Caos, Incerteza e teoria pós-keynesiana

Fernando Ferrari Filho*
Jorge Paulo de Araújo**

Introdução

O emprego de instrumentos topológicos na análise do espaço de fases de sistemas dinâmicos foi uma das mais importantes contribuições à matemática deste século. Os resultados e métodos originados formam o que se denominou teoria qualitativa de sistemas dinâmicos. Atualmente, alguns conceitos dessa teoria, que se relacionam ao que se convencionou chamar caos determinístico, alcançaram grande divulgação.

Os problemas que geraram o conceito de caos determinístico estão relacionados aos sistemas de equações diferenciais que descrevem órbitas no sistema solar e fluxos turbulentos em mecânica dos fluidos. Hoje, de maneira geral, se procura formular modelos, para os quais os métodos provenientes da análise original sejam apropriados, relacionados aos fenômenos em que determinadas variáveis aparentam comportamentos erráticos. Na teoria econômica, por exemplo, algumas séries apresentam esse comportamento, entre as quais os modelos teóricos do *mainstream* que têm como alicerce os cálculos probabilísticos.

Os modelos em que se supõe que os agentes econômicos pautam suas decisões através de algum tipo de cálculo probabilístico são criticados por economistas pós-keynesianos. Segundo esses, não é através da análise de séries estatísticas ou de crenças justificadas no passado que os agentes decidem suas ações futuras. Assim sendo, as situações de tomadas de decisão são classificadas como ambientes de verdadeira incerteza.

Neste artigo, pretendemos expor os conceitos de incerteza, segundo a teoria pós-keynesiana, e caos determinístico, visando, assim, mostrar que os conceitos de dependência sensível e bifurcação da teoria do caos podem ser úteis para a teoria pós-keynesiana, apesar de termos ciência de que essa seja *a priori* determinística.

Keynes e a incerteza não-probabilística: a visão pós-keynesiana

Há anos uma das questões que tem suscitado grande controvérsia entre as teorias do *mainstream* e pós-keynesiana é a natureza das expectativas acerca do futuro nos modelos macroeconômicos. Em outras palavras, como os agentes formam suas expectativas para poupar ou investir? Por que eles retêm moeda? Para o *mainstream* as tomadas de decisão dos agentes são realizadas conforme os microfundamentos tanto da racionalidade objetiva maximadora desses quanto da lógica de equilíbrio como sistemática dos modelos de *market clearing*, pelo menos no longo prazo. Por sua vez, para os pós-keynesianos a resposta envolve incerteza sobre os resultados futuros e as conseqüências das decisões econômicas em manter liquidez.

Keynes foi um dos primeiros economistas a analisar a importância da incerteza na dinâmica dos eventos econômicos. No seu artigo de 1937, intitulado *The General Theory of Employment*, fica claro que a incerteza é um ponto central da defesa da *The General Theory of Employment, Interest and Money*, de agora em diante denominada *GT*. Explicitamente, incerteza é a razão principal para a ocorrência de flutuações de investimento e preferência pela liquidez.

Em Keynes, em uma economia de expectativas, na qual incerteza não pode ser modelada de forma determinística, as tomadas de decisão dos agentes econômicos são realizadas a partir de convenções. Nas palavras dele, "it would be foolish, in forming our expectations, to attach great weight to matters which are very uncertain ... The state of long-term expectation, upon which our decisions are based, does not solely depend, therefore, on the most probable forecast we can make. It also depends on the *confidence* with which we make this forecast" (Keynes, 1964, p.148). Nesse sentido, porque o futuro é incerto, os investidores, por exemplo, seguem seus *animal spirits* - estado de confiança dos indivíduos construído a partir de convenções.

Mas o que é incerteza? Segundo Keynes,

> "By 'uncertain' knowledge, let me explain, I do not mean merely to distinguish what is known for certain from what is only probable. The game of roulette is not subject, in this sense, to uncertainty ... Or ... the expectation of life is only slightly uncertain. Even the weather is only moderately uncertain. The sense in which I am using the term is that in which the prospect of a European war is uncertain, or the price of copper and the rate of interest twenty years hence ... About these matters there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply *do not know*" (Keynes, 1973c, pp.113-4, itálicos adicionados).

