

XXII ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA POLÍTICA

Artigo submetido à área 3: Economia Brasileira

“Sistema previdenciário brasileiro: qual a real capacidade do modelo atuarial do governo federal de refletir a realidade de 2060?”

Solon Venâncio de Carvalho
Denise Lobato Gentil
Claudio Alberto Castelo Branco Puty
Carlos Renato Lisboa Francês
Marcelino Silva da Silva
Carlos Patrick Alves da Silva

RESUMO: O artigo objetiva demonstrar que as previsões de longo prazo do governo federal sobre a Previdência Social não estão isentas de erros e que, sendo o modelo atuarial um modelo probabilístico, para ser um método tecnicamente aceitável, deve-se calcular as margens de os erros e delimitá-los. Entretanto, os autores constataram que o modelo atuarial da Previdência brasileira não aponta os erros inerentes às previsões efetuadas, mesmo depois que outros especialistas já tenham encontrado evidências de repetidos fracassos de previsão. O artigo se propõe a fazer as projeções e determinar intervalos de confiança para as receitas, despesas e para a necessidade de financiamento do Regime Geral de Previdência Social. Os resultados foram comparados com as projeções do governo presentes no Anexo IV da Lei de Diretrizes Orçamentárias. Este exercício deixou clara a diferença entre os dois resultados, gerando procedentes questionamentos sobre o grau de confiabilidade das projeções oficiais, sujeitas a elevadas margens de erro. Uma das principais conclusões do artigo é de que as projeções de longo prazo de variáveis como o PIB e o resultado previdenciário carregam um grande componente de volatilidade e incerteza que tem de ser aferido mediante intervalos de confiança dos erros, a serem criados. A carga de fatores imprevisíveis torna vulnerável qualquer determinismo voluntarioso das projeções elaboradas pelo governo, particularmente no que diz respeito ao suposto "rombo" da Previdência e à "bomba" demográfica. Assim, os autores concluem que é fundamental admitir que as projeções que estão pautando o debate não podem ser tomadas como verdades inquestionáveis no momento de se fazer a reforma da previdência.

PALAVRAS-CHAVE: Previdência social; sistema atuarial brasileiro; economia brasileira; déficit previdenciário.

Sistema previdenciário brasileiro: qual a real capacidade do modelo atuarial do governo federal de refletir a realidade de 2060?

Solon Venâncio de Carvalho¹
 Denise Lobato Gentil²
 Claudio Alberto Castelo Branco Puty³
 Carlos Renato Lisboa Françes⁴
 Marcelino Silva da Silva⁵
 Carlos Patrick Alves da Silva⁶

Introdução

Estamos diante de uma reforma da Previdência Social que afetará a vida de todos os trabalhadores brasileiros. É de suma importância que a sociedade entenda o que motivou o governo e quais as consequências para a população. A equipe econômica do governo Temer tem se municiado para o debate com projeções populacionais que quantificam o número crescente de idosos, a razão de dependência e a expectativa de vida aos 65 anos. Tem também projetado as receitas e despesas do sistema previdenciário, para demonstrar a explosão do déficit do Regime Geral de Previdência Social (RGPS) no futuro longínquo (ano de 2060), se nada for feito hoje para controlar os gastos. Todas essas informações são apresentadas categoricamente, com elevada presunção de certeza. Soam como verdades definitivas e infalíveis, a respeito das quais nada se pode contrapor.

¹ Doutor em Automatique-Productique pela Université Toulouse III Paul Sabatier, França. Pesquisador Titular do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Membro do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

² Doutora em Economia, Professora e pesquisadora do Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.

³ PhD em Economia pelo New School for Social Research, Estados Unidos. Professor da Universidade Federal do Pará e membro do Laboratório de Tecnologias Sociais – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica / Universidade Federal do Pará.

⁴ Doutor em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo, Professor Associado da Universidade Federal do Pará, membro do Laboratório de Tecnologias Sociais – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Federal do Pará.

⁵ Doutor em Engenharia Elétrica, Professor da Universidade Federal do Pará e membro do Laboratório de Tecnologias Sociais – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará.

⁶ Doutorando em Engenharia Elétrica e membro do Laboratório de Tecnologias Sociais – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Federal do Pará. Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará, Analista de Suporte do Tribunal de Contas do Estado do Pará.

Como se não bastasse essa posição demasiado confiante para que consiga enxergar as próprias falhas, o governo priva a população e seus representantes no Legislativo dos necessários esclarecimentos sobre os métodos de cálculo das projeções que são feitas para as variáveis estratégicas do sistema previdenciário, no longo prazo. Frequentemente, as premissas dos modelos das projeções, as equações completas que geraram as planilhas e gráficos e principalmente a definição dos valores dos parâmetros utilizados permanecem desconhecidos, até mesmo para os especialistas mais experientes.

Partindo do pressuposto de que previsões estatísticas não são isentas de erros, e que todo método tecnicamente aceitável deve calcular e delimitar os erros, o presente artigo questiona: quais são os erros inerentes às previsões efetuadas pelo governo? Eles foram devidamente calculados? Se foram, qual a técnica utilizada? Que documento oficial faz a crítica das previsões realizadas e não confirmadas?

São as previsões da LDO de 2017 para as várias décadas posteriores (até 2060), que se tornaram o ponto de referência do governo para propor e argumentar sobre a necessidade urgente de uma reforma que julga inevitável. Como confiar na robustez de previsões a longo prazo?

O presente artigo argumenta que, em situações como essa, o melhor que se pode fazer é calcular intervalos de confiança que, com certo grau de certeza, indiquem as margens dentro das quais estarão os valores previstos. Este trabalho apresenta um estudo preliminar sobre a obtenção de intervalos de confiança dos erros de previsões macroeconômicas. Optou-se por ilustrar com o PIB brasileiro o problema da quantificação dos erros inerentes a todo processo de projeção. O PIB de um país representa a mensuração do seu dinamismo econômico, e a evolução do PIB ao longo do tempo tem sido utilizada como uma das principais referências para determinar variáveis que pertencem ao orçamento público. Em particular as previsões sobre receitas previdenciárias guardam estreita relação com o comportamento do PIB.

O artigo se propõe, ainda, a fazer projeções e determinar intervalos de confiança para as receitas e despesas do RGPS, utilizando o mesmo método empregado para o PIB. O resultado do RGPS (ou da necessidade de financiamento desse sistema) também foi analisado, porém, optou-se, pela estratégia de modelá-lo como um processo browniano, explicado detalhadamente no Anexo Matemático deste artigo. Os resultados obtidos foram então comparados às projeções do déficit da Previdência do governo, presentes no anexo IV da LDO. Este exercício matemático deixou clara a

diferença entre os dois resultados, gerando procedentes questionamentos sobre o grau de confiabilidade das projeções oficiais.

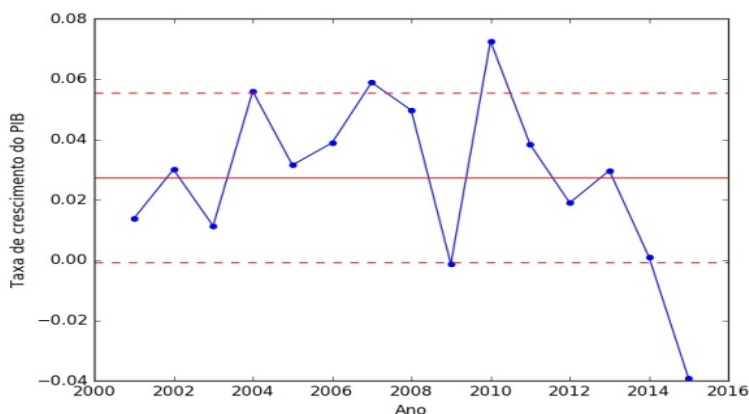
As seções deste trabalho se organizam da seguinte maneira: a seção 1 apresenta, de forma simplificada e direta, a estimação da taxa de crescimento de variáveis econômicas, aqui exemplificadas pela taxa de crescimento do PIB brasileiro nos anos recentes. A série histórica do PIB é a base para processos de previsão de longo prazo. A seção 2 apresenta uma previsão do PIB até 2060 com os necessários intervalos de confiança que quantificam os possíveis erros nas previsões efetuadas. A seção 3 contém considerações sobre as projeções para a necessidade de financiamento do RGPS contidas nas LDOs. O método proposto para projeções para o RGPS com indicadores de dispersão e alguns resultados obtidos são mostrados nas seções 4. Comentários finais e conclusões estão na Seção 5 e, finalmente, em anexo, está um resumo matemático do método utilizado.

