MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

Professor Me. Edimar Izidoro Novaes
Professora Me. Ivnna Gurniski de Oliveira
Professora Me. Renata Cristina de Souza

GRADUAÇÃO
Unicesumar

UNICESUMAR
Av. Guedner, 1610 - Jardim Aclimação
Cep 87050-900 - MARINGÁ - PARANÁ
unicesumar.edu.br
44 3027.6360

UNICESUMAR EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
NEAD - Núcleo de Educação a Distância
Bloco 4 - MARINGÁ - PARANÁ
unicesumar.edu.br
0800 600 6360

FICHA CATALOGRÁFICA

C397 **CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ.** Núcleo de Educação a Distância; **OLIVEIRA**, Ivnna Gurniski de; **SOUZA**, Renata Cristina de; **NOVAES**, Edimar Izidoro.

Matemática para Computação. Ivnna Gurniski de Oliveira; Renata Cristina de Souza; Edimar Izidoro Novaes.
Maringá-Pr.: UniCesumar, 2017. Reimpresso em 2021.
168 p.
"Graduação - EaD".

1. Matemática. 2. Computação. 3. Estatística. 4. EaD. I. Título.

ISBN 978-85-459-0509-7

CDD - 22 ed. 005.1
CIP - NBR 12899 - AACR/2

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário
João Vivaldo de Souza - CRB-8 - 6828

Impresso por:

Professor
Wilson de Matos Silva
Reitor

Em um mundo global e dinâmico, nós trabalhamos com princípios éticos e profissionalismo, não somente para oferecer uma educação de qualidade, mas, acima de tudo, para gerar uma conversão integral das pessoas ao conhecimento. Baseamo-nos em 4 pilares: intelectual, profissional, emocional e espiritual.

Iniciamos a Unicesumar em 1990, com dois cursos de graduação e 180 alunos. Hoje, temos mais de 100 mil estudantes espalhados em todo o Brasil: nos quatro campi presenciais (Maringá, Curitiba, Ponta Grossa e Londrina) e em mais de 300 polos EAD no país, com dezenas de cursos de graduação e pós-graduação. Produzimos e revisamos 500 livros e distribuímos mais de 500 mil exemplares por ano. Somos reconhecidos pelo MEC como uma instituição de excelência, com IGC 4 em 7 anos consecutivos. Estamos entre os 10 maiores grupos educacionais do Brasil.

A rapidez do mundo moderno exige dos educadores soluções inteligentes para as necessidades de todos. Para continuar relevante, a instituição de educação precisa ter pelo menos três virtudes: inovação, coragem e compromisso com a qualidade. Por isso, desenvolvemos, para os cursos de Engenharia, metodologias ativas, as quais visam reunir o melhor do ensino presencial e a distância.

Tudo isso para honrarmos a nossa missão que é promover a educação de qualidade nas diferentes áreas do conhecimento, formando profissionais cidadãos que contribuam para o desenvolvimento de uma sociedade justa e solidária.

Vamos juntos!

Professor
Janes Fidélis Tomelin
Pró-Reitor de
Ensino de EAD

Professora
Kátia Solange Coelho
Diretoria de Graduação
e Pós-graduação

Seja bem-vindo(a), caro(a) acadêmico(a)! Você está iniciando um processo de transformação, pois quando investimos em nossa formação, seja ela pessoal ou profissional, nos transformamos e, consequentemente, transformamos também a sociedade na qual estamos inseridos. De que forma o fazemos? Criando oportunidades e/ou estabelecendo mudanças capazes de alcançar um nível de desenvolvimento compatível com os desafios que surgem no mundo contemporâneo.

O Centro Universitário Cesumar mediante o Núcleo de Educação a Distância, o(a) acompanhará durante todo este processo, pois conforme Freire (1996): "Os homens se educam juntos, na transformação do mundo".

Os materiais produzidos oferecem linguagem dialógica e encontram-se integrados à proposta pedagógica, contribuindo no processo educacional, complementando sua formação profissional, desenvolvendo competências e habilidades, e aplicando conceitos teóricos em situação de realidade, de maneira a inseri-lo no mercado de trabalho. Ou seja, estes materiais têm como principal objetivo "provocar uma aproximação entre você e o conteúdo", desta forma possibilita o desenvolvimento da autonomia em busca dos conhecimentos necessários para a sua formação pessoal e profissional.

Portanto, nossa distância nesse processo de crescimento e construção do conhecimento deve ser apenas geográfica. Utilize os diversos recursos pedagógicos que o Centro Universitário Cesumar lhe possibilita. Ou seja, acesse regularmente o Studeo, que é o seu Ambiente Virtual de Aprendizagem, interaja nos fóruns e enquetes, assista às aulas ao vivo e participe das discussões. Além disso, lembre-se que existe uma equipe de professores e tutores que se encontra disponível para sanar suas dúvidas e auxiliá-lo(a) em seu processo de aprendizagem, possibilitando-lhe trilhar com tranquilidade e segurança sua trajetória acadêmica.

AUTORES

Professora Me. Ivnna Gurniski de Oliveira

Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), especialista em Docência no Ensino Superior pelo Centro Universitário de Maringá, graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM).

Professora Me. Renata Cristina de Souza

Mestre em Engenharia Urbana pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Especialista em Gestão Ambiental pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM). Graduação em Tecnologia Ambiental pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná. Tem experiência em pesquisa na área de Sistema de Gestão de Qualidade, na Área Ambiental, com ênfase em Tecnologias Avançadas de Tratamento de Efluentes, Gestão e Tratamento de Resíduos Sólidos. Trabalha como Professora Formadora no curso de Gestão Ambiental, Gestão de Recursos Humanos, Gestão de Negócios Imobiliários, Segurança do Trabalho na EaD no Centro Universitário Cesumar (Unicesumar). Professora no curso de graduação em Administração na Faculdade Metropolitana de Maringá. Coordenadora do Curso de Tecnologia em Gestão Ambiental na Faculdade Metropolitana de Maringá. Professora da disciplina de Indústria e Meio Ambiente na Pós-graduação em Gestão Ambiental na Faculdade Metropolitana de Maringá. Professora da pós-graduação EAD Unicesumar.

Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

Mestre em Biometria pelo departamento de Bioestatística da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho (UNESP), especialização em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e especialização em Ensino a Distância pela Faculdade de Apucarana (FAP). Graduado em Matemática com ênfase em Informática pela Faculdade de Apucarana (FAP). Foi coordenador e professor do curso de Matemática da Faculdade de Apucarana (FAP), professor de Física no Colégio Prisma Arapongas. Atualmente, é professor de Estatística na Unicesumar, professor de Estatística e Matemática na Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus de Apucarana, professor de Matemática no colégio Platão e colégio Nossa Senhora da Glória, ambos de Apucarana.

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

SEJA BEM-VINDO(A)!

Caro(a) aluno(a), é com muito prazer que apresentamos a você o livro que fará parte da disciplina de Matemática para Computação. Esta disciplina se dedica ao desenvolvimento e ao uso de métodos para a coleta, resumo, organização, apresentação, análise de dados, assim como dar uma visão sobre regularidades de números em determinadas sequências e, também, sobre representações de dados em formas de matizes e as consequências que surgem dessa representação. Exemplos do uso da Matemática sendo aplicada e, ao dizer Matemática Aplicada, não tem como fugir da área da computação, pois esta, a computação, é ferramenta essencial na aplicação da matemática. Também está na previsão do tempo em uma região, em tendências em uma eleição, na posição dos bancos dos trens em certa linha, assim como no uso de matrizes para cálculos em aplicações.

Fazendo uma pequena viagem pelo tempo, em 3000 a.C., registrava-se os primeiros indícios de censos na Babilônia, na China e no Egito. No Velho Testamento, Livro 4° (Números), registra-se uma instrução de Moisés: "fazer levantamento dos homens de Israel aptos a guerrear" (TOREZANI, 2004, p. 2).

A palavra "censo" deriva do verbo latino "censere", que significa taxar. O objetivo inicial da realização dos censos era buscar informações sobre as populações para orientar a taxação de impostos. Era, portanto, uma atividade que interessava, particularmente, aos governos, ao Estado. Daí deriva a palavra "estatística" (de "status"). Trata-se da ferramenta de trabalho dos estadistas.

Em 1805, Guilherme, o conquistador, determinou que se fizesse, na Inglaterra, um levantamento, visando obter informações sobre posse de terras, sua utilização, seus proprietários, número de empregados, posse de animais etc., para taxação de impostos.

No século XVII, John Graint publica "Aritmética Política", uma análise sobre nascimentos e óbitos, a partir das chamadas Tábuas de Mortalidade. Já no século XVIII (1797), surge, na Enciclopédia Britânica, o verbete "statistics" pela primeira vez.

O termo "estatística" é usado, hoje, com alguns significados diferentes. Ele pode se referir a: meros registros de eventos que interessem ao administrador em geral; uma simples medida estatística que seja obtida de uma amostra; métodos estatísticos padronizados utilizados em pesquisa por amostragem; ciência estatística em geral, hoje, grandemente desenvolvida e com aplicação disseminada como auxiliar para as mais diferentes áreas de conhecimento.

Aluno(a), este material foi separado em cinco unidades, sendo iniciado com a importância da Estatística básica, passando por probabilidades e finalizando com sequências e introdução à Álgebra Linear.

Na unidade I, nos aprofundaremos no estudo de tabelas e de gráficos, mais especificamente, leitura e construção de tabelas, aplicação e utilização de alguns tipos de gráficos.

APRESENTAÇÃO

A unidade II mostra as medidas de posição e de dispersão. Essas medidas são amplamente empregadas dentro de pesquisas em nível científico e, também, nos problemas mais simples do cotidiano.

A unidade III trata sobre probabilidades. As probabilidades podem tratar de eventos simples a extremamente complexos. De forma abrangente, elas tratam das chances de determinados fenômenos ocorrerem. A importância de se estudar probabilidades está na verificação de que alguns eventos ocorrem com uma facilidade maior que outros e, assim, podemos prever situações futuras sobre esses eventos. A unidade aborda, ainda, as probabilidades de forma geral, mostrando desde os cálculos mais simples, passando por suas propriedades, e indo até as probabilidades condicionais e distribuições de probabilidades. As principais distribuições são aquelas que utilizamos com maior frequência, uma vez que existem inúmeros tipos. Essas distribuições do comportamento da variável com a qual estamos trabalhando é importante, pois por meio delas é que determinamos como calcular probabilidades de forma correta.

Na unidade IV, é apresentado o tópico de sequência numérica, em especial, a progressão aritmética e a progressão geométrica. Esses são dois tópicos essenciais em que se observa regularidades que podem existir entre termos, normalmente números, e com tais regularidades surgem aplicações muito importantes para soma ou valores de posições que os termos assumem.

Para finalizar, a unidade V trata de uma introdução à Álgebra Linear. São abordadas as Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares, conteúdos importantes para a organização de dados, que têm como consequências representações e cálculos de muita utilidade na parte de aplicação.

Este material está bastante sintetizado, focando alguns dos pontos principais da Matemática Aplicada de modo a proporcionar encaminhamentos que possibilitem a compreensão dos conceitos, ao contrário do que, muitas vezes, é posto em se tratando de estudar Matemática.

A resolução de tarefas é importante desde que você, aluno(a), procure fazê-la à luz da teoria que ela contempla. Com isso, será necessário, também, muito empenho de sua parte para a realização desse intenso trabalho. No decorrer de suas leituras, procure interagir com os textos, fazer anotações, responder as atividades de estudo, anotar suas dúvidas, ver as indicações de leitura e realizar novas pesquisas sobre os assuntos tratados, pois com certeza não será possível esgotá-los em apenas um livro.

Ótimo estudo!

SUMÁRIO

UNIDADE I

TABELAS E GRÁFICOS

UNIDADE II

MEDIDAS DESCRITIVAS ASSOCIADAS A VARIÁVEIS QUANTITATIVAS

SUMÁRIO

UNIDADE III

PROBABILIDADES

UNIDADE IV

SEQUÊNCIA NUMÉRICA

SUMÁRIO

UNIDADE V

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR

Professora Me. Ivnna Gurniski de Oliveira
Professora Me. Renata Cristina de Souza
Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

TABELAS E GRÁFICOS

UNIDADE I

Objetivos de Aprendizagem

- Entender a importância dos gráficos e das tabelas.
- Aprender a construir gráficos e tabelas para variáveis qualitativas.
- Aprender a construir gráficos e tabelas para variáveis quantitativas.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Tabelas
- Gráficos
- Gráficos para variáveis qualitativas
- Gráficos para variáveis quantitativas

Unicesumar

INTRODUÇÃO

Caro(a) aluno(a), em uma pesquisa, geralmente, os dados são descritos e analisados com auxílio de técnicas estatísticas. As pesquisas precisam da Estatística para alcançar seus objetivos, principalmente, quando envolvem grande quantidade de informações que precisam ser resumidas.

A organização dos dados em tabelas de frequências nos proporciona um meio eficaz de estudo do comportamento de características de interesse. Muitas vezes, a informação contida nas tabelas pode ser mais facilmente visualizada por meio de gráficos. Como exemplo, podemos citar os meios de comunicação que nos apresentam, diariamente, gráficos das mais variadas formas para auxiliar na apresentação das informações. Também os órgãos públicos e empresas se munem de gráficos e de tabelas em seus documentos internos e relatórios de atividades e de desempenho. Graças ao aumento dos recursos gráficos, sua construção tem sido cada vez mais simplificada por meio do uso de programas computacionais, existe, hoje, uma infinidade de tipos de gráficos que pode ser utilizada. É importante salientar que existem diversas formas de gráficos e de tabelas, e a escolha de uma ou outra forma depende da característica com a qual estamos trabalhando.

Diante disso, nesta unidade, temos o objetivo de ensiná-lo(a) a construir as tabelas e os principais tipos de gráficos. Para essa construção, há necessidade de separação das variáveis. As variáveis em estudos estatísticos são valores que assumem determinadas características dentro de uma pesquisa e podem ser classificadas em: qualitativas ou quantitativas.

Para alguns tipos de gráficos, podem ser utilizados tanto para uma quanto para outra variável, entretanto existem alguns tipos que são específicos para variáveis qualitativas ou quantitativas, portanto é interessante conhecer o tipo adequado para cada caso.

É importante desenvolver tanto a habilidade de construir tabelas e gráficos, como a de fazer uma leitura adequada deles. Bons estudos!

TABELAS

Quando retiramos as informações da pesquisa, temos, em mãos, os dados brutos. A ideia é transformar os dados brutos em informações para que seu entendimento e visualização se tornem mais simples e rápidos.

Existem normas nacionais para a organização de tabelas, ditadas pela ABNT, que não serão abordadas aqui, mas convém saber que as tabelas são formadas por título, cabeçalho, corpo e fonte:

- Título: precede a tabela e resume o dado em estudo (o quê? Onde? Quando?). Deve vir precedido da palavra tabela e de sua numeração. As tabelas devem ser numeradas em ordem crescente à maneira que aparecem no texto, ex.: Tabela 1, Tabela 2 e assim por diante.
- Cabeçalho: especifica o conteúdo de cada coluna.
- Corpo: formado por linhas e colunas contendo os dados.
- Fonte: na parte inferior, informa-se a fonte da coleta de dados ou o autor. A fonte cita o informante, caracterizando a confiabilidade dos dados.

As tabelas deverão ser fechadas com traços horizontais nas bordas superior e inferior, enquanto que nas bordas esquerda e direita não. Dentro das tabelas, pode haver traços verticais na separação das colunas no corpo da tabela ou entre as linhas. É conveniente, também, que o número de casas decimais seja padronizado.

Uma tabela contém as categorias da variável estudada e suas respectivas frequências. Essas frequências podem ser:

- Absoluta (F_i), dada pela contagem do número de ocorrências de cada categoria.
- Relativa (F_r), dada pela frequência absoluta em relação ao total de elementos (n) a serem estudados, ou seja,

  $$F_r = \frac{F_i}{n}.$$
- Percentual ($F_r\%$), dada pela frequência relativa multiplicada por cem, ou seja,

  $$F_r\% = \left(\frac{F_i}{n}\right) \text{x } 100.$$

- Acumulada (F_{ac}), dada pela soma das frequências de todas as linhas anteriores até a classe atual. Pode ser: frequência acumulada absoluta, frequência acumulada relativa ou frequência acumulada percentual.

TABELAS PARA VARIÁVEIS QUALITATIVAS

As variáveis qualitativas apresentam-se em categorias e, portanto, a representação tabular deve ser feita por meio das frequências referentes a cada uma das categorias. Podem se apresentar de forma simples (com apenas uma variável) ou conjunta (com duas ou mais variáveis).

Exemplo:

Tabela 1 - Distribuição de frequências de indivíduos que acessam o site quanto ao sexo

SEXO	NÚMERO DE CLIENTES (F_i)	F_r	F_r%	F_{ac}
Masculino	7	7/11 = 0,636	63,6	7
Feminino	4	4/11 = 0,364	36,4	11
Total	11	1,0	100	-

Fonte: os autores.

Veja outro exemplo:

Tabela 2 - Grupo de atributos que mais valorizam os imóveis

GRUPO DE ATRIBUTOS	PORCENTAGEM (%)
Localização	27,47
Conforto	22,71
Segurança	20,51
Incorporação	17,58
Lazer	11,73

Fonte: os autores.

REFLITA

Aluno(a), existem diversos tipos de variáveis demonstradas em tabelas. O formato das tabelas é sempre o mesmo, podendo apresentar uma única frequência como a frequência absoluta ou a porcentagem ou, ainda, várias frequências combinadas.

As tabelas também podem se apresentar mostrando a combinação de algumas variáveis conjuntas. Observe que, na tabela a seguir, foram tomadas duas variáveis: região e ano.

Tabela 3 - Custo médio (R$/m²) das áreas geográficas de um dado país

REGIÃO	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	870,2	893,4	921,0	923,1	925,7
Nordeste	574,4	573,6	573,8	571,1	582,0
Sudeste	659,2	670,4	671,5	680,9	681,4
Sul	1094,3	1112,0	114,6	1240,3	1500,4
Centro-Oeste	897,5	902,4	909,5	1002,1	1004,9

Fonte: os autores.

TABELAS PARA VARIÁVEIS QUANTITATIVAS

Para variáveis quantitativas contínuas ou discretas, com elevado número de valores diferentes, a distribuição de frequências apropriadas é apresentar os dados em classes de valores.

Para esse procedimento, primeiramente, precisamos determinar o número de classes. Uma classe é uma linha da distribuição de frequências.

Número de Classes

Não há regras absolutas para a escolha do número de classes , geralmente, entre 5 e 20 classes serão satisfatórias para a maior parte dos conjuntos de dados. Uma regra prática razoável é:

$$K \approx \sqrt{\textit{número de observações}}$$

Usar um número pequeno de classes poderia concentrar a maioria das observações em uma ou duas classes. Se for usado um número grande de classes, muitas delas terão frequências iguais a zero.