Quando Keynes diz que a roleta não é incerta, o que quer dizer é que incerteza não está relacionada às probabilidades obtidas com freqüências relativas. Por sua vez, ele apresenta, como exemplo de incerteza, o preço do cobre nos próximos vinte anos. Keynes pode estar querendo dizer que vinte anos é um período tão longo que condições sociais, econômicas e políticas, vigentes no passado, já não existam e, portanto, as formas de extrapolação dos eventos se modificaram. Em síntese, a noção de incerteza em Keynes é que as pessoas são ignorantes sobre o futuro. Em outras palavras, Keynes define como incerto os fenômenos para os quais não temos base científica para atribuir probabilidades.

A passagem acima, nos remete à distinção entre risco e incerteza, sugerida tanto por Keynes, em seu *A Treatise on Probability*, quanto por Knight, em *Risk, Uncertain and Profit*. Risco é a situação na qual a tomada de decisão acerca de um determinado evento é realizada em um contexto em que a distribuição de probabilidade desse é conhecida, ao passo que incerteza caracteriza a situação na qual a tomada de decisão sobre um evento específico é realizada em um contexto em que inexiste uma distribuição de probabilidade para o mesmo. Assim sendo, a adoção de convenções por parte dos agentes econômicos é a solução parcial dos problemas de incerteza.

Pois bem, a essência da revolução keynesiana consiste em mostrar que, em uma economia monetária, subentende-se, sujeita à natureza expectacional, flutuações na demanda efetiva e no nível de emprego ocorrem, porque, sendo o futuro incerto, os indivíduos preferem reter moeda e, por conseguinte, suas decisões de gastos são postergadas. Nas palavras de Keynes, “booms and depressions are phenomena peculiar to an economy in which ... *money is not neutral*” (Keynes, 1973b, p.411). Nesse sentido, em um mundo no qual as pessoas não conseguem prever o futuro,

> “previous expectations are liable to disappointment and expectations concerning the future affect what we do to-day. It is when we have made this transition that the peculiar properties of money as a link between the present and the future must enter into our calculations ... Money ... is, above all, a subtle device for linking the present to the future; an we cannot even begin to discuss the effect of changing expectations on current activities except in monetary terms ... So long as there existis any durable asset, it is capable of possessing monetary attributes and, therefore, of giving rise to the characteristic problems of a monetary economy” (Keynes, 1964, pp.293-4).

A teoria pós-keynesiana resgata o referido *insight* de Keynes: flutuações de demanda efetiva estão relacionadas à interação entre expectativa e incerteza. Assim sendo, os pós-keynesianos, ao investigarem os principais trabalhos de Keynes reunidos nos *Collected Writings*, desenvolvem uma estrutura teórico-analítica na qual a revolução keynesiana é analisada em um contexto de teoria monetária da produção. Nessa, incerteza desempenha um papel fundamental.

Para os pós-keynesianos, as economias monetárias são inerentemente instáveis devido ao fato de que as tomadas de decisão dos agentes econômicos têm como base um ambiente de incerteza. Nesse contexto, as expectativas dos agentes econômicos são modificadas constantemente ao longo do tempo e, portanto, elas não podem ser "estabilizadas", conforme supõem os modelos de expectativas racionais da teoria do *mainstream*. Em outras palavras, em uma economia de expectativas os fenômenos não são repetidos como se conhecessemos a função de probabilidade de um evento qualquer.

Como se representa incerteza no modelo econômico? Lawson (1988) apresenta uma taxinomia particular ao dividir incerteza entre probabilidade mensurável e não-mensurável. Para Keynes e pós-keynesianos, a incerteza é uma situação de "probabilidade" não-mensurável, ao passo que para o *mainstream* incerteza é risco, pois é uma situação de probabilidade mensurável. Resumindo, incerteza é subjetiva e não probabilística.