1. Estimação da taxa de crescimento de variáveis econômicas

A taxa de crescimento de uma variável econômica representa seu aumento percentual (dividido por 100) por unidade de tempo, aqui suposta um ano. A Tabela A, no anexo 1, mostra os valores do Produto Interno Bruto (PIB) e da população do Brasil no período que vai do ano de 2000 ao de 2015 e suas respectivas taxas anuais de crescimento. As previsões da evolução destas variáveis, apresentadas a seguir, foram feitas com base em suas taxas de crescimento do passado recente considerado na Tabela A, com exceção da população, para a qual se utilizou os dados do IBGE.

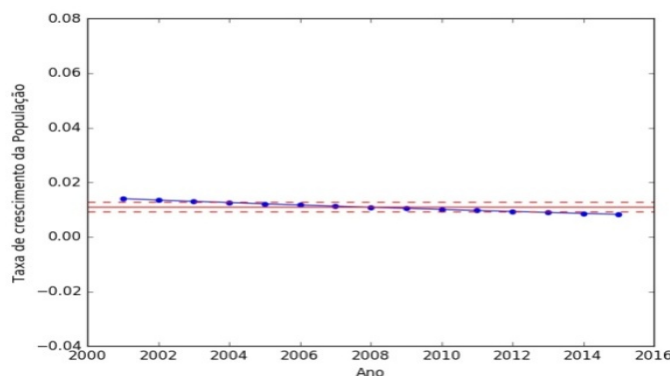
As Figuras 1 e 2 mostram, respectivamente, os valores das taxas de crescimento do PIB e da população no Brasil em função do tempo no período de 2001 a 2015. Deve-se notar que os valores desenhados não são exatamente iguais aos apresentados na Tabela A (ver anexo 1), uma vez que foram ajustados segundo o método que está descrito detalhadamente no anexo 2, matemático. Para efeito de comparação, utilizou-se a mesmas escalas nos dois gráficos. A linha vermelha contínua representa a média dos valores apresentados e as pontilhadas a dispersão dos valores em torno da média medida pelo seu desvio padrão.

FIGURA 1 – EVOLUÇÃO DO VALOR DA TAXA DE CRESCIMENTO A TEMPO CONTÍNUO DO PIB DO BRASIL ENTRE 2001 E 2016



Fonte: Banco Central do Brasil (<https://www.bcb.gov.br/pec/Indeco/Port/indeco.asp>) na seção “Indicadores econômicos consolidados”. Acessado em 24/11/2016

FIGURA 2 – EVOLUÇÃO DO VALOR DA TAXA DE CRESCIMENTO A TEMPO CONTÍNUO DA POPULAÇÃO DO BRASIL ENTRE 2001 E 2016



Fonte: Banco Central do Brasil (<https://www.bcb.gov.br/pec/Indeco/Port/indeco.asp>) na seção “Indicadores econômicos consolidados”. Acessado em 24/11/2016

A figura 1 mostra que o PIB apresenta uma grande dispersão ao longo dos anos, reflexo dos movimentos da economia mundial, das condições estruturais do país e das decisões macroeconômicas domésticas. Percebe-se que as maiores flutuações ocorreram nos anos de 2009 e 2010 que resultaram dos impactos da crise americana no país e, em seguida, da reação anticíclica do governo brasileiro com medidas internas de enfrentamento do desemprego e da escassez de liquidez. A partir de 2014 o PIB mergulha em queda acentuada, em grande parte explicada pela conjunção de uma dura política macroeconômica de ajuste fiscal e de elevadas taxas de juros, associadas a uma crise político-institucional de grande profundidade que se arrasta até o presente.

Obteve-se para a taxa de crescimento do PIB uma média $\bar{x} = 0,027358785$ e um desvio padrão $s = 0,028158277$ que são estimadores não tendenciosos para a taxa média anual de seu crescimento e para sua dispersão. Estes valores são os dados de entrada para a o método de projeção

apresentado na seção seguinte. Deve-se notar a significativa volatilidade obtida para esta variável, quantitativamente representada pelo fato de o desvio padrão ser praticamente igual à média.

Por outro lado, a população (figura 2) apresenta uma dispersão muito pequena e cresceu, ainda que com velocidade decrescente, no período avaliado, como era e continua sendo previsto pelos modelos demográficos. Na próxima seção serão utilizados os dados de projeção populacional disponibilizados pelo IBGE.

2. Projeção do PIB

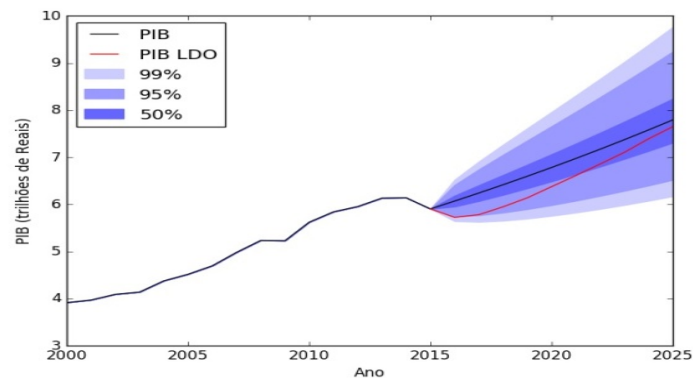
O método utilizado para as projeções do PIB foi construído para as informações apresentadas na Tabela A do anexo 1. Sobre a escolha desses dados, cuja amostra é pequena, cabem algumas observações. Eles refletem um período recente da economia brasileira para o qual a hipótese de a taxa de crescimento da variável em estudo ser estacionária, presente na maioria dos métodos estatísticos, pode ser considerada válida. A opção alternativa, isto é, de utilizar os valores trimestrais do PIB disponibilizados pelo IBGE, acrescentaria apenas os efeitos da sazonalidade desta variável sem mudar substancialmente os resultados do estudo. O uso de técnicas estatísticas das séries temporais, como ARMA ou ARIMA, por exemplo, poderiam melhorar previsões a curto prazo, desde que oscilações passadas tendam a se repetir e que decisões de curto prazo não “desviem” a trajetória do processo. No longo prazo, entretanto, os resultados são similares.

O método pressupõe que o comportamento do PIB até 2060 seguirá aquele do período de calibração, no presente caso, de 2000 a 2015.

As Figuras 3 e 4 mostram valores efetivos do PIB brasileiro no período de 2000 a 2015 e suas projeções até 2025 (figura 3) e projeções até 2060 (figura 4), representadas pelos valores projetados e por seus intervalos de confiança. Utilizou-se os níveis de confiança de 50% (a certeza do resultado do lançamento de uma moeda), e de 95% e 99%, que são os valores normalmente indicados pela teoria estatística. As figuras apresentam também, nas curvas de cor vermelha, os valores do PIB calculados a partir de suas taxas de crescimento previstas até 2060 no Anexo IV.6 da Lei de Diretrizes Orçamentárias de 2017.

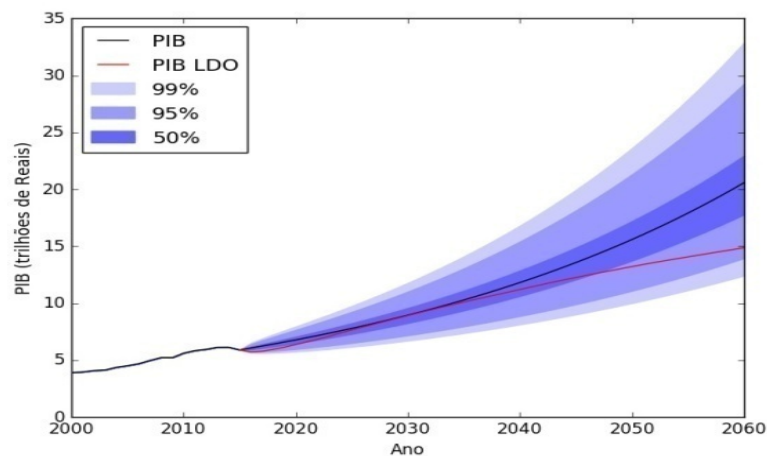
⁷ Dados obtidos no site do Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão (<http://www.orcamentofederal.gov.br/orcamentos-anuais/orcamento-2017/anexos-pldo-2017>). Acessado em 27/01/2017

FIGURA 3 – EVOLUÇÃO DO VALOR DO PIB BRASILEIRO REALIZADO ENTRE 2000 E 2015 E PROJETADO ATÉ 2025



Fonte: Banco Central do Brasil (<https://www.bcb.gov.br/pec/Indeco/Port/indeco.asp>) na seção “Indicadores econômicos consolidados”. Acessado em 24/11/2016. Dados da curva em vermelho obtidos na LDO de 2017. Dados projetados de 2015-2025, com margem de erro em azul dégradé, do próprio autor. Elaboração própria.

