

## EQUILÍBRIO ESTATÍSTICO DE MERCADO — UMA APRESENTAÇÃO DIDÁTICA DE UMA CRÍTICA SUTIL

Eleutério F. S. Prado\*  
Jorge Eduardo de C. Soromenho

### 1 Introdução

Sabemos, hoje, que o programa de pesquisa constituído pela teoria do equilíbrio geral — na versão Arrow-Debreu — não conseguiu resolver os seus problemas centrais. Embora a existência do equilíbrio competitivo tenha sido provada, a questão da unicidade não encontrou solução satisfatória (SOROMENHO, 1997). A não ser ao custo de hipóteses muito restritivas, não há como descartar a possibilidade de múltiplos equilíbrios para o mesmo conjunto de fundamentos (preferências, tecnologia etc.). Ademais, mesmo quando é possível provar a existência de um ponto fixo no processo de *tâtonnement*, isto não assegura que esse processo seja estável. Ingrao e Israel em *The invisible hand...* resumem assim a conclusão obtida do trabalho de vários teóricos como Scarf, Sonnenschein, Debreu, Mantel e outros a respeito da estabilidade:

*"... a análise matemática da teoria do equilíbrio geral, no contexto das hipóteses clássicas codificadas pela axiomatização de Debreu, levou a um resultado claro. Há uma contradição entre os objetivos da teoria e as consequências derivadas do sistema de hipóteses que constituem a sua estrutura.... A grande contradição revelada é a seguinte: uma das maiores forças da teoria<sup>3/4</sup> a reivindicação de que é capaz de produzir resultados significativos a partir de hipóteses muito gerais sobre o comportamento dos agentes econômicos<sup>3/4</sup> transformou-se em sua grande fraqueza... é impossível obter qualquer resultado significativo, a menos que se faça uso do recurso ilusório de impor condições muito restritivas nas funções agregadas" (Ingrao, Israel, 1990, p. 346)*

Ora, supor, por exemplo, que os bens são substitutos brutos no agregado para provar a unicidade e a estabilidade do equilíbrio vem a ser assumir algo que não pode ser derivado dos axiomas da teoria, axiomas estes que definem os comportamentos possíveis dos agentes econômicos, dos quais tudo o mais deveria ser derivado. Tais problemas surgem, entretanto, num contexto de análise econômica determinista que se pauta pela busca de exatidão demonstrativa: uma crítica ao individualismo metodológico adotado generalizadamente pelos teóricos neoclássicos recentes, contudo, não vem a ser uma crítica interna à própria teoria neoclássica de caráter walrasiano, tal como foi sistematicamente polida no último meio século sob um esforço balizado pelos cânones da topologia.

Não seria, porém, o caso de colocar em questão o próprio contexto de análise econômica determinista? Para tanto, apresentamos aqui uma generalização bem simples do modelo neoclássico, formulado com base em artigo de Duncan Foley (Foley, 1994), a qual se caracteriza por aproveitar certos os recursos teóricos desenvolvidos em mecânica estatística com o propósito de romper com o determinismo do modelo padrão. Essa generalização, sem violar os axiomas básicos do modelo de equilíbrio geral e sem assumir a existência de custos de transação, permite chegar a uma construção com as seguintes características diferenciais: a) os preços são variáveis estocásticas; b) o equilíbrio do sistema é estatístico; e c) o tempo é considerado irreversível.

\* Pesquisadores do Núcleo de Pesquisa em Sociedade Artificiais (NEURIN) e professores da FEA/USP.

Neste modelo generalizado, os problemas da unicidade e da estabilidade desaparecem, mas com um custo bem alto para a teoria neoclássica. Bem entendido, ele transforma em fátuo as seguintes realizações do programa de pesquisa em equilíbrio geral que Frank Hahn anunciou como algo sólido:

"... foi provado nos anos cinquenta que, sob certas condições, sempre existe no mínimo um conjunto de preços economicamente significativos, ou seja, não negativos, sob os quais as decisões tomadas individualmente se ajustam — ou seja, tornam-se consistentes.

*Qualquer que seja a crítica a ser feita depois à teoria, eu gostaria de lembrar que esse resultado é uma grande conquista intelectual. É preciso ir muito longe numa atitude de torpeza filistéia para não apreciar a natureza inteiramente surpreendente desse resultado ou para não se abalar com o modo elegante com que é provado. Ele chega à espantosa afirmação segundo a qual é logicamente possível descrever uma economia em que milhões de agentes, orientando-se apenas pelos seus próprios interesses e respondendo apenas às esparsas informações do sistema de preços, podem não obstante chegar a uma alocação coerente dos recursos econômicos<sup>1</sup>.*

Há ainda, porém, algo mais. Sob certas condições, é possível mostrar que a alocação de bens obtida aos preços que tornam as escolhas consistentes — vamos chamá-los de preços de equilíbrio — é tal que não há qualquer nova alocação possível de bens entre as famílias que possa ser por elas preferida em relação a alocação de equilíbrio. Qualquer que seja a nova alocação, pelo menos uma família fica com uma cesta de bens que não é por ela preferida em relação à cesta de equilíbrio. Dizemos que esta alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

*É possível ainda estabelecer um resultado mais profundo e potencialmente mais útil. Suponhamos que o Governo queira modificar uma alocação eficiente no sentido de Pareto. Se estiver completamente informado sobre a situação, ele será tolo se escolher uma alocação não eficiente nesse sentido, pois assim estaria perdendo de graça a oportunidade de permitir que todos os cidadãos alcançassem uma posição por eles mesmos preferida. É possível mostrar (de novo, sob certas condições) que se o Governo puder impor qualquer redistribuição de propriedade dos bens aos cidadãos para alcançar uma certa distribuição de bens, esta poderia ser obtida numa economia não planejada; esta última alcançaria uma alocação de equilíbrio que coincidiria com a alocação escolhida pelo Governo. Dito de outro modo, toda alocação eficiente no sentido de Pareto pode ser buscada descentralizadamente pela mão invisível. Estes dois resultados são conhecidos como os teoremas fundamentais do bem-estar econômico". (Hahn, 1982).*

## 2 O modelo básico

Fazendo abstrações drásticas, é possível apresentar o modelo de Foley de um modo simples. Seja uma economia de produtores independentes em que as duas únicas mercadorias existentes são produzidas apenas com trabalho; cada uma delas é produzida sempre com uma mesma técnica. Neste caso, a produção, como se sabe, pode ser representada pelas funções  $c_i = \alpha_i l_i$ , em que  $c_i$  é a quantidade produzida da mercadoria  $i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\alpha_i$  é o coeficiente trabalho-produto e  $l_i$  é a quantidade de trabalho empregada. Admitiremos que, em razão da existência de uma restrição institucional, a jornada de

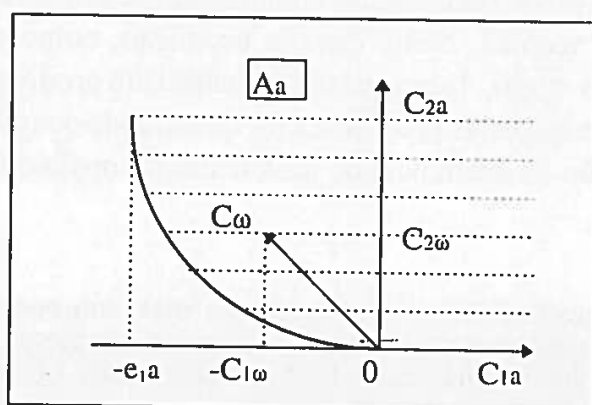
<sup>1</sup> Ainda que "logicamente possível" não implique que algo seja "realmente possível", a possibilidade lógica, referida por Hahn, é absolutamente necessária para que a prova da existência tenha algum significado econômico. Isto não há dúvida. Uma questão, porém, será colocada: algo pode ser logicamente possível em Economia, sem ser "economicamente possível"?

trabalho de todos os produtores é fixa no período de produção. Cada trabalhador, por razões tecnológicas, produz uma única mercadoria, 1 ou 2, de tal modo que há apenas dois tipos de produtores. As quantidades efetivamente produzidas das mercadorias 1 e 2 são fixas período a período e iguais a  $e_1$  e  $e_2$ , respectivamente.