Davidson (1994), por sua vez, distingue as expectativas entre processos ergódico e não-ergódico para enfatizar a natureza da incerteza não-mensurável. Processo ergódico é o processo de risco movendo-se ao longo do tempo no qual a incerteza é mensurável pelas leis da probabilidade. Nas palavras de Davidson (Ibid., p.90), "the future is merely the statiscal reflection of the past". Por sua vez, processo não-ergódico é o processo movendo-se ao longo do tempo no qual a incerteza é não-mensurável e, portanto, as leis da probabilidade não se aplicam. Em síntese, risco, por supostos probabilísticos, pode ser reduzido a certeza, enquanto incerteza não.

Indo ao encontro da taxonomia de Davidson, em um mundo não-ergódico, em que há incerteza, os contratos monetários e a demanda por liquidez são fundamentais para as tomadas de decisão na presença de incerteza. Nesse sentido, as decisões dos agentes, sob incerteza em um mundo real não-ergódico, rejeitam qualquer decisão probabilística.

A crítica pós-keynesiana à teoria do *mainstream*, portanto, é que os agentes não utilizam probabilidades para tomar suas ações. Dessa maneira, a concepção pós-keynesiana argumenta que, quando as ações dos agentes têm como base probabilidades, a teoria tradicional possui uma visão determinista: os eventos passados determinam as ocorrências futuras.

É a existência de incerteza que explica a volatilidade do investimento e, por conseguinte, a racionalidade por preferência pela liquidez, ocasionando, assim, flutuações de demanda efetiva e desemprego. A decisão de investir tem como base a ótica da intuição, qual seja: o *animal spirits* de Keynes. Por sua vez, a decisão de entesourar moeda, também uma convenção, permite manter liquidez e postergar as irreversíveis tomadas de decisões. Incerteza, portanto, é a razão para as pessoas reterem moeda.

Keynes, no capítulo 12 de sua *GT*, mostrou que as expectativas dos individíduos não são determinadas pelos fundamentos de longo prazo que estão relacionados ao rendimento esperado de um ativo, uma vez que as informações necessárias à formação dessas podem não existir. Para Keynes, a atividade econômica é operacionalizada conforme o calendário de um tempo histórico: as decisões dos agentes são realizadas tendo como referência a irreversibilidade do passado e a imprevisibilidade e o desconhecimento do futuro. Nas palavras de Keynes, “philosophically speaking, it cannot be uniquely correct, since our existing knowledge does not provide a sufficient basis for a calculated mathematical expectation. In point of fact, all sorts of considerations enter into the market valuation which are in no way relevant to the prospective yield” (Keynes, 1964, p.152). Assim sendo, o cenário futuro, sob o qual se tem que tomar decisões, é inferido a partir de uma convenção, cuja “ essence ... lies in assuming that the existing state of affairs will continue indefinitely, except in so far as we have specific reasons to expect a change. This does not mean that we really believe that the existing state of affairs will continue indefinitely” (Ibid., p.152).

Segundo Davidson (1994, p.88), as expectativas racionais supõem que “rational knowledge regarding future consequences of todays’s decisions involves a confluence of the estimated (subjective) probabilities and objective (given by immutable laws) probabilities that governed past and current economic events”. Além do mais, “the future is not calculable, even if the decision maker is competent to perform the mathematical operations necessary to calculate probabilities of conditional events given the necessary information. This is uncertainty (or ignorance about future consequences) in the sense of Keynes and the Post Keynesians" (Ibid., p.89).

Se situações de incerteza fossem reduzidas a situações de risco, admitindo-se que o futuro é conhecido, então os problemas econômicos desapareceriam.

Pós-keynesianos, portanto, rejeitam o axioma da ergodicidade da hipóteses das expectativas racionais. Davidson (1982-83, pp.188-9), por exemplo, argumenta que a hipótese de expectativas racionais releva a distinção entre risco e incerteza desenvolvida por Keynes e Knight. A teoria do *mainstream* reduz incerteza à situação de risco. Contudo, a incerteza é o que está por trás dos fenômenos macroeconômicos.