FIGURA 4 – EVOLUÇÃO DO VALOR DO PIB BRASILEIRO REALIZADO ENTRE 2000 E 2015 E PROJETADO ATÉ 2060



Fonte: Banco Central do Brasil (<https://www.bcb.gov.br/pec/Indeco/Port/indeco.asp>) na seção “Indicadores econômicos consolidados”. Acessado em 24/11/2016. Dados da curva em vermelho obtidos na LDO de 2017. Dados projetados de 2015-2060, com margem de erro em azul dégradé, do próprio autor. Elaboração própria.

As Figuras 3 e 4 mostram que as altas volatilidades do PIB dificultam, em muito, sua previsão a curto prazo e tornam praticamente impossível sua previsão a longo prazo com algum grau de certeza aceitável. O problema demográfico certamente afetará a tendência média da curva,

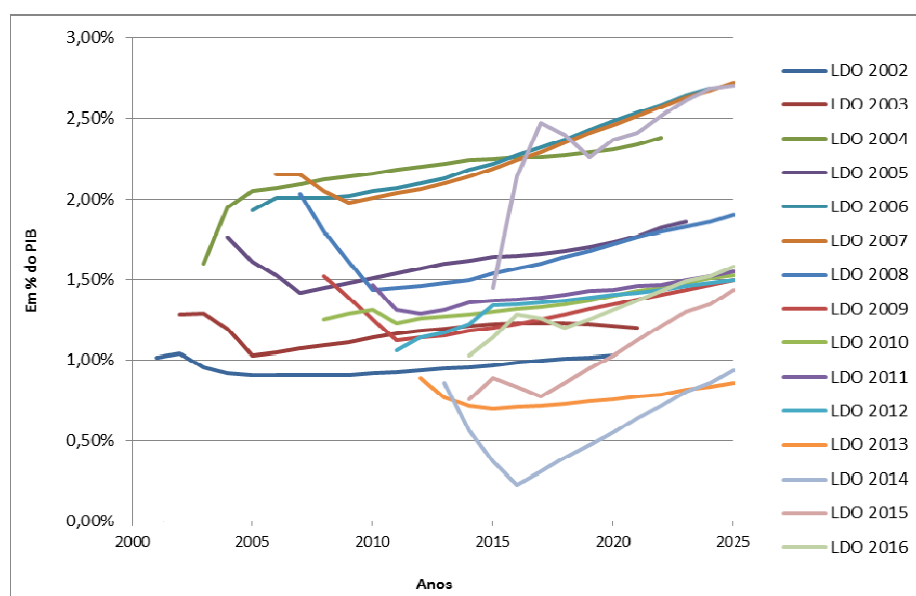
mas não necessariamente da maneira catastrófica como tem sido veiculada pelas projeções oficiais. É bastante plausível inferir que outras variáveis poderão afetar positivamente o crescimento do PIB, como o aumento da produtividade do trabalho (decorrente de investimentos em pesquisas científicas, inovações tecnológicas e elevação dos padrões educacionais) e políticas macroeconômicas estimuladoras do crescimento da massa salarial e da formalização do trabalho. Portanto, o envelhecimento da população no longo prazo pouco alterará o tamanho dos intervalos delimitantes do erro para o PIB, que é o objeto de análise deste estudo.

3. Considerações sobre as projeções para o RGPS contidas nas LDOs

Desde 2002, a Lei de Diretrizes Orçamentárias (LDO) passou a apresentar anualmente um anexo com as projeções atuariais para o RGPS. Nesse anexo, estão contidas as previsões de receitas e despesas desse sistema. As previsões de receitas são feitas a partir da estimativa dos recolhimentos das contribuições sociais pelos empregados e empregadores incidentes sobre a folha de pagamentos somados aos pagamentos dos autônomos, empregados domésticos, segurados especiais e facultativos. As despesas são estimadas a partir da previsão de pagamento de todos os benefícios previdenciários. Do encontro desses dois blocos (receitas menos despesas) calcula-se a necessidade de aporte adicional ou a necessidade de financiamento do sistema previdenciário.

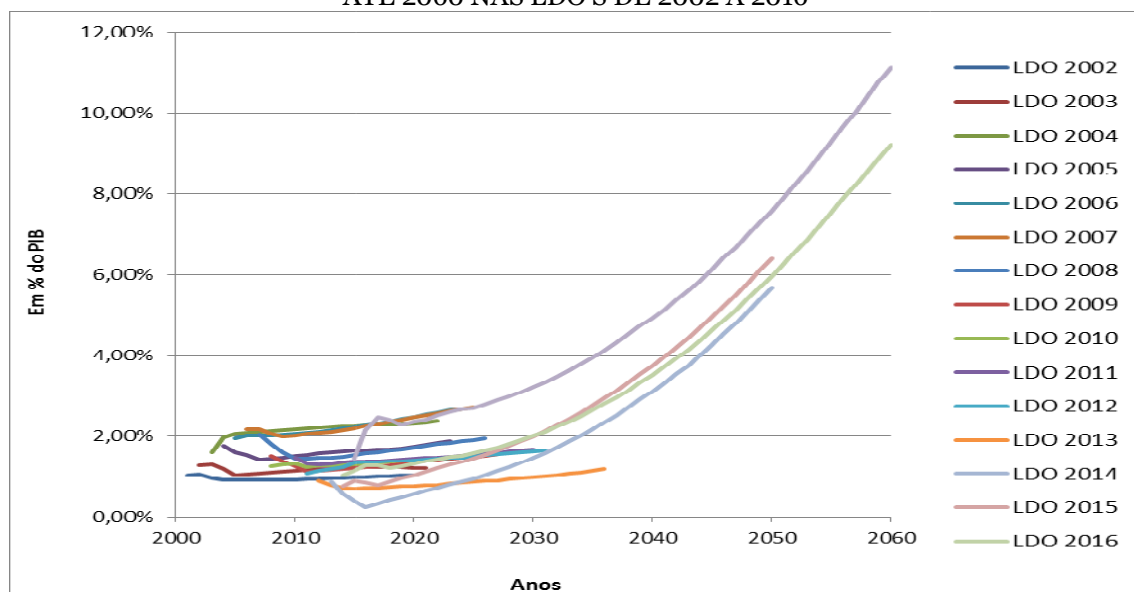
As Figuras 5 e 6, a seguir, demonstram as previsões da necessidade de financiamento do RGPS como proporção do PIB até 2025 (figura 5) e até 2060 (figura 6) contidas nas LDOs de 2002 a 2017.

FIGURA 5 – PREVISÃO DA NECESSIDADE DE FINANCIAMENTO DO RGPS COMO PROPORÇÃO DO PIB ATÉ 2025 NAS LDO'S DE 2002 A 2016



Fonte: LDOs de 2002 a 2017, Anexo de Metas Fiscais. Elaboração própria.

FIGURA 6 - PREVISÃO DA NECESSIDADE DE FINANCIAMENTO DO RGPS COMO PROPORÇÃO DO PIB ATÉ 2060 NAS LDO'S DE 2002 A 2016



Fonte: LDOs de 2002 a 2017, Anexo de Metas Fiscais.
Elaboração própria.

Percebe-se a profusão de resultados diferentes para o médio prazo até 2025, denunciando a incapacidade do governo para elaborar previsões sustentáveis. Provavelmente essa instabilidade das previsões é reveladora da distância entre a previsão do governo e o resultado efetivo, pois o erro da projeção impõe revisões e ajustes na calibragem do modelo a cada ano. Essa instabilidade das projeções no médio prazo parecem atenuadas (forçadamente, é inevitável dizer) no longo prazo (ver figura 6), quando predominam previsões de déficits crescentes em todas as LDO's. Nesse contexto de volatilidade das projeções de prazo curto, qual a credibilidade daquelas de longo prazo?

Em reforço às suspeitas de carência de credibilidade, é necessário mencionar que a projeção feita para o ano de 2025 possui uma característica peculiar, pois, neste ano, a proporção entre a população em idade ativa e a população total brasileira será igual à de 2015 o que permite concluir que, durante o período 2015-2025, as condições demográficas permanecem relativamente estáveis e, portanto, não deveria ter alterado de forma tão erráticas as projeções oficiais das despesas.

4. Projeções para o RGPS com indicadores de dispersão

A seção anterior mostrou que, como em toda previsão, comete-se erros nas projeções atuariais da Previdência Social. Desta forma, apresenta-se aqui algumas previsões desses erros baseadas no método apresentado nas Seções 2 e 3 deste artigo para o PIB.