Para apresentar o modelo de um modo o mais claro possível, necessitamos estabelecer uma notação adequada. Para tanto, assumimos que às quantidades de mercadoria estão associados quatro índices, da seguinte forma:  ${}^j c_{ik}$ , onde o sub-índice  $i$  responde pelo bem de que se trata ( $i = 1, 2$ ),  $k$  indica o tipo de produtor ( $k = a, b$ ); o sobre-índice  $j$  indica os indivíduos dentro de cada tipo de produtor ( $j = 1, 2, \dots, n_k$ ); e, finalmente, o sub-índice  $\kappa$  indica a troca a que se associa a quantidade do bem. Em alguns casos, para evitar redundância, omitiremos o sub-índice  $k$  ou o sub-índice  $\kappa$  ou, ainda, ambos. Com base nessas convenções de notação, podemos enfrentar melhor o problema de expor o modelo de Foley.

Suporemos, agora, que ambos os dois tipos de produtores, para sobreviver, precisam consumir os bens 1 e 2, buscando trocar no mercado, período a período, certa quantidade do bem que produzem por certa quantidade do bem que não produzem. Como existem  $n_a$  produtores da mercadoria 1, indicamos por  ${}^1 c_{1a}, {}^2 c_{1a}, \dots, {}^{n_a} c_{1a}$  as quantidades vendidas no mercado pelos indivíduos 1, 2, ...,  $n_a$ . De igual modo, como existem  $n_b$  produtores da mercadoria 2, indicamos por  ${}^1 c_{2b}, {}^2 c_{2b}, \dots, {}^{n_b} c_{2b}$  as quantidades trocadas no mercado pelos indivíduos 1, 2, ...,  $n_b$ . A população total de trabalhadores é igual a  $n_a + n_b = n$ . As razões de troca entre 1 e 2 são consideradas, entretanto, como variáveis aleatórias.

Cada tipo de produtor encontra-se caracterizado por sua dotação inicial daquele bem que produz, assim como por seu mapa de preferências. No gráfico abaixo, a título de exemplo, apresentamos a situação de escolha dos indivíduos que produzem a mercadoria 1. A dotação inicial deste tipo de produtor encontra-se indicada negativamente no eixo horizontal por  $-e_{1a}$ . A curva aí traçada e que passa pela origem representa uma curva de indiferença dos trabalhadores do tipo a. Ao se admitir que ambas as mercadorias não são perfeitamente divisíveis, fica determinado o elenco das trocas possíveis para cada produtor do tipo a como um conjunto finito de pontos. Este conjunto é apresentado na figura sob a designação de  $A_a$ . Os pontos do conjunto  $A_a$  podem, então, ser indexados pela seqüência 1, 2, ...,  $s_a$ , sendo então designados genericamente por  $\omega$ . Evidente que podemos fazer o mesmo com a situação de escolha dos produtores da mercadoria 2, indexando, então, os pontos de  $A_b$  especificamente por 1, 2, ...,  $s_b$  e genericamente por  $\varphi$ .



Definamos, agora, as trocas possíveis para os produtores do bem 1 pelo vetor  $c\omega = (c_1\omega, c_2\omega)$ , em que  $c_1\omega \leq 0$  e  $c_2\omega \geq 0$ . Os valores de troca podem ser representados de modo usual por retas que passam pela origem e pelo ponto de troca considerado. Tomando, então, por base a troca  ${}^j c\omega$  destacada no gráfico, podemos ver que o produtor  $j$  troca  $c_1\omega$  por  $c_2\omega$ , ficando para si mesmo com  $c_2\omega$  de 2 e  $(e_{1a} - c_1\omega)$  de 1. Definamos, igualmente, as trocas possíveis para os produtores de 2 por  $c\varphi = (c_1\varphi, c_2\varphi)$  em que  $c_1\varphi \geq 0$  e  $c_2\varphi \leq 0$ . Omitimos aqui o sub-índice  $a$  em  $c\omega$  e o sub-índice  $b$  em  $c\varphi$ .

É evidente que podemos indicar as opções escolhidas pelos produtores da mercadoria 1 por  ${}^j c\omega = ({}^j c_1\omega, {}^j c_2\omega)$ , com  $j = 1, 2, 3, \dots, n_a$  e as opções escolhidas pelos produtores da mercadoria 2 por  ${}^j c\varphi = ({}^j c_1\varphi, {}^j c_2\varphi)$ , com  $j = 1, 2, 3, \dots, n_b$ .

Ao conjunto das trocas possíveis, em princípio, em  $A_a$  associamos uma distribuição de probabilidades  $p(c\omega)$ , com  $\sum p(c\omega) = 1$ , em que  $p(c\omega)$  indica a proporção dos agentes do tipo  $a$  que faz a troca  $c\omega$  em  $A_a$ . Igualmente, ao conjunto das trocas possíveis, em princípio, em  $A_b$  associamos uma distribuição de probabilidades  $p(c\varphi)$ , com as mesmas características da anterior.

Os excessos de demanda médio para os bens 1 e 2 podem ser expressos do seguinte modo:

$$\Delta c_1 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^{n_a} {}^j c_1\omega + \sum_{j=1}^{n_b} {}^j c_1\varphi \right] \quad (1)$$

$$\Delta c_2 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^{n_a} {}^j c_2\omega + \sum_{j=1}^{n_b} {}^j c_2\varphi \right] \quad (2)$$

Reagrupando os  $c_1\omega$  e os  $c_1\varphi$  comuns na primeira expressão e os  $c_2\omega$  e os  $c_2\varphi$  comuns na segunda, podemos fazer a seguinte transformação de (1) e (2) em (3) e (4), respectivamente:

$$\Delta c_1 = \frac{n_a}{n} \sum_{A_a} p(c\omega) c_1\omega + \frac{n_b}{n} \sum_{A_b} p(c\varphi) c_1\varphi \quad (3)$$

$$\Delta c_2 = \frac{n_b}{n} \sum_{A_b} p(c\varphi) c_2\varphi + \frac{n_a}{n} \sum_{A_a} p(c\omega) c_2\omega \quad (4)$$

Considerando as trocas possíveis de cada tipo de produtor como eventos, dadas as distribuições de probabilidade associadas a estas trocas, é possível medir o grau de incerteza relativo ao conjunto destes eventos. Para tanto, é preciso empregar o conceito de entropia, cuja origem encontra-se na termodinâmica, mas foi utilizado na

teoria da informação de Shannon<sup>2</sup>. Fazendo uso da expressão normalmente empregada para medir a entropia de um sistema estocástico bi-dimensional, temos:

$$E[p(c_k)] = -\frac{n_a}{n} \sum_{A_a} p(c_\omega) \cdot \ln p(c_\omega) - \frac{n_b}{n} \sum_{A_b} p(c_\varphi) \cdot \ln p(c_\varphi) \quad (5)$$

Tendo por referência o sistema econômico, é preciso notar que a expressão acima define uma medida de sua desorganização. Quanto maior a incerteza associada ao sistema em consideração, maior será a sua entropia. De modo metafórico, pode-se dizer genericamente que quanto maior for a entropia de um sistema, mais “aquecido” ele se encontra. Assim, um mercado pode ser considerado “frio” ou “quente”, dependendo de seu grau de incerteza.

