados em determinados países latino-americanos (Bolívia, Colômbia, Costa Rica, México, Panamá, Uruguai e Venezuela), ou seja, que o Brasil passasse a ter a curva de Lorenz desses países.

Uma vez especificada a forma de alteração da desigualdade, podemos estabelecer uma expressão que relacione as mudanças nas medidas de desigualdade, como por exemplo, o índice de Gini, com as mudanças nas medidas de pobreza e derivar as elasticidades-desigualdade teóricas. Neste trabalho deduzimos uma expressão geral para a elasticidade-desigualdade da classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke (1984) com $\alpha > 1$ sob o Suposto Log-normal. Na literatura sobre este tema, usualmente recorre-se às elasticidades em relação ao índice de Gini derivadas a partir do Suposto Kakwani (1990). Neder (2004) apresenta estas elasticidades para as áreas rurais do Brasil em 2001. Vale enfatizar que a suposição de padrões distintos de mudança na desigualdade - Suposto Log-normal ou Suposto Kakwani - conduz a diferentes expressões para as elasticidades-desigualdade. Embora utilizadas extensivamente, pouco se atentou para uma análise sistemática do grau de adequação da aplicação empírica das fórmulas de cálculo das elasticidades teóricas, derivadas a partir de supostos *ex-ante* de mudanças na desigualdade.

Esta é um lacuna que procuramos preencher neste trabalho por meio de uma análise de regressão com intuito de precisar em que medida as elasticidades teóricas são capazes de explicar as mudanças *ex-post* nas medidas de pobreza calculadas para a distribuição da renda domiciliar *per capita* nas Unidades da Federação do Brasil de 1992 a 2004. No **Anexo I** deduzimos a expressão geral para a elasticidade-desigualdade das medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke (1984) com $\alpha > 1$ sob o Suposto Log-normal. Na seção seguinte decompusemos as variações nas medidas de pobreza e apresentamos as expressões para cálculo das estimativas da elasticidade-crescimento e da elasticidade-desigualdade da classe de medidas de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha > 1$. Seguem-se as seções **Análise de Regressão** e **Resultados das Regressões** em que avaliamos o grau de adequação da aplicação empírica das fórmulas de cálculo das elasticidades do índice de insuficiência de renda e da medida de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$, utilizando tanto as elasticidades-desigualdade deduzidas a partir do Suposto Kakwani quanto as deduzidas a partir do Suposto Log-normal. Na quinta seção analisamos os valores da elasticidade-crescimento e da elasticidade-desigualdade para as Unidades da Federação do Brasil (UF) no ano de 2004, utilizando somente as elasticidades obtidas pela metodologia que apresentou o maior poder explicativo sobre as mudanças observadas nas medidas de pobreza nas UF de 1992 a 2004. Nesta análise, enfatizaremos a medida de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$, que considera aspectos relacionados à desigualdade da distribuição de renda entre os pobres, extensão e intensidade da pobreza. Por fim, nas **Conclusões** traçamos algumas diretrizes para uma estratégia de combate à pobreza no Brasil.

2 Decomposição das Variações nas Medidas de Pobreza

Consideremos a classe geral de medidas de pobreza aditivamente separáveis

$$\theta = \int_0^z P(z,x) f(x) dx, \tag{1}$$

em que $f(x)$ é a função densidade probabilidade do rendimento x, z é a linha de pobreza e $P(z,x)$ é uma função homogênea de grau zero em x e z, sujeita a

$$\frac{\partial P}{\partial x} < 0 \ , \ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \geq 0 \ \text{e} \ P(z,z) = 0$$

A classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke (1984) é obtida fazendo

$$P(z,x) = \left(\frac{z-x}{z} \right)^{\alpha} \tag{2}$$

na qual α é um parâmetro que estabelece como a insuficiência de renda $(x-z)$ de cada pobre afeta a medida de pobreza. Esta medida de pobreza é a proporção pobres $H = F(z)$ quando $\alpha = 0$, que atribui pesos iguais para todos pobres, independentemente da intensidade da pobreza. Para $\alpha = 1$, o fator de ponderação atribuído a cada pobre depende da insuficiência de sua renda em relação à linha de pobreza. Temos o índice de insuficiência de renda:

$$\varphi(\alpha = 1) = \int_0^z \left(\frac{z-x}{z} \right) f(x) dx = HI$$

em que $I = \frac{1}{H} \int_0^z \left(\frac{z-x}{z} \right) f(x) dx$ é a razão de insuficiência de renda. Quanto maior o valor de α, maior o peso atribuído aos mais pobres. Para $\alpha = 2$, o fator de ponderação atribuído a cada pobre é proporcional ao quadrado de sua insuficiência em relação à linha de pobreza. Desenvolvendo a expressão:

$$\varphi(\alpha = 2) = \int_0^z \left(\frac{z-x}{z} \right)^2 f(x) dx = H\left[I^2 + (1-I)^2 C_*^2 \right]$$

sendo $C_*^2 = \frac{1}{\mu_*^2 H} \int_0^z x^2 f(x) dx - 1$ o quadrado do coeficiente de variação do rendimento dos pobres e $\mu_* = \frac{1}{H} \int_0^z x f(x) dx$ o rendimento médio dos pobres. A medida de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$ é uma função da proporção de pobres (H), da razão de insuficiência de renda (I) e da desigualdade da distribuição de renda entre os pobres medida pelo coeficiente de variação dos pobres (C_*). Portanto, a medida leva em consideração aspectos relacionados à desigualdade da distribuição de renda entre os pobres, extensão e intensidade da pobreza.

As variações na medida de pobreza podem ser decompostas entre dois fatores determinantes: 1) magnitude da taxa de crescimento econômico (crescimento do rendimento médio da população); 2) mudanças da desigualdade na distribuição dos rendimentos. Com o intuito de decompor as mudanças nas medidas de pobreza nesses dois componentes podemos diferenciar a equação (1):

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta}\int_0^z \frac{\partial P}{\partial x} d(x) f(x) dx$$

e reescrevê-la como

$$d\ln\theta = \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p) g(p) dp \tag{3}$$

em que $x(p)$ é a curva de quantis, $H = F(z)$ é a proporção de pobres e $g(p) = d\ln(x(p))$ é a taxa de crescimento do p-ésimo percentil da distribuição de renda.

Da definição da curva de Lorenz $L(p)$, obtém-se $L'(p) = \frac{x(p)}{\mu}$, em que μ é o rendimento médio da população e $L'(p)$ a derivada primeira da curva de Lorenz. Rearranjando os termos, tomando logaritmo e diferenciando:

$$g(p) = d\ln(x(p)) = d\ln\mu + d\ln(L'(p)) \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), obtemos:

$$d\ln\theta = \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p) d\ln(\mu) dp + \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p) d\ln(L'(p)) dp \tag{5}$$

Na equação (5) as variações relativas nas medidas de pobreza são decompostas em dois termos aditivos:

1) *componente-crescimento*, que mede o impacto das variações do rendimento médio sobre a medida de pobreza;
2) *componente-distribuição*, que mede o impacto das mudanças na desigualdade (modificações na curva de Lorenz) da distribuição dos rendimentos sobre a medida de pobreza.

Vamos admitir que a distribuição do rendimento x seja log-normal. A função de quantis da distribuição log-normal é

$$x(p) = \mu e^{Z(p)\beta - \beta^2/2} \tag{6}$$

em que μ é o rendimento médio da população, β é o desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos e $Z(p) = \Phi^{-1}(p)$ é a inversa da função de distribuição de uma variável normal reduzida.[2] Tomando logaritmo e diferenciando a expressão da curva de quantis:

$$g(p) = d\ln(x(p)) = d\ln\mu + [Z(p) - \beta]d\beta \qquad (7)$$

Já vimos que $g(p) = d\ln(x(p))$ é a taxa de crescimento no p-ésimo percentil da distribuição de renda. De (4) e (7), verifica-se que, sob o suposto log-normal, as mudanças na desigualdade da distribuição dos rendimentos (modificações na curva de Lorenz) ocorrem conforme a expressão:

$$d\ln(L'(p)) = [Z(p) - \beta]d\beta \qquad (8)$$

Podemos obter a decomposição da mudança relativa na medida de pobreza θ, sob o suposto de que a distribuição de renda permaneça log-normal, substituindo (7) em (3):

$$d\ln\theta = \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p) d\ln(\mu) dp + \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p)[Z(p) - \beta] d\beta dp \qquad (9)$$

Supondo-se constante a desigualdade da distribuição dos rendimentos (o desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos), o segundo termo desta expressão torna-se nulo. Segue-se a expressão da elasticidade da medida de pobreza em relação ao rendimento médio:

$$\varepsilon[\theta|\mu] = \frac{\partial\ln\theta}{\partial\ln\mu} = \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p) dp \qquad (10)$$

Essa elasticidade pode ser interpretada como a mudança percentual na medida de pobreza θ em resposta ao crescimento de 1% na renda média, supondo que a forma da distribuição dos rendimentos permaneceu constante.