A teoria determinística do caos

Entendemos por teoria determinística aquela teoria na qual o transcurso dos fenômenos no tempo está descrito por regras, de maneira que um estado específico, em determinado instante, fixa, no mínimo, os estados futuros.

Eventualmente, as regras se expressam através de equações diferenciais. Uma equação diferencial é uma expressão que relaciona as variações de determinada quantidade da seguinte forma

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x^{'}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right),$$

em que $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ indicam as derivadas sucessivas de $x(t)$. Conhecidos os valores $x(t_0), x^{'}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$ em um instante t_0, todos os outros valores da quantidade x passam a ser determinados para qualquer valor de t, tanto $t < t_0$ quanto $t > t_0$. Assim sendo, caso tenhamos um fenômeno modelado através de uma equação diferencial, então qualquer instante t_0 condensa toda a informação passada e futura da variável. Neste sentido, o estado da variável no instante t_0 determina todos os estados futuros e manifesta os estados passados.

Um sistema dinâmico é descrito por um sistema de N equações diferenciais de primeira ordem, tal que

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, \ldots x_N\right), \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

O parâmetro t é interpretado como o tempo. Uma trajetória é um conjunto de soluções $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$ das equações acima, tal que, para um valor especificado de t, por exemplo, $t=0$, tenhamos valores determinados $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_N(0)$.

Escrevendo na forma vetorial, definimos o campo

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_N) = (f_1(x_1, x_2, \ldots x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots x_N)),$$

e as trajetórias

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \quad .$$

Desta maneira, o sistema é expresso como

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \, .$$

Podemos, também, definir um sistema dinâmico discreto como N equações,

$$x_i(n+1) = f_i(x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)), i = 1,2, \ldots, N \quad ,$$

em que o parâmetro n é igual a $\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$. Neste sentido, um conjunto de soluções das equações é um conjunto de funções $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)$ que satisfazem-nas.

Um sistema discreto não possui as mesmas propriedades dos sistemas contínuos, mas muitos fenômenos difíceis de descrever em sistemas contínuos são facilmente percebidos nos discretos.

As soluções de muitos sistemas dinâmicos mostram um comportamento relativamente simples, qual seja, elas apresentam trajetórias periódicas de período T, isto é, $x(t) = x(T+t)$, ou trajetórias constantes $x(t) = c$. As outras trajetórias se aproximam ou se afastam dessas soluções, bem como se originam de alguma e convergem para outra. As soluções periódicas e constantes nos fornecem a “ossatura” das trajetórias, de tal maneira que, a partir delas, inferimos o comportamento das outras.

Por exemplo, definimos para $x \in [0,1]$ o conhecido campo

$$f(x) = \mu\left(1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right),$$

que chamamos de tenda, dando origem ao sistema

$$x_{n+1} = \mu\left(1-2\left|x_n - \frac{1}{2}\right|\right).$$

Se $\mu < \frac{1}{2}$, temos uma única solução que é constante: $x^* = 0$. Caso $\mu = \frac{1}{2}$, temos uma situação em que todos os pontos $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ determinam trajetórias constantes. Se $\mu > \frac{1}{2}$, temos duas trajetórias constantes

$$x^* = 0 \text{ e } x^* = \frac{2\mu}{1+2\mu}.$$

Os pontos acima são ditos pontos de equilíbrio do sistema, pontos fixos ou pontos estacionários. Em aplicações como a dada acima é fácil encontrar os referidos pontos, pois devem ser tais que $f(x) = x$.

Vamos definir o *shift* de Bernoulli como:

$$f(x) = 0.a_2a_3\ldots a_k\ldots = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{a_i}{2^i},\quad x \in [0,1),$$

em que os números x do intervalo $[0,1]$ estão expressos através de sua expansão binária $x = 0.a_1a_2\ldots a_k\ldots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$, sendo $a_i \in \{0,1\}$. Para evitar ambigüidades, excluímos as expansões ditas 1 terminantes. Logo, a expansão de $\frac{1}{2}$ é 0.1 e não $\frac{1}{2} = 0.0111\ldots$. Definimos $f(1) = 0$.