Para encontrar o equilíbrio estatístico do sistema é preciso resolver um problema de programação não linear, em que se maximiza  $E[p(c_k)]$  sujeito às restrições de que os excessos de demanda (3) e (4) acima sejam nulos. Eis que estas restrições, como se sabe, correspondem ao suposto usual da teoria neoclássica de “*market clearing*”. Ao maximizar  $E[p(c_k)]$  procura-se garantir que os casamentos entre os dois tipos de produtores venham a ocorrer de tal modo a obedecer essas restrições. A solução deste problema, como indica Foley, deve-se ao físico J. W. Gibbs e é chamada canônica:

$$p(c_k) = \frac{\exp[-\pi c_k]}{Z_k(\pi)} \quad (6)$$

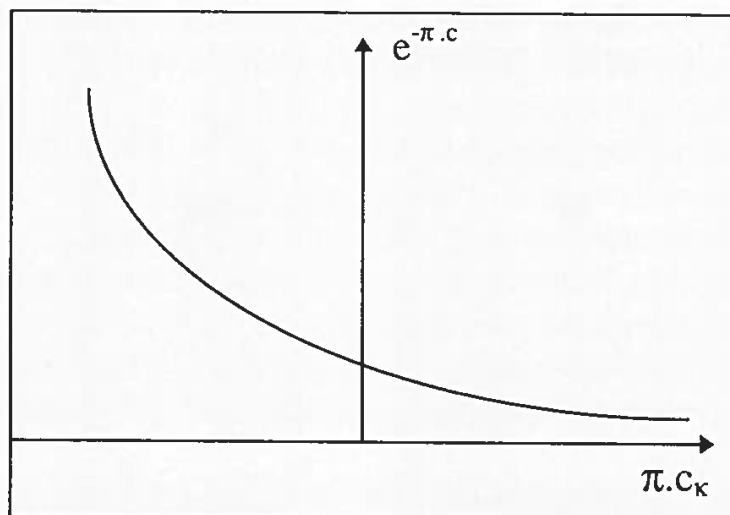
$$\text{onde } Z_k(\pi) = \sum_{A_k} \exp[-\pi c_k] \quad (7)$$

$$\text{se } k = a \Rightarrow \kappa = \omega ; \text{ se } k = b \Rightarrow \kappa = \varphi$$

As funções  $Z_k(\pi)$ ,  $k = a, b$ , chamadas de partições, associam-se às trocas possíveis para os produtores dos bens 1 e 2, respectivamente. Elas se compõem de  $s_a$  e  $s_b$  partes; cada parte corresponde a uma das trocas possíveis em  $A_a$  ou em  $A_b$ , respectivamente. Em ambos os casos, a contribuição de cada trocas para a soma  $Z_k(\pi)$ ,  $k = 1, 2$ , define, de um modo proporcional, as probabilidades de ocorrência da troca.

Notemos, agora, seguindo Foley, que se pode interpretar  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$  como um vetor de “preços” entrópicos, de tal modo que  $\pi \cdot c_\omega$  e  $\pi \cdot c_\varphi$  tem a dimensão de “custos” entrópicos<sup>3</sup>. Os valores  $\pi$  são determinados pelo programa de tal modo a zerar os excessos de demanda. A probabilidade de que um agente escolha, por exemplo,  $c_k$  é proporcional a  $\exp[-\pi \cdot c_k]$ . Assim, as trocas de alto custo entrópico, tal como se mostra no gráfico abaixo, são menos prováveis de ocorrer do que as de baixo “custo” entrópico.

<sup>2</sup> Ver Haykin (1994, p. 444-449).



É importante notar, neste momento, que o produto escalar dos vetores  $\pi$  e  $c_K$ , ou seja,  $\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 = \phi$  define uma família de retas no plano dos bens 1 e 2, as quais têm a mesma inclinação ( $-\pi_1/\pi_2$ ). E que essas retas definem linhas de iso-probabilidade. É óbvio que, dado os valores de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , para valores maiores de  $\phi$ , a reta correspondente se situa mais para a direita e para cima. Ora, isto implica que a distribuição canônica define um padrão característico de variação das probabilidades. Esta atinge o seu ponto de máximo na tangente à isoquanta que passa pela origem e declina sempre quando se vai para a direita e para cima.

A maximização de  $E[p(c_K)]$ , sob a suposição de que todos os resultados possíveis são igualmente prováveis, tende a concentrar as trocas nos pontos em que o “custo” entrópico é mais baixo. Como diz Foley: “*O suposto de que todas as transações possíveis mutuamente vantajosas são igualmente prováveis leva à conclusão de que algumas distribuições de transação de mercado são mais prováveis do que outras porque podem ser realizadas em um número maior de modos*” (Foley, 1994, p. 322).

O problema de maximização acima apresentado tem um dual que consiste na minimização da soma ponderada dos logarítimos das partições antes definidas:

$$\ln Z(\pi) = (n_a/n) \cdot \ln Z_a(\pi) + (n_b/n) \cdot \ln Z_b(\pi) \quad (8)$$

Os problemas primal e dual apresentam a propriedade segundo a qual o ponto de máximo do primeiro corresponde ao ponto de mínimo do segundo, isto é:

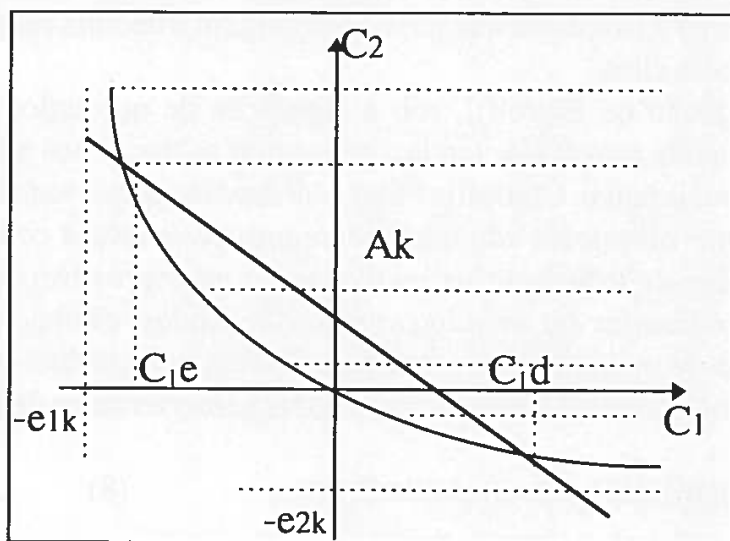
$$E[p(c_K)]_{\max} = [\ln Z(\pi)]_{\min}$$

Nesse modelo de equilíbrio estocástico há concorrência, mas a informação não é perfeita. São os próprios agentes que fixam os preços; eles são dotados de racionalidade instrumental e buscam melhorar a sua condição econômica, podendo chegar, entretanto a uma posição de ótimo só por acaso. O sistema como um todo dificilmente alcança a situação de ótimo de pareto.