Supondo-se constante o rendimento médio, o primeiro termo da expressão (9) torna-se nulo. Segue-se a expressão da elasticidade da medida de pobreza θ em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos:

$$\varepsilon[\theta|\beta] = \frac{\partial\ln\theta}{\partial\ln\beta} = \frac{\beta}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p)[Z(p) - \beta] dp \qquad (11)$$

que corresponde à mudança percentual na medida de pobreza θ em resposta ao crescimento de 1% no desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos, supondo que o rendimento médio permaneceu inalterado.

Utilizando (10) e (11), podemos reescrever a expressão (9) explicitamente em função das elasticidades da medida de pobreza em relação ao rendimento médio e ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos. A classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke $\varphi(\alpha)$ é um caso particular das medidas θ. Reescrevendo a expressão (9) como função explícita das

[2] Note-se que utilizamos a letra *Z* maiúscula para indicar a variável normal reduzida e *z* minúsculo para a linha de pobreza.

elasticidades e substituindo θ por $\varphi(\alpha)$, temos que a mudança relativa na medida de pobreza $\varphi(\alpha)$ pode ser composta conforme:

$$d \ln \varphi(\alpha) = \varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu] d \ln \mu + \varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta] d \ln \beta \tag{12}$$

Nesta expressão, a elasticidade em relação ao rendimento médio e a elasticidade em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos são dadas, respectivamente, por[3]

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu] = -\alpha\left[\frac{\varphi(\alpha-1)-\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right], \qquad \text{para } \alpha > 0$$

e

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta] = \frac{\beta^2}{\varphi(\alpha)}\alpha(\alpha-1)[\varphi(\alpha)-2\varphi(\alpha-1)+\varphi(\alpha-2)], \qquad \text{para } \alpha > 1.$$

O próprio Theil (1967) mostrou que, para a distribuição log-normal, a medida de desigualdade L de Theil é:

$$L = \frac{\beta^2}{2} \tag{13}$$

O índice de Gini dessa distribuição é [ver Aitchison e Brown (1957)]

$$G = 2\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - 1 \tag{14}$$

sendo Φ a função de distribuição de uma variável normal reduzida. As elasticidades das medidas de pobreza em relação ao índice de Gini e ao L de Theil podem ser derivadas a partir das relações (13) e (14), isto é, obtém-se as elasticidades em relação ao índice de Gini e ao L de Theil por meio da multiplicação das respectivas elasticidades em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos pelas seguintes expressões:

$$\frac{d\beta/\beta}{dL/L} = \frac{L}{\beta^2} = \frac{1}{2} \tag{15}$$

e

$$\frac{d\beta/\beta}{dG/G} = \frac{G}{\beta\sqrt{2}\phi\left(\beta/\sqrt{2}\right)} \tag{16}$$

No presente trabalho foi deduzida uma expressão geral para a elasticidade-desigualdade da classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke (1984) com $\alpha > 1$ a partir da suposição de que as mudanças na desigualdade ocorrem conforme a expressão (8). Na literatura sobre este tema, usualmente recorre-se às elasticidades-desigualdade teóricas derivadas por Kakwani (1990) a partir do suposto de que as mudanças na curva de Lorenz são dadas por $\Delta L(p) = -\lambda[p - L(p)]$.[4]

---

[3] Ver Anexo I para dedução destas fórmulas.

[4] Ver, por exemplo, Neder (2004), que apresenta as elasticidades da medida de pobreza em relação a índice de Gini para as áreas rurais do Brasil em 2001, derivadas a partir do Suposto Kakwani.

Por simplicidade, denominaremos estes padrões de mudança da curva de Lorenz de Suposto Log-normal e Suposto Kakwani, respectivamente. Note-se que a suposição de padrões distintos de mudança na desigualdade conduz a diferentes expressões para as elasticidades-desigualdade derivadas a partir do Suposto Log-normal e do Suposto Kakwani.[5]

A especificação de um padrão de mudança na curva de Lorenz é um requisito necessário para explorarmos o impacto das mudanças na desigualdade sobre a medida de pobreza e derivarmos as elasticidades-desigualdade teóricas. Isto ocorre porque a desigualdade na distribuição de renda (a curva de Lorenz) pode evoluir de infinitas formas. Dessa maneira, se não for especificada a forma de alteração da desigualdade, é impossível estabelecer uma expressão simples que relacione as mudanças nas medidas de desigualdade, como por exemplo o índice de Gini, com as mudanças nas medidas de pobreza. A especificação de um padrão *ex ante* de mudança da curva de Lorenz, que pode modificar-se de infinitas formas, consiste desde já numa limitação da aplicação empírica das fórmulas de cálculos das elasticidades.

3 Análise de Regressão

Nesta seção a análise de regressão é utilizada com o objetivo principal de avaliar o grau de adequação da aplicação empírica das fórmulas de cálculos das elasticidades. Secundariamente, procuraremos avaliar qual padrão de mudança da curva de Lorenz - Suposto Kakwani ou Log-normal - se ajustou melhor às mudanças observadas nas medidas de pobreza. Dispondo de um painel de dados com os valores das elasticidades teóricas e com as observações das mudanças relativas do rendimento médio, das medidas de pobreza e das medidas de desigualdade nas 27 Unidades da Federação do Brasil durante o período de 1992 a 2004, podemos estimar em que medida as mudanças preconizadas pela interação entre as elasticidades teóricas e as mudanças observadas no rendimento médio e nas medidas de desigualdade são capazes de explicar as mudanças observadas nas medidas de pobreza. Em outras palavras, podemos precisar em que medida as elasticidades teóricas derivadas a partir de supostos *ex-ante* de mudanças na desigualdade são capazes de explicar as mudanças *ex-post* nas medidas de pobreza.

Os dados são advindos da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) no período de 1992 a 2004. Considera-se a distribuição do rendimento domiciliar *per capita* para domicílios particulares permanentes com declaração do rendimento domiciliar. O rendimento *per capita* é obtido dividindo o rendimento domiciliar pelo número de pessoas do domicílio, excluindo

[5] No Anexo I apresentamos as expressões distintas dos padrões de mudança na curva de Lorenz e das elasticidades em relação ao índice de Gini sob o Suposto Kakwani e Suposto Log-normal.

as pessoas cuja condição no domicílio é pensionista, empregado doméstico ou parente de empregado doméstico. A análise se restringe aos domicílios com rendimento domiciliar não-nulo (foram excluídos os domicílios com rendimento domiciliar nulo ou ignorados). Cabe lembrar que, até o ano de 2003, a PNAD coletava dados apenas das áreas urbanas nos estados da antiga região Norte (Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará e Amapá). Por uniformidade com o período anterior, no ano de 2004 foram consideradas apenas as áreas urbanas destes estados.

Os rendimentos do período 1992 a 2004 foram expressos em reais de maio-junho de 2005, utilizando como deflator um índice derivado do INPC a partir de dois ajustes: 1) alteração da data de referência, centrando o índice no primeiro dia do mês; 2) alteração do valor referente a julho de 1994, de forma a levar em consideração a defasagem inflacionária decorrente da mudança de unidade monetária ocorrida naquele mês. Como a PNAD levanta o rendimento de setembro e a maioria das pessoas recebe esse rendimento no início de outubro, obtém-se um deflator para o início de outubro calculando a média geométrica entre os valores do INPC em setembro e outubro. Os ajustes baseiam-se em Corseuil e Foguel (2002). Adotou-se como período-base o primeiro bimestre de vigência do novo salário mínimo de R$ 300,00. As medidas de pobreza foram calculadas utilizando uma linha de pobreza igual à metade do valor real desse salário mínimo, ou seja, R$ 150,00 per capita em moeda de maio-junho de 2005. Com base nos valores calculados do rendimento médio, das medidas de desigualdade e das medidas de pobreza para cada uma das 27 Unidades da Federação do Brasil no período de 1992 a 2004 (excetuados os anos 1994 e 2000 em que a PNAD não foi realizada), obtivemos um painel com 270 observações das mudanças relativas nas medidas de pobreza (índice de insuficiência de renda e medida de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$), no rendimento médio e nas medidas de desigualdade (índice de Gini e L de Theil).