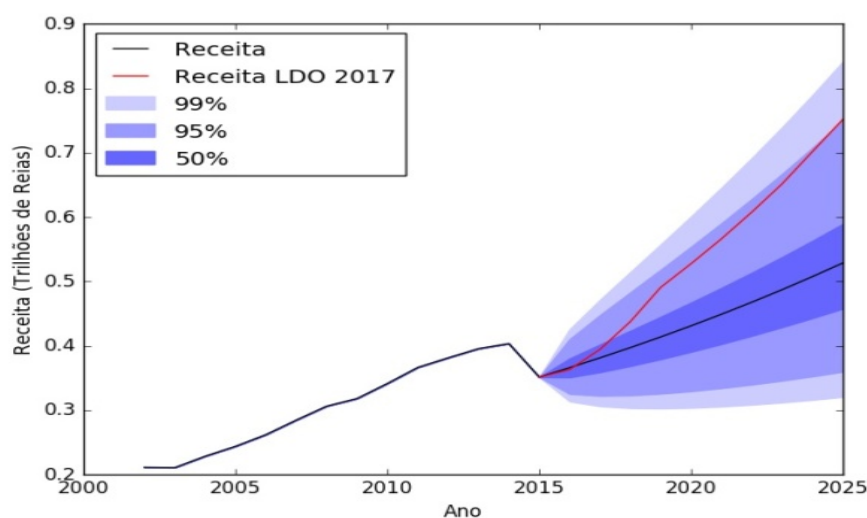
A Tabela B do anexo 1, apresenta o valor do PIB brasileiro e os valores realizados da receita, despesa e déficit do RGPS no período que vai de 2002 a 2015. Nas suas três últimas linhas estão a média de cada coluna, seu desvio padrão e sua correlação com os dados da coluna do PIB. As altas correlações da receita e da despesa com o PIB motivaram o uso do mesmo método que foi utilizado anteriormente para as projeções do PIB.

A técnica utilizada para o PIB, no entanto, não pode ser aplicada para o déficit do RGPS por razões teóricas que se insinuam na baixa correlação entre estas variáveis. Neste trabalho optou-se, como uma primeira aproximação, pela técnica que consiste em modelá-lo como um processo browniano (ver Anexo 2, item 2.5).

O processo de projeção proposto consiste em tomar o comportamento das receitas, despesas e déficit do RGPS, efetivamente realizadas num período recente (anos de 2000 a 2015), e, partindo da suposição de que esse comportamento influenciará fortemente o desempenho futuro dessas variáveis nas próximas décadas, extrapolá-lo para o período desejado.

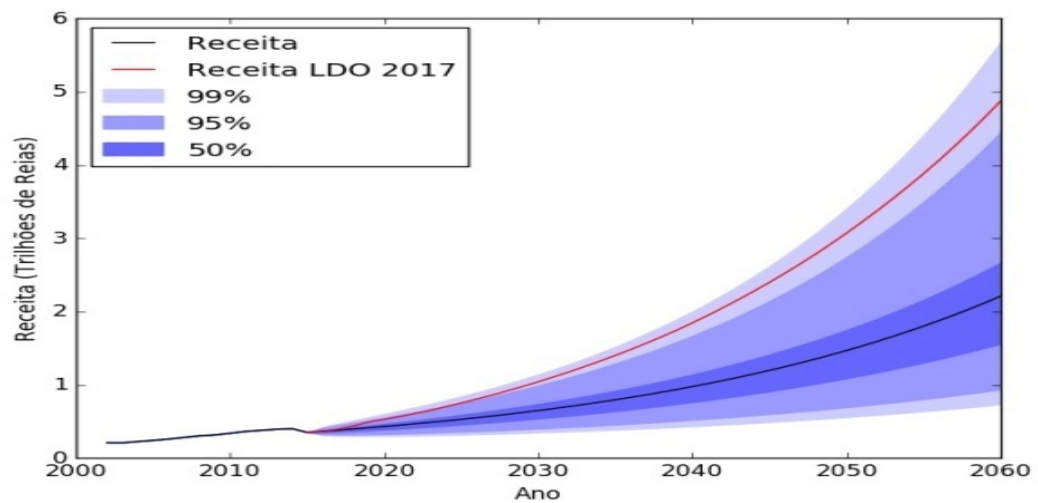
As Figuras 7, 8, 9 e 10 apresentam um exercício de extrapolação, da receita e da despesa do RGPS, para o ano de 2025 (figuras 7 e 9) e para o ano de 2060 (figuras 8 e 10), com a cor azul em *dégradé* para os intervalos de confiança de 50%, 95% e 99%, de forma a deixar clara a margem de erro da previsão de cada variável; apresentam também, na curva em vermelho, as previsões do governo, para as mesmas variáveis e nos mesmos períodos, contidas na LDO de 2017.

FIGURA 7 – EVOLUÇÃO DO VALOR DA RECEITA DO RGPS REALIZADO ENTRE 2002 E 2015 E ESTIMADO ATÉ 2025



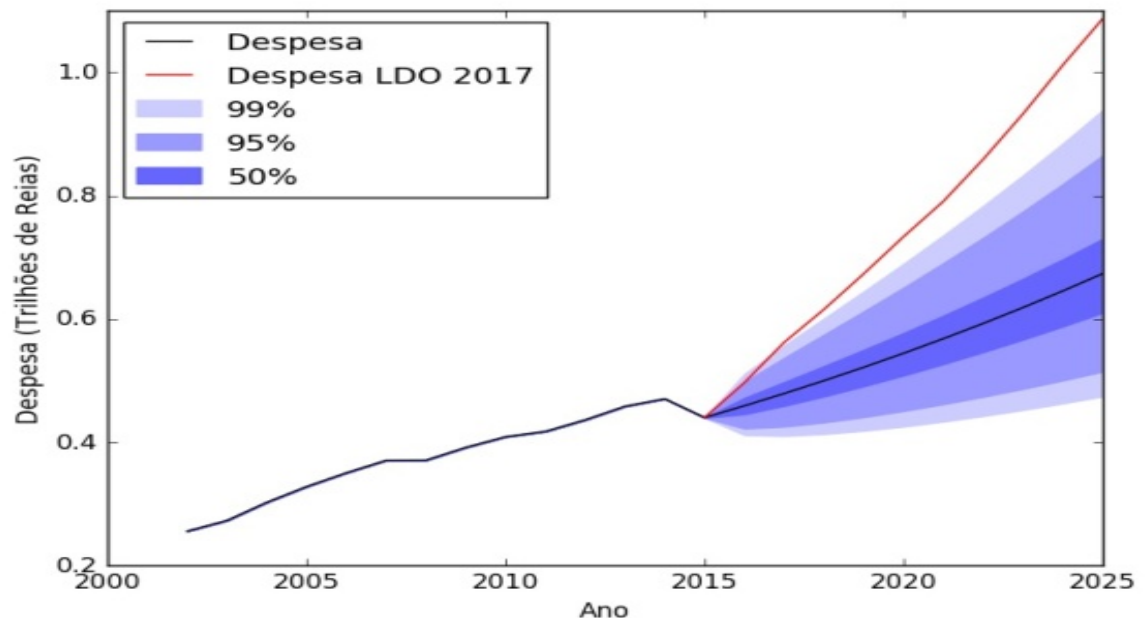
Fonte: dados sobre as receitas realizadas do RGPS obtidos pelos Anuários Estatísticos da Previdência Social (<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-social/>). Acessados em 26/02/2017. Dados estimados, obtidos na LDO de 2017 para a curva em vermelho. Dados projetados 2015-2025, com margem de erro em azul *dégradé*, cálculo próprio do autor. Elaboração própria.

FIGURA 8 – EVOLUÇÃO DO VALOR DA RECEITA DO RGPS
REALIZADO ENTRE 2002 E 2015 E ESTIMADO ATÉ 2060



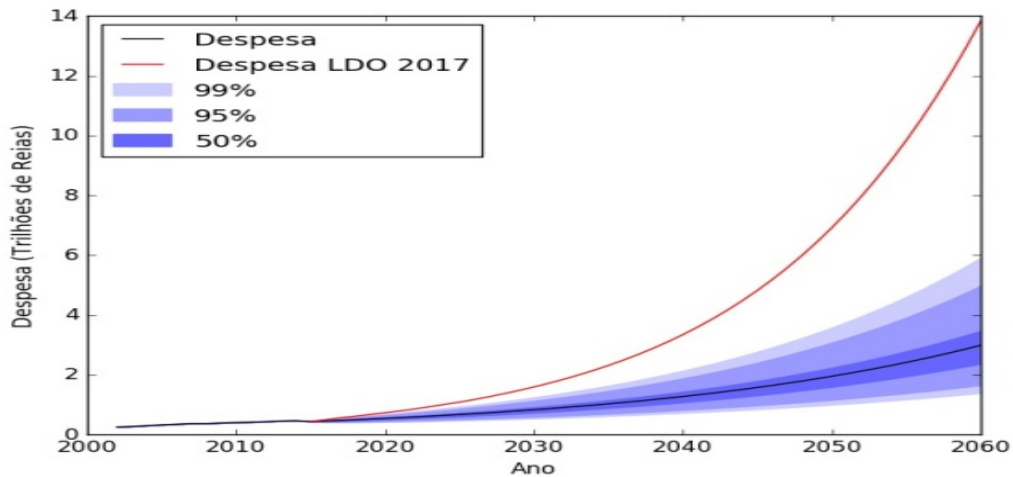
Fonte: dados sobre as receitas realizadas do RGPS obtidos pelos Anuários Estatísticos da Previdência Social (<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-social/>). Acessados em 26/02/2017. Dados estimados, obtidos na LDO de 2017 para a curva em vermelho. Dados projetados 2015-2060, com margem de erro em azul *dégradé*, cálculo próprio. Elaboração própria.