Entretanto, não é difícil perceber que o modelo walrasiano tradicional pode ser visto como um seu caso particular. Para tanto, basta substituir a mão invisível por um leiloeiro, supondo ao mesmo tempo que um processo de *tâtonnement* descobre um

$\kappa^*$  que gera o “market clearing” de um modo determinista. O ponto descoberto vem a ser, como se sabe, um equilíbrio de Arrow-Debreu. Neste caso,  $p(c_{\kappa^*}) = 1$  e  $p(c_{\kappa}) = 0$  para  $\kappa \neq \kappa^*$  e a entropia do sistema é nula. Esse resultado, entretanto, é surpreendente, pois revela uma contradição da teoria neoclássica padrão. Diferentemente dos agentes econômicos que povoam o modelo, o leiloeiro não está submetido ao constrangimento da escassez: os seus recursos para processar a informação necessária para descobrir a alocação de equilíbrio são ilimitados. Ele organiza o mercado transformando informação dispersa em centralizada de um modo perfeito — o “custo” entrópico é nulo. Tudo se passa como se a Economia estivesse contrariando uma lei da Física: o leiloeiro representa, de certo modo, uma violação do equivalente informacional do segundo princípio da termodinâmica.

É importante notar, agora, que esses resultados podem ser estendidos para os modelos estatísticos de mercado em que os conjuntos de oferta são infinitos. É possível provar — ainda que isto seja bem difícil matematicamente — que, em certos casos, ainda existe solução para o problema de maximização da função de entropia. Tendo em vista esses casos, precisamos reescrever as funções densidade de probabilidade e de partição antes apresentadas para os casos em que os conjuntos de oferta eram finitos. Consideremos o gráfico abaixo:



Tendo em mente a situação descrita por esse gráfico, vamos, inicialmente, reescrever a função de partição numa forma contínua com um domínio de integração determinado pela área convexa e fechada definida pela curva de indiferença  $c_{2k} = f(c_{1k})$  que passa na origem:

$$Z_k(\pi) = \int_{-c_{1k}}^{\infty} \int_{f(c_{1k})}^{\infty} \exp(-\pi_1 \cdot c_{1k} - \pi_2 \cdot c_{2k}) \cdot dc_{2k} \cdot dc_{1k} \quad (9)$$

Suponhamos, agora, que desejamos saber a probabilidade de que uma troca ocorra na área delimitada pela mesma curva de indiferença antes considerada e pela reta inclinada para a esquerda que a corta. Neste caso, supondo que  $c_{2k} = \alpha + \beta \cdot c_{1k}$  é a equação desta última reta, a expressão da função de probabilidade tem a seguinte forma:



$$p(c_k) = \frac{\sum_{c_1} \sum_{c_2} \exp[-\pi_1 c_{1k} - \pi_2 c_{2k}] \cdot dc_2 \cdot dc_1}{Z_k(\pi)} \quad (10)$$

### 3 Preferências ortogonais

Para construir um primeiro exemplo ilustrativo do modelo apresentado, consideraremos que são trocados dois bens em um mercado do qual participam apenas dois tipos agentes. Ambos estes tipos são dotados da mesma função de utilidade de Leontief, que dá origem, como se sabe, a curvas de preferência que têm a forma de L, indicando que os dois bens são estritamente complementares:

$$U_k(c_1, c_2) = \min [c_{1k}, c_{2k}], \text{ onde } [c_{1k}, c_{2k}] \in A_k, \quad k = a, b;$$

Entretanto, eles têm uma dotação inicial diferente: os agentes do tipo a tem duas unidades de 1 e zero de 2, enquanto os agentes do tipo b tem zero unidades de 1 e duas de 2. Faremos abstração da produção para simplificar ainda mais a exposição do modelo. Admitiremos que as unidades dos dois bens são indivisíveis. Como os conjuntos de oferta dos dois tipos de agentes são simétricos, é possível ver de imediato que os valores entrópicos serão iguais. Mostraremos, agora, que  $\pi_1 = \pi_2 = \ln 2$ . Para fazê-lo, é preciso, de início, escrever o conjunto de oferta para os agentes dos tipos a e b:

$$A_k = \{(i, j) | i = -2, -1, 0, 1, \dots, \infty; j = 0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad k = a, b.$$

Para obter  $\pi_1$  e  $\pi_2$  precisamos fazer alguns desenvolvimentos algébricos. Como as trocas são definidas genericamente pelo par ordenado  $(i, j)$ , a partição definida em (7) pode ser agora reescrita da seguinte forma:

$$Z_k[\pi] = \sum_{A_k} \exp[-\pi_1 i - \pi_2 j], \quad k = a, b$$

Especializando essa última expressão para  $k = a$ , expandindo-a e reorganizando os seus termos, obtemos:

$$Z_a[\pi] = \sum_{i=-2}^{\infty} \exp[-\pi_1 \cdot i] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \exp[-\pi_2 \cdot j]$$

Notemos, agora, que a expressão acima é o produto da soma de duas progressões geométricas de razões  $\exp[-\pi_1]$  e  $\exp[-\pi_2]$ , respectivamente. Assim:

$$\sum \exp[-\pi_1 \cdot i] = \exp[2\pi_1] + \exp[\pi_1] + \exp[0] + \exp[-\pi_1] + \dots$$

$$\sum \exp[-\pi_2 \cdot j] = \exp[0] + \exp[-\pi_2] + \exp[-2\pi_2] + \exp[-3\pi_2] + \dots$$



Em consequência, utilizando a expressão bem conhecida da soma dos elementos dessas progressões, obtemos:

$$\sum \exp[-\pi_1 \cdot i] = \exp[2\pi_1] \cdot \frac{1}{1 - \exp[-\pi_1]}$$

$$\sum \exp[-\pi_2 \cdot i] = \exp[0] \cdot \frac{1}{1 - \exp[-\pi_2]}$$

Juntanto essas duas últimas expressões temos para os agentes do tipo a:

$$Z_a[\pi] = \frac{\exp[2\pi_1]}{(1 - \exp[-\pi_1]) \cdot (1 - \exp[-\pi_2])} \quad (11)$$

Por semelhança, podemos escrever para os agentes do tipo b:

$$(12) \quad Z_b[\pi] = \frac{\exp[2\pi_2]}{(1 - \exp[-\pi_1]) \cdot (1 - \exp[-\pi_2])}$$

Aplicando a função logarítimo em (11) e (12), substituindo em (8) e desenvolvendo, temos:

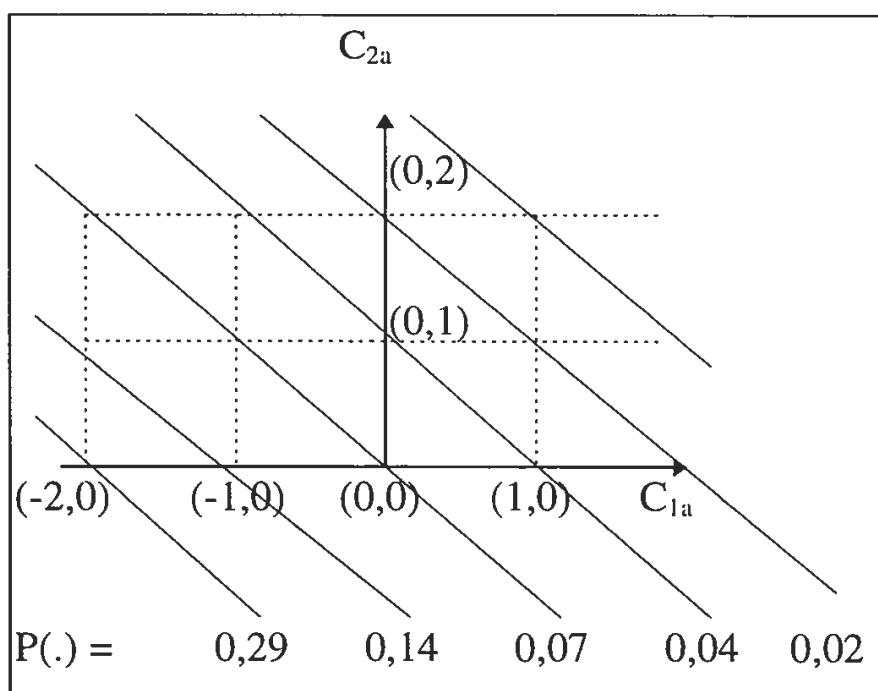
$$\ln Z(\pi) = \pi_1 + \pi_2 - \ln(1 - \exp[-\pi_1]) - \ln(1 - \exp[-\pi_2])$$

Para encontrar o ponto de mínimo desta função, podemos derivá-la em relação a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , igualando o resultado a zero. Fazendo isto, obtemos:

$$\frac{\partial \ln Z(\pi)}{\partial \pi_1} = 1 - \frac{\exp[-\pi_1]}{1 - \exp[-\pi_1]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \ln 2$$

$$\frac{\partial \ln Z(\pi)}{\partial \pi_2} = 1 - \frac{\exp[-\pi_2]}{1 - \exp[-\pi_2]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \ln 2$$

Na figura a seguir a resolução do problema acima é apresentada graficamente para os agentes do tipo a:



Neste gráfico, as interseções das retas horizontais e verticais representam os pontos de trocas possíveis. Notemos que o conjunto desses pontos é infinito, mas enumerável. Sabendo que os valores entrópicos são iguais a  $\ln 2 = 0,69315$ , com base na expressão (6) foram calculadas, conforme tabela abaixo, as probabilidades associadas às trocas possíveis. Isto permitiu traçar no gráfico as linhas negativamente inclinadas de iso-probabilidade. A equação dessas retas é dada genericamente por  $-\pi_1 c_{1a} - \pi_2 c_{2a} = \phi$ , com inclinação igual a  $(-\pi_1/\pi_2)$ ; no caso específico examinado, o coeficiente angular da reta é -1 (a razão entre os “preços” entrópicos é unitária), e isto implica que a inclinação das retas é de  $135^\circ$  em relação ao eixo horizontal. Notemos que a primeira reta de isoprobabilidade está associada a apenas um ponto do conjunto de trocas, a segunda está associada a dois pontos e as seguintes, invariavelmente, estão associadas a três pontos do conjunto de trocas, de tal modo que as trocas se distribuem neste conjunto de um modo mais homogêneo do que parece inicialmente.

Troca	$\pi \cdot c_k$	$\exp[-\pi \cdot c_k]$	$p(c_k)$
(-2,0)	-1,386	4,00	0,286
(-1,0)	-0,693	2,00	0,143
(-2,1)	-0,693	2,00	0,143
(-2,2)	0,000	1,00	0,071
(-1,1)	0,000	1,00	0,071
(0,0)	0,000	1,00	0,071
(-1,2)	0,693	0,50	0,036
(0,1)	0,693	0,50	0,036
(1,0)	0,693	0,50	0,036
(0,2)	1,386	0,25	0,018
(1,1)	1,386	0,25	0,018
(2,0)	1,386	0,25	0,018
etc.	etc.	etc.	etc.

Essa tabela diz que se tivermos uma economia com  $n_1$  agentes do tipo a, então 0,28% deles trocam no ponto  $(-2,0)$ , 0,14% deles trocam no ponto  $(-1,0)$  e a mesma proporção o faz no ponto  $(-2,1)$  e assim por diante. Se essa economia tem  $n_2$  agentes do tipo b, então podemos dizer, simetricamente, que 0,28% desses agentes trocam no ponto  $(0,-2)$ , 0,14% deles trocam no ponto  $(0,-1)$  e a mesma proporção faz no ponto  $(1,-2)$  e assim por diante. É evidente que os excessos de demanda dos bens 1 e 2 se anulam quando se considera as somas das escolhas dos dois conjuntos de agentes a e b.

#### 4 Preferências lineares

Tendo em vista fazer uma comparação com o modelo em que as preferências são ortogonais, podemos construir, agora, um novo modelo em que as preferências dos dois tipos de agentes são lineares, o que implica, como se sabe, na suposição de que os dois bens são substitutos perfeitos. As funções utilidade têm a seguinte forma:

$$U_k(c_1, c_2) = \alpha \cdot c_{1k} + \beta \cdot c_{2k}, \quad \text{onde } k = a, b.$$

Assumiremos, para permitir uma comparação simples, que  $\alpha = \beta$  e que os dois tipos de agentes tem das mesmas dotações iniciais do modelo anterior. Assim, designando por  $I$  a coleção dos números inteiros, os conjuntos de oferta dos agentes dos tipos a e b ficam:

$$A_k = \{(i, j) \mid i, j \in I; i \geq -j; i \geq -2 \text{ e } 0 \leq j \leq 2\}, \quad k = a, b.$$

Para obter os valores de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  precisamos partir das funções de partição  $Z_a(\pi)$  e  $Z_b(\pi)$ , notando, logo de início, tal como no caso anterior, que  $\pi_1 = \pi_2$ .

$$\begin{aligned} Z_a[\pi] &= \sum \exp[-\pi_1 \cdot i - \pi_2 \cdot j] \\ &= \{\exp[0] + \exp[-\pi_1] + \exp[-2\pi_1] + \dots\} + \\ &+ \exp[-\pi_2] \cdot \{\exp[\pi_1] + \exp[0] + \exp[-\pi_1] + \exp[-2\pi_1] + \dots\} + \\ &+ \exp[-2\pi_2] \cdot \{\exp[2\pi_1] + \exp[\pi_1] + \exp[0] + \exp[-\pi_1] + \exp[-2\pi_1] + \dots\} \end{aligned}$$

Donde, obtemos:

$$Z_a[\pi] = \frac{1}{1 - \exp[-\pi_1]} \{1 + \exp[-\pi_2 + \pi_1] + \exp[-2\pi_2 + 2\pi_1]\}$$