Para efeito de comparação, utilizamos dois métodos alternativos de cálculo das estimativas das elasticidades teóricas das medidas de pobreza. No **Método 1** as estimativas das elasticidades teóricas são obtidas pela substituição direta dos valores calculados das medidas de pobreza nas expressões (23) e (31) apresentadas no Anexo I. Vale ressaltar que a expressão da elasticidade em relação ao índice de Gini apresentada em (31) foi derivada a partir do Suposto Kakwani. No **Método Log-normal** as estimativas das elasticidades teóricas são obtidas pela substituição dos valores das estimativas das medidas de pobreza pelo método log-normal, conforme as expressões (23) e (28). Uma vantagem adicional de utilizarmos o **Método Log-normal** é a possibilidade de inclusão da elasticidade em relação ao índice L de Theil, que é uma medida de desigualdade mais sensível a alterações nas rendas dos pobres. Neste trabalho utilizaremos as elasticidades em relação ao L de Theil e ao índice de Gini pelo **Método Log-normal**. Sintetizando, temos cinco elasticidades teóricas para cada medida de pobreza: 1) elasticidade em relação ao rendimento médio pelo **Método 1**; 2) elasticidade em relação ao rendimento médio pelo **Método Log-normal**; 3) elasticidade em relação ao índice de Gini pelo **Método 1** (Suposto Kakwani); 4) elasticidade em relação ao índice de Gini pelo **Método Log-normal**; 5) elasticidade em relação ao L de Theil pelo **Método Log-normal**.

De acordo com a expressão (12), as mudanças nas medidas de pobreza $\varphi(\alpha)$ podem ser decompostas numa combinação linear de dois termos que consideram explicitamente as elasticidades teóricas:

$$d\ln\varphi(\alpha) = \varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu]d\ln\mu + \varepsilon[\varphi(\alpha)|S]d\ln S$$

em que $\varphi(\alpha)$ é a medida de pobreza de Foster Greer e Thorbecke, μ é o rendimento médio da população e S a medida de desigualdade (índice de Gini ou L de Theil). Fazendo analogia direta a esta decomposição, utilizaremos o seguinte modelo de regressão:

$$\Delta\ln\varphi(\alpha)_{it} = \beta_1\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu]_{it}\Delta\ln\mu_{it} + \beta_2\varepsilon[\varphi(\alpha)|S]_{it}\Delta\ln S_{it} + e_{it} \qquad \textbf{(17)}$$

em que e_{it} é um termo aleatório. A variável dependente $\Delta\ln\varphi(\alpha)_{it}$ é a mudança relativa na medida de pobreza. As duas variáveis explanatórias são o produto da elasticidade-crescimento $\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu]_{it}$ da medida de pobreza pela taxa de crescimento do rendimento médio $\Delta\ln\mu_{it}$, que capta o impacto das variações no rendimento médio sobre a medida de pobreza, e o produto da elasticidade-desigualdade $\varepsilon[\varphi(\alpha)|S]_{it}$ pela mudança relativa na medida de desigualdade $\Delta\ln S_{it}$, captando o impacto das mudanças da desigualdade. Utilizaremos o método dos mínimos quadrados ordinários com correção dos desvios padrões dos parâmetros para dados em painel.[6] Se as elasticidades teóricas são satisfatórias na explicação das mudanças *ex-post* nas medidas de pobreza, espera-se que os valores dos coeficientes β_1 e β_2 não sejam estatisticamente distintos da unidade e o valor explicativo do modelo seja relativamente alto.

Adicionalmente, podemos efetuar regressões que avaliem separadamente o poder explicativo das elasticidades teóricas utilizando aproximações dos valores do *componente-crescimento* e do *componente-distribuição* das mudanças nas medidas de pobreza derivadas a partir da decomposição de Datt e Ravalion (1992). Mais especificadamente, a mudança relativa na medida de pobreza $\varphi(\alpha)$ entre o período inicial *t* e o período final *t+n* pode ser decomposta conforme: [7]

---

[6] Espera-se que os desvios em dados em painel, que utiliza observações de uma mesma unidade ao longo do tempo, estejam correlacionados entre painéis (grandes desvios de uma unidade *i* no tempo *t* estejam associados a grandes desvios de uma unidade *j* no tempo *t*) e apresentem heterocedasticidade (as variâncias dos desvios diferem de unidade para unidade). A correção dos desvios padrões dos parâmetros e das estimativas de variância e covariância para dados em painel viabiliza maior precisão dos intervalos de confiança. Ver Beck e Katz (1995).

[7] Esta expressão é uma modificação da decomposição de Datt e Ravalion (1992) com intuito de considerar mudanças relativas (e não absolutas) nas medidas de pobreza, minimizar o problema de dependência da trajetória tomando a

$$\Delta \ln \varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left[C(t,t+n;t) + C(t,t+n;t+n)\right] + \frac{1}{2}\left[D(t,t+n;t) + D(t,t+n;t+n)\right] \quad \textbf{(18)}$$

em que o *componente-crescimento* e o *componente-distribuição* são respectivamente

$$C(t,t+n;r) = \ln \varphi(z,\mu_{t+n},L_r(p)) - \ln \varphi(z,\mu_t,L_r(p))$$
$$D(t,t+n;r) = \ln \varphi(z,\mu_r,L_{t+n}(p)) - \ln \varphi(z,\mu_r,L_t(p))$$

e r indica o período de referência com respeito ao qual a mudança observada na medida de pobreza é decomposta. Utilizando esta decomposição das medidas de pobreza, propõem-se dois modelos:

$$C_{it} = \beta_3 \varepsilon\left[\varphi(\alpha)|\mu\right]_{it} \Delta \ln \mu_{it} + e_{it}$$

$$D_{it} = \beta_4 \varepsilon\left[\varphi(\alpha)|I\right]_{it} \Delta \ln I_{it} + e_{it}$$

em que C_{it} e D_{it} são, respectivamente, o *componente-crescimento* e o *componente-distribuição* da mudança relativa na medida de pobreza. Note que a soma de C_{it} e D_{it} totaliza a mudança relativa total na medida de pobreza $\Delta \ln \varphi(\alpha)_{it}$.

4 Resultados das Regressões

Na tabela 1 estão dispostos os resultados das regressões que procuram explicar o *componente-crescimento* das mudanças relativas no índice de insuficiência de renda e na medida de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$ utilizando a variável explanatória associada às mudanças no rendimento médio - produto da elasticidade-crescimento teórica pela taxa de crescimento do rendimento médio (valor de t entre parênteses). Na primeira regressão a elasticidade teórica foi obtida por meio do **Método 1** e na segunda regressão pelo **Método Log-normal**.

Tabela 1. Poder explicativo das elasticidades-crescimento teóricas no componente-crescimento das mudanças relativas no índice de insuficiência de renda e na medida de Foster, Greer e Thorbecke com α = 2 (FGT) calculadas adotando a linha de pobreza de R$ 150,00 nas Unidades da Federação do Brasil, 1992 a 2004.
(Variável Dependente: componente-crescimento das mudanças relativas na medida de pobreza)

Variável Explanatória	Ind. de Insuficiência de renda			Medida de FGT com α = 2		
	Coef.	Intervalo de Conf. (3)		Coef.	Intervalo de Conf. (3)	
$\varepsilon[\theta \mid \mu]\Delta \ln \mu$ (1)	1,01668	0,98474	1,04862	1,01465	0,99364	1,03567
	(62,39)			(94,62)		
R^2	0,9762			0,9876		
$\varepsilon[\theta \mid \mu]\Delta \ln \mu$ (2)	1,088539	1,067464	1,109615	1,074149	1,049515	1,098782
	(101,23)			(85,46)		
R^2	0,9922			0,9908		

(1) Elasticidade teórica obtida pelo Método 1.
(2) Elasticidade teórica obtida pelo Método Log-normal.
(3) Intervalo de 95% de confiança.

média das decomposições que utilizam o período final e o período inicial como referência; e eliminar o termo residual da decomposição. Para uma análise pormenorizada ver Kakwani (2000).