FIGURA 9 – EVOLUÇÃO DO VALOR DA DESPESA DO RGPS
REALIZADO ENTRE 2002 E 2015 E PROJETADO ATÉ 2025



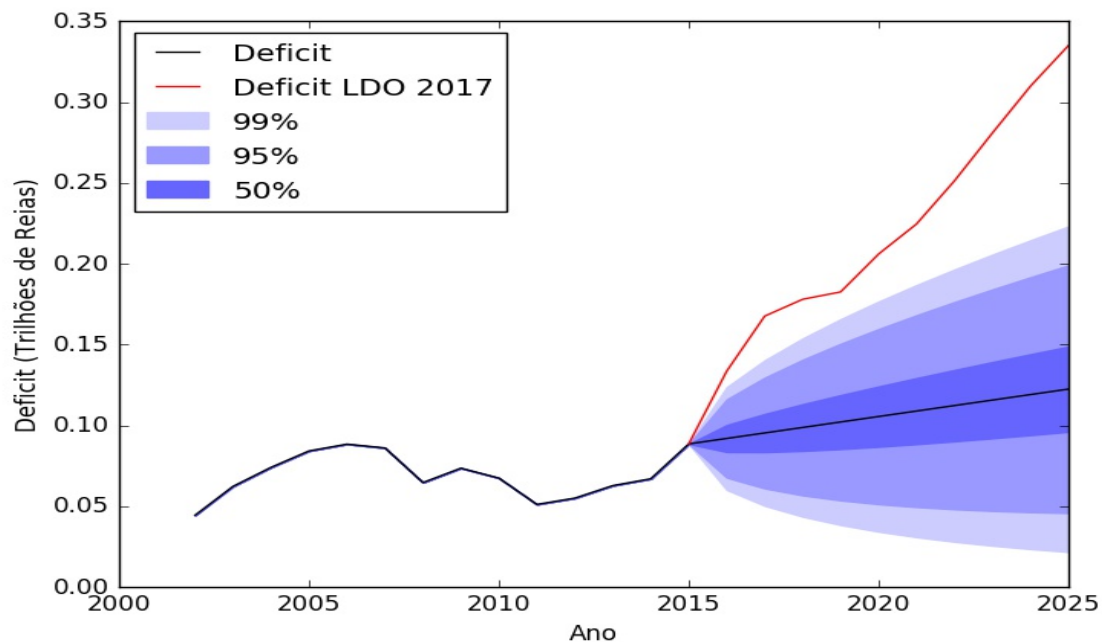
Fonte: dados sobre as despesas realizadas do RGPS obtidos pelos Anuários Estatísticos da Previdência Social (<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-social/>). Acessados em 26/02/2017. Dados estimados, obtidos na LDO de 2017 para a curva em vermelho. Dados projetados 2015-2025, com margem de erro em azul *dégradé*, cálculo próprio do autor. Elaboração própria.

FIGURA 10 – EVOLUÇÃO DO VALOR DA DESPESA DO RGPS REALIZADO ENTRE 2002 E 2015 E PROJETADO ATÉ 2060



Fonte: dados sobre as despesas realizadas do RGPS obtidos pelos Anuários Estatísticos da Previdência Social (<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-social/>). Acessados em 26/02/2017. Dados estimados, obtidos na LDO de 2017 para a curva em vermelho. Dados projetados 2015-2060, com margem de erro em azul *dégradé*, cálculo próprio do autor. Elaboração própria.

FIGURA 11 – EVOLUÇÃO DO VALOR DO DÉFICIT DO RGPS REALIZADO ENTRE 2002 E 2015 E PROJETADO ATÉ 2025



Fonte: dados sobre as receitas e despesas realizadas do RGPS obtidos pelos Anuários Estatísticos da Previdência Social (<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-social/>). Acessados em 26/02/2017. Dados estimados, obtidos na LDO de 2017 para a curva em vermelho. Dados projetados 2015-2025, com margem de erro em azul *dégradé*, cálculo próprio do autor. Elaboração própria.

Do exercício realizado, pode-se concluir que o governo superestima receitas e despesas, porém, muito mais as despesas, o que faz com que a evolução do déficit cresça exponencialmente, descolando-se de qualquer referência lógica com o comportamento histórico das variáveis estudadas (ver Figura 11). Essa constatação não está isenta de questionamentos. Que fenômenos previstos pelo governo estão influenciando tão drasticamente o resultado previdenciário além do problema demográfico de envelhecimento da população? Que pressupostos foram levados em consideração sobre as decisões de políticas macroeconômicas, afetando diretamente as receitas e despesas? Qual o cenário mundial e suas possíveis implicações sobre a economia local serviram de suporte para as previsões? O que se considerou como cenário para o mercado de trabalho e para os valores de seus parâmetros e variáveis?

Essas perguntas não encontram respostas nos documentos oficiais. Insistimos neste artigo que o comportamento volátil de variáveis econômicas exige o reconhecimento da fragilidade das previsões. Procurar elucidar todos os pressupostos, cenários e equações que envolvem os exercícios de previsões, bem como reconhecer a possibilidade de erro e estabelecer intervalos de confiança para as previsões é essencial para municiar a tomada de decisões num contexto político de disputa sobre as bases de uma reforma do sistema previdenciário, que afetará a vida de todos os cidadãos.

5. Comentários finais e conclusões

O presente artigo procurou demonstrar que as projeções de longo prazo de variáveis como o PIB e o resultado previdenciário carregam um grande componente de volatilidade e incerteza que necessita ser aferido através da criação de intervalos de confiança dos erros. Como apontam os manuais de Macroeconomia, tanto o PIB quando a necessidade de financiamento da previdência pública são afetados pelo ambiente internacional, pela evolução da estrutura produtiva interna, pelas opções de política macroeconômica de cada governo eleito e pelas questões político-institucionais. A carga de fatores imprevisíveis torna vulnerável qualquer determinismo voluntarioso das projeções elaboradas pelo governo, particularmente no que diz respeito ao suposto "rombo" da Previdência e à "bomba" demográfica.

Em uma nação minimamente democrática, todos os cidadãos devem ser corretamente informados sobre os problemas que acompanham as projeções de variáveis decisivas para a vida em sociedade e devem participar das soluções apresentadas para futuros estrangulamentos que se desenham como tendência. É importante ter em consideração que, no caso específico da previdência

pública, não há uma força unilateral que possa determinar, inexoravelmente, o seu resultado financeiro no longo prazo. O futuro (e as previsões) será influenciado por múltiplas possibilidades econômicas e por escolhas políticas. O determinismo demográfico, por exemplo, não necessariamente irá se sobrepor às soluções que podem ser conquistadas com o uso adequado da política macroeconômica e de padrões redistributivos dirigidas para a solução da pobreza de idosos.

Este trabalho tratou, de uma maneira geral, de um problema central da modelagem estatística de variáveis macroeconômicas: todas as decisões macroeconômicas são tomadas num ambiente de elevadas incertezas advindas, no mínimo, da impossibilidade do conhecimento do comportamento da totalidade dos agentes que movem a economia. Estas incertezas, sempre presentes nos resultados, devem ser de alguma forma quantificadas em modelos estatísticos por medidas de dispersão, como o desvio padrão e por intervalos de confiança para as grandezas estimadas. Esse procedimento se torna ainda mais necessário quando os resultados apresentados forem polêmicos ou, num pior caso, refletirem apenas os interesses de um setor da sociedade. Foi proposta uma primeira solução para esse problema e, no momento, estudam-se aprimoramentos.

Os modelos de estimação e projeção apresentados nos anexos são estatisticamente simples. Em paralelo a este trabalho, tentou-se também analisar os dados como uma série temporal e utilizar o modelo ARIMA para as projeções. Problemas relacionados com o modo de interpretação de algumas hipóteses do modelo e, sobretudo, com a presença de crise econômica de cunho político-institucional que determinou os valores dos últimos pontos do PIB na série, dissuadiram os autores da utilização desses métodos. Por outro lado, a inserção de variações demográficas no modelo já está sendo estudada.