Amplitude Total e Amplitude das Classes

Para determinar a variação dos dados dentro de cada classe, será preciso encontrar a amplitude total:

$$AT = \text{maior valor} - \text{menor valor} \ (Xmáx - Xmín).$$

Com o valor de AT, a variação de cada classe, que chamaremos de amplitude das classes (AC ou h), é determinada pela relação:

$$AC = \frac{AT}{k}$$

Portanto AC ou h é a divisão entre a amplitude total (AT) pelo número das classes (K).

Construção das Classes

O menor valor da classe é denominado limite inferior (L_i) e o maior valor da classe, limite superior (L_s).

Para obtenção da primeira classe, tomar como L_i o menor valor. Ao L_i, somar o valor da AC (ou h) e, assim, se obtém o L_s. Para construção da segunda classe, repetir o L_s da primeira classe, sendo que esse, na segunda, classe passa a ser o L_i. A esse valor, adicionar o valor de AC (ou h), e se obtém o L_s. Para a terceira classe, repetir o procedimento. O L_s da segunda classe é repetido na terceira classe e se torna o L_i. A esse L_i adicionar o valor de AC e se obtém o Ls. Esse definido procedimento deve ser repetido até que se obtenha o número de classes. O L_s da última classe deve, obrigatoriamente, ultrapassar o maior valor do conjunto de dados.

Ponto Médio das Classes

O ponto médio de uma classe é dado por

$$x_1 = \frac{L_i + L_s}{2}$$

Veremos, na próxima unidade, que o ponto médio de uma classe é utilizado para calcular a média aritmética ponderada para um conjunto de dados agrupados.

Exemplo:

Em uma pesquisa, foram coletados dados referentes aos clientes que procuram uma determinada imobiliária para a compra de um imóvel residencial:

Tabela 4 - Imóveis visitados para a compra

CLIENTES	QUANTIDADE DE IMÓVEIS VISITADOS
1	7
2	16
3	24
4	2
5	24
6	11
7	34
8	44
9	13
10	4
11	6

Fonte: os autores.

Vamos construir a tabela de frequência para a quantidade de imóveis visitados. Para isso, precisamos determinar:

- O número de classes (k), dado pela raiz quadrada do número de observações.

$$k = \sqrt{n} = \sqrt{11} \approx 3{,}31 \approx 3 \text{ classes.}$$

- A amplitude total (AT), dada pela diferença entre o maior e o menor valor observado.

$$AT = 44 - 2 = 42.$$

- A amplitude das classes (h), dada pela razão entre a amplitude total e o número de classes.

$$\mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{AT}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\mathbf{42}}{\mathbf{3}} = \mathbf{14.}$$

Conhecendo os valores de k, AT e h, montamos as classes da tabela da seguinte forma:

- Primeira classe: o limite inferior (L_i) é dado pelo menor valor da planilha de dados referente ao número de imóveis visitados, nesse caso, $L_i = 2$. A esse valor, somamos a amplitude das classes ($h = 14$) e obtemos o limite superior da primeira classe, $L_s = 2 + 14 = 16$.
- Segunda classe: o limite superior da primeira classe se torna o limite inferior da segunda classe, isto é, $L_i = 16$. A esse valor, somamos a amplitude das classes ($h = 14$) e obtemos o limite superior da segunda classe, $L_s = 16 + 14 = 30$.
- Terceira classe: o limite superior da segunda classe se torna o limite inferior da terceira classe, isto é, $L_i = 30$. A esse valor somamos a amplitude das classes ($h = 14$) e obtemos o limite superior da segunda classe, $L_s = 30 + 14 = 44$.

Assim, montamos as três classes, abrangendo todos os valores da planilha de dados.

Conhecendo os limites inferior e superior de cada classe, calculamos o ponto médio de cada classe como:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{L_i + L_s}}{\boldsymbol{2}}$$

Para as colunas de frequências, temos que a frequência absoluta é dada pela contagem do número de valores encontrados dentro dos limites das classes; a frequência relativa será a razão da frequência absoluta da classe pelo número total de investimentos; a frequência percentual será a frequência relativa multiplicada por cem e a frequência acumulada será a soma da frequência absoluta das classes.

Portanto, a tabela de distribuição de frequência será:

Tabela 5 - Distribuição de frequências para a quantidade de imóveis visitados por clientes de uma imobiliária para efetuar uma compra

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac},	X_i
2 |---- 16	6	0,545	54,5	6	9
16 |---- 30	3	0,273	27,3	9	23
30 |----| 44	2	0,182	18,2	11	37
Total	11	1	100	-	-

Fonte: os autores.

Observe que, na primeira classe da tabela, temos o intervalo 2|---16 e, na terceira classe, temos o intervalo 30|---|44. Vamos entender o que significa essa representação de intervalos:

- L_i |--- L_s: o limite inferior está incluído na contagem da frequência absoluta da classe e o limite superior, não.
- L_i ---| L_s: o limite superior está incluído na contagem da frequência absoluta da classe e o limite inferior, não.
- L_i |---| L_s: os limites inferior e superior estão incluídos na contagem da frequência absoluta da classe.
- L_i --- L_s: os limites inferior e superior não estão incluídos na contagem da frequência absoluta da classe.

Na Tabela 5, observa-se outra coluna representada por "x_i"; essa é chamada de ponto médio da classe, obtido da seguinte maneira:

$$x_i = \frac{L_i + L_s}{2}.$$

De acordo com a Tabela 5, os pontos médios foram dados da seguinte maneira:

$$x_1 = \frac{2 + 16}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{16 + 30}{2} = 23$$

$$x_3 = \frac{30 + 44}{2} = 37.$$

Outro exemplo:

Os dados relacionados a seguir referem-se a uma pesquisa realizada a respeito do sexo e da idade, em anos, de um grupo de estudantes de uma IES (Instituição de Ensino Superior).

Tabela 6 - Pesquisa realizada em um grupo de estudantes em uma IES

INDIVÍDUO	SEXO	IDADE (ANOS)
1	Masculino	34
2	Feminino	32
3	Feminino	47
4	Feminino	17
5	Masculino	21
6	Masculino	25
7	Masculino	34
8	Feminino	39
9	Masculino	52
10	Masculino	41
11	Masculino	22

Fonte: os autores.

Logo, para a variável idade, temos:

$$AC = \frac{52 - 17}{3} = 11{,}7 \approx 12.$$

Tabela 7 - Distribuição de frequências para a idade de um grupo de estudantes

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
17|---29	4	0,364	36,4	4	23
29|---41	4	0,364	36,4	8	35
41|---53	3	0,272	27,2	11	47
Total	11	1,000	100,0	-	-

Fonte: os autores.

Note que o número 41 apareceu na planilha de dados. Optamos por colocá-lo na classe em que ele representa o L_i.

GRÁFICOS

Gráficos são ferramentas de representação dos dados que servem para facilitar a visualização deles. Devem ter simplicidade e clareza para permitir se chegar a conclusões sobre a evolução do fenômeno ou como se relacionam os valores da série.

Cotidianamente, se observa que meios de comunicação utilizam essa ferramenta para mostrar as pesquisas. Isso se deve ao fato da facilidade de interpretação demonstrada nos gráficos e da eficiência com que resume informações, embora apresente menor grau de detalhes em relação às tabelas, dando uma ideia mais global dos dados.

Ao optar pela utilização de um gráfico em uma pesquisa, devemos levar em conta que sua construção exige cuidados, como escolher o tipo que melhor se encaixa na representação dos dados.

ELEMENTOS FUNDAMENTAIS DOS GRÁFICOS

Os elementos fundamentais de um gráfico para que ele cumpra sua função de racionalização das informações são:

- Título: para indicar o que ele representa.
- Legenda: para facilitar a leitura do gráfico.
- Fonte: para informar a origem dos dados.

A identificação ou o título de um gráfico deve aparecer na parte inferior dele, precedido pela palavra "Gráfico", seguido de seu número de ordem de ocorrência no texto. Se necessário, uma legenda explicativa pode ser utilizada. Se os dados observados no gráfico forem extraídos de terceiros, como dados obtidos de uma revista, de uma fundação, prefeitura etc., então, é obrigatório o uso de sua fonte.

GRÁFICOS PARA VARIÁVEIS QUALITATIVAS

Quando surge a necessidade de fazer a representação de uma informação e uma pesquisa por meio de um gráfico, é preciso estar ciente do tipo de variável que a informação que será representada no gráfico possui. Quando a característica da variável for qualitativa, por exemplo, variáveis como sexo, escolaridade e estado civil, tem como possíveis respostas uma descrição ou qualidade do indivíduo, e, portanto, são chamadas de variáveis qualitativas.

©shutterstock

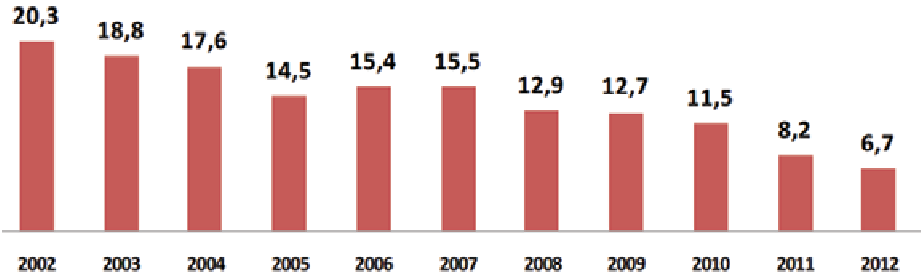
A seguir, acompanhe exemplos de gráficos para esse tipo de variável.

GRÁFICOS EM COLUNAS

Esse tipo de gráfico é formado por retângulos verticais, em que cada um dos retângulos representa a intensidade de um atributo. É o gráfico mais utilizado para representar variáveis qualitativas. Indicado quando as categorias são breves.

Exemplo:

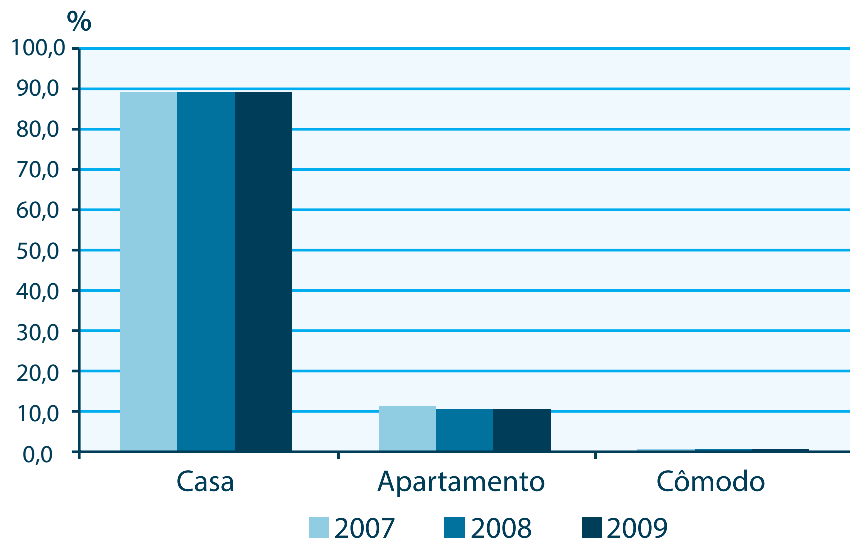
Gráfico 1: Estimativas de sub-registro de nascimentos – Brasil – 2002/2012



Fonte: IBGE (on-line).

No caso de estarmos trabalhando com duas variáveis, podemos utilizar os gráficos comparativos.

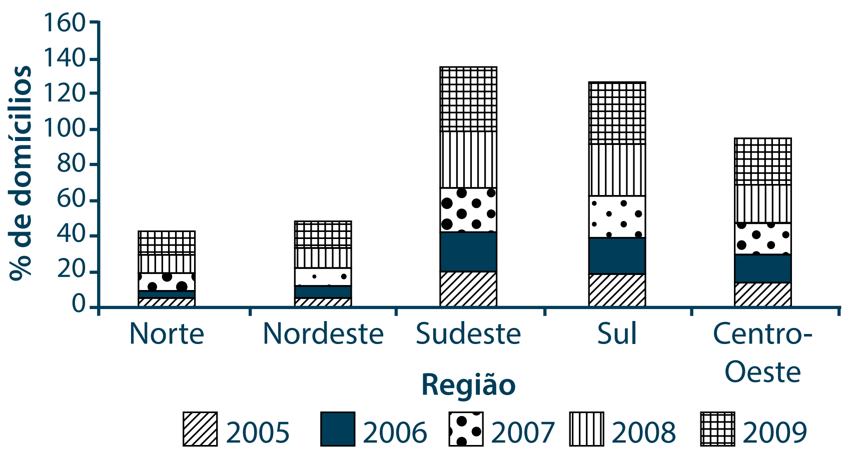
Gráfico 2 - Tipos de domicílios – 2007 a 2009



Fonte: IBGE (2007-2009, on-line).

Para os gráficos comparativos, podemos utilizar as barras empilhadas, uma acima da outra, como visto a seguir:

Gráfico 3 - Proporção de domicílios com acesso à internet entre 2005 e 2009 em grandes regiões do Brasil



Fonte: os autores.

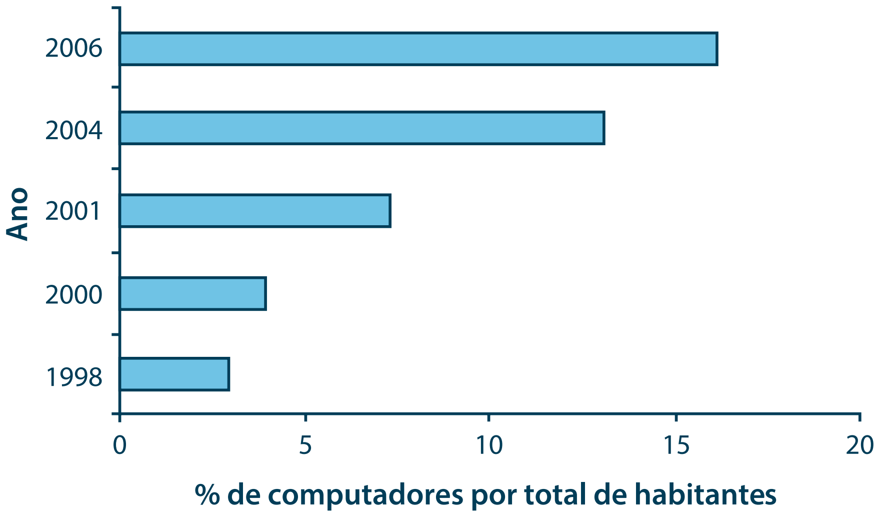
É importante observar, nesse tipo de gráfico, que cada espaço dentro da coluna representa um ano com sua respectiva porcentagem. Por exemplo, a região Norte tem 42.5% de domicílios com acesso à internet, que está subdividido em cinco anos e cada espaço dentro dessa região corresponde à respectiva frequência para cada ano. Assim, também, foi feito para todas as outras regiões.

GRÁFICO EM BARRAS

É um gráfico formado por retângulos horizontais, em que cada um deles representa a intensidade de um atributo. O objetivo desse gráfico é de comparar grandezas, e é recomendável para variáveis, cujas categorias tenham designações extensas.

Exemplo:

Gráfico 4 - Número porcentual de computadores pessoais(1) instalados no Brasil sobre total de habitantes de 1998 a 2006



Fonte: TECNOLOGIAS... (2009, on-line).

*(1) Inclui PC, laptops, notebooks etc., mas exclui terminais ligados a mainframes, minicomputadores de uso compartilhado e smartphones.

GRÁFICO DE SETORES

Também conhecido como gráfico de "pizza". Nesse tipo de gráfico, a variável em estudo é projetada em um círculo dividido em setores com áreas proporcionais às frequências das suas categorias. É recomendado para o caso em que o número de categorias não é grande e não obedece a alguma ordem específica.

Exemplo:

Gráfico 5 - Destinação final do lixo por número de município (2000)

Fonte: IBGE (2000, on-line).

GRÁFICO DE LINHAS

Este tipo de gráfico é utilizado para representar dados relacionados ao tempo. É feito colocando no eixo vertical (y) a mensuração da variável em estudo e no eixo horizontal (x) as unidades da variável em uma ordem crescente. Esse tipo permite mostrar as flutuações da variável ao longo do tempo além de analisar as tendências.

Exemplo:

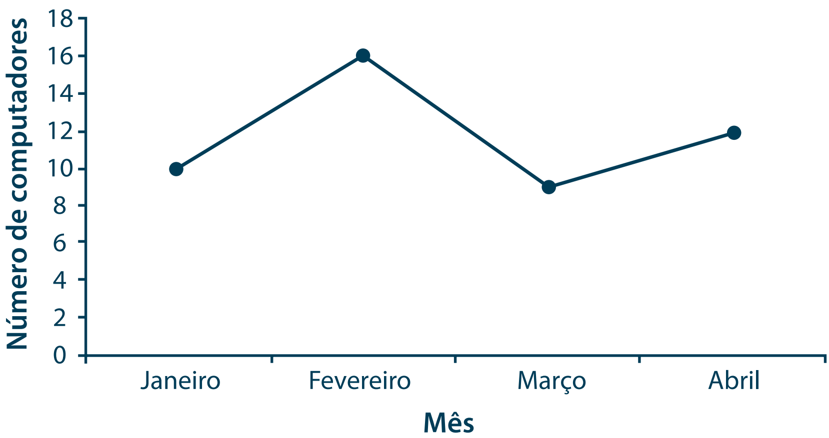
Suponha que uma empresa esteja analisando o número de vendas de notebooks de certa marca nos primeiros quatro meses do ano.

Tabela 8 - Número de vendas de notebooks por mês

MÊS	NÚMERO DE VENDAS
Janeiro	10
Fevereiro	16
Março	9
Abril	12

Fonte: os autores.

Gráfico 6 - Número de vendas de notebooks por mês



Fonte: os autores.

Nos gráficos de linhas, podemos ter mais de uma variável representando-as por linhas diferentes.

Exemplo:

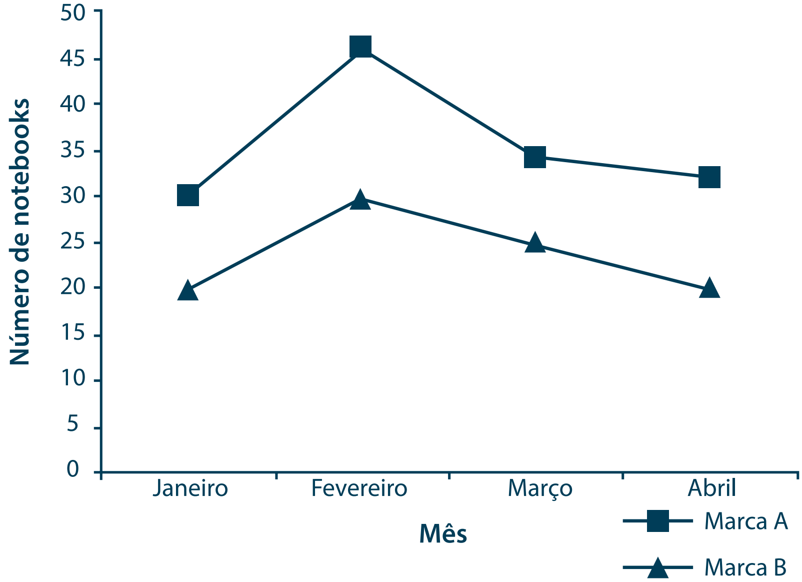
Suponha que uma empresa esteja analisando o número de vendas de notebooks de duas marcas diferentes nos primeiros quatro meses do ano.