Os valores dos coeficientes de determinação (R^2) das regressões foram sempre superiores a 0,97. Conforme esperado, os coeficientes estimados apresentaram valores próximos à unidade em todas as regressões. Muito embora o **Método Log-normal** tenha fornecido estimativas das elasticidades-crescimento com alto poder explicativo, os limites inferiores dos respectivos intervalos de 95% de confiança apresentaram valores um pouco superiores a 1, sugerindo que as elasticidades-crescimento teóricas estejam ligeiramente subestimadas. De forma geral, as elasticidades teóricas em relação ao rendimento médio foram altamente satisfatórias na explicação do *componente-crescimento* das mudanças *ex-post* nas medidas de pobreza.

Na tabela 2 apresentamos os resultados das regressões que procuram explicar o *componente-distribuição* das mudanças relativas no índice de insuficiência de renda e na medida de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$ utilizando a variável explanatória associada às mudanças na desigualdade - produto da elasticidade-desigualdade teórica pela mudança relativa na medida de desigualdade (valor de t entre parênteses). Utilizamos três elasticidades teóricas distintas: elasticidade em relação ao índice de Gini pelo **Método 1** (Suposto Kakwani), elasticidade em relação ao índice de Gini pelo **Método Log-normal** e elasticidade em relação ao L de Theil pelo **Método Log-normal**.

Tabela 2. Poder explicativo das elasticidades-desigualdade teóricas no componente-distribuição das mudanças relativas no índice de insuficiência de renda e na medida de Foster, Greer e Thorbecke com α=2 (FGT) calculadas adotando a linha de pobreza de R$ 150,00 nas Unidades da Federação do Brasil, 1992 a 2004.
(Variável Dependente: componente-distribuição das mudanças relativas na medida de pobreza)

Variável Explanatória	Ind. de Insuficiência de renda			Medida de FGT com α = 2		
	Coef.	Intervalo de Conf. (3)		Coef.	Intervalo de Conf. (3)	
$\varepsilon[\theta \mid G]\Delta \ln G$ (1)	0,62592	0,52408	0,72776	0,47397	0,38869	0,55924
	(12,05)			(10,89)		
R^2	0,677			0,5972		
$\varepsilon[\theta \mid G]\Delta \ln G$ (2)	0,96000	0,82370	1,09631	0,87552	0,73780	1,01325
	(13,80)			(12,46)		
R^2	0,6984			0,603		
$\varepsilon[\theta \mid L]\Delta \ln L$ (2)	1,03059	0,92133	1,13985	0,98200	0,87016	1,09385
	(18,49)			(17,21)		
R^2	0,8414			0,7874		

(1) Elasticidade teórica obtida pelo Método 1.
(2) Elasticidade teórica obtida pelo Método Log-normal.
(3) Intervalo de 95% de confiança.

Comparando-se o Suposto Kakwani com o Suposto Log-normal, as regressões utilizando as elasticidades em relação ao índice de Gini pelo **Método 1** e pelo **Método Log-normal** apresentaram valores do R^2 muito próximos. Em termos dos coeficientes, os valores obtidos nas regressões utilizando a elasticidade em relação ao índice de Gini pelo **Método 1** (Suposto Kakwani) são substancialmente inferiores à unidade, enquanto os valores obtidos nas regressões utilizando as elasticidades em relação ao índice de Gini pelo **Método Log-normal** são mais próximos do valor esperado. Estes resultados sugerem que os valores das elasticidades em relação ao índice de Gini derivadas a partir do Suposto Log-normal estão mais próximos do valor esperado e que os valores destas elasticidades derivadas a partir do Suposto Kakwani estão consideravelmente superestimados. Hoffmann (2005) já destacou que o Suposto Kakwani pode conduzir a estimativas das elasticidades das medidas de pobreza em relação ao índice de Gini substancialmente mais altas do que os valores obtidos admitindo que a distribuição permaneça log-normal.

De forma inequívoca, as regressões utilizando a elasticidade em relação ao L de Theil pelo **Método Log-normal** apresentaram os resultados mais adequados. Os respectivos intervalos de 95% de confiança contém o valor 1. Parte significativa do *componente-distribuição* das mudanças nas medidas de pobreza foi explicada pelo modelo. Os valores do R^2 das regressões para o índice de insuficiência de renda e a medida de FGT com $\alpha = 2$ são 0,8414 e 0,7874 respectivamente, superiores àqueles obtidos nas regressões que utilizaram o índice de Gini. Podemos afirmar que as elasticidades-desigualdade teóricas, quando utilizamos as elasticidades em relação ao L de Theil pelo método log-normal, foram satisfatórias na explicação do componente-distribuição das medidas de pobreza aqui analisadas.[8] Comparando os resultados das regressões expostos na tabela 1 com os resultados na tabela 2, podemos afirmar que o poder explicativo das elasticidades-desigualdade teóricas, derivadas a partir de supostos *ex-ante* de mudanças na desigualdade, mesmo quando adotamos a medida L de Theil, foi inferior ao poder explicativo das elasticidades-crescimento, derivadas sem suposições arbitrárias.

Por fim, realizamos regressões que procuram explicar a mudança relativa total na medida de pobreza utilizando conjuntamente a variável explanatória associada às mudanças no rendimento médio e a variável explanatória associada às mudanças na desigualdade - produto da elasticidade-crescimento teórica pela taxa de crescimento do rendimento médio e produto da elasticidade-desigualdade teórica pela mudança relativa na medida de desigualdade. Os resultados podem ser visualizados na tabela 3 (valor de t entre parênteses).

De certa forma, os resultados das regressões conjuntas confirmam os resultados anteriores. As regressões utilizando as elasticidades em relação ao índice de Gini pelo **Método 1** (Suposto

[8] Este resultado depende da linha de pobreza utilizada, que, neste caso, foi de R$ 150,00. Testamos as mesmas regressões com as medidas de pobreza calculadas para a linha de pobreza de R$ 75,00. O poder explicativo das regressões utilizando as elasticidades em relação ao L de Theil pelo método log-normal foi menor, com valores do R^2 de 0,6573 na regressão do *componente-distribuição* da mudança no índice de insuficiência de renda e 0,5408 na regressão da medida de FGT *com* $\alpha = 2$. Estes valores foram superiores aos valores dos R^2 das regressões utilizando as elasticidades das medidas de pobreza calculadas para a linha de pobreza de R$ 75,00 em relação ao índice de Gini.

Kakwani) e pelo **Método Log-normal** apresentaram valores do R^2 muito semelhantes. Os coeficientes das elasticidades em relação ao índice de Gini pelo **Método 1** apresentaram valores consideravelmente inferiores à unidade, sugerindo que os valores das elasticidades em relação ao índice de Gini derivadas a partir do Suposto Kakwani estejam superestimados. Os coeficientes das regressões com as elasticidades em relação ao índice de Gini pelo **Método Log-normal** apresentaram valores mais próximos dos valores esperados. Os modelos que utilizaram a elasticidade em relação ao L de Theil pelo **Método Log-normal** apresentaram os resultados mais satisfatórios dentre os modelos analisados. Para ambas as medidas de pobreza, os intervalos de 95% de confiança nas regressões com o L de Theil contém o valor unitário e os valores dos R^2 das regressões foram maiores do que os valores obtidos pelos outros dois modelos**.** Podemos concluir que, quando utilizamos a medida de desigualdade L de Theil, as elasticidades teóricas foram capazes de explicar razoavelmente bem as mudanças observadas nas medidas de FGT com $\alpha = 2$ calculada adotando a linha de pobreza de R$ 150,00 nas 27 Unidades da Federação do Brasil no período 1992 a 2004. Quando utilizamos a elasticidade em relação ao índice de Gini, o poder explicativo do modelo foi consideravelmente inferior.