As interpretações dos resultados aqui apresentados devem levar em conta as seguintes considerações:

- Os dados utilizados representam uma “fotografia” geral da situação econômica do Brasil hoje.
- Se esta “fotografia” for uma tendência relativamente estável da economia brasileira, a evolução prevista para o PIB, extrapolada a partir das informações dos últimos quatorze anos (2002-2015), será aquela mostrada nas Figuras 3 e 4. No entanto, devido à alta volatilidade das variáveis econômicas, não se pode omitir os erros contidos em tais projeções. O problema demográfico existe, é previsível e não necessariamente catastrófico. Outras sociedades que envelheceram conseguiram fazer ajustes em seu sistema tributário e na eficiência da gestão das receitas orçamentárias que garantiram a solidez fiscal de seus sistemas previdenciários (vide o segundo artigo que compõe este livro - “Uma análise não convencional para o problema da Previdência Social no Brasil: aspectos teóricos e evidências empíricas”, no qual os autores discutem com mais detalhes outras soluções). A

diminuição do desemprego, da informalidade e o estímulo ao aumento da produtividade do trabalho também são soluções possíveis.

- No caso específico de uma Reforma na Previdência proposta pelo governo Temer, é importante admitir que as projeções que estão pautando o debate não podem ser tomadas como verdades inquestionáveis, uma vez que, em nome da honestidade científica, não sabemos com exatidão o que não se pode saber. Erros em projeções são naturais e precisam ser delimitados. Se não o são, os resultados das projeções não são confiáveis.

Referências Bibliográficas

AITCHISON, J. and BROWN, J.A.C. (1957) **The Lognormal Distribution**, Cambridge University Press.

ÇINLAR, E. *Probability and Stochastics*, Springer, New York, 2011

EATWELL, J. The anatomy of the pensions 'crisis'. *Economic Survey of Europe*, n. 3, p. 57-67, 1999.

FOLEY, D. K. *Mathematical Formalism and Political-Economic Content*, trabalho apresentado na Conference of the Institute of New Economic Thinking, Cambridge, UK, 8 a 10 de abril de 2010. (disponível em <https://www.ineteconomics.org/uploads/papers/INET-C@K-Paper-Session-6-Foley.pdf>)

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1974

ANEXO 1 – DADOS UTILIZADOS

TABELA A: PIB, população do Brasil e taxas anuais de crescimento (2000-2015)

ANO	PIB (em R\$ de 2015)	POPULAÇÃO	TAXAS DE CRESCIMENTO ANUAIS	
			PIB	População
2000	3.916.915.239.480,41	173.447.387	0,01389896	0,01410940
2001	3.971.356.303.559,63	175.894.625	0,03053462	0,01360694
2002	4.092.620.153.487,88	178.288.012	0,01140829	0,01312190
2003	4.139.309.951.008,42	180.627.489	0,05759965	0,01265302
2004	4.377.732.740.396,53	182.912.972	0,03202132	0,01219936
2005	4.517.913.524.072,55	185.144.393	0,03961989	0,01175996
2006	4.696.912.747.778,46	187.321.684	0,06069871	0,01133391
2007	4.982.009.274.107,88	189.444.772	0,05094195	0,01092045
2008	5.235.802.563.774,39	191.513.595	-0,00125812	0,01051870
2009	5.229.215.295.696,24	193.528.069	0,07528226	0,01012809
2010	5.622.882.431.672,01	195.488.139	0,03909212	0,00974781
2011	5.842.692.830.451,35	197.393.721	0,01917983	0,00937737
2012	5.954.754.663.080,98	199.244.754	0,03013600	0,00901607
2013	6.134.207.156.833,72	201.041.158	0,00104167	0,00866347
2014	6.140.596.986.002,71	202.782.873	-0,03847603	0,00831899
2015	5.904.331.214.709,14	204.469.821		

Fonte: Banco Central do Brasil (<https://www.bcb.gov.br/pec/Indeco/Port/indeco.asp>) na seção “Indicadores econômicos consolidados”. Acessado em 24/11/2016

Elaboração própria.

TABELA B: PIB E VALORES REALIZADOS DA RECEITA, DESPESA E DÉFICIT DO RGPS (EM MILHÕES DE R\$ DE 2015)

Ano	PIB	Receita	Despesa	Déficit
2002	4.137.037,67	211.416,44	255.955,00	44.538,56
2003	4.184.234,20	210.891,01	273.269,07	62.378,07
2004	4.425.244,61	228.582,31	302.706,66	74.124,36
2005	4.566.946,73	243.973,40	328.247,70	84.274,30
2006	4.747.888,65	262.109,79	350.592,41	88.482,62
2007	5.036.079,35	284.710,92	370.834,37	86.123,44
2008	5.292.627,07	306.351,89	371.060,48	64.708,59
2009	5.285.968,31	318.166,18	391.793,00	73.626,82
2010	5.683.907,94	341.564,24	409.060,02	67.495,77
2011	5.909.810,48	366.503,20	417.717,99	51.214,79
2012	6.023.348,34	381.411,42	436.508,73	55.097,31
2013	6.204.339,28	395.658,46	458.503,41	62.844,95
2014	6.235.606,40	403.571,86	470.623,25	67.051,39
2015	6.000.570,46	351.467,00	440.079,70	88.612,70
Média	5.266.686,39	307.598,44	376.925,13	69.326,69
Desvio padrão	758.827,47	68.254,62	67.886,75	14.008,49
Correl. com PIB	1,0000	0,9937	0,9839	-0,0733

Fonte: Dados do PIB obtidos da série temporal 1208 no site do Banco Central do Brasil (<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries>) e dados sobre as receitas e despesas do RGPS obtidos pelos Anuários Estatísticos da Previdência Social (<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-social/>). Acessados em 26/02/2017

Elaboração própria.

ANEXO 2 – DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

2.1. Taxa de crescimento de variáveis econômicas

Uma variável econômica X é observada ao longo do tempo. Define-se x_t como o valor que a variável observada assume no instante t .

Supondo que x_t é observado periodicamente no tempo, em instantes igualmente espaçados por Δt , a taxa de crescimento entre duas observações consecutivas x_t e $x_{t+\Delta t}$ é definida como:

$$(x_t)_{..} = \dots \frac{(x_{t+\Delta t} - x_t) / \Delta t}{x_t} \quad (1)$$

Note-se que, pela expressão acima, a taxa $g_{\Delta t}(x_t)$ representa o aumento relativo (em porcentagem dividida por 100) da variável x por unidade de tempo no instante t .

Nos modelos a tempo discreto considera-se que o crescimento do valor da variável x_t ocorre instantaneamente em cada instante de observação, ou seja, os instantes de observação são também os instantes de crescimento imediato. Num outro instante qualquer, a variável permanece com o último valor observado.

Em particular, se $\Delta t = 1$ a variável é observada a cada unidade de tempo, por exemplo um ano, tem-se neste caso que a definição acima se reduz a $:g_1(x_t)_{..} = \dots (x_{t+1} - x_t) / x_t$. [essa equação ã é numerada?]

A Equação 1 permite obter o valor da variável observada no instante da próxima observação $t + \Delta t$ em função do seu valor no instante presente t e do valor da sua taxa de crescimento neste mesmo instante, para isso, basta reescrevê-la como:

$$x_{t+\Delta t} = \dots x_t \cdot (1 + g_{\Delta t}(x_t) \Delta t) \quad (2)$$

De forma análoga:

$$x_{t+2\Delta t} = \dots x_{t+\Delta t} \cdot (1 + g_{\Delta t}(x_{t+\Delta t}) \Delta t) = \dots x_t \cdot (1 + g_{\Delta t}(x_t) \Delta t) \cdot (1 + g_{\Delta t}(x_{t+\Delta t}) \Delta t)$$

e, assim, demonstra-se facilmente por indução finita que:

$$x_{t+n\Delta t} = \dots x_t \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (1 + g_{\Delta t}(x_{t+k\Delta t}) \Delta t) \quad (3)$$

Pela Equação 2, agora comparando o valor da variável no instante t com seu valor no instante $t + n\Delta t$, tem-se:

$$x_{t+n\Delta t} = \dots x_t \cdot (1 + g_{n\Delta t}(x_t) n\Delta t) \quad (4)$$

Observa-se que $g_{n\Delta t}(x_t)$ tem um comportamento similar àquele dos juros simples na microeconomia, se esta taxa for aplicada n vezes no valor de x_t , obtém-se o valor de $x_{t+n\Delta t}$.