Observe que o *shift* apenas elimina o primeiro algarismo da expansão de x, deslocando o número para a esquerda.

Imaginemos, agora , que as seqüências $x_{t+1} = f(x_t)$ descrevam diferentes trajetórias da variável x para $t = 0,1,2,\ldots$. Alguém que, em determinado instante

$t = k$, tenha observado o valor $x_k = 0.b_1b_2b_3\cdots$ pode, assim, prever todos os estados futuros $x_{k+1} = 0.b_2b_3b_4\cdots$, $x_{k+2} = 0.b_3b_4\cdots$ etc. No entanto, ele(a) não pode saber o valor da variável no instante anterior $t = k-1$, pois $x_{k-1} = 0.0b_2b_3b_4\cdots$ ou $x_{k-1} = 0.1b_2b_3b_4\cdots$ Este é um caso em que podemos prever o futuro mas não determinar com exatidão o valor da variável no passado.

No caso do *shift* de Bernoulli, observemos que o campo pode ser escrito como

$$f(x) = 2x \text{, se } 0 \le x < \frac{1}{2}\text{; } f(x) = 2x-1\text{, se } \frac{1}{2} \le x < 1\text{; e } f(1) = 0.$$

Então, o fenômeno que não podemos determinar os valores anteriores da variável é mera conseqüência do campo não ser uma aplicação injetora. Esta propriedade também está presente na tenda.

No *shift* de Bernoulli não é difícil ver a existência de trajetórias periódicas. Por exemplo,

$$x_0 = 0.1010101\ldots = \frac{2}{3}, x_1 = 0.010101\ldots = \frac{1}{3}, x_2 = 0.10101\ldots = x_0$$

é uma trajetória de período 2. Ainda,

$$x_0 = 0.1001001\ldots = \frac{4}{7}, x_1 = 0.001001\ldots = \frac{1}{7}, x_2 = 0.01001\ldots = \frac{2}{7}, x_3 = 0.1001\ldots = x_0$$

é um ciclo de comprimento 3. Desta maneira, é fácil ver que podemos gerar ciclos de comprimento $k = 2,3,4\ldots$.

Se a resposta de um sistema permanece em torno da trajetória $x(t)$, quando perturbamos levemente a condição inicial x_0, dizemos que $x(t)$ é estável. Formalmente, dizemos que a órbita $x(t)$ é estável se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\text{, tal que } |x(0) - y(0)| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

Uma trajetória $x^*(t)$ é dita assintoticamente estável se as trajetórias $x(t)$ que iniciam nas proximidades de $x^*(0)$ convergem para $x^*(t)$. Matematicamente, $x^*(t)$ é assintoticamente estável se existe $\delta > 0$, tal que, qualquer que seja a trajetória $x(t)$, se

$\left|x(0)-x^*(0)\right|<\delta$, então $\lim_{t\to\infty}\left|x(t)-x^*(t)\right|=0$.

No caso da tenda, começamos a analisar a dinâmica das trajetórias estudando como as demais trajetórias se comportam em relação àquelas que são constantes. Se $\mu<\frac{1}{2}$, o único ponto de equilíbrio é $x^*=0$. Para $0<x\le\frac{1}{2}$, temos $\frac{|f(x)|}{|x|}=2\mu$, ou seja, $|f(x)|=2\mu|x|<|x|$. Assim, $x_0>x_1>x_2>\ldots\ge 0$. As trajetórias, se convergentes, devem necessariamente convergir para pontos fixos da aplicação f, caso essa seja contínua, pois se $x_n\to x$, então $x_{n+1}=f(x_n)\to f(x)=x$. Se $\mu<\frac{1}{2}$, o único ponto de equilíbrio é 0, de maneira que $x_n\to 0$. Neste caso, compreendemos o comportamento geral das trajetórias, qual seja: todas convergem para 0 que é uma solução assintoticamente estável.