Tabela 3. Poder explicativo das elasticidades teóricas na mudança relativa total no índice de insuficiência de renda e na medida de Foster, Greer e Thorbecke com α=2 (FGT) calculadas adotando a linha de pobreza de R$ 150,00 nas Unidades da Federação do Brasil, 1992 a 2004.
(Variável Dependente: mudança relativa na medida de pobreza)

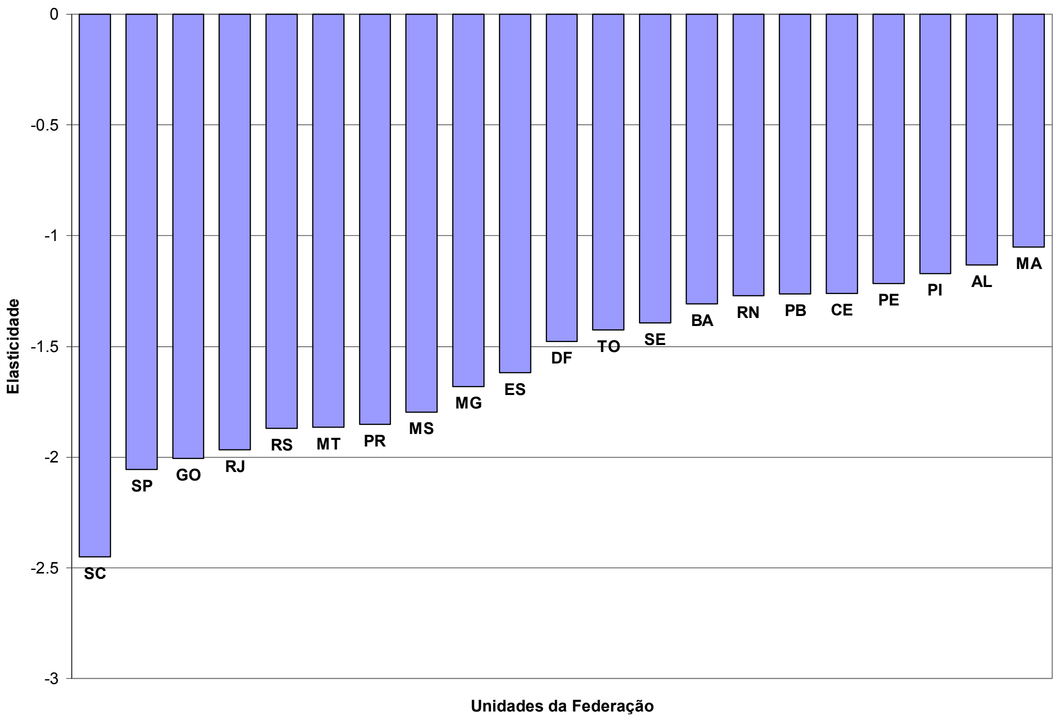
Variável Explanatória	Ind. de Insuficiência de renda			Medida de FGT com α = 2		
	Coef.	Intervalo de Conf. (3)		Coef.	Intervalo de Conf. (3)	
$\varepsilon[\theta \mid \mu]\Delta \ln \mu$ (1)	0,86859	0,74780	0,98939	0,84611	0,70520	0,98703
	(14,09)			(11,77)		
$\varepsilon[\theta \mid G]\Delta \ln G$ (1)	0,60740	0,50252	0,71228	0,45538	0,36937	0,54139
	(11,35)			(10,38)		
R^2	0,7473			0,6564		
$\varepsilon[\theta \mid \mu]\Delta \ln \mu$ (2)	0,94775	0,80581	1,08970	0,89930	0,72075	1,07785
	(13,09)			(9,87)		
$\varepsilon[\theta \mid G]\Delta \ln G$ (2)	0,92323	0,77088	1,07559	0,82847	0,67058	0,98635
	(11,88)			(10,28)		
R^2	0,7517			0,6327		
$\varepsilon[\theta \mid \mu]\Delta \ln \mu$ (2)	1,00965	0,90875	1,11055	0,97770	0,85028	1,10511
	(19,61)			(15,04)		
$\varepsilon[\theta \mid L]\Delta \ln L$ (2)	1,01438	0,89224	1,13653	0,96035	0,83259	1,08812
	(16,28)			(14,73)		
R^2	0,8657			0,7946		

(1) Elasticidade teórica obtida pelo Método 1.
(2) Elasticidade teórica obtida pelo Método Log-normal.
(3) Intervalo de 95% de confiança.

5 Resultados das Elasticidades para 2004

Na seção anterior avaliamos que, quando utilizamos a medida de desigualdade L de Theil, as elasticidades teóricas foram capazes de explicar razoavelmente bem as mudanças observadas nas medidas de pobreza nas 27 Unidades da Federação no Brasil (UF) de 1992 a 2004. Este resultado nos qualifica a utilizar as elasticidades teóricas em aplicações empíricas. Enfocaremos aqui as elasticidades da medida de Foster, Greer e Thorbecke com $\alpha = 2$, medida que leva em consideração aspectos relacionados à desigualdade da distribuição de renda entre os pobres, extensão e intensidade da pobreza. Na figura 1 estão dispostos em ordem crescente os valores das elasticidades em relação ao rendimento médio pelo Método Log-normal para as UF no ano de 2004 (excluídos os estados da antiga região Norte).

Figura 1. Elasticidades em relação ao rendimento médio pelo Método Log-normal para a medida de Foster, Greer e Thorbecke com α=2 (FGT) calculada adotando a linha de pobreza de R$ 150,00 nas Unidades da Federação do Brasil no ano de 2004.[1]



(1) Exclusive os estados da antiga região Norte (AC, AP, AM, PA, RO e RR).

Questões amplamente discutidas na literatura se referem à relação direta entre o valor absoluto das elasticidades e o rendimento médio e relação inversa entre o valor absoluto das elasticidades e o nível de desigualdade da distribuição dos rendimentos.[9] A figura 1 confirma estas relações para o caso brasileiro. O grupo formado pelos seis estados que apresentam os maiores valores absolutos das elasticidades da medida de FGT com $\alpha = 2$ em relação ao rendimento médio

---

[9] Ver, por exemplo, Bourguignon (2002) e Hoffmann (2005).

engloba os quatro estados com menores valores na medida de desigualdade L de Theil (Santa Catarina, São Paulo, Mato Grosso e Goiás).[10] Este grupo engloba também quatro das cinco UF com maiores valores do rendimento médio (Rio de Janeiro, São Paulo, Rio Grande do Sul e Santa Catarina). Os estados da região Nordeste (Sergipe, Bahia, Rio Grande do Norte, Paraíba, Ceará, Pernambuco, Piauí, Alagoas e Maranhão) e o estado de Tocantins são aqueles que apresentam os menores valores absolutos das elasticidades em relação ao rendimento médio. São também as UF com menores valores do rendimento médio e, excetuado o Distrito Federal, os maiores valores da medida de desigualdade L de Theil. O Distrito Federal é um caso especial que apresenta os maiores valores tanto do rendimento médio quanto do L de Theil dentre todas as UF. O valor absoluto da elasticidade em relação ao rendimento médio no Distrito Federal é somente superior aos valores observados nos estados do Nordeste e Tocantins.