Fazendo o mesmo procedimento para  $Z_b(\pi)$ , obtemos:

$$Z_b[\pi] = \frac{1}{1 - \exp[-\pi_2]} \{1 + \exp[-\pi_1 + \pi_2] + \exp[-2\pi_1 + 2\pi_2]\}$$

Para simplificar essas duas expressões acima, podemos estender os somatórios restantes ao infinito para aplicar novamente a fórmula da soma dos termos de progressões geométricas. Fazendo isto, obtemos as seguintes duas novas expressões:

$$Z_a[\pi] = \frac{1}{1 - \exp[-\pi_1]} \cdot \frac{1}{1 - \exp[-\pi_2 + \pi_1]}$$

$$Z_b[\pi] = \frac{1}{1 - \exp[-\pi_1]} \cdot \frac{1}{1 - \exp[-\pi_1 + \pi_2]}$$

Aplicando a função logarítmo nas duas expressões acima, podemos construir, tal como anteriormente, a função objetivo dual do problema da maximização da função entropia.

$$\begin{aligned} \ln Z(\pi) = (\frac{1}{2}) \cdot \{ & -\ln(1 - \exp[-\pi_1]) - \ln(1 - \exp[-\pi_2 + \pi_1]) - \\ & -\ln(1 - \exp[-\pi_2]) - \ln(1 - \exp[-\pi_1 + \pi_2]) \} \end{aligned}$$

Derivando essa expressão em relação a  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{\partial \ln Z(\pi)}{\partial \pi_1} = -\exp[-\pi_1] + \exp[-\pi_2 + \pi_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \infty$$

$$\frac{\partial \ln Z(\pi)}{\partial \pi_2} = -\exp[-\pi_2] + \exp[-\pi_1 + \pi_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \infty$$

O resultado obtido merece, evidentemente, uma explicação. Como interpretar o fato de que os dois “preços” entrópicos são infinitos? Ora, isto apenas indica o que sabíamos desde o início: como os bens são substitutos perfeitos e as dotações iniciais são iguais para os dois tipos de agentes, não há e não pode haver oportunidade de troca mutuamente vantajosa. Isto se reflete no fato de que os  $p(\kappa)$ , ou seja, os valores das probabilidades associadas às trocas possíveis são todos nulos. O valor de troca de equilíbrio obtido no modelo estatístico, ademais, é igual ao valor de troca que se obteria no modelo de Arrow-Debreu: uma unidade de 1 seria trocada, se trocada fosse, exatamente por uma unidade de 2.

## 5 Preferências curvilíneas

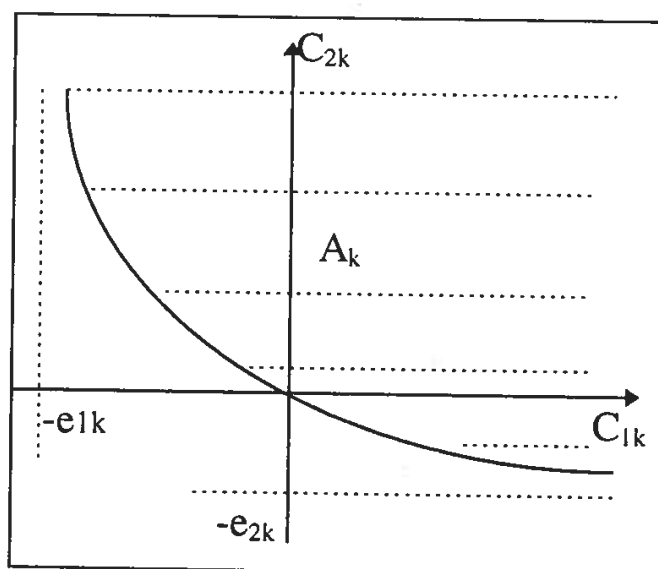
Construiremos, agora, um exemplo mais geral em que o mapa das escolhas possíveis dos agentes se situam numa situação intermediária entre o caso das preferências ortogonais e o caso das preferências lineares. Ficando ainda com a economia de dois bens que vem sendo analisada, admitiremos que as dotações iniciais dos dois tipos de

agentes são  $e_k = (e_{1k}, e_{2k})$ ,  $k = a, b$ , e que as suas funções de utilidade sejam da forma da função Cobb-Douglas:

$$U(c_{1k}, c_{2k}) = c_{1k}^{1/2} \cdot c_{2k}^{1/2}, \text{ onde } k = a, b.$$

Os conjuntos de oferta dos dois tipos de agente tem a mesma expressão formal e gráfica, de tal modo que podemos apresentá-las genericamente:

$$A_k = \{c_k \mid U(c_k + e_k) \geq U(e_k)\}, \text{ onde } k = a, b.$$



No presente caso, precisamos partir da função de partição na forma contínua (9), considerando o domínio de integração determinado pela área convexa e fechada definida pela curva de indiferença  $c_{2k} = f(c_{1k})$ .

$$Z_k(\pi) = \int_{-e_{1k}}^{\infty} \int_{f(c_{1k})}^{\infty} \exp(-\pi_1 c_{1k} - \pi_2 c_{2k}) \cdot dc_{2k} \cdot dc_{1k}$$

$$Z_k(\pi) = \int_{-e_{1k}}^{\infty} \exp(-\pi_1 c_{1k}) \int_{f(c_{1k})}^{\infty} \exp(-\pi_2 c_{2k}) \cdot dc_{2k} \cdot dc_{1k}$$

Para encontrar a expressão de  $f(c_{1k})$  precisamos partir da função utilidade, notando que para a curva de indiferença traçada no gráfico anterior  $U(c_{1k} + e_{1k}, c_{2k} + e_{2k}) = U(e_{1k}, e_{2k})$ .

$$U(c_{1k} + e_{1k}, c_{2k} + e_{2k}) = \sqrt{(c_{1k} + e_{1k})(c_{2k} + e_{2k})} = \sqrt{e_{1k}e_{2k}}$$

donde, elevando ao quadrado,

$$c_{2k} = f(c_{1k}) = \frac{-c_{1k}e_{2k}}{c_{1k} + e_{1k}} = -e_{2k} + \frac{e_{1k}e_{2k}}{c_{1k} + e_{1k}}$$

Agora, precisamos reescrever a integral acima de uma forma conveniente, multiplicando e dividindo o termo do lado direito por  $\exp[\pi e_k]/\pi_1$ :

$$Z_k(\pi) = \frac{\exp(\pi_1 e_{1k} + \pi_2 e_{2k})}{\pi_1} \int_{-c_{1k}}^{\infty} \exp[-\pi_1(c_{1k} + e_{1k})] \int_{f(c_{1k})}^{\infty} \exp[-\pi_2(-c_{2k} + e_{2k})] dc_{2k} \cdot \pi_1 \cdot dc_{1k}$$