Tabela 9 - Número de vendas de notebooks por mês das marcas “A” e “B”

MÊS	MARCA A	MARCA B
Janeiro	10	20
Fevereiro	16	30
Março	9	25
Abril	12	20

Fonte: os autores.

Gráfico 7 - Número de vendas de notebooks por mês das marcas “A” e “B”



Fonte: os autores.

SAIBA **MAIS**

Os diversos tipos de gráficos sempre têm o mesmo objetivo: mostrar os dados de forma resumida. O tipo de gráfico a ser utilizado depende da escolha e do objetivo do pesquisador.

Fonte: os autores.

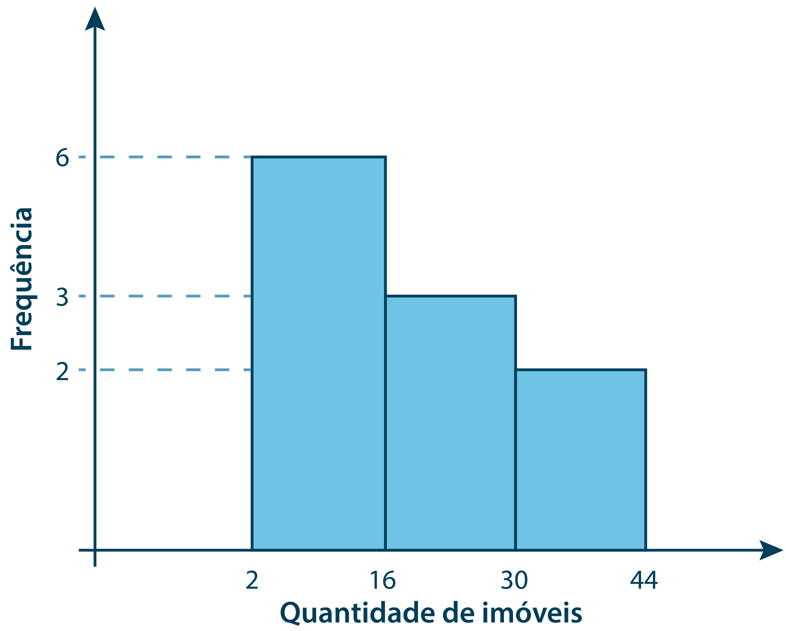
GRÁFICOS PARA VARIÁVEIS QUANTITATIVAS

Se o conjunto de dados consiste de muitas observações, seria trabalhoso construir gráficos como os já mencionados. Assim, para variáveis quantitativas, são usados outros dois gráficos importantes: Histograma e Polígono de Frequência.

HISTOGRAMA

Em gráficos de colunas, no eixo horizontal, são dispostos os limites das classes da variável em questão, segundo as quais os dados foram agrupados. Já no eixo vertical, são dispostas as frequências para cada agrupamento. Um detalhe importante é que, no histograma, as colunas são retângulos justapostos.

Gráfico 8 - Distribuição de frequências para a quantidade de imóveis visitados por clientes de uma imobiliária para efetuar uma compra

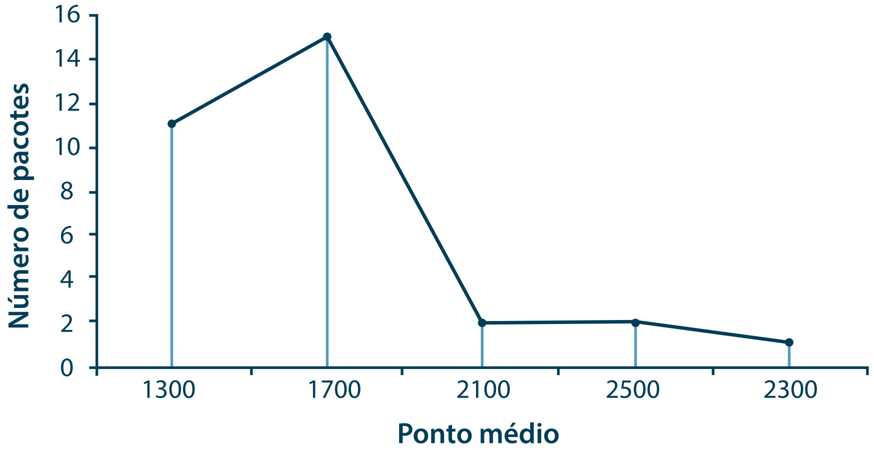


Fonte: os autores.

POLÍGONO DE FREQUÊNCIA

O gráfico de linha é onde os pontos médios de cada classe são colocados no eixo horizontal e no eixo vertical, de acordo com as respectivas frequências.

Gráfico 9 - Médias do tempo total de acesso (ms) realizado com *pathping* durante a transmissão de pacotes do roteador de origem ao roteador de destino final



Fonte: Lopes e Santos (2008).

A interpretação adequada de um gráfico ou tabela é fundamental para o entendimento da pesquisa. Ler o título de forma minuciosa e observar valores máximos, mínimos e suas variações são pontos fundamentais para uma interpretação adequada.

SAIBA **MAIS**

Podemos fazer gráficos utilizando o Excel. Esses gráficos são gerados a partir de dados apresentados em tabelas, que, por sua vez, estão inseridas dentro de planilhas eletrônicas. O interessante de se gerar gráficos a partir de planilhas eletrônicas é que, ao se alterar os valores contidos na planilha, o gráfico correspondente a esses dados, é automaticamente atualizado.

O Microsoft Excel possui um assistente para facilitar a geração de gráficos, no qual ele divide este processo em quatro etapas subsequentes, apresentando a cada etapa apenas as opções, diretamente, relacionadas e necessárias para a conclusão do gráfico.

Fonte: os autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Prezado(a) aluno(a), nesta unidade, tratamos da necessidade de que a apresentação dos dados seja feita de forma precisa. As duas formas vistas, aqui, foram tabelas e gráficos. Enfatizamos que o uso correto das formas de apresentação dos dados é fundamental para o sucesso da pesquisa.

Os gráficos são formas de sintetizar as informações coletadas. São importantes para dispormos as informações de forma clara e para que consigamos enxergar o que aconteceu na nossa pesquisa. Existem diversos tipos de gráficos. Vimos os tipos mais comuns, como os de barras e colunas, os de linha, de setores ou pizza, histograma e polígono de frequência.

De forma geral, os gráficos demonstram dados quantitativos associados a alguma variável qualitativa. Todos os gráficos têm o mesmo objetivo, que é o de demonstrar, de forma clara e rápida, os dados da pesquisa. A escolha do tipo adequado fica ou a critério do pesquisador ou a critério do objetivo da pesquisa estudada.

Nessa etapa, o interesse maior consiste em tirar conclusões que auxiliem o pesquisador a resolver seu problema. Portanto, além da organização e da tabulação dos dados, as tabelas e os gráficos nos apresentam de uma forma clara, sucinta e objetiva os resultados de uma pesquisa, para tirarmos conclusões e nos ajudarem na tomada de decisões.

Também observamos que podemos construir gráficos e tabelas por meio de programas computacionais, como, por exemplo, o Microsoft Excel, que é uma planilha de dados que dispõe de ferramentas para construção de gráficos, a partir de tabelas. Esse programa é fácil de usar, tem inúmeras ferramentas que podem ser úteis ao gestor.

Esperamos que você tenha compreendido esta unidade, porque ela é de extrema importância aos futuros profissionais, haja vista que tabelas e gráficos estão presentes no nosso cotidiano, e cabe a nós entender, interpretar e avaliar os dados apresentados através de tabelas e de gráficos.

ATIVIDADES

Considere a seguinte planilha de dados quanto às topologias de rede de computadores no tempo de resposta ao usuário:

INFORMAÇÃO	TOPOLOGIA	TEMPO DE RESPOSTA
1	C1	6,0
2	C2	7,0
3	C3	5,0
4	C1	6,3
5	C2	6,8
6	C2	7,2
7	C1	6,0
8	C2	6,7
9	C1	5,7
10	C2	6,5
11	C3	6,4
12	C1	5,7
13	C3	7,2
14	C3	6,8
15	C3	6,5
16	C2	7,5

1. Construa uma tabela de distribuição de frequências para Topologia.

2. Construa um gráfico de setores para Topologia.

3. Construa uma tabela de distribuição de frequências para a variável tempo de resposta em quatro classes.

4. Demonstre um histograma para a variável tempo de resposta.

5. Demonstre um polígono de frequências para a variável tempo de resposta.

ARREDONDAMENTO DE NÚMEROS

Em trabalhos relacionados à área de Estatística, de Matemática, além de outras situações que estão relacionadas com o nosso dia a dia, utilizamos o arredondamento de números. Muitas vezes, é conveniente suprimir unidades inferiores às de determinada ordem. Esta técnica é denominada arredondamento de dados ou valores, que é mais compreensível para entendimento de quem terá essa informação.

Quem determina o arredondamento de dados é a Resolução nº 886/66 do IBGE. De acordo com o número de casas após a vírgula, podemos classificar os números em:

a. Decimais: uma casa após a vírgula – 0,1; 0,3; 3,2; 5,4.

b. Centesimais: duas casas após a vírgula – 0,12; 2,14; 5,23; 7,89; 15,24.

c. Milesimais: três casas após a vírgula – 45,123; 56,789; 1,002.

As regras para o arredondamento de dados são:

Se o Algarismo a ser suprimido for:

a. Menor que 5: Basta suprimi-lo.

   Ex.: 5,052 (Para um número centesimal) --5,05.

   Ex.: 213,123 (Para um número decimal) – 213,1.

   Ex.: 77, 5342 (Para um número milesimal) – 77,534.

b. Maior que 5: basta suprimi-lo, acrescentando uma unidade ao algarismo que o precede.

   Ex.: 5,057 (Para um número centesimal) – 5,06.

   Ex.: 213,173 (Para um número decimal) – 213,2.

   Ex.: 77, 5348 (Para um número milesimal) – 77,535.

c. Igual que 5: basta suprimi-lo, acrescentando uma unidade ao algarismo que precede.

   Ex.: 5,055 (Para um número centesimal) – 5,06.

   Ex.: 34,954 (Para um número decimal) – 35,0.

   Ex.: 34,654 (Para um número decimal) – 34,7.

Fonte: Portal Educação (on-line)[1].

MATERIAL COMPLEMENTAR

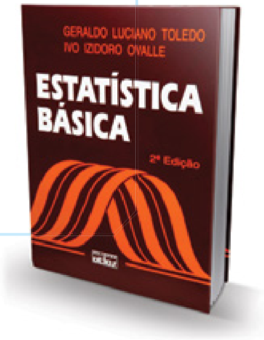
LIVRO

Estatística Básica

Geraldo Luciano Toledo e Ivo Izidoro Ovalle

Editora: Atlas

Sinopse: este livro contém a matéria fundamental para estudos subsequentes no campo da estatística inferencial, além disso, aborda os tópicos mais importantes da estatística básica.



REFERÊNCIAS

ESTATÍSTICA do Registro Civil 2012. **IBGE** – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/imprensa/ppts/0000001586431219201343361992738.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2016.

LOPES, D. V.; SANTOS, J. B. **Análise Estatística da Latência e Perda de Pacotes numa Redes de Computadores**. 2008. Disponível em: <https://www.dimap.ufrn.br/~sbmac/ermac2008/Anais/Resumos%20Estendidos/Analise%20estatistica_danilo.pdf>. Acesso em: 07 set. 2016.

PESQUISA Nacional de Saneamento Básico **IBGE** - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística 2000. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/pnsb/pnsb.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2016.

PESQUISA Nacional por Amostra de Domicílios. **IBGE** – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/pesquisas/pesquisa_resultados.php?id_pesquisa=40>. Acesso em: 13 ago. 2016.

TECNOLOGIAS da Informação e Comunicação em Ambiente Corporativo e Doméstico: Comparação entre Países. Disponível em: <http://publicacao.observatorio.softex.br/_publicacoes/arquivos/em_partes/cap_11.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2016.

Referência On-line

[1] Em: <http://www.portaleducacao.com.br/educacao/artigos/30568/regras-de-arredondamento>. Acesso em? 11 ago. 2016.

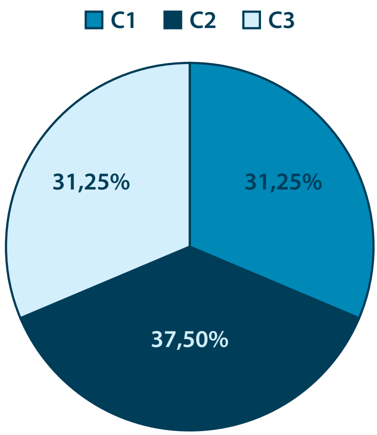
GABARITO

1. Distribuição de frequências para a variável topologia

TOPOLOGIA	F_i	$F_r\%$	F_{ac}
C1	5	31,25	5
C2	6	37,50	11
C3	5	31,25	16
Total	16	100,00	-

Fonte: os autores.

2. Porcentagem de clientes para a variável topologia



Fonte: os autores.

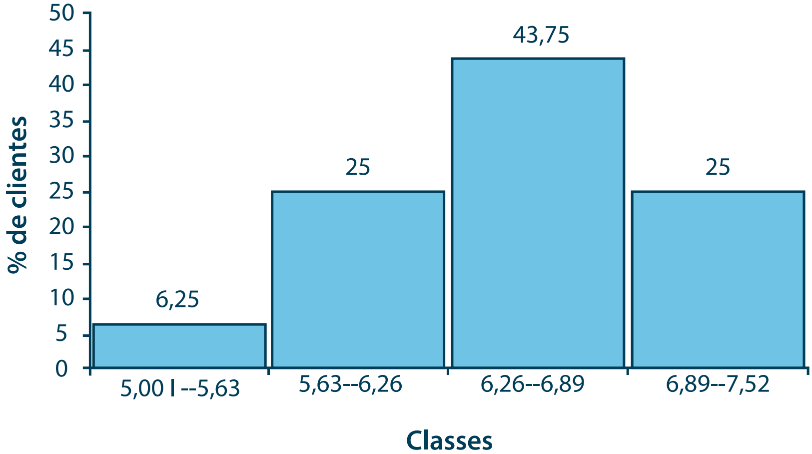
3. $AC = \dfrac{7{,}5 - 5{,}0}{4} = 0{,}63$

Distribuição de frequências para a variável tempo de resposta

TEMPO	F_i	$F_r\%$	F_{ac}	x_i
5,00 |--5,63	1	6,25	1	5,32
5,63--6,26	4	25,00	5	5,95
6,26--6,89	7	43,75	12	6,58
6,89--7,52	4	25,00	16	7,21
Total	16	100,00	-	-

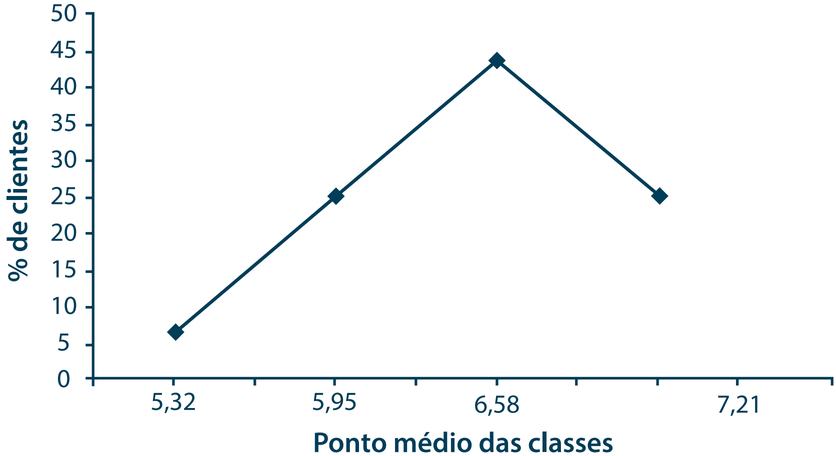
Fonte: os autores.

4. Porcentagem de clientes para a variável tempo de resposta ao usuário



Fonte: os autores.

5. Porcentagem de clientes para a variável tempo de resposta ao usuário



Fonte: os autores.

Professora Me. Ivnna Gurniski De Oliveira
Professora Me. Renata Cristina de Souza
Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

MEDIDAS DESCRITIVAS ASSOCIADAS A VARIÁVEIS QUANTITATIVAS

UNIDADE II

Objetivos de Aprendizagem

- Compreender as principais medidas estatísticas de posição e dispersão.
- Entender a aplicação das medidas estatísticas de posição, dispersão e separatrizes.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Medidas Descritivas
- Medidas de Posição
- Moda
- Mediana
- Medidas de Dispersão

Unicesumar

INTRODUÇÃO

Olá, aluno(a)! Quando estamos realizando uma pesquisa, podemos fazer a apresentação dos dados por meio de gráficos, tabelas, ou fazendo o uso de medidas que resumem as informações obtidas na coleta dos dados, chamadas medidas descritivas.

Nesta unidade, estudaremos as medidas de posição e de dispersão utilizadas para descrever dados quantitativos. Essas medidas são demasiadamente importantes na representação dos dados.

As medidas de posição ou de tendência central mostram o centro de uma distribuição de dados, dando-nos uma noção do que está ocorrendo com eles. Por meio dessas medidas, podemos localizar a maior concentração de valores em uma distribuição, ou seja, se ela localiza-se no início, no meio ou no centro, ou ainda, se há uma distribuição por igual. As medidas de tendência central mais importantes são a média aritmética, a mediana e a moda. Vale salientar que temos outras medidas de posição que são as separatrizes, que englobam: a própria mediana, os quartis e os percentis.

Já as medidas de dispersão são utilizadas para avaliar o grau de variabilidade do conjunto de dados, mostrando se ele é homogêneo ou heterogêneo. Essas medidas servem para analisar o quanto os dados são semelhantes, descrevem o quanto os dados distanciam do valor central, portanto, as medidas de dispersão servem também para avaliar o grau de representação da média. As medidas de dispersão mais utilizadas são: a amplitude total, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação.

Assim, para descrevermos um conjunto de dados, é de bom grado sempre termos uma medida de posição e uma de dispersão para representá-lo. A de posição, para dizer o que está ocorrendo com a pesquisa e a de dispersão, para dizer se há alta ou baixa variabilidade.

Nesta unidade, vamos estudar as principais medidas de posição e medidas de dispersão utilizadas nas pesquisas para descrever e representar o conjunto de dados. Vamos em frente!