Comparando as expressões de $x_{t+n\Delta t}$ apresentadas nas Equações 3 e 4, obtém-se $g_{n\Delta t}(x_t)$ a partir da sequência de taxas de crescimento da variável a cada incremento de tempo Δt :

$$g_{n\Delta t}(x_t)_{..} = \dots \frac{1}{n\Delta t} \cdot \{ \prod_{k=0}^{n-1} [1 + g(x_{t+k\Delta t}) \Delta t] - 1 \} \quad (5)$$

2.2. Taxa de crescimento constante a tempo discreto

Em muitos modelos econômicos, consideram-se variáveis com taxa de crescimento constante com comportamento similar aos dos juros compostos na microeconomia. Estas variáveis x_t são tais que $g_{\Delta t}(x_k) = g$ para algum valor fixo g para todo instante de observação. Neste caso, diferentemente do que ocorria na Equação (4), tem-se:

$$x_{t+n\Delta t} = \dots x_t \cdot (1 + g\Delta t)^n \quad (6)$$

Nesta seção considera-se ainda o tempo discreto, ou seja, o crescimento do valor da variável x ocorre instantaneamente em cada instante de observação e, nos instantes em que a variável não é observada, ela permanece com o último valor observado. O crescimento do valor de x , com taxa de crescimento constante num intervalo de tempo fixo τ contado a partir de um instante t , depende do número de observações efetuadas entre t e $t + \tau$. Este número, denotado n , é o maior inteiro menor que a razão entre τ e Δt , escreve-se:

$$n.. = ..\lfloor \frac{\tau}{\Delta t} \rfloor (7)$$

e a Equação 3 pode ser reescrita como:

$$x_{t+\tau}.. = ..x_t.(1. + .\frac{g_n\tau}{n})^n (8)$$

onde g_n é a taxa de crescimento da variável x a cada Δt .

Admitindo que os valores x_t e $x_{t+\tau}$ de uma variável discreta são conhecidos, por exemplo por uma série temporal, é possível fazer uma aproximação, também discreta, da variável em instantes $t + \tau i/n$ para $i = 1, 2, ..., n-1$. Para isso, considera-se $\Delta t = \tau/n$, e então, os valores conhecidos são x_t e $x_{t+n\Delta t}$. Para se obter o valor de g_n da taxa de crescimento da variável, admitida constante no intervalo entre t e $t + \tau$, usa-se a seguinte aproximação a partir da Equação 6:

$$x_{t+n\Delta t}.. = ..x_t.(1. + .g_n\Delta t)^n$$

$$g_n.. = ..\frac{1}{\Delta t}..(\sqrt[n]{\frac{x_{t+\tau}}{x_t}}.. - .1) \quad (9)$$

A Equação 8 permite ainda a introdução de **variáveis a tempo contínuo**, ou seja, de variáveis que crescem continuamente no tempo com taxa constante. Para isso, aumenta-se indefinidamente o número de divisões n efetuado no intervalo de tempo τ :

$$x_{t+\tau}.. = ..\lim_{n \rightarrow \infty} ..x_t.(1. + .\frac{g_n\tau}{n})^n.. = ..x_t.\lim_{n \rightarrow \infty} (1. + .\frac{g_n\tau}{n})^n.. = ..x_t.[\lim_{y \rightarrow \infty} (1. + .\frac{1}{y})^y]^{g\tau}$$

para $y = n / g_n\tau$ e $g.. = ..\lim_{n \rightarrow \infty} .g_n$. [essa equação não é numerada?]

Note-se que o limite remanescente na expressão de $x_{t+\tau}$ é clássico na história da matemática. Ele converge para a constante de Euler $e \approx 2,71828183$. Então, para variáveis a tempo contínuo:

$$x_{t+\tau}.. = ..x_t.e^{g\tau} \quad (10)$$

2.3. Variáveis com crescimento a tempo contínuo

A taxa de crescimento de uma variável x a tempo contínuo é definida como:

$$\gamma_t(x_t)..\ = ..\frac{dx_t/dt}{x_t}.. = ..\frac{\dot{x}_t}{x_t} \quad (11)$$

Neste caso, pode-se escrever a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx_t}{dt} \dots = \dots \gamma_t(x_t) \cdot x_t \text{ [essa equação não é numerada?]}$$

Nesta equação, se a taxa de crescimento é constante, ou seja, se $\gamma_t(x_t) \dots = \dots g$ para todo instante de tempo t e para algum valor g , então, da teoria das equações diferenciais é sabido que a única solução possível para esta equação é a já apresentada na Equação 10:

$$x_{t+\tau} \dots = \dots x_t \cdot e^{g\tau}$$

Deve-se notar que

$$\frac{d \ln x_t}{dt} \dots = \dots \frac{1}{x_t} \cdot \frac{dx_t}{dt} \dots = \dots \gamma_t(x_t)$$

ou seja, a taxa de crescimento contínuo equivale à derivada (crescimento absoluto) do logaritmo da variável original.

De forma análoga ao caso do crescimento discreto, admitindo que os valores de x_t e $x_{t+\Delta t}$ são conhecidos, por exemplo por uma série temporal, então é possível obter um valor de g tal que, se a variável x_t for admitida como tendo crescimento contínuo à taxa constante γ entre t e $t+\Delta t$:

$$\gamma_{\Delta t}(x_t) \dots = \dots \frac{\ln(x_{t+\Delta t}) - \ln(x_t)}{\Delta t} \quad (12)$$

Deve-se notar que é a Equação 12 acima, e não a Equação 1, que fornece a equação correta para a obtenção da taxa de crescimento contínuo a partir de uma série temporal.

As variáveis com crescimento contínuo apresentam propriedades importantes. Para a constante e e x e y variáveis a tempo contínuo com $x_t \neq 0$ e $y_t \neq 0$, algumas propriedades das suas taxas de crescimento são:

$$\text{PTC1. } \gamma(x_t) \dots = \dots 0 \text{ se } x_t \text{ é constante, ou seja, se } \dot{x}_t \dots = \dots 0$$

$$\text{PTC2. } \gamma(ax_t) \dots = \dots \gamma(x_t)$$

$$\text{PTC3. } \gamma(x_t + a) \dots = \dots \gamma(x_t) \frac{x_t}{x_t + a}$$

$$\text{PTC4. } \gamma(x_t + y_t) \dots = \dots \gamma(x_t) \frac{x_t}{x_t + y_t} + \gamma(y_t) \frac{y_t}{x_t + y_t}$$

$$\text{PTC5. } \gamma(x_t - y_t) \dots = \dots \gamma(x_t) \frac{x_t}{x_t - y_t} - \gamma(y_t) \frac{y_t}{x_t - y_t} \text{ se } x_t \neq y_t$$

$$\text{PTC6. } \gamma(x_t y_t) \dots = \dots \gamma(x_t) + \gamma(y_t)$$

$$\text{PTC7. } \gamma(x_t / y_t) \dots = \dots \gamma(x_t) - \gamma(y_t)$$

$$\text{PTC8. } \gamma(x_t^a) \dots = \dots a \gamma(x_t)$$

2.4. Variáveis com crescimento a tempo discreto

A taxa de crescimento de uma variável x_t a tempo discreto já foi definida na Equação 1:

$$g_{\Delta t}(x_t) \dots = \dots \frac{(x_{t+\Delta t} - x_t) \cdot \Delta t}{x_t}$$

As variáveis com crescimento discreto apresentam propriedades próximas (às vezes idênticas) àquelas das variáveis com crescimento contínuo. Para a constante e x_t e y_t variáveis com crescimento discretizado em intervalos de tempo Δt , com $x_t \neq 0$ e $y_t \neq 0$, algumas propriedades das suas taxas de crescimento são:

$$\text{PTD1. } g_{\Delta t}(a)_{..} = ..0 \text{ se } x_{t+\Delta t} = ..x_t$$

$$\text{PTD2. } g_{\Delta t}(ax_t)_{..} = ..g_{\Delta t}(x_t)$$

$$\text{PTD3. } g_{\Delta t}(x_t + a)_{..} = ..g_{\Delta t}(x_t) \frac{x_t}{x_t + a}$$

$$\text{PTD4. } g_{\Delta t}(x_t + y_t)_{..} = ..g_{\Delta t}(x_t) \frac{x_t}{x_t + y_t} + g_{\Delta t}(y_t) \frac{y_t}{x_t + y_t}$$

$$\text{PTD5. } g_{\Delta t}(x_t - y_t)_{..} = ..g_{\Delta t}(x_t) \frac{x_t}{x_t - y_t} - g_{\Delta t}(y_t) \frac{y_t}{x_t - y_t}$$

$$\text{PTD6. } g_{\Delta t}(x_t y_t)_{..} = ..g_{\Delta t}(x_t) + g_{\Delta t}(y_t) + g_{\Delta t}(x_t) g_{\Delta t}(y_t) \Delta t$$

$$\text{PTD7. } g_{\Delta t}(x_t / y_t)_{..} = .. \frac{g_{\Delta t}(x_t) - g_{\Delta t}(y_t)}{1 + g_{\Delta t}(y_t) \Delta t}$$

$$\text{PTD8. } g_{\Delta t}(x_t^a)_{..} = .. \frac{(1 + g_{\Delta t}(x_t) \Delta t)^a - 1}{\Delta t} = ..a g_{\Delta t}(x_t) + \frac{a(a-1)}{2} g_{\Delta t}^2(x_t) \Delta t + ...o(\Delta t^2)^8$$