Para resolver esta última integral é preciso fazer duas substituições de variáveis, ou seja, admitir que  $y_{2k} = c_{2k} + e_{2k}$  e que  $z_{1k} = \pi_1 \cdot (c_{1k} + e_{1k})$ , notando que  $dy_{2k} = dc_{2k}$  e que  $dz_{1k} = \pi_1 \cdot dc_{1k}$ :

$$Z_k(\pi) = \frac{\exp(\pi_1 e_{1k} + \pi_2 e_{2k})}{\pi_1} \int_0^{\infty} \exp(-z_{1k}) \int_{g(z_{1k})}^{\infty} \exp(-\pi_2 y_{2k}) \cdot dy_{2k} \cdot dz_{1k}$$

onde

$$g(z_{1k}) = \frac{\pi_1 e_{1k} e_{2k}}{z_{1k}}, \text{ pois } c_{2k} + e_{2k} = \frac{e_{1k} e_{2k} \pi_1}{\pi_1 (c_{1k} + e_{1k})}$$

calculando a primeira integral obtemos

$$Z_k(\pi) = \frac{\exp(\pi_1 e_{1k} + \pi_2 e_{2k})}{\pi_1 \pi_2} \int_0^{\infty} \exp\left[-z_{1k} - \frac{\pi_{1k} e_{1k} \pi_2 e_{2k}}{z_{1k}}\right] \cdot dz_{1k}$$

A segunda integral contida na integral dupla acima definida não tem solução analítica, apenas numérica. A tabela abaixo dá uma indicação dos valores que assume em alguns casos particulares:

$\pi_{1k}e_{1k}\pi_{2k}e_{2k}$	Valor numérico
0,25	0,60
0,50	0,44
1,00	0,28
2,00	0,14
4,00	0,05
10,00	0,006

Adotando uma solução analítica aproximada obtemos as seguintes expressões para as funções de partição para  $k = a, b$ :

$$Z_k(\pi) = \frac{\exp[\pi_1 e_{1k} + \pi_2 e_{2k}]}{\pi_1 \pi_2} \cdot \exp[-2\sqrt{\pi_1 e_{1k} \pi_2 e_{2k}}]$$

donde, aplicando logarítmos, obtemos

$$\ln Z_k(\pi) = \pi_1 e_{1k} + \pi_2 e_{2k} - \ln \pi_1 - \ln \pi_2 - 2\sqrt{\pi_1 e_{1k} \pi_2 e_{2k}}$$

Para encontrar os valores de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , tal como foi feito anteriormente, basta derivar a soma ponderada das funções logarítmicas acima definidas, igualando o resultado a zero. Ainda sob a suposição de que  $n_1 = n_2$ , simbolicamente temos:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \pi_1} \right] = 0 \qquad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \pi_2} + \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \pi_2} \right] = 0$$

Calculando as derivadas de  $\ln Z_1(\pi)$  e  $\ln Z_2(\pi)$  em relação a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , substituindo-as nas duas expressões acima e resolvendo o sistema de equações, obtemos:

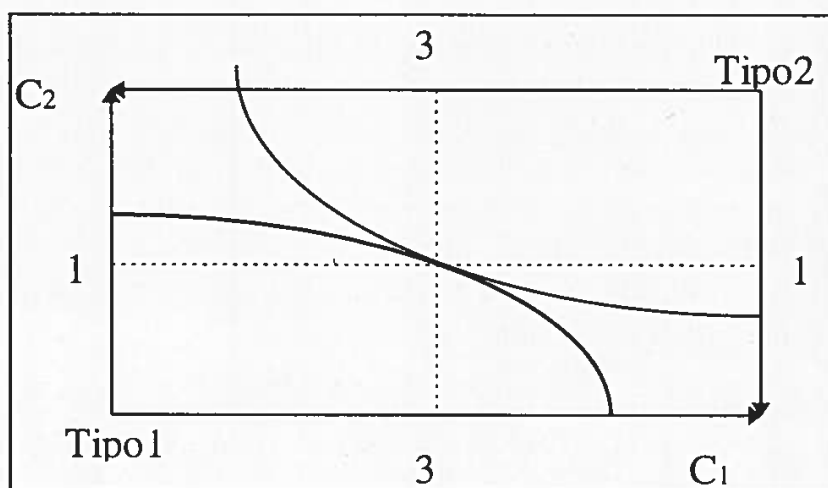
$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{e_{21} + e_{22}}{e_{11} + e_{12}}$$



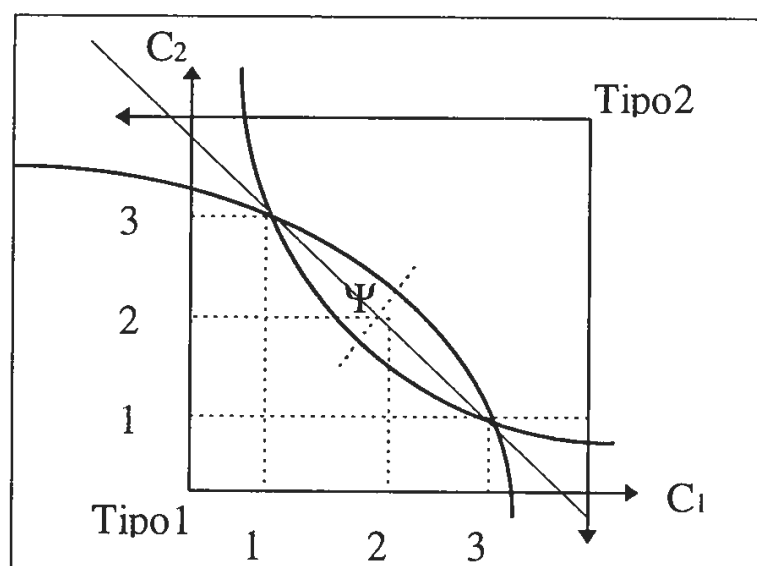
$$\pi_1 = \frac{2}{(e_{11} + e_{12}) \left[ 1 - \frac{\sqrt{e_{11}e_{21}} + \sqrt{e_{12}e_{22}}}{\sqrt{(e_{11} + e_{12})(e_{21} + e_{22})}} \right]}$$

$$\pi_2 = \frac{2}{(e_{21} + e_{22}) \left[ 1 - \frac{\sqrt{e_{11}e_{21}} + \sqrt{e_{12}e_{22}}}{\sqrt{(e_{11} + e_{12})(e_{21} + e_{22})}} \right]}$$

Havendo obtido as expressões acima, podemos examinar alguns casos particulares. No primeiro deles, suporemos que as dotações iniciais do dois tipos de agentes são iguais, ou seja, que  $(e_{11}, e_{21}) = (3, 1)$  e que  $(e_{12}, e_{22}) = (3, 1)$ . Nesse caso, é fácil comprovar nas expressões acima que  $\pi_1 = \pi_2 = \infty$  e que, tal como já aconteceu anteriormente, a razão dos “preços” entrópicos é a mesma dos preços walrasianos. Não há, pois, oportunidade de troca mutuamente vantajosa. Os agentes não trocam, permanecendo, portanto, com as mesmas dotações iniciais. Estas são já alocações pareto ótimas. O gráfico abaixo, em que optamos por expor essa situação por meio da caixa de Edgeworth, é ilustrativo.