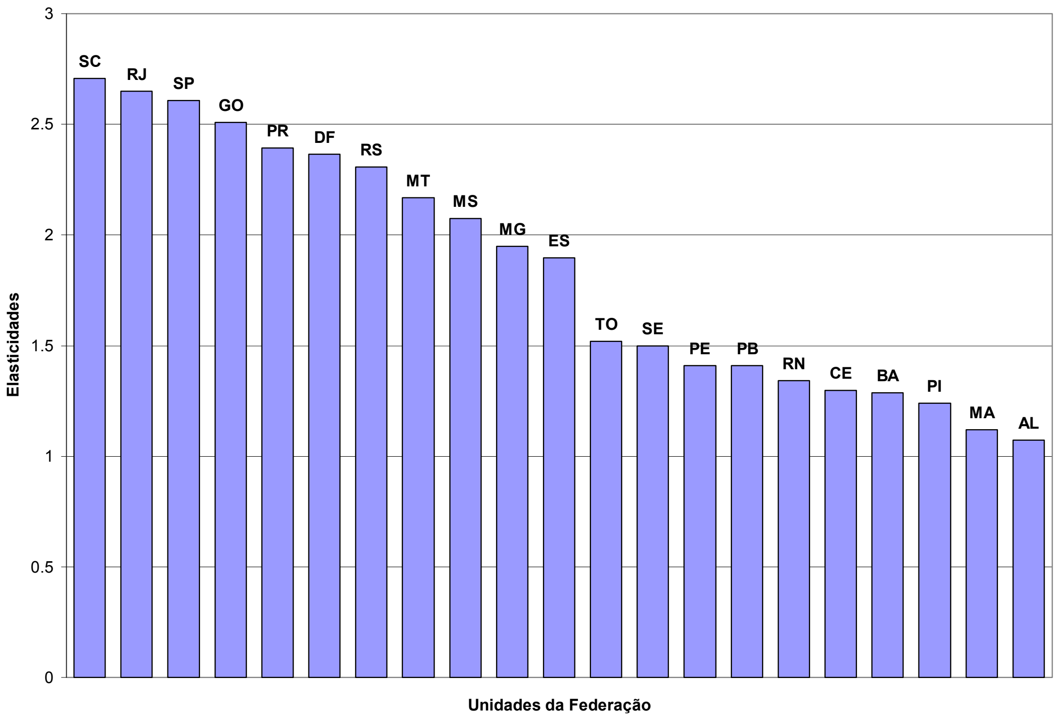
Em todas UF, as elasticidades em relação à média são negativas e de valor absoluto superior à unidade. Portanto, podemos afirmar que um dado aumento percentual no rendimento médio, mantida inalterada a desigualdade na distribuição dos rendimentos, determina uma redução proporcionalmente maior na medida de pobreza, ou seja, no agregado para o Brasil a medida de pobreza de FGT com $\alpha = 2$ calculada para a linha de pobreza de R$ 150,00 é elástica em relação à média. No entanto, este efeito da taxa de crescimento do rendimento médio na mudança relativa da medida de pobreza será diferenciado em cada UF de acordo com as respectivas elasticidades. Para uma mesma taxa de crescimento da média, a redução proporcional na medida de pobreza será inferior nos estados da região Nordeste e Tocantins do que nas demais UF.

Na figura 2 apresentamos em ordem decrescente os valores das elasticidades da medida de pobreza de FGT com $\alpha = 2$ em relação ao L de Theil pelo Método Log-normal para as UF no ano de 2004 (excluídos os estados da antiga região Norte). O grupo formado pelas sete UF com maiores valores das elasticidades em relação ao L de Theil engloba as seis UF com maior valor do rendimento médio (Distrito Federal, Rio de Janeiro, São Paulo, Rio Grande do Sul, Santa Catarina e Paraná) acrescido do estado de Goiás. Semelhantemente ao caso anterior, as elasticidades dos estados do Nordeste e do Tocantins apresentaram menores valores absolutos. As elasticidades foram sempre positivas e com valores superiores a 1 em todos estados. Temos então que uma determinada redução relativa na medida L de Theil, mantido fixo o rendimento médio, implica uma redução proporcionalmente maior na medida de pobreza, ou seja, no agregado para o Brasil a medida de FGT com $\alpha = 2$ calculada para a linha de pobreza de R$ 150,00 é elástica em relação à medida de desigualdade. A magnitude desta redução relativa na medida de pobreza, por sua vez, será diferenciada entre as UF, sendo menor nos estados da região Nordeste e Tocantins do que nas

[10] Os valores do rendimento médio e das medidas de pobreza e desigualdade para os estados no Brasil (exclusive estados da região Norte) podem ser observados no Anexo II.

demais. Para exemplificar, enquanto a redução em 1% no L de Theil no estado de Santa Catarina determina uma redução em 2,71% na medida de FGT com $\alpha = 2$, no Maranhão uma mudança de 1% no L de Theil reduz a medida de pobreza em apenas 1,12%.

Figura 2. Elasticidades em relação ao L de Theil pelo Método Log-normal para a medida de Foster, Greer e Thorbecke com α=2 (FGT) calculada adotando a linha de pobreza de R$ 150,00 nas Unidades da Federação do Brasil no ano de 2004.(1)



(1) Exclusive os estados da antiga região Norte (AC, AP, AM, PA, RO e RR).

6 Conclusões

No presente trabalho foi deduzida uma expressão geral da elasticidade-desigualdade das medidas de FGT para $\alpha > 1$ sob o Suposto Log-normal. A partir desta expressão, apresentamos os procedimentos para obtenção das estimativas das elasticidades em relação ao índice de Gini e ao L de Theil. Baseados nos resultados das regressões que utilizaram as elasticidades teóricas, concluímos que os modelos com as elasticidades em relação ao L de Theil pelo Método Log-normal foram capazes de explicar razoavelmente bem as mudanças observadas no índice de insuficiência de renda e na medida de FGT com $\alpha = 2$ nas 27 Unidades da Federação no Brasil entre 1992 e 2004. Além disto, mostramos que os valores obtidos das elasticidades em relação ao índice de Gini pelo Método Log-normal estavam mais próximos aos valores esperados do que os valores das elasticidades em relação ao índice de Gini derivadas a partir do Suposto Kakwani, que se mostraram consideravelmente superestimados. Argumenta-se aqui que, ao menos para o caso brasileiro, a aplicação empírica das estimativas das elasticidades-desigualdade da classe de medidas de FGT pelo Método Log-normal, cuja expressão geral para $\alpha > 1$ foi deduzida neste trabalho, seja mais adequada do que a utilização das elasticidades-desigualdade derivadas por Kakwani (1990) e amplamente difundidas na literatura.

Em seguida, apresentamos os valores das elasticidades da medida de FGT com $\alpha = 2$ em relação ao rendimento médio e ao L de Theil para as Unidades da Federação do Brasil (UF) no ano de 2004 (excluídos os estados da antiga região Norte). Verificamos uma relação direta entre o valor absoluto das elasticidades e o rendimento médio e relação inversa entre o valor absoluto das elasticidades e o nível de desigualdade da distribuição dos rendimentos. Observamos que estas elasticidades são elásticas em relação ao rendimento médio e em relação à desigualdade em todas UF. No entanto, os efeitos relativos do crescimento na média e da redução na desigualdade sobre as mudanças nas medidas de pobreza diferem substancialmente entre as UF, sendo menores nos estados da região Nordeste e Tocantins do que nas demais.

Com base nestes resultados podemos definir algumas diretrizes para uma estratégia de combate à pobreza. Primeiramente, esta estratégia deve combinar políticas de crescimento e políticas redistributivas. Em termos de objetivos imediatos de redução da pobreza, as elasticidades da medida de FGT com $\alpha = 2$ para o ano de 2004 obtidas neste trabalho implicam que uma redução em 1% no índice L de Theil combinada com um aumento em 1% no rendimento médio, em todas UF, determinam a redução de cerca de 3,1% na medida de pobreza para todo o Brasil (os efeitos da redução de 1% no L de Theil e do crescimento de 1% no rendimento médio sobre a medida de pobreza agregada são aproximadamente 1,65% e 1,45%, respectivamente). A mudança relativa na pobreza é mais de três vezes maior do que o valor absoluto das mudanças relativas na média e na medida de desigualdade. Este argumento pode ser estendido em termos de uma trajetória temporal de redução da pobreza. A redução na desigualdade e o aumento no rendimento médio no presente implicam num maior valor absoluto das elasticidades no futuro e, portanto, maior sensibilidade da medida de pobreza à média e à desigualdade. Em outras palavras, políticas de crescimento e redistributivas bem sucedidas hoje aumentam a efetividade dos resultados futuros das mudanças no rendimento médio e na desigualdade sobre a pobreza.