Note-se que as cinco primeiras propriedades são análogas àquelas obtidas para variáveis com crescimento contínuo. As três últimas propriedades são casos particulares de uma propriedade mais geral, válida para um conjunto $x(1), x(2), \dots, x(n)$, de variáveis com crescimento discreto:

$$\text{PTD9. } 1 + g_{\Delta t}(\prod_{i=1}^n x(i)_t) \Delta t_{..} = .. \prod_{i=1}^n (1 + g_{\Delta t}(x(i)_t) \Delta t)$$

Por exemplo, a aplicação desta propriedade para o produto de três variáveis com crescimento discreto x, y e z fornece:

$$1 + g_{\Delta t}(x_t y_t z_t) \Delta t_{..} = ..(1 + g_{\Delta t}(x_t) \Delta t) \cdot (1 + g_{\Delta t}(y_t) \Delta t) \cdot (1 + g_{\Delta t}(z_t) \Delta t)$$

$$g_{\Delta t}(x_t y_t z_t)_{..} = .. \frac{(1 + g_{\Delta t}(x_t) \Delta t) \cdot (1 + g_{\Delta t}(y_t) \Delta t) \cdot (1 + g_{\Delta t}(z_t) \Delta t)_{..} - 1}{\Delta t}$$

A relação entre a taxa de crescimento $g_{\Delta t}(x_t)$ de uma variável x a tempo discreto definida na Equação 1 e a taxa de crescimento $\gamma_{\Delta t}(x_t)$ da mesma variável x suposta agora a tempo contínuo e definida na Equação 12 é:

$$\text{PTD10. } \gamma_{\Delta t}(x_t)_{..} = ..g_{\Delta t}(x_t)_{..} - .. \frac{[g_{\Delta t}(x_t)]^2}{2} \Delta t_{..} + ...o(\Delta t^2) \text{ se } -1_{..} < ..g_{\Delta t}(x_t) \Delta t_{..} < ..1$$

2.5. Estimação de variáveis econômicas

Nesta seção, as variáveis econômicas são vistas como processos estocásticos ou, mais especificamente, como um movimento browniano. O movimento browniano é contínuo, com incrementos estacionários e independentes e tem a forma (ÇINLAR, 2011):

$$X_t_{..} = ..X_0 + .at + .bW_t \quad (13)$$

⁸ $o(h(x))$ significa um termo “da ordem” de $h(x)$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 0} o(h(x))/h(x) = 0$

Onde, a é denominado taxa de crescimento (“drift rate”), b é denominado volatilidade e W_t é um processo de Wiener, ou seja, é também um movimento browniano com $W_0 = 0$, $E(W_t) = 0$ e $var(W_t) = t$, para todo $t \geq 0$, tem uma distribuição normal com esta esperança e esta variância.

Considere agora uma variável econômica Y_t tal que $\ln(Y_t)$ seja um movimento browniano. Neste caso tem-se:

$$\ln(Y_t) - \ln(Y_0) = at + bW_t \quad (14)$$

Como, por hipótese, os incrementos são estacionários:

$$\ln(Y_{t+\tau}) - \ln(Y_t) = a\tau + bW_\tau \quad (15)$$

ou

$$Y_{t+\tau} = Y_t e^{a\tau + bW_\tau} \quad (16)$$

Ainda por hipótese, os incrementos são independentes, ou seja, o incremento da variável Y_t no intervalo de tempo entre t e $t+\tau$ é independente dos incrementos anteriores ao instante t . Este fato caracteriza a variável como um processo de Markov. Este ponto não será tratado neste trabalho, ainda que justifique teoricamente alguns aspectos do desenvolvimento proposto a seguir. Para detalhes, ver (ÇINLAR, 2011).

Comparando a Equação 16 com a Equação 10, pode-se notar que o modelo proposto permite analisar estocasticamente dados reais sob a hipótese de a taxa de crescimento ser constante, porém, com um termo estocástico de média zero.

Da Equação 15 tem-se:

$$\ln(Y_{t+\tau}) - \ln(Y_t) = a\tau + bW_\tau \quad (17)$$

Como W_τ tem distribuição normal com esperança $E(W_\tau) = 0$ e variância $var(W_\tau) = \tau$, o segundo membro desta última equação, e assim também o primeiro, têm distribuição normal com esperança $a\tau$ e variância $b^2\tau$, o que se escreve:

$$\ln(Y_{t+\tau}) - \ln(Y_t) \sim N(a\tau, b^2\tau) \quad (18)$$

ou seja, se a variável Y_t for admitida como tendo taxa de crescimento contínua $\gamma_\tau(Y_t)$ definida na Equação 12, então com uma amostra destas taxas obtidas de dados reais é possível estimar a taxa de crescimento e a volatilidade da variável econômica em questão. Na prática, a partir de uma sequência de valores $Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}$, com $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ e igualmente espaçados por intervalos de tempo $\tau = t_i - t_{i-1}$ pode-se gerar uma amostra de taxas de crescimento

$$\gamma_i = \ln(Y_{t_i}) - \ln(Y_{t_{i-1}}), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

que é composta de elementos independentes, pois assim os intervalos de tempo $t_i - t_{i-1}$ da amostra serão disjuntos e igualmente distribuídos segundo uma distribuição normal com média e variância, que serão estimadores de máxima verossimilhança para funções diretas da taxa de crescimento e para a volatilidade da variável.

2.6. Projeção de variáveis econômicas

O modelo apresentado na seção anterior permite a projeção de uma variável econômica pela definição de intervalos de confiança do seu valor em instantes futuros.

Para a projeção, considera-se seu último valor observado como valor inicial fixo Y_0 e o instante de sua observação como instante inicial $t = 0$. Para qualquer instante posterior à

última observação, pela Equação 14 e lembrando que $W_0 = 0$, $E(W_t) = 0$ e $var(W_t) = t$, tem-se que $\ln(Y_t)$ tem uma distribuição normal com média e variância dadas respectivamente por:

$$\mu_t.. = ..E[\ln(Y_t)].. = ..\ln(Y_0).. + .at \quad (20)$$

$$\sigma_t^2.. = ..Var[\ln(Y_t)].. = ..b^2t \quad (21)$$

Como $\ln(Y_t)$ tem distribuição normal, então Y_t tem distribuição lognormal com média e variância dadas respectivamente por (ver, por exemplo, Aitchison and Brown, 1957 ou Mood et al., 1974):

$$\alpha_t.. = ..E[Y_t].. = ..e^{\mu_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2}.. = ..Y_0.e^{at + \frac{1}{2}b^2t} \quad (22)$$

$$\beta_t^2.. = ..Var[Y_t].. = ..e^{2\mu_t + \sigma_t^2}.(e^{\sigma_t^2} - 1).. = ..Y_0^2.e^{2at + b^2t}.(e^{b^2t} - 1) \quad (23)$$

Para se obterem intervalos de confiança para o valor projetado de Y_t para instantes futuros, considera-se a função de distribuição de probabilidade acumulada desta variável que, como Y_t é distribuída segundo uma lognormal, é dada por:

$$F_{Y_t}(y).. = ..Pr(Y_t. \leq y).. = ..\Phi(. \frac{\ln(y) - \mu_t}{\sigma_t} .), \dots, y > 0 \quad (24)$$

e sua inversa por:

$$F_{Y_t}^{-1}(y).. = ..e^{\mu_t + \sigma_t \Phi^{-1}(p)} \quad (25)$$

Onde $\Phi(.)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão $N(0, 1)$ e $\Phi^{-1}(.)$ a sua inversa.

Para cada instante de tempo t , o intervalo de confiança a um nível α , é dado por:

$$[.F_{Y_t}^{-1}(. \frac{1-\alpha}{2} .), .F_{Y_t}^{-1}(. \frac{1+\alpha}{2} .).]$$

ou

$$[.Y_0.e^{at+b\sqrt{t}.\Phi^{-1}(. \frac{1-\alpha}{2} .)}, \dots Y_0.e^{at+b\sqrt{t}.\Phi^{-1}(. \frac{1+\alpha}{2} .).}] \quad (26)$$