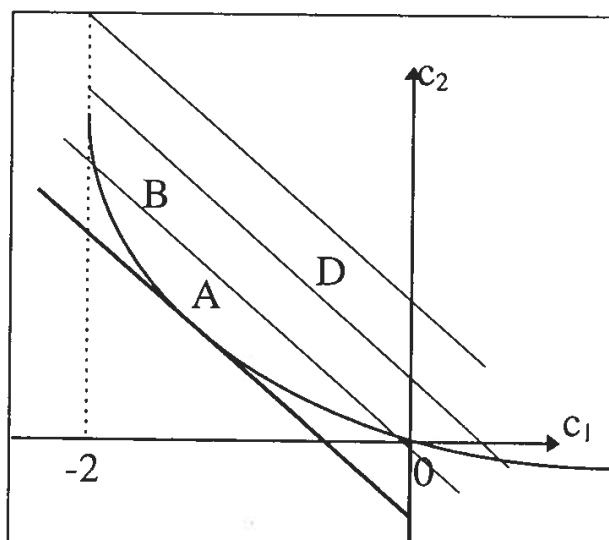
No segundo caso particular, examinamos a situação em que as dotações dos dois tipos de agentes são simétricas, isto é,  $(e_{11}, e_{21}) = (3, 1)$  e  $(e_{12}, e_{22}) = (1, 3)$ . Neste caso, entrando nas fórmulas acima, podemos obter os “preços” entrópicos:  $\pi_1 = \pi_2 = 3,73$ . No gráfico abaixo, em que novamente optamos por uma apresentação por meio da caixa de Edgeworth, esta situação encontra-se ilustrada. Há agora, evidentemente, oportunidades de trocas, mas estas não se concentram, como se pode facilmente mostrar, na alocação pareto ótima.



Caso se houvesse associado à situação acima um processo de *tâtonnement* walrasiano, todas as trocas teriam ocorrido ao relativo de preços dado pela única reta de isoprobabilidade indicada no gráfico acima, de tal modo que a entropia do sistema tornar-se-ia nula. Nesse caso, todos os agentes atingiriam o ponto  $\Psi$  de máxima eficiência alocativa. Dito de outro modo, o sistema econômico teria atingido o ótimo de Pareto. É evidente, nesse caso, que todos os agentes obteriam, após trocarem uma unidade do bem que possuem em maior quantidade por uma unidade do bem que possuem em menor quantidade, duas unidades de cada um dos bens da economia.

Este não é, entretanto, o resultado que obtemos quando abandonamos a ficção do *tâtonnement*. No caso mais geral em que prevalece o equilíbrio estatístico e não um equilíbrio de Arrow-Debreu, como se distribuem as trocas no espaço em que elas são possíveis?

Para fornecer uma idéia melhor da distribuição das trocas no modelo estatístico apresentado, construímos o gráfico abaixo em que delimitamos três áreas convexas e fechadas: A, B e D. A área A está compreendida pela curva de indiferença e pela reta de isoprobabilidade que passa pela origem. A área B está delimitada pela reta que passa pela origem e por uma reta paralela que dista 0,53 da primeira, no intervalo  $-2 \leq c_1 \leq 0$ . A área D, por sua vez, está delimitada pela última reta e por uma outra que dista dela os mesmos 0,53, também definida no intervalo  $-2 \leq c_1 \leq 0$ .



Havendo contruído o gráfico acima e delimitado as áreas A, B e D, empregando um programa de cálculo, computamos com o auxílio das expressões (9) e (10) as probabilidades de que uma troca ocorra em A, B ou D, obtendo os seguintes resultados:  $p(c\omega)_A = 72,9\%$  —  $p(c\omega)_B = 18,8\%$  —  $p(c\omega)_D = 2,5\%$ . Estes valores indicam que a grande maioria das trocas não apenas ocorrem fora da alocação ótima de Pareto, como também que não se concentram estritamente em torno dela. Diferentemente, para que ocorra o “market clearing” no modelo estatístico estudado, estabelece-se um padrão de distribuição das alocações bem diverso daquele produzido pela relojoaria walrasiana.

## 6 Conclusões

Nos desenvolvimentos feitos nas seções anteriores mostramos que as alocações próximas da curva de indiferença que passa pela origem são mais prováveis de ocorrer do que as que se afastam dela. Vimos, também, que as probabilidades se distribuem uniformemente no sentido das retas de isoprobabilidade. Ora, tudo isto mostra que se obtém no modelo neoclássico generalizado um padrão de distribuição das alocações que se afasta da alocação paretianamente eficiente. Ainda que se possa dizer que esse padrão de alocação vem a ser, de algum modo, uma aproximação do ótimo de Pareto, ele não autoriza as reflexões antes expostas de Frank Hahn. Ao contrário, mostra o caráter fátuo dos teoremas fundamentais do bem-estar econômico. Algumas reflexões do próprio Foley ajudam a encerrar a questão:

“...Se a teoria do equilíbrio estatístico dos mercados for correta, o primeiro teorema do bem-estar, segundo o qual uma alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto se estão ausentes as externalidades e as imperfeições de informação, não se mantém. A razão ... vem a ser que essa teoria estatística não prevê a extinção de todas as possibilidades de troca mutuamente vantajosas existentes no mercado. O mercado, de fato, de um ponto de vista estatístico, não procura maximizar a utilidade total, mas um certo desordenamento das alocações finais. São os agentes individuais que procuram as alocações que vão na direção da eficiência de Pareto recusando-se a participar de transações não vantajosas. Do balanço entre essas duas forças, é certo, resulta algum movimento em direção à eficiência paretiana...

*Essa mudança de ponto de vista tem amplas implicações para a análise econômica da intervenção no mercado. Uma legislação que fixa pisos e tetos para os preços, por exemplo, que de um ponto de vista walrasiano parece irrelevante...ou ineficiente... têm efeitos mais complicados quando o equilíbrio é estatístico. De fato, uma legislação que fixa pisos e tetos para os preços muda os conjuntos de oferta dos agentes e, assim, os “preços sombra entrópicos” que “limpam” o mercado.*

*De modo similar, a “limpeza” estatística dos mercados deixa espaço para que as intervenções macroeconômicas tenham efeitos não permitidos no modelo walrasiano. Por exemplo, um agente como o banco central que está sempre pronto para comprar e vender títulos financeiros a um preço fixo tem um impacto poderoso nos “preços entrópicos” que “limpam” os mercados de títulos estatisticamente.”*

***Referências Bibliográficas***

- FOLEY, D. K., A statistical equilibrium theory of markets. *Journal of Economic Theory*, 1994, p. 321-345.
- \_\_\_\_\_. Economic theory and observation from a statistical viewpoint. Is Economics becoming a hard science? Cheltenham: Edward Elgar, 1997. p. 220-235.
- HAYKIN, S. *Neural networks — a comprehensive foundations*. New York: Macmillan, 1994.
- HAHN, F., Reflections on the Invisible Hand. *Lloyds Bank Review*, n. 144, p. 1-21, apr. 1982.
- INGRAO, B., ISRAEL, G. *The invisible hand — economic equilibrium in the theory of science*. Massachusetts : The MIT Press, 1990.
- KARLIN, S. TAYLOR, H. M. *A first course in stochastic process*. Boston : Academic Press, 1975.
- PALMER, R., Statistical mechanics approaches to complex optimization problems. In: ANDERSON, P. W., ARROW K. J., PINES D. (Ed.). *The economy as an evolving complex system*. Massachusetts : Addison-Wesley, 1988. p. 177-193.
- SOROMENHO, J. C., Microfundamentos e sociabilidade. Seminário FEA/IPE n° 23/97, 9 de out. de 1997.