Em segundo lugar, as políticas redistributivas e de crescimento devem estar associadas a uma política regionalizada de combate a pobreza. Os impactos das mudanças relativas no rendimento médio e na medida de desigualdade nas distintas regiões sobre a medida de pobreza para todo o Brasil devem levar em consideração não apenas os valores das respectivas elasticidades mas também a contribuição de cada estado na medida de pobreza agregada. A contribuição das medidas de pobreza nos estados do Nordeste e Tocantins, que representam cerca de 30,83% da população do país (excluídos os estados da antiga região Norte), corresponde a cerca de 65,11% do total da medida de FGT com $\alpha = 2$ para o Brasil.[11] Portanto, a redução em 1% na medida de pobreza nos estados do Nordeste e de Tocantins determina uma redução de 0,65% na medida de pobreza para o Brasil enquanto a redução em 1% da medida de pobreza nas demais regiões tomadas conjuntamente determina a redução de apenas 0,35% na medida de pobreza agregada.

Temos então que uma redução em 1% na medida de pobreza para todo o país pode ser obtida por meio de uma redução em 1,54% nas medidas de pobreza dos estados do nordeste e Tocantins (mantida inalterada a pobreza nos demais estados do país) o que, de acordo com os valores das elasticidades, requer um aumento em 1,25% na renda média, uma redução de 1,20% no L de Theil ou uma combinação intermediária de crescimento da renda média com redução da desigualdade. Alternativamente, esta mesma redução na medida de pobreza para todo o país pode ser obtida por meio de uma redução de 2,87% nas medidas de pobreza das demais UF (mantida inalterada a pobreza nos estados do Nordeste e Tocantins) que requer taxas de aumento da média no valor de 1,53%, redução no L de Theil de 1,24% ou uma combinação intermediária. Apesar dos menores valores absolutos das elasticidades conduzirem à falsa impressão de uma menor efetividade dos resultados das mudanças relativas na média e no L de Theil nos estados do Nordeste e Tocantins, o fato destes estados concentrarem parte significativa da pobreza do país implica exatamente o contrário, ou seja, os resultados de uma mesma mudança relativa na média e no L Theil sobre a medida de pobreza agregada são maiores nos estados do Nordeste e Tocantins do que nas outras regiões do país. Daí a importância da meta de redução das desigualdades dentro e entre as regiões do país a partir de uma política regionalizada que enfatize o combate à pobreza nas regiões de baixo rendimento médio e mais alta desigualdade na distribuição de renda. Em síntese, uma estratégia de combate eficiente à pobreza no Brasil deve compatibilizar políticas de crescimento e políticas redistributivas com ênfase sobre as regiões que concentram parte considerável da pobreza no Brasil.

Obviamente, poderíamos conduzir uma ampla discussão sobre os instrumentos alternativos que atendem às diretrizes definidas para uma política de combate à pobreza. Embora não caiba efetuar esta discussão aqui, argumentamos que a ampliação das políticas de transferências compensatórias, como por exemplo os mecanismos de renda mínima, principalmente nos estados do Nordeste e Tocantins, atendem eficientemente a estas diretrizes. Tais transferências podem ser financiadas por uma política de taxação mais progressiva do imposto de renda que, associadamente, reduza o grau de regressividade sobre a distribuição de renda da atual estrutura tributária brasileira,

[11] Lembrando que a medida de FGT com $\alpha = 2$ é aditivamente separável, obtemos este resultado tomando a razão entre a média da medida de pobreza ponderada pela respectiva participação da população dos estados do Nordeste e Tocantins e a média da medida de pobreza ponderada pela participação da população de todas UF. Os valores das medidas de pobreza e das participações na população de cada UF no total estão dispostos no Anexo II.

altamente dependente dos descontos em folha de salários e impostos sobre o consumo. Em conjunto, estas políticas podem atuar eficazmente no sentido de ampliar a renda dos mais pobres, exercer efeitos dinâmicos sobre a demanda e, ainda que não sejam condições suficientes, criar condições para um estilo de crescimento capaz de reduzir a heterogeneidade e fortalecer vínculos de solidariedade e interdependência entre as diversas regiões e grupos da sociedade brasileira.

ANEXO I

Neste anexo vamos deduzir a expressão geral da elasticidade em relação ao rendimento médio da classe de medidas de pobreza de FGT para $\alpha > 0$ e a expressão geral da elasticidade em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos, sob a suposição de que a distribuição do rendimento x permaneça log-normal, da classe de medidas de pobreza de FGT para $\alpha > 1$.

Conforme exposto anteriormente [ver (10)], a elasticidade em relação ao rendimento médio da classe de medidas de pobreza aditivamente separáveis θ é

$$\varepsilon[\theta|\mu] = \frac{1}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} x(p)dp \qquad \mathbf{(19)}$$

A classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke $\varphi(\alpha)$ é um caso particular das medidas θ com $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-\alpha}{z}\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}$. Substituindo esta expressão em (19), temos:

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu] = -\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{x}{z} f(x)dx \qquad \mathbf{(20)}$$

Uma vez que

$$\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} = \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z}, \qquad \mathbf{(21)}$$

podemos escrever

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{x}{z} f(x)dx = \int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} f(x)dx - \int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} f(x)dx$$

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{x}{z} f(x)dx = \varphi(\alpha-1) - \varphi(\alpha) \qquad \mathbf{(22)}$$

Substituindo (22) em (20), segue-se a expressão geral da elasticidade em relação ao rendimento médio da classe de medidas de FGT para $\alpha > 0$:[12]

[12] Este resultado foi apresentado em Kakwani (1990) e independe da adoção do suposto de que a distribuição do rendimento x permaneça log-normal. No entanto, as elasticidades em relação ao rendimento médio pelo Método Log-normal utilizadas neste trabalho foram calculadas substituindo os valores das estimativas log-normal das medidas de pobreza na expressão (23). Por esta razão, os valores das elasticidades-crescimento podem diferir daqueles obtidos utilizando os valores calculados das medidas de pobreza e não suas estimativas.

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu] = -\alpha\left[\frac{\varphi(\alpha-1)-\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right] \tag{23}$$

A dedução da expressão geral da elasticidade em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos da classe de medidas de pobreza de FGT para $\alpha > 1$ requer a especificação de um padrão de mudança na curva de Lorenz. Vamos admitir que a distribuição do rendimento x seja log-normal, o que equivale a adotar o padrão de mudança da curva de Lorenz definido em (8). Seja a função de densidade da distribuição log-normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)^2\right], \tag{24}$$

em que μ é o rendimento médio da população e β é o desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos. Visando obter um resultado preliminar que será utilizado na dedução, consideremos a seguinte integral:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta\right)f(x)dx$$

Integrando por partes, podemos fazer $u = -\beta\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}$, com $du = \beta(\alpha-1)\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{z}dx$,

e $v = xf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$, com $dv = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)f(x)dx$.

Consequentemente:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta\right)f(x)dx = -\beta\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}xf(x)\Bigg|_0^z - \beta(\alpha-1)\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-2}\frac{x}{z}f(x)dx$$

Observando que o primeiro termo desta expressão é nulo e utilizando (22), obtemos:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta\right)f(x)dx = -\beta(\alpha-1)[\varphi(\alpha-2)-\varphi(\alpha-1)] \tag{25}$$

De acordo com a expressão (11), a elasticidade em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos da classe de medidas aditivamente separáveis θ, sob o suposto log-normal, corresponde a:

$$\varepsilon[\theta|\beta] = \frac{\beta}{\theta}\int_0^H \frac{\partial P}{\partial x}x(p)[Z(p)-\beta]dp \tag{26}$$

Com base em $Z(p) = \frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta$, em que $Z(p)$ é a inversa da função de distribuição de uma variável normal reduzida, e lembrando que a classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e

Thorbecke $\varphi(\alpha)$ é um caso particular das medidas θ com $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{-\alpha}{z}\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}$, podemos reescrever a expressão (26) para a classe de medidas de FGT:

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta]=-\frac{\alpha\beta}{\varphi(\alpha)}\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta-\beta\right)f(x)dx$$

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta]=\frac{\alpha\beta^2}{\varphi(\alpha)}\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z}f(x)dx-\frac{\alpha\beta}{\varphi(\alpha)}\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta\right)f(x)dx$$

Utilizando (21), obtemos:

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta]=\frac{\alpha\beta^2}{\varphi(\alpha)}\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z}f(x)dx-\frac{\alpha\beta}{\varphi(\alpha)}\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta\right)f(x)dx$$
$$+\frac{\alpha\beta}{\varphi(\alpha)}\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{1}{2}\beta\right)f(x)dx \quad \textbf{(27)}$$