©shutterstock

MEDIDAS DESCRITIVAS

Para sumarizar as informações de um conjunto de observações, muitas vezes, é necessário utilizar medidas que resumem em um só número certas características. Assim, temos as medidas de posição, de dispersão, de assimetria e de curtose. Se as medidas são calculadas para dados a partir de uma amostra, são chamadas de estatísticas da amostra; se são calculadas a partir de uma população, são chamadas de parâmetros da população.

As principais medidas de posição e as principais medidas separatrizes são:

- Medidas de Posição
  - Medidas de tendência central
    - Média Aritmética
    - Mediana
    - Moda
  - Separatrizes
    - Mediana
    - Quartis
    - Decis
    - Percentis

As principais medidas de dispersão são:

- Medidas de Dispersão
  - Amplitude Total
  - Variância
  - Desvio - Padrão
  - Coeficiente de Variação

MEDIDAS DE POSIÇÃO

As medidas de posição servem para representar o ponto central de equilíbrio de um conjunto de observações ordenadas segundo suas grandezas. Dentre as medidas de posição, destacamos: média, mediana e moda, sendo que a medida a ser escolhida para representar coerentemente os dados depende das características deles.

MÉDIA ARITMÉTICA

A média de uma variável é a medida mais importante e mais simples de ser calculada. Essa fornece uma medida de posição central. Se os dados são de uma amostra, a média é denotada por $\bar{x}$; se os dados são de uma população, a média é denotada pela letra grega μ.

A média de um conjunto de dados é encontrada somando seus valores e dividindo pelo número de observações. Seja $x_1, x_2, ..., x_n$, um conjunto de dados, a média será dada por:

População

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Amostra

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplo:

Suponha que estamos estudando a idade de cinco indivíduos de uma família. As idades observadas foram: 5, 10, 12, 35, 38. Logo, a idade média dessa família é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{5 + 10 + 12 + 35 + 38}{5} = 20 \text{ anos}$$

Exemplo:

Calcule a média para a quantidade de atendimentos realizados em um mês pelos corretores de uma imobiliária:

18, 19, 20, 21, 21, 22, 24, 34, 35, 37

R: 25,1.

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Existem situações em que não temos todos os dados disponíveis, ou então temos "pesos" diferentes para os dados considerados. Nesses casos, utilizamos o que chamamos de média aritmética ponderada para obtermos a média, cujas fórmulas para população e para amostra são dadas da seguinte maneira:

População

$$\mu = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

Amostra

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i X_i}{n}$$

Se a situação for de dados agrupados, a média é obtida a partir de uma ponderação em que os pesos são as frequências absolutas (Fi) de cada classe e xi é o ponto médio da classe i. Observe o exemplo a seguir:

Tabela 1 - Distribuição de frequências para a quantidade de imóveis visitados por clientes de uma imobiliária para efetuar uma compra

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
2 |---- 16	6	0,545	54,5	6	9
16 |---- 30	3	0,273	27,3	9	23
30 |----| 44	2	0,182	18,2	11	37
Total	11	1	100	-	-

Fonte: os autores.

A média ponderada será dada por:

$$\bar{x} = \frac{(6 \text{ x } 9) + (3 \text{ x } 23) + (2 \text{ x } 37)}{11} = 17{,}91 \text{ imóveis visitados.}$$

Existem situações em que os dados não estão agrupados, mas existem "pesos" diferentes para cada um deles. Vejamos um exemplo:

A média da nota bimestral dos alunos da Unicesumar é composta pela nota de uma prova (com peso 8) e pela nota dos trabalhos (com peso 2). Calcule a média bimestral do aluno que tirou as seguintes notas:

Prova: 7 (peso 8) Trabalho: 9 (peso 2)

A média será dada por:

$$\bar{x} = \frac{(8 \text{ x } 7) + (2 \text{ x } 9)}{8 + 2} = 7{,}4.$$

A média é a medida mais importante dentro de um conjunto de dados e possui algumas propriedades importantes. São elas:

1. A média é única em um conjunto de dados.
2. A média é afetada por valores extremamente pequenos ou grandes.
3. A média depende de todos os valores observados, assim, qualquer modificação nos dados fará que a média fique alterada.
4. A soma das diferenças dos valores observados em relação à média é zero:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0.$$

A propriedade 2 é importante, visto que, em um conjunto de dados muito heterogêneo, a média torna-se uma medida não apropriada para representar os dados, devendo o pesquisador optar por outra medida.

A propriedade 4 é importante na definição de variância, uma medida de dispersão que veremos ainda nesta unidade.

SAIBA MAIS

O conceito e a ideia de média estão sempre relacionados com a soma dos valores de um determinado conjunto de medidas, dividindo-se o resultado dessa soma pela quantidade dos valores que foram somados. Esse procedimento é o que definimos como média aritmética simples e que estamos acostumados a aplicar nas estimativas que fazemos diariamente.

Não faltam brincadeiras em relação a esse tipo de cálculo quando, ironicamente, calculamos a média salarial de, por exemplo, determinada empresa, somando o maior salário com o menor e dividindo por dois. A média aritmética simples produz a média ponderada em função da repetição das medidas. Geralmente, a média ponderada é apresentada com regras pré-estabelecidas para os seus pesos, dando a aparência de que se trata de outra fórmula, muito diferente da média aritmética.

Fonte: Rodrigues Neto (2009).

MODA

Chamamos de moda o valor que aparece com maior frequência em um conjunto de dados. Para o caso de valores individuais, a moda pode ser determinada observando-se o rol dos dados.

Exemplos:

Observe as notas da prova de estatística da turma de Negócios Imobiliários:

4; 5; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8.

A moda é 6, pois esse é o valor que ocorreu com maior frequência.

Essa sequência é unimodal, uma vez que tem apenas uma moda.

Veja esta outra sequência:

4; 5; 5; 5; 6; 7; 7; 7; 8; 9.

Nesta, existem duas modas (5 e 7), ela é bimodal.

Esta outra:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Não existe moda, nenhum valor aparece com maior frequência, é amodal ou antimodal.

Quando os dados estão agrupados em classes, primeiramente, é necessário identificar a classe modal que apresenta a maior frequência e calcular, então, a moda da seguinte maneira:

$$Mo = l_1 + \frac{h\,(F_i - F_{i-1})}{(F_i - F_{i-1}) + (F_i - F_{i+1})}.$$

Em que:

i é a ordem da classe modal.

$\mathbf{l_1}$ é o limite inferior da classe modal.

h é a amplitude da classe modal.

$\mathbf{F_i}$ é a frequência absoluta da classe modal.

$\mathbf{F_{i-1}}$ é a frequência absoluta da classe anterior à classe modal.

$\mathbf{F_{i+1}}$ é a frequência absoluta da classe posterior à classe modal.

Se o conjunto de dados apresentar todos seus elementos com a mesma frequência absoluta, não existirá a Moda. Se ocorrer várias frequências iguais, então, teremos uma distribuição com mais de uma moda.

A Moda tem o atributo de não ser afetada pelos valores extremos no conjunto de dados.

Exemplo:

Tabela 2 - Teor de oxigênio (mg/L) em vários rios da região Norte do Brasil

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
0,5|---0,8	4	0,2500	25,00	4	0,65
0,8|---1,1	4	0,2500	25,00	8	0,95
1,1|---1,4	7	0,4375	43,75	15	1,25
1,4|---1,7	1	0,0625	6,25	16	1,55
Total	16	1,0000	100,00	-	-

Fonte: os autores.

Para isso, devemos determinar a classe modal. A classe modal é a classe com a maior frequência absoluta, nesse caso, é a terceira classe, pois essa possui o maior valor de F_i. Determinada a classe modal, vamos calcular a moda por meio da fórmula para dados agrupados. Assim,

$$Mo = l_1 + \frac{h\,(F_1 - F_{i-1})}{(F_1 - F_{i-1}) + (F_1 - F_{i+1})} = 1{,}1 + \frac{0{,}3\,.\,(7-4)}{(7-4)+(7-1)} = 1{,}2.$$

Portanto a moda para o conjunto de dados da Tabela 2 é 1,2 mg/L.

Exemplo:

Calcular a Moda para o seguinte conjunto de dados:

Tabela 3 - Distribuição de frequências para a idade de um grupo de estudantes

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
17 |---- 29	4	0,364	36,4	4	18
29 |----41	4	0,364	36,4	8	35
41 |----| 53	3	0,273	27,3	11	47
Total	11	1	100	-	-

Fonte: os autores.

$$Mo = l_1 + \frac{h\,(F_i - F_{i-1})}{(F_i - F_{i-1}) + (F_i - F_{i+1})} = 29 + \frac{12\,.\,(4-4)}{(4-4)+(4-3)} = 29 \text{ anos.}$$

Resposta: 29 anos.

MEDIANA

Corresponde ao valor central ou à média aritmética dos dois valores centrais de um conjunto de observações organizadas em ordem crescente. Ou seja, 50% das observações são inferiores à mediana e 50% superiores.

©shutterstock

Exemplo:

Uma pesquisa em uma empresa apresentou os seguintes dados relacionados ao tempo de trabalho de seus funcionários:

5, 13, 12, 3, 15, 17, 8, 15, 6, 16, 9.

Para encontrarmos a mediana, primeiramente devemos ordenar os dados brutos, transformando-os em um rol, ou seja, organizando os dados:

3, 5, 6, 8, 9, 12,13, 15, 15, 16, 17.

Identificamos a posição da mediana, após verificar que o conjunto de dados é ímpar, pois n = 11 elementos. Utilizamos a fórmula:

Se n for ímpar: $Md = \frac{n+1}{2}$, portanto: $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Nesse caso, a mediana é o 6º elemento do conjunto de dados. Depois, localizamos o elemento central, no caso, 12, pois, à esquerda dele, temos 5 elementos e à direita também. Assim temos:

$$Md = 12.$$

3, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 15, 16, 17

Quando o rol tiver número par de elementos, a mediana será a média aritmética entre os dois elementos centrais. Vejamos, por exemplo, um rol com 10 elementos (número par de elementos):

3, 5, 6, 8, 9, 13, 14, 15, 15, 16.

$$Md = \frac{9+13}{2} = 11.$$

Assim, considerando n o número de elementos da série, o valor mediano será dado pelo termo de ordem dado pelas seguintes fórmulas:

Se n for ímpar: $Md = \frac{n+1}{2}$.

Se n for par: $Md = \left[\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right] \cdot \frac{1}{2}$ (média entre dois números).

Para os dados agrupados em distribuição de frequências em classes, tem-se:
Em que:

$$\boldsymbol{Md = l_i + \frac{h\,(p - F_{ac-1})}{F_i}}.$$

$\boldsymbol{l_i}$ é o limite inferior da classe da mediana.
h é a amplitude da classe da mediana.
p indica a posição da mediana, onde , sendo $\boldsymbol{p} = \frac{n}{2}$ o número ***n*** total de elementos.
$\boldsymbol{F_{ac-1}}$ é a frequência acumulada da classe anterior a da mediana.
$\boldsymbol{F_i}$ é a frequência absoluta da classe da mediana.

Exemplo:

Vamos encontrar a mediana para o seguinte conjunto de dados:

Tabela 4 - Distribuição de frequências de indivíduos que acessam certo site quanto ao número de acessos

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
10|---29	4	0,364	36,4	4	19,5
29|---48	6	0,545	54,5	10	38,5
48|---67	1	0,091	9,1	11	57,5
Total	11	1,000	100,0	-	-

Fonte: os autores.

Primeiramente, devemos determinar em qual classe a mediana está, para isso, calculamos o valor de p:

$$p = \frac{11}{2} = 5{,}5 \approx 6.$$

Quando o valor de p for decimal, sempre aproximamos seu valor para "cima". Para saber qual é a classe da mediana, devemos olhar na coluna da frequência acumulada, de modo que $p \leq F_{ac}$. Logo, a mediana está na 2ª classe, pois $\mathbf{6 \leq 10}$ e corresponde à:

$$Md = l_i + \frac{h\,(p - F_{ac-1})}{F_i} = 29 + \frac{19\,(6 - 4)}{6} = 35{,}3 \text{ acessos.}$$

Exemplo:

Calcule a mediana para a seguinte situação:

Tabela 5 - Distribuição de frequências para a idade dos clientes de uma imobiliária para efetuar uma compra

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
17 |---- 29	4	0,364	36,4	4	23
29 |---- 41	4	0,364	36,4	8	35
41 |----| 53	3	0,273	27,3	11	47
Total	11	1	100	-	-

Fonte: os autores.

$$\text{Md} = \frac{h\,(p - F_{ac\text{-}1})}{F_i} = \frac{12 \,.\, (6 - 4)}{4} = 35 \text{ acessos.}$$

Resposta: 35.

REFLITA

Para qualquer assunto que trate de dados numéricos, sempre trabalhamos com uma medida de posição. Normalmente, usamos a média, que é a medida mais conhecida. Observe, também, como essas medidas são importantes no seu cotidiano.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

As medidas de dispersão mostram a variabilidade de um conjunto de observações em relação à região central. Essas medidas indicam se um conjunto de dados é homogêneo ou heterogêneo. Além disso, mostram se a medida de tendência central escolhida representa bem o conjunto de dados que está sendo trabalhado pelo pesquisador. Vejamos um exemplo.

Considere as idades de três grupos de pessoas A, B e C:

A: 15; 15; 15; 15; 15.

B: 13; 14; 15; 16; 17.

C: 5; 10; 15; 20; 25.

A média aritmética do conjunto A é 15, do B é 15 e do C também é 15.

A média aritmética é a mesma para os três conjuntos anteriores, porém o grau de homogeneidade entre eles é muito diferente, ou seja, a variação dos seus elementos em relação à média é bem distinta. O conjunto A não tem dispersão, o B tem certo grau de variabilidade e o conjunto C tem grande variabilidade. Por isso, devemos estudar as medidas de dispersão, pois conjuntos de dados diferentes podem ter médias iguais, porém isso não indica que são iguais, pois a variabilidade entre eles pode ser diferente.

AMPLITUDE TOTAL

A amplitude total de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor. Essa medida nos diz pouco, pois, embora fácil de ser calculada, é baseada em somente duas observações, sendo altamente influenciada pelos valores extremos; quanto maior a amplitude, maior será a variabilidade. Veja sua fórmula a seguir:

$$AT = x_{max} - x_{min}$$

Em que:
x_{max} é o maior valor no conjunto de dados.
x_{min} é o menor valor no conjunto de dados.

Exemplo:

Suponha que estamos estudando a idade de cinco indivíduos de uma família. As idades observadas foram: 5, 10, 12, 35, 38. Logo, a amplitude das idades nessa família:

$$\boldsymbol{AT = 38 - 5 = 33 \text{ anos.}}$$

Essa medida de dispersão não leva em consideração os valores intermediários, perdendo a informação de como os dados estão distribuídos.

VARIÂNCIA

A variância é uma medida de variabilidade que utiliza todos os dados. É calculada considerando o quadrado dos desvios em relação à média aritmética dos dados em estudo.

Se os dados são para uma população, a variância é denotada pelo símbolo grego σ^2 e sua definição é dada como segue:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N},$$

no qual μ é a média da população e N o número de observações.

Se os dados são para uma amostra, a variância, denotada por s^2, é definida como:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1},$$

no qual $\bar{x}$ é a média da amostra e n o número de observações. O uso de (n – 1) neste denominador é necessário para que a variância da amostra resultante forneça uma estimativa não induzida da variância da população.

Na maioria das vezes, trabalhamos nas pesquisas com dados amostrais. Portanto iremos nos basear sempre na variância amostral.

Exemplo:

Vamos calcular a variância do conjunto de dados do exemplo anterior, ou seja, vamos calcular a variância das idades observadas de uma família, sendo elas: 5, 10, 12, 35, 38.

Primeiramente, devemos calcular a média $\bar{x}$ para as idades:

$$\bar{x} = \frac{5 + 10 + 12 + 35 + 38}{5} = 20.$$

Agora, vamos calcular a variância das idades:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - 20)^2}{5 - 1}$$

$$s^2 = \frac{(5 - 20)^2 + (10 - 20)^2 + (12 - 20)^2 + (35 - 20)^2 + (38 - 20)^2}{4}$$

$s^2 = 234{,}5$ anos^2.

A unidade da variância é a mesma unidade da característica, entretanto, por simbologia apenas, devemos colocar o símbolo do quadrado junto à unidade. Assim, dizemos que a variância é dada em unidades quadráticas, o que dificulta a sua interpretação. O problema é resolvido extraindo-se a raiz quadrada da variância, definindo-se, assim, o desvio padrão.

DESVIO PADRÃO

O desvio padrão dá a ideia de distribuição dos desvios ao redor do valor da média. Para obtermos o desvio padrão, basta que se extraia a raiz quadrada da variância e, seguindo a notação adotada para as variâncias de população e amostra, *s* denotará o desvio padrão da amostra, enquanto σ, o desvio padrão da população. Assim:

População

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

Amostra

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n - 1}}$$

De forma mais simplificada:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad s = \sqrt{s^2}$$

Considerando o exemplo, em que, a variância foi $s^2 = 234{,}5$ anos^2, o cálculo do desvio padrão (s) fica bastante simples, ou seja,

$$s = \sqrt{234{,}5} = 15{,}31 \text{ anos.}$$

Esta medida é interpretável, e dizemos que a dispersão média entre os indivíduos dessa família é de 15,31 anos.

Para saber se o desvio padrão está alto ou baixo, vamos compará-lo com o valor da média. Quanto maior o valor do desvio padrão em relação à média, maior então será a variação dos dados e mais heterogêneo é o nosso conjunto de observações.

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

O Coeficiente de Variação (CV) envolve cálculos percentuais, por isso, é uma medida relativa e não absoluta. Assim, observe as fórmulas a seguir:

População

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100$$

Amostra

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

A partir do valor do coeficiente de variação, podemos verificar se o conjunto de dados é homogêneo e também conseguimos saber se a média é uma boa medida para representar o conjunto de dados. Outra utilização para essa medida é comparar conjuntos com unidades de medidas distintas, uma vez que o CV é dado em porcentagem (%).

O CV tem o problema de deixar de ser explicativo da variação quando a média está perto de zero, pois essa situação pode deixá-lo alto demais. Um coeficiente de variação alto sugere alta variabilidade ou heterogeneidade do conjunto de observações. Quanto maior for este valor, menos representativa será a média. Se isso acontecer, deve-se optar para representar os dados por outra medida, podendo ser essa a mediana ou moda, não existindo uma regra prática para a escolha de uma dessas. Fica, então, essa escolha, a critério do pesquisador. Ao mesmo tempo, quanto mais baixo for o valor do CV, mais homogêneo é o conjunto de dados e mais representativa será sua média.

Quanto à representatividade em relação à média, podemos dizer que quando o coeficiente de variação (CV) é ou está:

- Menor que 10%: significa que é um ótimo representante da média, pois existe uma pequena dispersão (desvio padrão) dos dados em torno da média.
- Entre 10% e 20%: é um bom representante da média, pois existe uma boa dispersão dos dados em torno da média.
- Entre 20% e 35%: é um razoável representante da média, pois existe uma razoável dispersão dos dados em torno da média.