Para $\mu>\frac{1}{2}$, existem dois pontos de equilíbrio

$$x^*=0 \text{ e } x^*=\frac{2\mu}{1+2\mu},$$

mas, nesse caso, os dois pontos são de equilíbrio instável, como veremos a seguir. Se $x^*=0$, temos

$$\frac{|f(x)|}{|x|}=2\mu>1, \text{ para } 0<x\le\frac{1}{2},$$

ou seja, $|f(x)|>2\mu|x|$, o que implica $x_0<x_1<x_2<\cdots$. Trajetórias que começam em torno de $x^*=0$, não importando quanto perto de $x^*=0$, não permanecem próximas a $x^*=0$. Para $x^*=\frac{2\mu}{1+\mu}$, um raciocínio semelhante conduz ao mesmo resultado, pois $\frac{\left|f(x)-x^*\right|}{\left|x-x^*\right|}=2\mu>1$ para x na vizinhança de x^* e, então, $\left|f(x)-x^*\right|>2\mu\left|x-x^*\right|$;

ou seja, $\left|x_1 - x^*\right| > \left|x_0 - x^*\right|$.

Mostremos de maneira geral, tanto no caso da tenda, quanto no *shift* de Bernoulii que as trajetórias constantes ou periódicas não são estáveis .

Seja $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p = x_0$ uma trajetória periódica de comprimento p definida pelo campo f. Suponhamos que o campo seja derivável na vizinhança destes pontos. Então, $\left(f^p\right)'\left(x_j\right) = f'\left(x_o\right) f'\left(x_1\right) \ldots f'\left(x_{p-1}\right) = \lambda$ para qualquer $j = 1, 2, \ldots, p-1$.

Para o *shift* de Bernoulli a derivada é $\left|f'(x)\right| = 2$, então $\left(f^p\right)'\left(x_j\right) = \lambda = 2^p$, e para a tenda $\left(f^p\right)'\left(x_j\right) = \pm(2\mu)^p$, onde as derivadas existem.

Consideremos um ponto $x_j + \delta$ próximo de x_j. Analisemos como se comporta a trajetória que começa em $x_j + \delta$ em relação àquela que começa em x_j. A última retorna a x_j após p iteradas, ao passo que a primeira está em $f^p\left(x_j + \delta\right)$. Então, $f^p\left(x_j + \delta\right) \cong f^p\left(x_j\right) + \left(f^p\right)'\left(x_j\right)\delta$, ou $f^p\left(x_j + \delta\right) \cong x_j + \lambda\delta$. Na segunda iteração $f^p\left(x_j + \lambda\delta\right) \cong x_j + \lambda^2\delta$. Se $|\lambda| > 1$, nos nossos exemplos $|\lambda| = 2$ ou $(2\mu)^p$, então não importa se escolhemos δ cada vez menor, as trajetórias divergem.

Concluindo, no *shift* de Bernoulli nenhuma órbita periódica é estável.

Por sua vez, no caso da tenda, chegamos à conclusão que se $\mu > \frac{1}{2}$, então as duas trajetórias constantes $x^* = 0$ e $x^* = \frac{2\mu}{1 + 2\mu}$ não são estáveis.

Para a tenda, o valor do parâmetro "$\mu = 1$/2" marca uma mudança no sistema. Este passa de um único ponto de equilíbrio estável para a existência de dois pontos de equilíbrio instáveis. Isto exemplifica o que chamamos uma bifurcação. De maneira genérica, pontos de bifurcação são aqueles valores do parâmetro em que o sistema altera qualitativamente a sua dinâmica. O fundamental sobre bifurcação é que em um ponto desses ocorre uma mudança descontínua na estrutura das soluções em relação à variação do parâmetro. O razoável seria esperar que uma pequena alteração do parâmetro não trouxesse grandes alterações no aspecto geral das soluções. Contudo, em uma bifurcação não temos isto.