Substituindo (22) e (25) em (27):

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta]=\frac{\alpha\beta^2}{\varphi(\alpha)}[\varphi(\alpha-1)-\varphi(\alpha)]+\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{\varphi(\alpha)}[\varphi(\alpha-2)-\varphi(\alpha-1)]-\frac{\alpha^2\beta^2}{\varphi(\alpha)}[\varphi(\alpha-1)-\varphi(\alpha)]$$

Segue-se a expressão geral da elasticidade em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos da classe de medidas de FGT para $\alpha>1$:

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta]=\alpha(\alpha-1)\frac{\beta^2}{\varphi(\alpha)}[\varphi(\alpha-2)-2\varphi(\alpha-1)+\varphi(\alpha)] \quad \textbf{(28)}$$

Pode-se demonstrar que a elasticidade da medida de FGT com $\alpha=1$ em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos é:[13]

$$\varepsilon[\varphi(\alpha=1)|\beta]=\frac{\beta}{\varphi(\alpha=1)}\frac{\mu}{z}\phi\left(\frac{\ln z/\mu}{\beta}-\frac{1}{2}\beta\right)$$

As elasticidades em relação ao L de Theil e ao Índice de Gini, sob o Suposto Log-normal, podem ser obtidas por meio da multiplicação das expressões das elasticidades em relação ao desvio padrão dos logaritmos dos rendimentos pelas expressões (15) e (16), respectivamente. Recorrendo à expressão (8), vale lembrar que a adoção do suposto log-normal equivale a especificar um padrão de mudança da curva de Lorenz determinado por:

$$d\ln(L'(p))=[Z(p)-\beta]d\beta \quad \textbf{(29)}$$

Na literatura sobre este tema, usualmente recorre-se às elasticidades-desigualdade teóricas derivadas a partir do suposto Kakwani (1990). Pode-se demonstrar que, sob este suposto de mudança da curva de Lorenz, temos:[14]

---

[13] Esta expressão foi apresentada por Bourguignon (2002) mas, provavelmente por erro de digitação, com sinal contrário.

$$d\ln(L'(p)) = \frac{-\lambda[1-L'(p)]}{L'(p)} = \frac{-\lambda[\mu - x(p)]}{x(p)} \tag{30}$$

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|G] = \varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu] + \alpha\frac{\mu}{z}\frac{\varphi(\alpha-1)}{\varphi(\alpha)} \qquad \text{para} \quad \alpha > 0 \tag{31}$$

A expressão (30) corresponde a um padrão de mudança da curva de Lorenz distinto daquele definido pela expressão (29) e, em conseqüência, (31) corresponde a uma expressão para a elasticidade da medida de pobreza $\varphi(\alpha)$ em relação ao índice de Gini distinta daquela obtida a partir do suposto log-normal.

ANEXO II

Tabela 4. Características da distribuição do rendimento domiciliar *per capita*(1) nas Unidades da Federação (UF) de acordo com dados da PNAD de 2004 (excluída a antiga região Norte): número de pessoas, participação da população do estado no total (%), média (*μ*), L de Theil (*L*), medida de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke *α* = 2 (*FGT*) e as elasticidades de *FGT* em relação a *μ* [ε(FGT|*μ*)] e em relação a *L* [ε(*FGT*|*L*)], ambas calculadas pela metodologia Log-normal.

UF	n. pessoas	%	μ	L	*FGT*	$\varepsilon(FGT \mid \mu)$	$\varepsilon(FGT \mid L)$
AL	2.917.421	1,796	193,22	0,5878	0,2105	–1,133	1,072
BA	13.127.080	8,082	235,20	0,5453	0,1514	–1,309	1,288
CE	7.782.684	4,792	228,69	0,5865	0,1698	–1,260	1,297
MA	5.707.449	3,514	208,77	0,6841	0,2214	–1,051	1,119
PB	3.514.247	2,164	250,53	0,6269	0,1612	–1,264	1,409
PE	8.007.367	4,930	262,40	0,6649	0,1626	–1,215	1,409
PI	2.936.768	1,808	221,57	0,6343	0,1893	–1,171	1,241
RN	2.946.252	1,814	262,07	0,5877	0,1448	–1,272	1,341
SE	1.907.203	1,174	290,83	0,5578	0,1215	–1,395	1,498
TO	1.232.897	0,759	297,18	0,5452	0,1086	–1,425	1,520
DF	2.182.172	1,344	790,54	0,7500	0,0465	–1,477	2,365
ES	3.266.564	2,011	417,66	0,5344	0,0622	–1,619	1,896
GO	5.429.043	3,343	410,61	0,4893	0,0436	–2,007	2,508
MT	2.681.289	1,651	418,30	0,4798	0,0489	–1,865	2,169
MS	2.197.200	1,353	401,14	0,4904	0,0527	–1,798	2,074
MG	18.495.048	11,387	384,33	0,5177	0,0648	–1,682	1,948
PR	10.003.747	6,159	503,05	0,5294	0,0418	–1,852	2,393
RJ	14.015.642	8,629	573,34	0,5250	0,0313	–1,966	2,650
RS	10.464.840	6,443	525,08	0,5004	0,0414	–1,871	2,307
SC	5.648.717	3,478	513,58	0,3665	0,0223	–2,451	2,708
SP	37.952.444	23,367	551,12	0,4795	0,0290	–2,055	2,608

(1) Calculadas para os domicílios com rendimento domiciliar não-nulo (foram excluídos os domicílios com rendimento domiciliar nulo ou ignorados) expressos em reais de maio-junho de 2005 e adotando a linha de pobreza de R$ 150,00.

[14] Ver Kakwani (1990).

Referências Bibliográficas

AITCHISON, J. e BROWN, J.A. (1957) *The lognormal distribution: with special reference to its uses in economics*. Cambridge University Press.

BARROS, Ricardo P. e MENDONÇA, Rosane (1997) *O impacto do crescimento econômico e de reduções no grau de desigualdade sobre a pobreza*. Rio de Janeiro, IPEA, Texto para Discussão nº 528.

BECK, Nathaniel e KATZ, Jonathan N. (1995) What to do (and not to do) with time-series cross-section data. *American Political Science Review* 89 (3): 634-647, setembro de 1995.

BOURGUIGNON, François (2002) *The growth elasticity of poverty reduction: explaining heterogeneity across countries and time periods*. Delta Working Paper n. 2002-03.

CORSEUIL, Carlos Henrique e FOGUEL, Miguel N. (2002) *Uma sugestão de deflatores para rendas obtidas a partir de algumas pesquisas domiciliares do IBGE*. Texto para Discussão n.897. Brasília, IPEA.

DATT, G. e RAVALLION, M. (1992) Growth and Redistribution Component of changes in poverty measures: A decomposition with applications to Brazil and India in the 1980s. *Journal of Development Economics*, 38:275-295.

HOFFMANN, Rodolfo (1995) Relações entre pobreza absoluta, renda média e desigualdade da distribuição de renda. *Pesq. Plan. Econ. 25* (2):337–358, agosto de 1995.

____________________ (2005) Elasticidade da Pobreza em Relação à Renda Média e à Desigualdade no Brasil e nas Unidades da Federação. *Revista Economia*, julho de 2005.

KAKWANI, Nanak (1990) *Poverty and economic growth: with application to Côte d'Ivoire*. LSMS (Living Standarts Measument Study) Working Paper n. 63. Washington, The World Bank.

_________________ (2000) On Measuring Growth and Inequality Componentes of Poverty with application to Thailand. *Journal of Quantitative Economics*, v.16.

MARINHO, Emerson e SOARES, Francisco (2003) Impacto do crescimento econômico e da concentração de renda sobre a redução da pobreza nos estados brasileiros. Trabalho apresentado no *XXXI Encontro Nacional de Economia* (Encontro da ANPEC), 9 a 12 de dezembro de 2003, Porto Seguro, BA.

NEDER, Henrique D. (2004) Desenvolvimento de metodologias estatísticas aplicadas aos dados das PNADs. *In* Campanhola, C. e Graziano da Silva, J. (org.) *O novo rural brasileiro: rendas das famílias rurais,* vol. 5. Brasília, Embrapa.

THEIL, Henri (1967) *Economics and information theory*. Amsterdam, North–Holland.