- Entre 35% e 50%: representa fracamente a média, pois existe uma grande dispersão dos dados em torno da média.
- Acima de 50%: não representa a média, pois existe uma grandíssima dispersão dos dados em torno da média.

Exemplo: vamos determinar o coeficiente de variação para o exemplo das idades dos indivíduos de uma família, sendo elas: 5, 10, 12, 35, 38.

Já efetuamos anteriormente os cálculos da média e da variância: e . Logo, o coeficiente de variação para esse conjunto de dados é

$$\boldsymbol{CV = \overline{x} = 20 \text{ e } s = 15{,}31 \text{ x } 100 = 76{,}55\%.}$$

Verificamos que há uma grande variação, ou seja, uma alta dispersão dos dados. Portanto concluímos que a média não é uma boa representante desse conjunto de dados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Prezado(a) aluno(a), nas pesquisas, após a coleta e organização dos dados, convém verificar o que ocorre com eles. Nos dados quantitativos, a principal forma de análise é calcular as medidas de posição e de dispersão.

Nesta unidade, você aprendeu a calcular as principais medidas de Posição e Dispersão, além das medidas Separatrizes. Vimos que as principais medidas de posição dentro da estatística são média aritmética, moda, mediana e separatrizes. Pelo menos uma dessas medidas sempre deve estar presente na descrição das informações coletadas.

As principais medidas de dispersão são variância, desvio padrão e coeficiente de variação. Analisamos que as medidas de dispersão são utilizadas para um estudo descritivo de um conjunto de dados numéricos qualquer, que têm por objetivo determinar a variabilidade ou a dispersão dos dados em relação à medida de localização do centro da amostra em análise.

Aprendemos o passo a passo de como calcular essa dispersão, diferenciando os cálculos de população e amostra. Vimos que, para calcular essa dispersão, precisamos da média, após calcularmos a média, calculamos a variância em relação à média, que, para se calcular a variância, são somados os quadrados dos desvios da amostra observada, em relação à média, e divide-se pelo número de observações da amostra menos um, o que diferencia da população é que a divisão é feita somente pelo número de observações. Logo após, calculamos o desvio padrão, que é simplesmente a raiz quadrada da variância. O desvio padrão é uma medida de extrema importância, porque quanto maior for a variabilidade dos dados, maior será o valor do desvio padrão.

É importante salientar que, de todas essas medidas vistas, as mais utilizadas nas pesquisas são a média e o desvio padrão e que essas são representativas da população e da amostra também. As medidas representarão sempre os dados, portanto é fundamental que saibamos qual ou quais são as medidas mais adequadas para o tipo de informação que temos em mãos.

ATIVIDADES

1. Das medidas de posição vistas na unidade, explique:

   a. Qual é a mais utilizada e por quê.

   b. Quais são os problemas que a média pode ter em sua utilização como medida representativa de um conjunto de dados.

2. Considere os seguintes diâmetros (mm) de eixos produzidos em certa fábrica de autopeças:

93	94	96	100	96	102	89	87	105

Calcule:

   a. A média aritmética, a moda e a mediana.

   b. A variância, o desvio padrão.

   c. O coeficiente de variação (interprete).

3. Considere a seguinte tabela de distribuição de frequências com os tempos (em dias) que um corretor demora a concluir um negócio, observado em 40 operações:

TEMPO (DIAS)	F_i	F_{ac}	X_i
0 |– 2,5	2	2	1,25
2,5 |– 5,0	3	5	3,75
5,0 |– 7,5	25	30	6,25
7,5 |– 10,0	10	40	8,75
Total	40	-	-

Fonte: os autores.

Calcule:

   a. A média aritmética, a moda e a mediana.

   b. A variância, o desvio padrão.

   c. O coeficiente de variação (interprete).

ATIVIDADES

4. Considere a tabela a seguir, que se refere à distribuição de frequências para a quantidade de imóveis visitados por clientes de uma imobiliária para efetuar uma compra.

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
2|---16	6	0,545	54,5	6	9
16|---30	3	0,273	27,3	9	23
30|---|44	2	0,182	18,2	11	37
Total	11	1,000	100,0	-	-

Fonte: os autores.

Determine, com base nos dados da tabela, a variância entre os mesmos.

5. Considerando o exercício 4, em que foi obtida a variância igual a $s^2 = 128,29$, Determine seu desvio padrão e o coeficiente de variação.

6. Calcule as medidas de dispersão para dados agrupados considerando a tabela a seguir:

Distribuição de frequências para a idade dos clientes de uma loja em Maringá

CLASSES	F_i	F_r	$F_r\%$	F_{ac}	X_i
17 |---- 29	4	0,364	36,4	4	23
29 |---- 41	4	0,364	36,4	8	35
41 |----| 53	3	0,273	27,3	11	47
Total	11	1	100	-	-

Fonte: os autores.

PROJETO DE ENSINO. APRENDER FAZENDO ESTATÍSTICA.

Resumir os dados de uma variável quantitativa, além de tabelas e gráficos, é apresentá-los na forma de valores numéricos, denominados medidas descritivas. Estas medidas, se calculadas a partir de dados populacionais, são denominadas parâmetros e, se calculadas a partir de dados amostrais, são denominadas estimadores ou estatísticas. As medidas descritivas auxiliam a análise do comportamento dos dados. Tais dados são provenientes de uma população ou de uma amostra, o que exige uma notação específica para cada caso.

As medidas de tendência central são assim denominadas por indicarem um ponto em torno do qual se concentram os dados. Este ponto tende a ser o centro da distribuição dos dados. O valor a escolher depende das características dos dados. Por exemplo, num estudo agrícola sobre a produção de trigo por hectare de terra arável podemos estar interessados em conhecer o valor mais elevado da produtividade do solo agrícola das várias explorações analisadas. Num outro estudo sobre os resultados de uma turma de estudantes universitários talvez seja mais interessante conhecer o resultado médio obtido por 50% dos estudantes. Num outro estudo sobre os rendimentos per capta dos países da CEE, a comparação entre países será facilitada se calcularmos os rendimentos médios de cada país.

Os fenômenos que envolvem análises estatísticas caracterizam-se por suas semelhanças e variabilidades. Ao mencionar variabilidades, tem-se as medidas de dispersão que auxiliam as medidas de tendência central a descrever o conjunto de dados adequadamente. Indicam se os dados estão, ou não, próximos uns dos outros. Desta forma, não há sentido calcular a média de um conjunto em que não há variação dos seus elementos ou seja, existe ausência de dispersão e a medida de dispersão é igual a zero. Por outro lado, aumentando-se a dispersão, o valor da medida aumenta e se a variação for muito grande, a média não será uma medida de tendência central representativa. Faz-se necessário, portanto, ao menos uma medida de tendência central e uma medida de dispersão para descrever um conjunto de dados.

Fonte: Guedes et al. (on-line)[1].

MATERIAL COMPLEMENTAR

LIVRO

Estatística Básica
Douglas Downing; Jeffrey Clarck

Editora: Saraiva

Sinopse: este livro aborda assuntos, técnicas estatísticas e suas aplicações, estatística descritiva, probabilidades, teste de hipóteses, pesquisa e amostragem, regressão linear simples e múltipla, métodos não-paramétricos, indicadores econômicos e teoria da decisão.

Os capítulos começam com os "Termos-chave", trazendo um resumo dos conceitos fundamentais de cada capítulo. A seção "Lembre-se" retoma, ao longo do estudo, tópicos essenciais a serem fixados. E, no "Conheça os conceitos", encontram-se exercícios para aplicação do aprendizado.

REFERÊNCIAS

GUEDES, T. A. et al. Estatística Descritiva. **Projeto de Ensino Aprender Fazendo Estatística**. Disponível em: <http://www.each.usp.br/rvicente/Guedes_etal_Estatistica_Descritiva.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2016.

RODRIGUES NETO, A. R. Conceito de média: **A média ponderada é também uma média aritmética**. UOL Educação, Matemática, 2009. Disponível em: educacao.uol.com.br/matematica/conceito-de-media.jhtm . Acesso em: 07/09/2016.

Referência On-line

[1] Em: <http://www.each.usp.br/rvicente/Guedes_etal_Estatistica_Descritiva.pdf>. Acesso em: 1 set. 2016.

1.

a. A média é mais utilizada, pois é a medida mais precisa, é única num conjunto de dados e sempre existe.

b. Os problemas da média ocorrem, porque ela é afetada por medidas extremas, ou seja, valores muito altos ou muito baixos, destoando da maioria dos outros valores, podem comprometer o valor da média. Além disso, em conjuntos de dados muito heterogêneos, ela não é uma medida que representa bem o conjunto de dados.

2.

a. A média aritmética: $\overline{x} = 95{,}8$ mm.

A moda: Mo = 96 mm.

A mediana: Md = 96 mm.

b. Variância: $s^2 = 34{,}4$ mm^2.

Desvio padrão: s = 5,9 mm.

c. CV = 6,2%. Temos uma baixa dispersão dos dados em torno da média, logo esta é uma ótima representante do conjunto de dados.

3.

a. a. $\overline{x} = 6{,}44$ dias.

Mo = 6,48 dias.

Md = 6,5 dias.

b. $s^2 = 3{,}33$ dias^2.

s = 1,82 dias.

c. CV = 28,26%. Temos uma dispersão razoável dos dados em torno da média, logo esta é uma representante aceitável do conjunto de dados.

4. $s^2 = 128{,}29$ imóveis visitados^2.

5. $S = \sqrt{128{,}29} = 11{,}33$ imóveis visitados.

E, consequentemente, o Coeficiente de variação será:

$CV = \dfrac{11{,}33}{17{,}91} \cdot 100 = 63{,}26\%$.

6. R: 99,49; 9,97; 29,40%

Professora Me. Ivnna Gurniski De Oliveira
Professora Me. Renata Cristina de Souza
Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

UNIDADE III

PROBABILIDADES

Objetivos de Aprendizagem

- Entender os conceitos relacionados a probabilidades.
- Saber aplicar as probabilidades nas diversas situações.
- Compreender probabilidade condicional.
- Conhecer as principais distribuições de probabilidades.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Probabilidade
- Probabilidade Condicional
- Regras de Probabilidade
- Distribuições de Probabilidade
- Distribuições Contínuas de Probabilidade

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a)! Nesta unidade vamos tratar das probabilidades. Quando estamos falando de probabilidade, queremos identificar a chance de ocorrência de um determinado resultado de interesse, em situações nas quais não é possível calcular com exatidão o valor real do evento. Então, dessa forma, trabalhamos com chances ou com probabilidades.

A palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar), e designa eventos incertos, ou mesmo "sorte", "risco", "azar", "incerteza" ou "duvidoso". A probabilidade como ramo da matemática data de mais de 300 anos e se aplicava a jogos de azar, em que jogadores que tinham mais conhecimento sobre suas teorias planejavam estratégias para levar vantagem nos jogos. Hoje, essa prática ainda é utilizada, porém também passou a ser empregada por governos, empresas e organizações profissionais nas suas tomadas de decisões ou ainda na escolha de produtos, sendo úteis também para o desenvolvimento de estratégias.

As decisões nos negócios são frequentemente baseadas na análise de incertezas, tais como: chances de um investimento ser lucrativo, chances das vendas decrescerem se o preço for aumentado, probabilidade de projetos terminarem no prazo etc. As probabilidades medem o grau de incerteza, assim, não podemos antecipar o evento, mas lidar com as chances maiores ou menores dele ocorrer.

Nesta unidade, serão apresentados conceitos básicos de probabilidade, como a probabilidade pode ser interpretada e como suas regras podem ser utilizadas para calcular as possibilidades de ocorrência de eventos futuros, além de trabalharmos com as principais distribuições de probabilidades discretas e contínuas. Veremos a importância de estudarmos as probabilidades, pois é necessário que os futuros gestores saibam que muitas das decisões a serem tomadas são baseadas na incerteza.

Bons Estudos!

PROBABILIDADE

As probabilidades são utilizadas para delinear a chance de ocorrência de determinado evento. Seus valores são sempre atribuídos em uma escala de 0 a 1. A probabilidade próxima de 1 indica um evento quase certo, enquanto que a probabilidade próxima de zero indica um evento improvável de acontecer.

Ao discutirmos probabilidade, definimos experimentos como qualquer ação ou processo que gera resultados bem definidos. Os experimentos aleatórios são aqueles que repetidos várias vezes apresentam resultados imprevisíveis. Ao descrever um experimento aleatório, deve-se sempre especificar o que deverá ser observado.

SAIBA **MAIS**

Análise de Risco e a Probabilidade

A análise qualitativa de risco é definida como o processo de avaliação do impacto e probabilidade de riscos identificados. Esse processo prioriza riscos de acordo com os seus efeitos potenciais nos objetivos do projeto. Análise qualitativa de risco é um modo de determinar a importância de se endereçar riscos específicos e guiar respostas de risco. A questão crítica do tempo e as ações relacionadas ao risco podem ampliar a importância de um risco.

Essa análise qualitativa de risco requer que a probabilidade e as consequências dos riscos sejam avaliadas, usando métodos e ferramentas de análise qualitativa estabelecidos. Tendências nos resultados, quando a análise qualitativa é repetida, pode indicar a necessidade de mais ou menos ação da gerência de risco. O uso dessas ferramentas ajuda a corrigir influências que estão frequentemente presentes em um plano de projeto.

Fonte: os autores.

Acompanhe a seguir, exemplos práticos de probabilidades:

Queremos estudar a ocorrência das faces de um dado. Esse seria o experimento aleatório. A partir do conhecimento de que o dado tem 6 faces, sendo o dado equilibrado, de modo a não favorecer nenhuma das faces, podemos construir o modelo probabilístico da seguinte maneira:

Tabela 1 - Modelo probabilístico do lançamento de um dado

Face	1	2	3	4	5	6
Frequência	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Fonte: os autores.

Se o experimento aleatório for o lançamento de uma moeda, sabendo que só podem ocorrer duas situações ao lançamento dela: cara ou coroa, o modelo probabilístico para esta situação seria:

Tabela 2 - Modelo probabilístico do lançamento de uma moeda

Face	Cara	Coroa
Frequência	1/2	1/2

Fonte: os autores.

Se um grupo for composto por 20 homens e 30 mulheres e um deles for sorteado ao acaso para ganhar um determinado prêmio, o modelo probabilístico será:

Tabela 3 - Modelo probabilístico do sorteio de um prêmio

Indivíduo	Homem	Mulher
Frequência	20/50	30/50

Fonte: os autores.

Verificamos que, em todos os exemplos mostrados, precisamos ter um modelo probabilístico. Um modelo probabilístico envolve os conceitos de espaço amostral e eventos. Vejamos a seguir suas características.

ESPAÇO AMOSTRAL

Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. Os elementos do espaço amostral são chamados de *pontos amostrais*. Representamos o espaço amostral por Ω.

Exemplo: considere o lançamento de uma moeda. Os possíveis resultados (n) são dois: cara (c) ou coroa (k). Então, o espaço amostral é dado por $\Omega = \{c,k\}$. Se quisermos lançar a moeda duas vezes, os possíveis resultados são quatro: cara e cara; cara e coroa; coroa e cara; coroa e coroa. Logo, o espaço amostral é $\mathbf{\Omega=\{cc,ck,kc,kk\}}$.

EVENTOS

Chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório. O evento é dito simples se consistir em um único resultado ou composto se consistir em mais de um resultado.

Exemplo

No lançamento de uma moeda Ω = {cara, coroa}, um evento de interesse A pode ser "obter cara no lançamento de uma moeda" e, então, A = {cara} e o n para este evento será 1, sendo n o número de resultados para o evento.

No lançamento de um dado, o evento de interesse A pode ser obter face par e então A será igual a:

$$A = \{2; 4, 6\} \text{ e } n = 3.$$

PROBABILIDADE DE UM EVENTO

Podemos fazer cálculos de probabilidades utilizando três formas distintas:

- Método clássico – quando o espaço amostral tem resultados equiprováveis.
- Método empírico – baseado na frequência relativa de um grande número de experimentos repetidos.
- Método subjetivo – baseia-se em estimativas pessoais de probabilidade com certo grau de crença.

Utilizaremos aqui o método clássico.

Considerando um experimento aleatório em que se queira um determinado evento A, a probabilidade de esse evento ocorrer é dada por P(A).

Assim: a probabilidade de A ocorrer será dada por:

$$P(A) = \frac{n\,(A)}{\Omega}\text{, para qualquer evento discreto.}$$

Considere um experimento aleatório em que se queira determinar um evento E. A probabilidade de esse evento ocorrer, denotada por P(E), é dada pela razão do número de resultados do evento E, (n(E)), pelo número total de resultados no espaço amostral, (Ω), isto é,

$$\frac{P(E) = n\,(E)}{\Omega}$$

Por exemplo, considere o lançamento de um dado. Queremos calcular a probabilidade de obtermos uma face ímpar (evento A) e a probabilidade de sair as faces 2 e 5 (evento B).

Primeiro, vamos determinar o espaço amostral, que é composto por todos os resultados possíveis:

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, n = 6.

Em seguida, determinamos os resultados possíveis para os eventos A e B:

A = {1, 3, 5}, n = 3

B = {2, 5}, n = 2.

Assim,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{\Omega} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \text{ ou em porcentagem, } P(A) = 0{,}5 \times 100 = 50\%.}$$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{n(B)}{\Omega} = \frac{2}{6} = 0{,}33 \text{ ou em porcentagem, } P(B) = 0{,}33 \times 100 = 33\%.}$$

REGRAS BÁSICAS

Tendo um modelo probabilístico e conhecendo suas frequências relativas, podemos estabelecer no cálculo das probabilidades algumas regras:

- A probabilidade deverá ser um valor que varie entre 0 e 1, sendo representado por:

$$0 < P(A) < 1.$$

- Um evento impossível é um conjunto vazio (ϕ) e atribui-se probabilidade 0, enquanto que um evento certo tem probabilidade 1, assim:

$$P(\Omega) = 1 \qquad\qquad P(\varphi) = 0$$

- A soma das probabilidades para todos os resultados experimentais tem de ser igual a 1.

OPERAÇÕES COM EVENTOS

Nos cálculos de probabilidades, algumas vezes, o interesse do pesquisador está na determinação da probabilidade de combinação dos eventos relacionados ao experimento aleatório. Podemos ter dois tipos de combinações, dados dois eventos A e B:

- O evento intersecção de A e B, denotado $A \cap B$, é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente.
- O evento reunião de A e B, denotado $A \cup B$, é o evento em que A ocorre ou B ocorre (ou ambos).
- O evento complementar de A, denotado A^c, é o evento em que A não ocorre.

Assim:

- A probabilidade de um ou outro evento ocorrer é dada por $P(A \cup B)$.
- A probabilidade de ambos os eventos ocorrerem simultaneamente é dada por $P(A \cap B)$.