A maneira mais simples de perceber o que significa sensibilidade às condições iniciais é no *shift* de Bernoulli.

Sejam dois pontos x_0 e y_0, tais que

$$x_0 = 0.a_1a_2\ldots a_k00\ldots \text{ e } y_0 = 0.a_1a_2\ldots a_k\underbrace{11\ldots1}_{m=vezes}00\ldots.$$

A distância entre tais pontos é menor que $\frac{1}{2^k}$, mas, depois de k interações, temos

$$x_k = 0 \text{ e } y_k = 0.11\ldots11 = 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Assim sendo, podemos sempre escolher números arbitrariamente próximos, tais que, após um certo número de iterações, as duas trajetórias distam aproximadamente 1. Isto é o que chamamos de sensibilidade às condições iniciais. Em outras palavras, na proximidade de qualquer ponto sempre podemos determinar outros pontos tão próximos quanto desejarmos, mas cuja trajetória é completamente diferente, depois de um certo intervalo de tempo. Neste sentido, se a dinâmica que estamos estudando apresenta esta característica, então, estamos seriamente limitados na nossa capacidade de prever os estados futuros em períodos de tempo arbitrários.

Na aplicação tenda com $\mu = 1$, podemos observar a sensibilidade às condições iniciais facilmente. Observemos que no intervalo $\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]$ a iterada f^k é um segmento de reta de declividade $\pm 2^k$, em que $f^k\left(\frac{m}{2^k}\right) = 0$, se m é par, e $f^k\left(\frac{m}{2^k}\right) = 1$, se m é ímpar. Isto significa que após k iterações a distância entre os pontos pode ser aproximadamente 1 para valores iniciais no intervalo acima.

A existência de sistemas que apresentam sensibilidade às condições iniciais é usualmente referida através de um episódio célebre. Em 1955, um meteorologista chamado Edward Lorenz, após simplificar de forma bastante acentuada um modelo atmosférico, simula as equações em um computador para obter valores sucessivos para, digamos, as variáveis x, y, z. Uma vez observada uma longa seqüência x_n, y_n, z_n gerada pelo computador, ele resolveu retornar a uma etapa intermediária x_k, y_k, z_k e reiniciar a gerar a seqüência a partir do ponto escolhido. A nova seqüência não reproduziu a antiga. Lorenz, então, se deu conta que não havia informado os números corretos ao computador: ao introduzir os números, sem perceber, omitiu os três últimos algarismos de cada um deles. Esta perturbação fez com que a nova seqüência diferisse da anterior. Lorenz constatou que a evolução das duas seqüências descreviam condições atmosféricas bastante diferentes. A conclusão foi que, se as equações que regem a atmosfera real fossem semelhantes às equações acima, seria impossível prever os estados atmosféricos. Assim, uma pequena perturbação, resultante de erros de medição, conduz a estados posteriores consideravelmente diversos.

Para se referir à existência deste tipo de comportamento, tem-se usado o termo "caos determinístico"; isto é, a existência de comportamento irregular de soluções de sistemas dinâmicos.

A origem da análise de sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico inicia no fim do século XIX com Henry Poincaré (1845-1912). Entre 1892 e 1899, Poincaré publicou um importante trabalho intitulado *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Nesta obra, ele estabelece limites aos métodos quantitativos derivados da mecânica celeste clássica. Poincaré estabelece esta limitação de maneira sutil, qual seja: embora possamos formular modelos que se traduzam em sistemas de equações diferenciais que sabemos possuir soluções definidas, temos limites quanto à descrição matemática destas trajetórias. Neste sentido, a existência de sensibilidade às condições iniciais tornam irrelevantes do ponto vista da previsão a descrição possível.

Conclusão

Como vimos, rapidamente, a teoria do caos é uma teoria determinista. De fato, não existe nada de aleatório nos modelos. O estado atual de um certo sistema determina inteiramente o transcurso futuro. O que a teoria nos assegura é que o acesso que podemos ter a esse futuro é restrito.