Exemplo: considere um baralho completo de 52 cartas. Desejamos saber qual é a probabilidade de sair um rei de copas. Para este evento, vamos calcular a probabilidade $P(A \cap B)$, em que A é a probabilidade da carta ser um rei e B é a probabilidade da carta ser de copas. Se desejarmos saber a probabilidade de sair uma carta de valor 2 ou uma carta de valor 5, vamos calcular a probabilidade $P(C \cup D)$, em que C é a probabilidade de sair uma carta de valor 2 e D é a probabilidade de sair uma carta de valor 5.

REGRA DA ADIÇÃO

Essa regra leva em consideração a ocorrência do evento A ou a ocorrência do evento B ou ainda de ambos os eventos. É denotada matematicamente por $P(A \cup B)$ e dizemos união de A e B, que é a probabilidade de ocorrência de pelo menos um dos dois eventos.

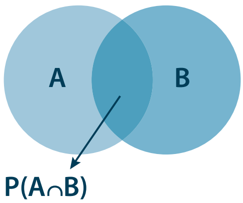
No cálculo dessa probabilidade, surgem duas situações. A primeira quando os eventos A e B são mutuamente excludentes (não têm elementos em comum). Nessa situação, a fórmula é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

A segunda quando os eventos A e B não são mutuamente excludentes (têm elementos em comum). Nessa situação, a fórmula é dada por:

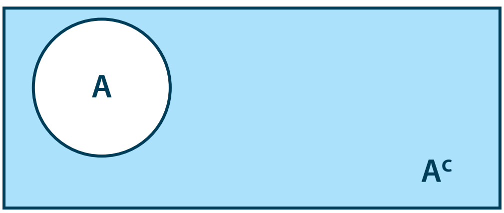
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ em que:}$$

$P(A \cap B)$ – é a probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente; a intersecção entre os eventos A e B.



COMPLEMENTO DE UM EVENTO

Dado um evento A, o complemento de A (A^c) é um evento que consiste de todos os pontos amostrais que não estão em A. O diagrama a seguir ilustra o conceito. A área retangular representa o espaço amostral; o círculo representa o evento A e a região com preenchimento, os pontos do complemento de A.



O cálculo da probabilidade usando o complemento é feito por meio da relação: $P(AC) = 1 - P(A)$ para todo evento A.

REFLITA

A teoria da probabilidade é no fundo nada mais do que o senso comum reduzido ao cálculo.

(Pierre Simon de Laplace)

Exemplo:

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos: sair faces pares (A), sair faces ímpares (B), sair faces cujo valor é maior do que 3 (C). Ou seja,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad n(\Omega) = 6$$
$$A = \{2, 4, 6\} \qquad n(A) = 3$$
$$B = \{1, 3, 5\} \qquad n(B) = 3$$
$$C = \{4, 5, 6\} \qquad n(C) = 3$$

Vamos calcular as seguintes probabilidades: $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cup B)$ e $P(A^c)$. Temos que:

$$A \cap B = \{\} \qquad n(A \cap B) = 0$$
$$A \cap C = \{4,6\} \qquad n(A \cap C) = 2$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega \qquad n(A \cup B) = 6$$
$$A^c = \{1, 3, 5\} = B \qquad n(A^c) = 3$$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{0}{6} = 0.$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{6} = 1.$$

$$P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A^c) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pela ocorrência de um evento paralelo. Seja A um evento com probabilidade P(A). Se obtivermos a informação extra que o evento B ocorreu paralelamente, iremos tirar vantagem dela no cálculo de uma nova probabilidade para o evento A. Essa será escrita como $P(A \mid B)$ e lida como "probabilidade de A dado B".

Nesse caso, podemos utilizar essa informação extra para realocar probabilidades aos outros eventos. Vamos utilizar o exemplo da tabela do exercício anterior número 3.

Tabela 4 - Tipos de imóveis e apartamentos por região

REGIÃO	TIPO DE IMÓVEL		TOTAL
	APARTAMENTO	CASA	
Norte	30	28	58
Sul	40	56	96
Leste	38	34	72
Oeste	52	22	74
Total	160	140	300

Fonte: os autores.

Se soubermos que o imóvel é um apartamento, qual é a chance de ser da região norte? Reformulando a pergunta, poderíamos ter o interesse de saber: dado que o imóvel é um apartamento, qual a probabilidade de pertencer à região norte? Observe que estamos impondo uma condição ao evento. Sabemos que o imóvel é um apartamento, essa é a condição imposta. Quando impomos alguma condição em probabilidade, dizemos, então, que a probabilidade é condicional e, assim, reduzimos o espaço amostra à condição imposta.

Assim, escrevemos $P(N \mid A)$ e lê-se probabilidade de N dado A, sendo a condição A, ou seja, ser apartamento, sendo que:

$$P(N \mid A) = \frac{30}{160}$$

De forma geral, para dois eventos quaisquer A e B, sendo P(B) > 0, definimos a probabilidade condicional de A | B como sendo P(A | B) dado pela seguinte fórmula:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Caso a condição seja A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Para o exemplo anteriormente mencionado, se N e A indicam, respectivamente, norte para região e apartamento para tipo, então:

$$P(N \mid A) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{30/300}{160/300} = \frac{30}{160} \text{ como mostrado acima.}$$

Observe que, se trocarmos a condição para ser do tipo A, dado que a região é Norte, a condição agora é ser da região Norte e o problema ficaria da seguinte maneira:

$$P(A \mid N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{30/300}{58/300} = \frac{30}{58}.$$

Exemplo:

Baseado na tabela anterior, calcular as seguintes probabilidades:

a. P(S | C) = 0,400.

b. P(C | S) = 0,584.

c. P (L | A) = 0,238.

d. P(A | L) = 0,529.

e. P(O | C) = 0,156.

f. P(C | O) = 0,296.

EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos A e B são independentes se $P(A \mid B) = P(A)$ ou $P(A \mid B) = P(B)$. Caso contrário, os eventos são dependentes.

REGRA DA MULTIPLICAÇÃO

A relação geral mostrada anteriormente foi:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dessa relação, obtemos a regra do produto das probabilidades, em que:

$$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A \mid B).$$

Observe que a probabilidade de A e B ocorrerem conjuntamente está sob uma condição, pois a probabilidade de A está sob a condição de B, mostrando que há uma dependência de uma probabilidade em relação ao evento ocorrido anteriormente.

Em caso de A e B serem eventos independentes, ou seja, a probabilidade de um evento não depender da ocorrência do outro evento, nessa condição, a probabilidade de A e B ocorrer é dada pela probabilidade de A vezes a probabilidade de B.

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B).$$

Exemplo:

Uma urna contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sorteamos duas bolas ao acaso sem reposição. Isso quer dizer que sorteamos a primeira bola, verificamos sua cor e não a devolvemos à urna. As bolas são novamente misturadas e sorteamos, então, a segunda bola. Para resolver as probabilidades nessa situação, ilustraremos a situação por um diagrama de árvore em que em cada “galho da árvore” estão indicadas as probabilidades.

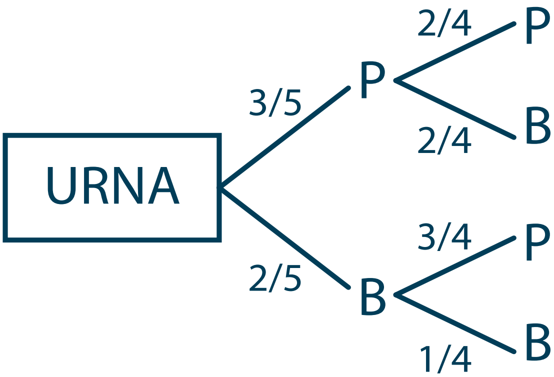


Figura 5- Diagrama de árvores para o sorteio de duas bolas sem reposição
Fonte: os autores.

Observe que o cálculo das probabilidades, na segunda retirada, fica condicionado aos resultados da primeira retirada. Na Tabela 24, estão os resultados possíveis do sorteio com suas respectivas probabilidades.

Indicando bola branca por B e bola preta por P, vejamos o cálculo das probabilidades para as seguintes situações:

Tabela 1 - Resultados e probabilidades do diagrama de árvore

RESULTADOS	PROBABILIDADES
BB	2/5 x 1/4 = 2/20
BP	2/5 x 3/4 = 6/20
PB	3/5 x 2/4 = 6/20
PP	3/5 x 2/4 = 6/20
Total	1,0

Fonte: os autores.

Considere, agora, que vamos fazer o mesmo sorteio, mas repondo a primeira bola sorteada novamente na urna. Assim, as probabilidades são:

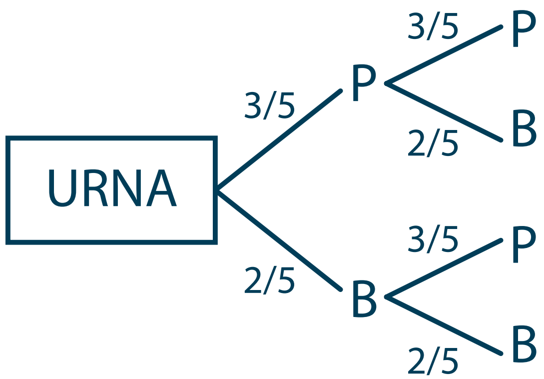


Figura 2 - Diagrama de árvores para o sorteio de duas bolas com reposição
Fonte: os autores.

a. Qual é a probabilidade de sair bola branca na primeira retirada?

$$P(B) = 2/5.$$

b. Qual é a probabilidade de sair bola branca na primeira retirada e bola preta na segunda retirada?

$$P(B \text{ na } 1^a \cap P \text{ na } 2^a) = 6/20.$$

c. Qual é a probabilidade de sair bola preta na segunda retirada, dado que saiu branca na primeira retirada?

$$P(P \text{ na } 2^a \mid B \text{ na } 1^a) = 3/4.$$

d. Qual é a probabilidade de sair bola branca na segunda retirada, dado que saiu preta na primeira retirada?

$$P(B \text{ na } 2^a \mid P \text{ na } 1^a) = 2/4.$$

e. Qual é a probabilidade de sair bola preta na segunda retirada?

$$P(P \text{ na } 2^a) = 6/20 + 6/20 = 12/20.$$

Observe que os cálculos das probabilidades na segunda retirada não ficam condicionados aos resultados da primeira retirada.

Tabela 6 - Resultados e probabilidades do diagrama de árvore

RESULTADOS	PROBABILIDADES
BB	2/5 x 2/5 = 4/25
BP	2/5 x 3/5 = 6/25
PB	3/5 x 2/5 = 6/25
PP	3/5 x 3/5 = 9/25
Total	1,0

Fonte: os autores.

Observe que os cálculos das probabilidades na segunda retirada não ficariam condicionados aos resultados da primeira retirada. Assim, indicando B por "branca" e P por "preta", vejamos o cálculo das probabilidades.

- Qual é a probabilidade de sair bola branca na primeira retirada?

$$P(B) = 2/5.$$

- Qual é a probabilidade de sair bola branca na primeira retirada e bola preta na segunda retirada?

$$P(B \text{ na } 1^a \cap P \text{ na } 2^a) = 6/25.$$

- Qual é a probabilidade de sair bola preta na segunda retirada, dado que saiu branca na primeira retirada?

$$P(P \text{ na } 2^a \mid B \text{ na } 1^a) = 3/5.$$

- Qual é a probabilidade de sair bola branca na segunda retirada, dado que saiu preta na primeira retirada?

$$P(B \text{ na } 2^a \mid P \text{ na } 1^a) = 2/5.$$

- Qual é a probabilidade de sair bola preta na segunda retirada?

$$P(P \text{ na } 2^a) = 6/25 + 9/25 = 15/25 = 3/5$$

Observe que as probabilidades da segunda retirada não são alteradas pela extração da primeira bola.

$$\text{Assim, } P(P \text{ na } 2^a \mid B \text{ na } 1^a) = 3/5 = P(P \text{ na } 2^a).$$

Nesse caso, dizemos que o evento A independe do evento B e:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B).$$

©shutterstock

REGRAS DE PROBABILIDADE

De acordo com o evento estudado, existem algumas regras para o cálculo de probabilidades. São elas:

P(A ou B), para eventos não mutuamente excludentes:

$$P(A \text{ ou } B \text{ ou ambos}) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B).$$

Para eventos mutuamente excludentes:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B).$$

Para eventos independentes:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \,.\, P(B).$$

Para eventos dependentes:

$$P(A \text{ e } B) = P(B).P(A \mid B) \text{ ou } P(A).P(B \mid A).$$

©shutterstock

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Os métodos de análise estatística requerem sempre que sejam enfocados certos aspectos numéricos dos dados (média, desvio padrão etc.), independentemente do experimento originar resultados qualitativos ou quantitativos.

Um meio para descrever, por valores numéricos, os resultados experimentais é o conceito de variável aleatória. Uma variável aleatória permite passar cada um dos resultados do experimento para uma função numérica dos resultados. Para ilustrar, em uma amostra de componentes, ao invés de manter o registro de falhas individuais, o pesquisador pode registrar apenas quantos apresentaram falhas dentro de mil horas. Em geral, cada resultado é associado por um número, especificando-se uma regra de associação.

Uma variável aleatória pode ser classificada como discreta ou contínua, dependendo dos valores numéricos que ela assume. Uma variável aleatória é:

- Discreta: quando pode assumir tanto um número finito de valores como uma infinita sequência de valores, tais como 0, 1, 2, ..., n.
- Contínua: quando pode assumir qualquer valor numérico em um intervalo ou associação de intervalos.

Observe o exemplo do lançamento de uma moeda duas vezes. A variável aleatória é o "número de caras" em duas jogadas. Considerando C como sair cara e K como sair coroa, os possíveis resultados são:

Tabela 7 - Distribuição de probabilidades Cara ou Coroa

RESULTADOS	VALOR DA VARIÁVEL ALEATÓRIA (SAIR CARA)	PROBABILIDADE DO RESULTADO
C C	2	½ x ½ = ¼
C K	1	½ x ½ = ¼
K C	1	½ x ½ = ¼
K K	0	½ x ½ = ¼

Fonte: os autores.

A distribuição de probabilidades ficará:

Tabela 8 - Distribuição de probabilidades

VALOR DA VARIÁVEL ALEATÓRIA (SAIR CARA)	PROBABILIDADE DO RESULTADO
0	¼
1	¼ + ¼ = 2/4
2	¼
Total	1,0

Fonte: os autores.

Para cada possível evento, associamos um número e em seguida montamos o modelo probabilístico. Assim, conhecemos a distribuição de probabilidades que essa variável aleatória (v.a.) segue.

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE PROBABILIDADE

Existem experimentos cujos resultados, refletidos em uma variável aleatória, seguem um comportamento previsível em relação as suas probabilidades de ocorrência e, portanto, podem ser modelados por uma equação específica.

Dentre as principais distribuições discretas, destacam-se a distribuição de Bernoulli, distribuição Binomial e distribuição de Poisson.

Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli consiste em uma distribuição em que a variável aleatória assume apenas dois possíveis resultados: sucesso (o evento se realiza) ou fracasso (o evento não se realiza).

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda: o resultado é cara ou não.
- Uma peça é escolhida ao acaso: o resultado é defeituosa ou não.
- Uma cidade tem esgotamento sanitário: sim ou não.

Deve ficar claro que nem sempre o que é "bom" é o sucesso, mas sim o que se está estudando. Assim, o fato da peça ser defeituosa, por exemplo, seria o sucesso da pesquisa em si.

Em todos os casos, definimos uma variável aleatória X que só assuma dois valores possíveis:

$$\mathbf{X} = \begin{cases} \mathbf{0} \rightarrow \textbf{fracasso} \\ \mathbf{1} \rightarrow \textbf{sucesso} \end{cases}$$

Em que $\mathbf{P\ (\ X = 0) = q}$ **e** $\mathbf{P\ (\ X = 1) = p}$.

A função probabilidade de Bernoulli é dada por:

$$P\ (X = k) = p^k \cdot q^{1-k}.$$

O cálculo da média (chamada de Esperança e denotada por E(X)) e da variância (Var(X)) e do desvio padrão (σ) para a distribuição de Bernoulli são:

$$E(X) = p$$
$$Var(X) = pq$$
$$\sigma(X) = \sqrt{pq}$$

Exemplo:

Supondo que a probabilidade de venda amanhã seja de 0,8.

Seja a variável aleatória "vender", temos que:

- A probabilidade de não vender este produto é:

$$P(X = 0) = q$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 0) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Ou seja, 20% de chances de não vender.

- A probabilidade de vender este produto é:

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 1) = 0{,}8.$$

Ou seja, 80% de chances de vender.

- A média, a variância e o desvio padrão da venda são:

$$E(X) = p = 0{,}8$$

$$Var(X) = pq = 0{,}8 \,.\, 0{,}2 = 0{,}16$$

$$\sigma(X) = \sqrt{pq} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$$

Distribuição Binomial

Um experimento binomial é aquele que consiste em uma sequência de n ensaios idênticos e independentes. Cada tentativa pode resultar em apenas dois resultados possíveis: sucesso e fracasso, e a probabilidade de sucesso é constante de uma tentativa para outra.

Exemplos:

- Lançar uma moeda 5 vezes e observar o número de caras.
- 10 peças são escolhidas ao acaso e observamos as falhas.
- 5 cidades são observadas quanto ao acesso a rede de internet.

Designando por X o número total de sucessos em n tentativas, com probabilidade p de sucesso, sendo $\mathbf{0 < p < 1}$, os possíveis valores de X são 0, 1, 2, ..., n. Os pares (x, p(x)), em que $p(x) = P(X = x)$, constituem a distribuição binomial, de modo que:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Em que:

k = número de sucessos.

n = número de elementos da amostra.

p = probabilidade de sucesso.

q = probabilidade de fracasso.

A média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição binomial são dadas por:

E(x)....

Var(x).....

$$\sigma(x)=\sqrt{npq}.$$

Exemplos:

Um processo industrial na fabricação de monitores opera com média de 5% de defeituosos. Baseado em amostras de 10 unidades, calcule as probabilidades de uma amostra apresentar:

a. Nenhum monitor com defeito:

$$P(x = 0) = \frac{10!}{0!(10-0)!} 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{10} = 0{,}598 \text{ ou } 59{,}8\%.$$

Observe que:

n = 10.

k = 0.

p = 5% ou 0,05.

q = 1 – 0,05 = 0,95.

Após a retirada dos dados, basta substituir os valores na fórmula.