A idéia de bifurcação é que os sistemas podem sofrer alterações qualitativas quando são dependentes de determinados parâmetros de forma que a passagem de uma dinâmica para outra não se dá continuamente. As estruturas atuais não revelam a dinâmica futura na vizinhança de uma bifurcação. A observação atual é incapaz de revelar o estado futuro, exceto se conhecemos o comportamento dos parâmetros.

Pois bem, tendo como referência a idéia acima, a hipótese da teoria do *mainstream* de que fenômenos econômicos são essencialmente determinísticos parece ser fragilizada, visto que pequenas alterações nas condições iniciais do modelo proposto conduzem a resultados bem diversos. Nesse sentido, podemos argumentar que, quaisquer que sejam os fenômenos econômicos, há algo em comum entre modelo econômico expectacional e teoria do caos: a impossibilidade ou limitação na capacidade de previsão.

É desse ponto de vista que a teoria do caos pode ser útil para a teoria pós-keynesiana, abandonando a idéia de fundamentar incerteza numa limitação de teorias estatísticas. Formalmente, o argumento pós-keynesiano é que, em larga margem, ocorrências passadas não determinam o futuro, ou que essa determinação nos é inacessível. Se conservássemos a última alternativa, estaríamos de acordo com a teoria do caos, preservando uma concepção e mundo determinísticos, mas limitando as possibilidades de previsão. Conservaríamos, assim, a incerteza como fenômeno da impossibilidade de prever. Mas, conservar o conceito de incerteza não é o essencial para a teoria pós-keynesiana?

Referências

BAUMOL, W. & BENHABIB, J. (1989). Chaos, significance, mechanism and applications. *Journal of Economic Perspective*, 3(1):77-105, Winter.

BENHABIB, J. & NISHIMURA, K. (1979). The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisector models of optimal economic growth. *Journal of Economic Theory*, 21(3):421-44, December.

CARDIM DE CARVALHO, F. (1992). *Mr.Keynes and the Post Keynesians: principles of macroeconomics for a monetary production economy*. Aldershot: Edward Elgar.

DAVIDSON, P. (1982-83). Rational expectations: a fallacious for studying crucial decision-making processes. *Journal of Post Keynesian Economics*, 5(2):182-98, Winter.

_____. (1994). *Post Keynesian Macroeconomic Theory*. Aldershot: Edward Elgar.

DAY, R. (1982). Irregular growth cycles. *American Economic Review*, 72(3):406-14, June.

_____. (1983). The emergence of chaos from classic economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 98(2):201-13, May.

EKELAND, I. (1987). *O Cálculo e o Imprevisto*. São Paulo: Martins Fontes.

GOODWIN, R. (1990). *Chaotic Economic Dynamics*. Oxford: Claredon Press.

KEYNES, J.M.. (1964). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. New York: Harcourt Brace.

_____. (1973a). *A Treatise on Probability*. London: Macmillan (The collected writings of John Maynard Keynes, vol.VIII).

_____. (1973b). *The General Theory and After: preparation*. London: Macmillan (The collected writings of John Maynard Keynes, edited by D.Moggridge, vol.XIII).

_____. (1973c). *The General Theory and After: defence and development*. London: Macmillan (The collected writings of John Maynard Keynes, edited by D.Moggridge, vol.XIV).

KNIGHT, F.H. (1921). *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston: Houghton-Mifflin.

LAWSON, T. (1988). Probability and uncertainty in economic analysis. *Jouranl of Post Keynesian Economics*, 11(1):38-65, Fall.

LORENZ, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130-41, March.

_____ (1995). *La Esencia del Caos*. Madrid: Editorial Debates, S.A..

OTT, E. (1993). *Chaos in Dynamics Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.

POINCARÉ, H. (1893). *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris: Gauthiers-Villar.

RASBAND, S. (1989). *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. New York: John Wiley & Sons.

TEMAM, R. (1988). *Infinite-Dimensional Dynamics Systems in Mechanics and Physics*. New York: Springer-Verlag.