Vejamos outro exemplo:

b. 3 monitores com defeito:

$$P(x = 3) = \frac{10!}{3!(10 - 3)!} 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^7 = 0{,}010 \text{ ou } 1\%.$$

c. Pelo menos 9 monitores com defeito:

$$P(x \geq 9) = P(x = 9) + P(x = 10)$$

$$P(x = 9) = \frac{10!}{9!(10 - 9)!} 0{,}05^9 \cdot 0{,}95^1 = 1{,}85 \text{ x } 10\text{-}11$$

$$P(x = 10) = \frac{10!}{10!(10 - 10)!} 0{,}05^{10} \cdot 0{,}95^0 = 9{,}76 \text{ x } 10\text{-}14$$

$P(x \geq 9) = 1{,}85 \text{ x } 1011 + 9{,}76 \text{ x } 10\text{-}14 = 1{,}86 \text{ x } 10\text{-}11$ ou 0,0000000000186 ou 0,00000000186%.

d. No máximo 2 monitores com defeito:

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x = 0) = \frac{10!}{0!(10 - 0)!} 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{10} = 0{,}598 \text{ ou } 59{,}8\%$$

$$P(x = 1) = \frac{10!}{1!(10 - 1)!} 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^9 = 0{,}315 \text{ ou } 31{,}5\%$$

$$P(x = 2) = \frac{10!}{2!(10 - 2)!} = 0{,}074$$

$$P(x \leq 2) = 0{,}598 + 0{,}315 + 0{,}074 = 0{,}987 \text{ ou } 98{,}7\%.$$

A média e a variância de monitores defeituosos serão:

$E(X) = 10 \text{ x } 0{,}05 = 0{,}5$

$Var(X) = 10 \text{ x } 0{,}05 \text{ x } 0{,}95 = 0{,}475$

Desvio padrão = 0,689.

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é frequentemente útil para estimar o número de ocorrências sobre um intervalo de tempo ou de espaços específicos. A probabilidade de uma ocorrência é a mesma para qualquer dois intervalos de igual comprimento e a ocorrência ou não em um intervalo é independente da ocorrência ou não em qualquer outro intervalo.

Exemplos:

- Número de chamadas telefônicas durante 10 minutos.
- Número de falhas de uma máquina durante um dia de operação.
- Número de acidentes ocorridos numa semana.
- Número de mensagens que chegam a um servidor por segundo.
- Defeitos por m^2 etc.

A distribuição de Poisson é dada por

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Em que:

- λ é a taxa de ocorrência do evento em um intervalo.
- k é o número de ocorrências do evento.
- e é uma constante matemática .

A média (E(X)), a variância (Var(X)) e o desvio padrão (σ) para a distribuição de Poisson são dadas por:

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Vale ressaltar que a Distribuição de Poisson não tem um limite superior, ou seja, o número de ocorrências x pode assumir uma infinita sequência de valores.

Exemplos:

1. Um departamento de polícia recebe 5 solicitações por hora, em média, relacionadas a crimes cometidos. Qual a probabilidade de receber:

   a. 2 solicitações em uma hora selecionada aleatoriamente?

$$P\ (X{=}2) = \frac{2{,}71828^5 \ .\ 5^2}{2!} = 0{,}0842 \text{ ou } 8{,}42\%.$$

b. No máximo, 2 solicitações em uma hora selecionada aleatoriamente?

$$P\ (X \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x = 0) = \frac{2{,}71828^5 \cdot 5^0}{0!} = 0{,}0067 \text{ ou } 0{,}67\%$$

$$P(x = 1) = \frac{2{,}71828^5 \cdot 5^1}{1!} = 0{,}0337 \text{ ou } 3{,}37\%$$

$$P\ (X=2) = \frac{2{,}71828^5 \cdot 5^2}{2!} = 0{,}0842 \text{ ou } 8{,}42\%$$

$$P\ (X \leq 2) = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246 \text{ ou } 12{,}46\%.$$

2. Em um posto de gasolina, sabe-se que, em média, 10 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba. Pergunta-se:

a. Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora para abastecer?

$$P\ (X) = \frac{2{,}71828^{-10} \cdot 5^3}{3!} = 0{,}0076 \text{ ou } 0{,}76\%.$$

b. Qual é a média, a variância e o desvio padrão para essa distribuição?

Valor médio: $E(X)=10$.

Variância: . $Var(X)=10$

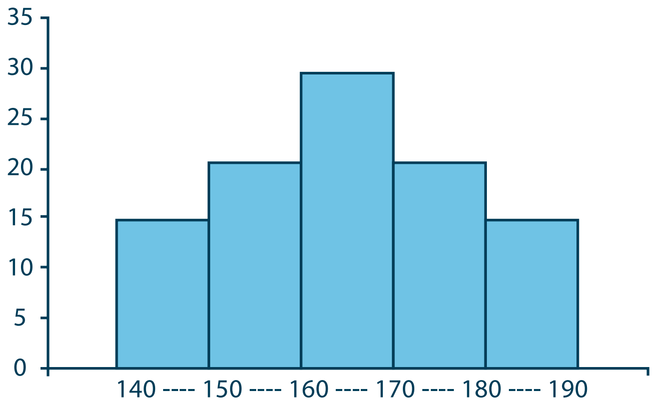
Desvio padrão: $\sigma(X)= \sqrt{10} = 3{,}16$.

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE PROBABILIDADE

As variáveis aleatórias contínuas são aquelas que assumem qualquer valor numérico em um intervalo de números reais. Como esse tipo de variável pode assumir infinitos valores dentro de um intervalo e, por consequência, infinitos valores de probabilidade, não faz sentido tratar as variáveis contínuas da mesma forma que são tratadas as variáveis discretas.

Por exemplo, supondo que quiséssemos calcular a probabilidade de, em um grupo, uma pessoa ter 170 cm de altura. Observe que a variável aleatória agora é a altura e X pode assumir qualquer valor entre 0 e infinito. Assim, se cada ponto fosse uma probabilidade, iríamos obter probabilidades com valores tendendo a zero. O valor para probabilidade citada no exemplo seria $1/\infty$. Assim, para calcular a probabilidade X, usamos o artifício de que X esteja compreendido entre dois pontos quaisquer. Exemplo: podemos calcular a probabilidade de um indivíduo medir entre 160 cm e 180 cm. Podemos fazer isso por meio da construção de um histograma, como pode ser visto no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Alturas de indivíduos



Fonte: os autores.

Com o conhecimento da área na qual o intervalo 160 – 180 está compreendido, sabemos a probabilidade correspondente de um indivíduo ter entre 160 cm e 180 cm. Para o cálculo da área, usamos o artifício matemático chamado de integral. Assim, definidos dois pontos [a, b], a probabilidade da variável estar entre a e b é dado por:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

A função $f(x)$ é chamada de densidade de probabilidade (f.d.p) da variável aleatória X. Assim, podemos construir modelos teóricos para variáveis aleatórias contínuas, escolhendo adequadamente as funções densidade de probabilidade.

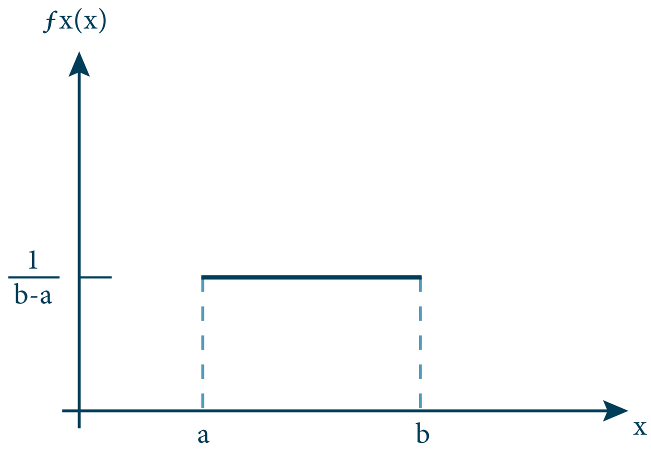
Dentre as principais distribuições contínuas, destacam-se a Distribuição Uniforme, Distribuição Exponencial e Distribuição Normal.

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

A Distribuição Uniforme é uma das mais simples de se conceituar. É usada em situações em que a função densidade de probabilidade é constante dentro de um intervalo de valores da variável aleatória X.

Usualmente, associamos uma distribuição uniforme a uma determinada variável aleatória, simplesmente por falta de informação mais precisa, além do conhecimento do seu intervalo de valores. O gráfico, a seguir, refere-se a distribuição uniforme no intervalo a, b:

Gráfico 2 - Gráfico Distribuição Uniforme no intervalo a, b.



Fonte: os autores.

Sendo que:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b.$$

As fórmulas para o valor esperado e para a variância são:

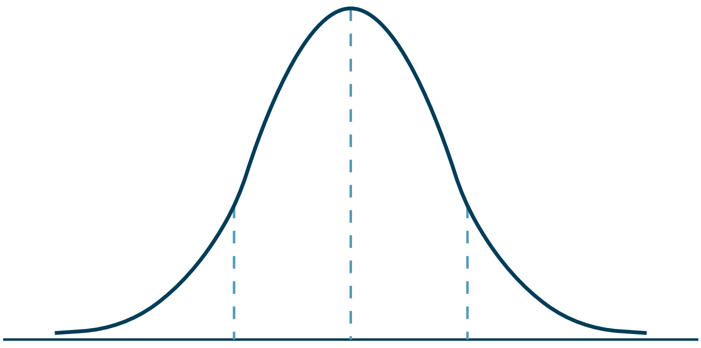
$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var\ (x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADE

A distribuição de probabilidade contínua mais importante e mais utilizada na prática é a Distribuição Normal. A forma dessa distribuição é ilustrada por uma curva em forma de sino, cujo ponto mais alto está na média, que também é a mediana e a moda da distribuição. Seu formato é simétrico em relação à média e seus extremos se estendem ao infinito em ambas as direções e, teoricamente, nunca tocam o eixo horizontal.

Gráfico 3 – Curva da Distribuição Normal



Fonte: os autores.

O desvio-padrão determina a curva. Curvas mais largas e planas resultam de valores maiores de desvio-padrão, mostrando maior variabilidade dos dados. A área total sob a curva para a Distribuição Normal é 1. Como ela é simétrica, o valor da área sob a curva à esquerda e à direita é equivalente a 0,5 de cada lado.

Para simplificar a notação de uma variável aleatória com distribuição normal, com média μ e variância, utiliza-se:

$$X \sim N(\mu, \sigma^{2).}$$

Dizemos que a variável aleatória X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ2 se sua densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} .$$

Em que:

e = constante matemática (aproximada por 2,71828).

π = constante matemática (aproximada por 3,14159).

μ = média aritmética da população.

σ = desvio padrão da população.

x = qualquer valor da variável aleatória contínua onde -∞ < X < ∞.

Distribuição Normal Padrão

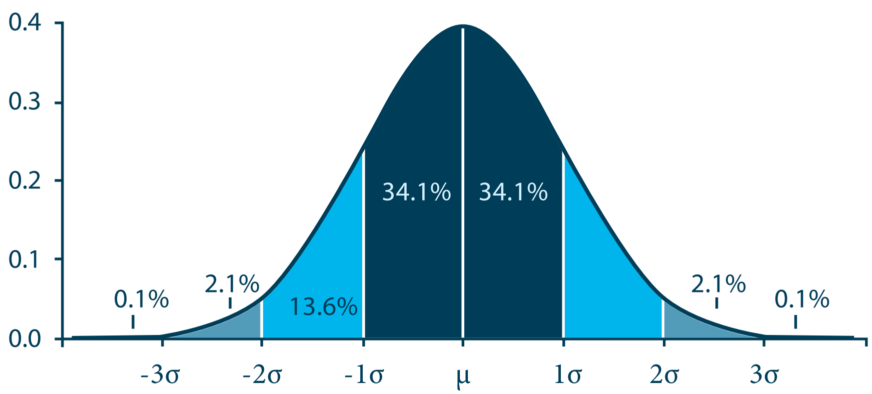
Para calcular P(a ≤ X ≤ b) quando X é uma variável aleatória normal com parâmetros μ e σ, devemos calcular:

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx.$$

Quando uma variável aleatória tem uma distribuição normal com média zero e desvio padrão 1, tem uma distribuição normal padrão de probabilidade.

Nenhuma das técnicas de integração padrão pode ser usada para calcular a integral acima. Assim, quando μ = 0 e σ = 1, esta expressão foi calculada e tabulada para valores determinados de a e b. Nesta tabela, entra-se com a variável reduzida ou a variável padronizada Z e se encontra f(Z) ou vice-versa.

Gráfico 4 - Distribuição Normal Padrão



Fonte: os autores.

A partir dessas integrais obtidas numericamente e utilizando a curva normal padronizada, podemos obter as probabilidades por meio de tabelas prontas que mostram a área sob a curva normal correspondente. A tabela para utilização das probabilidades é mostrada a seguir:

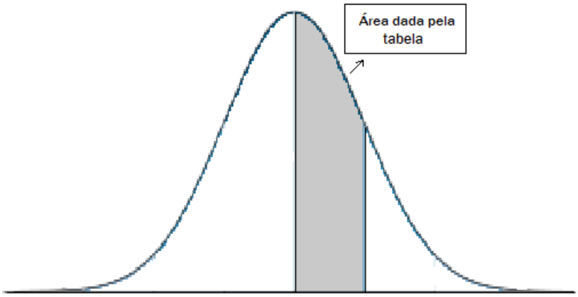
Tabela 9 - Distribuição normal reduzida

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Fonte: Tabela... (on-line)[1].

Vale ressaltar que tabelas com diferentes integrais calculadas podem ser encontradas. A tabela anterior fornece sempre a seguinte área sob a curva:

Gráfico 5 - Área sobre a curva



Fonte: os autores.

A tabela anterior retorna a probabilidade de ocorrência de um evento entre 0 e z. Na margem esquerda, há o valor de z com uma decimal e, se for necessário considerar a segunda decimal, deve-se procurá-la na margem superior.

Exemplos:

- Para calcular a probabilidade de z entre 0 e 1, procuramos na margem esquerda a linha que tem z = 1,0 e a coluna 0,00 e encontramos o valor 0,3413. Isso significa que a probabilidade de encontrar um valor de x entre a média zero e z = 1,0 é 0,3413 ou 34,13%.

- Por outro lado, para se obter a probabilidade de z maior que 1, calculamos a probabilidade de z entre 0 e 1, que é 0,3413, e a seguir fazemos 0,5 - 0,3413 = 0,1587 ou 15,87%.

- Para se obter a probabilidade de z entre 0 e 1,87, procuramos a célula cuja linha é 1,8 e coluna 0,07. O resultado é o valor 0,4693 ou 46,93%.

- Valores procurados abaixo da média, ou seja, abaixo de 0, irão aparecer como negativos, porém observe que na tabela não há valores negativos. Como a curva é simétrica, valores negativos são equivalentes aos valores positivos, ou seja, a área procurada é a mesma equivalente aos valores positivos.

Para utilizar a tabela, as variáveis aleatórias x precisam ser padronizadas. A fórmula usada para esta conversão é:

$$z = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$$

Em que:

- x_i = ponto que se deseja converter em z.
- μ = média da normal original.
- σ = desvio padrão da normal original.

Vejamos o exemplo:

Suponha que a média da taxa de falhas de dados é transmitida em lotes. Sabe-se que essa característica segue uma distribuição normal com média de 2,0 e desvio padrão igual a 0,5. Calcule as seguintes probabilidades:

- De tomarmos um lote ao acaso e este ter uma taxa de falhas entre 2,0 e 2,5. Traduzindo para linguagem probabilística, queremos:

$$P(2{,}0 < x < 2{,}5) = ?$$

Primeiramente, vamos padronizar os dados.

Lembre-se que a fórmula da padronização é:

$$Z = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \text{ e que } \mu = 2{,}0 \qquad \sigma = 0{,}5$$

Assim:

$$Z = \frac{2{,}5 - 2{,}0}{0{,}5} = 1$$

$$Z = \frac{2{,}0 - 2{,}0}{0{,}5} = 0$$

Novamente traduzimos para a linguagem probabilística, mas agora usando os dados padronizados:

$$P(2{,}0 < x < 2{,}5) = P(0 < z < 1) = 0{,}3413 \text{ ou } 34{,}13\%.$$

Queremos uma área que esteja entre 0 e 1 desvios padrão.

Essa área é exatamente o que a tabela nos dá. Basta olhar, como explicado anteriormente, o valor da linha 1,0 e na linha 0,0 para obtermos o valor 0,3413.

Assim, dizemos que a chance de tomarmos um lote que tenha uma taxa de falhas de dados entre 2,0 e 2,5 é de 34,13%.

Vamos ver outra probabilidade:

- De tomarmos um lote ao acaso e ter menos que uma taxa de falhas de 2,5.

$$P(x < 2{,}5) = P(z < 1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413 \text{ ou } 84{,}13\%.$$

- De tomarmos um lote ao acaso e ter mais que uma taxa de falhas de 2,5.

$$P(x > 2{,}5) = P(z > 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587 \text{ ou } 15{,}87\%.$$

- De tomarmos um lote ao acaso e ter uma taxa de falhas entre 1,25 e 2,0 falhas.

$$P(1{,}25 < x < 2{,}0) = P(-1{,}5<z<0) = 0{,}4332 \text{ ou } 43{,}32\%.$$

Observe que a área desejada está entre a média (0) e 1,5 desvios abaixo da média. Olhamos no 1,5 na linha e no 0 na coluna, que me dará a área entre 0 e 1,5 equivalente à área entre 1,5 e 0.

- De tomarmos um lote ao acaso e este ter uma taxa de falhas entre 1,25 e 2,5.

$$P(1{,}25 < x < 2{,}5) = P(-1{,}5 < z < 1) = 0{,}4332 + 0{,}3413 = 0{,}7745.$$

Observe que, quando olhamos no valor 1,5 na tabela, estamos tomando a área entre 0 e 1,5; quando olhamos no 1 na tabela, estamos tomando a área entre 0 e 1. Se somarmos as duas áreas, então temos a área compreendida entre 1,5 e 1,0, que é condizente com os valores de lotes com falhas entre 1,25 e 2,5.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Caro(a) aluno(a), vimos, nesta unidade, a importância das probabilidades no nosso cotidiano.

A teoria das probabilidades tenta quantificar a noção de provável, sendo uma ferramenta estatística de grande utilidade quando se trabalha com inúmeros eventos relacionados a pesquisas em empresas, órgãos governamentais e instituições de ensino. Essa ferramenta lida com as chances de ocorrências de algo que vai acontecer, então, dizemos que ela lida com fenômenos aleatórios. Portanto é necessário conhecer o material de estudo para poder calcular essas chances ou probabilidades de maneira correta e então tomarmos nossas decisões com base em nossas estimativas.

Um efeito importante da teoria da probabilidade no cotidiano está na avaliação de riscos. Normalmente, governos, por exemplo, utilizam processos envolvidos em probabilidades para suas tomadas de decisões. Uma aplicação importante das probabilidades é a questão da confiabilidade como no lançamento de algum produto, nas chances deles falharem.

Para inferir sobre probabilidades, é necessário saber que tipo de variável aleatória está sendo trabalhada. Cada variável aleatória possui um tipo de comportamento chamado de distribuição de probabilidades. Isso é importante, pois cada distribuição de probabilidade possui algumas características e elas devem ser respeitadas para que se possa chegar a resultados precisos e então conclusões válidas possam ser tomadas sobre aquilo que estamos estudando. Vimos, nesta unidade, os conceitos básicos de probabilidade, a forma clássica de calculá-la e também vimos as principais distribuições de probabilidades utilizadas.

Deve-se entender que é razoável pensar ser de extrema importância compreender como estimativas de chance e probabilidades são feitas e como elas contribuem para reputações e decisões em nossa sociedade.

ATIVIDADES

1. Explique, com base em definições estudas anteriormente, o significado ou a diferença entre espaço amostral e eventos, quando se trabalha com probabilidade.

2. Uma máquina de fabricação de computadores tem probabilidade de 10 % de produzir um item defeituoso. Em uma amostra de 6 itens, calcule a probabilidade de:

   a. Haver no máximo um item defeituoso.

   b. Haver 3 itens defeituosos.

   c. Não haver itens defeituosos.

   d. Determine a média e a variância do experimento.

3. A qualidade de alguns CDs foi avaliada sobre a resistência a arranhões e sobre a adequação de trilhas. Os resultados foram:

RESISTÊNCIA A ARRANHÕES	ADEQUAÇÃO DE TRILHAS		TOTAL
	APROVADO	REPROVADO	
Alta	700	140	840
Baixa	100	60	160
Total	800	200	1000

Fonte: adaptado de Barbetta et al. (2010).

Se um CD for selecionado aleatoriamente desse lote, qual é a probabilidade de:

   a. Ter resistência alta a arranhões.

   b. Ter resistência baixa a arranhões.

   c. Ser aprovado na avaliação das trilhas.

   d. Ser reprovado na avaliação das trilhas.

   e. Ter resistência alta ou ser aprovado.

   f. Ter resistência baixa ou ser reprovado.

   g. Ter resistência alta dado que seja reprovado.

   h. Ter resistência baixa dado que seja aprovado.

ATIVIDADES

4. Um sistema de banco de dados recebe em média 80 requisições por minuto, segundo uma distribuição de Poisson. Qual a probabilidade de que no próximo minuto ocorram 100 requisições? Determine a média e a variância para essa variável aleatória.

5. A distribuição da duração de monitores pode ser aproximada por uma distribuição normal de média $\mu = 6$ anos e desvio padrão $\sigma = 2$ anos. Determine a probabilidade de um monitor durar:

   a. Entre 6 e 9 anos.

   b. Acima de 9 anos.

   c. Entre 4 e 9 cm.

   d. Acima de 4 cm.

QUAL A PROBABILIDADE DE GANHAR NA MEGA SENA?

Acho que todos os brasileiros gostariam de ganhar na Mega Sena, não acham? Por isso, as casas lotéricas estão sempre lotadas. Muitos pensam em jogar suas datas de nascimento, de casamento, do aniversário de alguém importante, mas nem sempre esses números são os sorteados. E esse é o momento esperado, o sorteio dos números que irão decidir se houve ganhadores.

A cartela da Mega Sena é composta por 60 números, enumerados de 1 a 60. A aposta mínima é feita por seis números e a máxima de 15, mas os valores das apostas podem variar de acordo com o aumento dos números apostados, por exemplo, uma cartela com 6 números marcados custa para o apostador R$ 3,50 já a aposta máxima que é com 15 números marcados, custa R$ 17.517,50. Essa diferença entre os valores das apostas é determinada pela quantidade de números marcados, uma vez que, quanto mais números se marcam, maior é a probabilidade de acerto.

Os seis números sorteados (dentre os sessenta) e os prêmios em dinheiro são pagos para os ganhadores da quadra (que são o acerto de quatro números) da quina (acerto de cinco números) e a tão esperada sena (o acerto dos seis números). E aqueles sonhados prêmios milionários são pagos somente a quem acertar os seis números sorteados, caso mais de uma pessoa acerte os seis números, o prêmio é dividido em partes iguais dentre os acertadores.

O prêmio bruto corresponde a 45,3% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

35% são distribuídos entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena);

19% entre os acertadores de 5 números (Quina);

19% entre os acertadores de 4 números (Quadra);

22% ficam acumulados e distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5.

5% ficam acumulado para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final zero ou 5.

Não havendo acertador em qualquer faixa, o valor acumula para o concurso seguinte, na respectiva faixa de premiação. Não deixe de conferir o seu bilhete de aposta.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

E, agora, pergunta-se: qual é a chance de uma pessoa ganhar com apenas seis números?

Essas chances de acerto de seis números são por meio de combinação simples de sessenta elementos tomados seis a seis $C_{60,6}$, ou seja, existem 50.063.860 (cinquenta milhões, sessenta e três mil e oitocentos e sessenta) probabilidade de se acertar os seis números de 1 a 60.

Essa probabilidade corresponde a 1/50.063.860 = 0,00000002 que corresponde a 0,000002%.

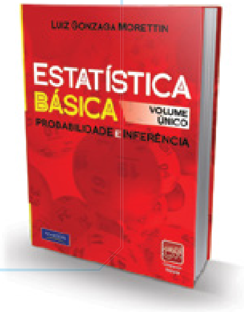
MATERIAL COMPLEMENTAR

LIVRO

Estatística Básica. Probabilidade e Inferência
Luis Gonzaga Morettin

Editora: Pearson

Sinopse: o livro traz o conteúdo programático de um curso de estatística. Fornece diversos exemplos para ilustrar a teoria ao longo dos capítulos e, ao final de cada um deles, apresenta exercícios resolvidos e propostos para auxiliar na aprendizagem dos estudantes.



REFERÊNCIAS

BARBETTA, P. A. et al. **Estatística para os cursos de engenharia e informática**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

Referência On-line

[1] Em: <http://www.dequi.eel.usp.br/~fabricio/tabela_dist_normal.pdf >. Acesso em: 14 ago. 2016.

[2] Em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena>. Acesso em: 30 set. 2016.

GABARITO

1. Espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento aleatório.

   Eventos: é um dos possíveis resultados do experimento aleatório e do qual se deseja saber a probabilidade de ocorrência.

2.
   a. 0,53 + 0,35 = 0,88 ou 88%

   b. 0,0145 ou 1,45 %

   c. 0,53 ou 53%....

   Média = 0,6 Variância = 0,54.

3.
   a. Ter resistência alta a arranhões 840/1000.

   b. Ter resistência baixa a arranhões 160/1000.

   c. Ser aprovado na avaliação das trilhas 800/1000.

   d. Ser reprovado na avaliação das trilhas 200/1000.

   e. Ter resistência alta ou ser aprovado $p(a \cup ap) = \frac{840 + 800 - 700}{1000} = 940/1000$.

   f. Ter resistência baixa ou ser reprovado $p(b \cup r) = \frac{160 + 200 - 60}{1000} = 300/1000$.

   g. Ter resistência alta dado que seja reprovado p(a/r) = 140/200.

   h. Ter resistência baixa dado que seja aprovado 100/800.

4. $P(X) = \frac{2{,}71828^{-80} \cdot 80^{100}}{100!} = 0{,}0039$ ou 0,39%

   E(x) = 80

   Var (x) = 80.

5.
   a. 0,4332 ou 43,32%.

   b. 0,0668.

   c. 0,3413 + 0,4332 = 0,77 ou 77%.

   d. 0,8413 ou 84,13%.

Professora Me. Ivnna Gurniski De Oliveira
Professora Me. Renata Cristina de Souza
Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

SEQUÊNCIA NUMÉRICA

UNIDADE

IV

Objetivos de Aprendizagem

- Entender os conceitos relacionados com sequências.
- Entender as diferenças entre as sequências, em especial, a progressão aritmética e a progressão geométrica.
- Compreender as propriedades e aplicações que envolvem a progressão aritmética e a progressão geométrica.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Sequência
- Progressão Aritmética
- Propriedade e classificação de uma Progressão Aritmética
- Termo geral de uma Progressão Aritmética
- Soma dos termos de uma Progressão Aritmética
- Progressão Geométrica (PG)

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a)! Nesta unidade, abordaremos o conceito de sequência. A ideia de sequência e sucessão aparece na vida diária em muitas situações, nas quais podemos utilizar processos mais usuais, como a progressão aritmética e progressão geométrica. Exemplos disso encontram-se na sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, março); a sequência dos anos, a partir de 1988, nos quais são realizadas as olimpíadas (1988, 1992, 1996, 2000, 2004, 2008...); a sequência dos dias úteis da semana (segunda, terça, quarta, quinta), enfim, são diversos os casos em que a sequência se faz presente em nosso dia a dia, em nossas vidas.

Na vida moderna, inúmeras são as aplicações dos conceitos matemáticos e dos conteúdos ensinados em salas de aula que ganham grande importância, na medida em que são utilizadas no dia a dia, nas mais diversas situações, aliás, a matemática, de uma maneira ou de outra, mais cedo ou mais tarde, acaba tendo sua utilidade, sua aplicação no mundo concreto, por mais abstrata que seja uma teoria, ela, direta ou indiretamente, se fará presente no mundo real.

As sequências não fogem o que foi citado anteriormente. É inevitável falar em progressões sem usar o termo sequência numérica. As sequências estão diretamente ligadas a processos de contagem e ao estudo do desenvolvimento dos sistemas de numeração, por meio dos vários registros de sequências nos principais documentos das civilizações da antiguidade. Percebemos que o processo matemático é utilizado desde então até os dias atuais sem modificação lógica. Ao falar de sequência, falamos de um conjunto de termos, números, dispostos numa certa ordem.

Dessa forma, serão apresentados, nesta unidade, conceitos, definições, propriedades e aplicações que estão relacionados com as progressões aritmética e geométrica, afim de que ocorra o entendimento das diferenças entre elas, e de seus usos e aplicações.

Bons Estudos!

SEQUÊNCIA

Sequência numérica é todo conjunto de números dispostos em uma certa ordem. Uma sequência pode ser finita ou infinita.

Exemplos:

A sequência (2; 5; 8; 11), é uma sequência finita, pois é limitada, ou seja, inicia-se no termo 2 e termina no termo 11.

Já a sequência (-3; -2; -1; ...) é uma sequência infinita, pois é ilimitada, ou seja, inicia-se no termo -3 e não tem fim, o que é indicado pela reticencias.

REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA SUCESSÃO

A representação genérica de uma sequência pode ser feita da seguinte maneira:

(a1, a2; a3; ...; an-1; an), em que:

a1 – 1º termo

a2 – 2º termo

a3 – 3º termo

.

.

.

an – n-ésimo termo.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Consideremos a sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

Observamos que, a partir do segundo termo, a diferença entre qualquer termo e seu antecessor é sempre a mesma:

$$4 - 2 = 6 - 4 = 10 - 8 = 14 - 12 = 16 - 14 = 2.$$

Sequências como essa são denominadas progressões aritméticas (PA).

A diferença entre um termo e outro, diferença esta que é sempre constante, é chamada de razão da progressão e costuma ser representada por r. Na PA dada, temos que a razão é r = 2.

Podemos, então, dizer que progressão aritmética é a sequência numérica em que, a partir do primeiro termo, todos são obtidos somando uma constante chamada razão.

São exemplos de PA:

- (5, 10, 15, 20, 25, 30) é uma PA de razão r = 5.
- (12, 9, 6, 3, 0, -3) é uma PA de razão r = -3.
- (2, 2, 2, 2, 2,...) é uma PA de razão r = 0.

Notação

Assim como para uma sequência qualquer, usa-se algumas representações para os termos de uma PA. Para a sequência de números que obedecem a uma progressão aritmética, usa-se a indicação (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n), em que:

a_1= primeiro termo.

r = razão.

n = número de termos (se for uma PA finita).

a_n = último termo, termo geral ou n-ésimo termo.

Exemplo:

PA (5, 9, 13, 17, 21, 25).

$a_1 = 5$.

$r = 4$.

$n = 6$.

$a_n = a_6 = 25$.

Classificação

Quanto a razão:

- (5, 10, 15, 20, 25, 30) é uma PA de razão r = 5.

  Toda PA de razão positiva (r > 0) é crescente.

- (12, 9, 6, 3, 0, -3) é uma PA de razão r = -3.

  Toda PA de razão negativa (r < 0) é decrescente.

- (2, 2, 2, 2, 2,...) é uma PA de razão r = 0.

  Toda PA de razão nula (r = 0) é constante ou estacionária.

Quanto ao número de termos:

- (5, 15, 25, 35, 45, 55) é uma PA de 6 termos e razão r = 10.

  Toda PA de número de termos finito é limitada.

- (12, 10, 8, 6, 4, 2,...) é uma PA de infinitos termos e razão r = -2.

  Toda PA de número de termos infinito é ilimitada.

PROPRIEDADES E CLASSIFICAÇÃO DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Propriedades são características, particularidades que se verificam em alguma coisa, nesse caso, na progressão aritmética. Elas precisam ser destacadas, pois auxiliam no entendimento e aplicações desse conteúdo.

TRÊS TERMOS CONSECUTIVOS

Em uma PA, qualquer termo, a partir do segundo, é a média aritmética do seu antecessor e do seu sucessor, isto é, seja a PA (a1, a2, a3), temos que $\frac{a_2 = a_1 + a_3}{2}$.

Exemplo:

Consideremos a PA (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28) e escolhamos três termos consecutivos quaisquer: 4, 8, 12 ou 8, 12, 16 ou ... 20, 24, 28.

Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética dos outros dois termos:

$$\frac{4+12}{2} = 8, \frac{8+16}{2} = 12, \ldots, = \frac{20+28}{2} = 24.$$

Exemplo:

Determine x para que a sequência (3, x+3, 15) seja uma PA.

Usando a propriedade mencionada acima, que é $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, temos:

$$x+3 = \frac{3+15}{2} \Rightarrow x+3 = 9 \Rightarrow x = 6.$$

Logo a sequência será (3, 9, 15).

Exemplo:

Determinar x para que a sequência (3 + x, 5x ,2x + 11) seja uma PA.

Resolvendo a equação $5x = \dfrac{(3+x)+(2x+11)}{2} \Rightarrow 5x = \dfrac{3x+14}{2} \Rightarrow 10x = 3x+14$, que é igual a $10x - 3x = 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$

TERMO MÉDIO

Em uma PA qualquer de número ímpar de termos, o termo do meio (médio) é a média aritmética do primeiro termo e do último termo.

Exemplo:

Consideremos a PA (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21) e o termo médio é 12. Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética do primeiro e do último, $\dfrac{3+21}{2} = 12$.

REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA PA DE TRÊS TERMOS

Para a resolução de certos problemas (envolvendo soma ou produto dos termos da PA), é de grande utilidade representar uma PA nas seguintes formas: (x, x+r, x+2r) ou (x-r ,x, x+r) onde "r" e a razão da PA.

Exemplo.

Determinar a PA crescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 3 e que o produto vale –8.

Soma dos termos $x-r + x + x+r = 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Produto dos termos $(1- r).(1).(1+r) = -8 \Rightarrow 1 - r^2 = - 8 \Rightarrow 1 + 8 = r^2 \Rightarrow r^2 = 9$, ou seja, $r = 3$ ou $r = -3$.

Como a PA é crescente temos que $r = 3$, logo a PA será (-2,1,4).

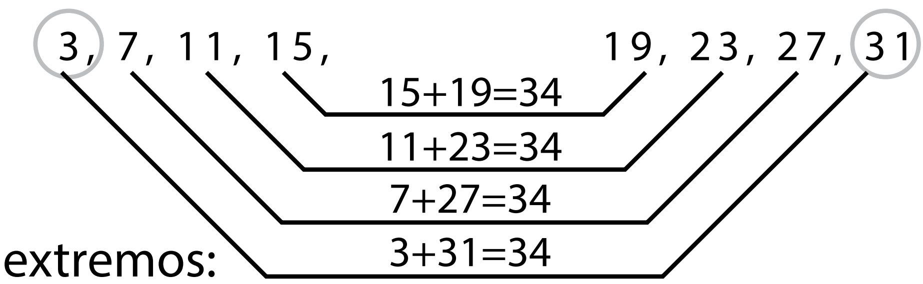
TERMOS EQUIDISTANTE

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA finita é igual à soma dos extremos.

Exemplo:

Consideremos a PA (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31).

$$\left.\begin{array}{l}7 \text{ e } 27\\ 11 \text{ e } 23\\ 15 \text{ e } 19\end{array}\right\}$$ são os termos eqüidistantes dos extremos 3 e 31.



TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma PA de razão r pode ser escrita como PA (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n).

Aplicando a definição de PA, podemos escrevê-la de outra forma:

PA(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1} ,a_n)

+ r + r + r + r + r

PA (a_1, a_1+ r, a_1+ 2r, a_1+ 3r, a_1+ 4r, ..., a_1+ (n-1)r).

Portanto o termo geral será:

$a_n = a_1 + (n-1)r$, para $n \in N^*$.

Exemplo:

Determine o quarto termo da PA (3, 9, 15,...).

Resolução: $a_1 = 3$ $a_2 = 9$ $r = a_2 - a_1 = 9 – 3 = 6$

Então: $a_4 = a_1 + r + r + r$ => $a_4 = a_1 + 3r$ => $a_4 = 3 + 3.6$ => $a_4 = 3 + 18$, logo $a_4 = 21$.

Exemplo.

Determine o oitavo termo da PA na qual $a_3 = 8$ e $r = -3$.

Resolução: $a_3 = 8$ $r = -3$

(a_1, ..., a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, ...).

Então: $a_8 = a3 + r + r + r + r + r$ => $a_8 = a_3 + 5r$ => $a_8 = 8 + 5.(-3)$

$a_8 = 8 – 15$ => $a_8 = - 7$.

Exemplo.

Interpole 3 meios aritméticos entre 2 e 18.

Resolução:

Devemos formar a PA (2, ____, ____, ____, 18), em que:

$a_1 = 2$,

$a_n = a_5 = 18$,

$n = 2 + 3 = 5$

Para interpolarmos os três termos, devemos determinar primeiramente a razão da PA. Então:

$a_5 = a_1 + r + r + r + r$, $a_5 = a_1 + 4r$.

Então: 18 = 2 + 4r, ou seja, 16 = 4r, r = 16/4. Assim, r = 4.

Logo, temos a PA (2, 6, 10, 14, 18).

Exemplo:

Em uma Progressão Aritmética, em que o primeiro termo é 23 e a razão é -6, qual a posição ocupada pelo elemento -13?

Temos que o primeiro termo $a_1 = 23$, a razão é r = -6, o último termo $a_n = -13$, o número de temos é n= ?

Substituindo na fórmula do termo geral an = a_1 + (n-1)r, tem-se:

-13 = 23 + (n - 1).(-6) que será -13 - 23 = -6n + 6 que é igual a -36 - 6 = -6n, -42 = -6n. Então 6n = 42 que resulta em n = 42/6, ou seja, n = 7.

Exemplo.

O valor de *x* para que a sequência (2x, x+1, 3x) seja uma PA é?

Como a sequência precisa ser uma PA, então, temos a seguinte situação $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, ou seja:

$$x+1-2x = 3x-(x+1) \Rightarrow -x+1 = 2x-1 \Rightarrow -x-2x = -1-1 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Consideremos a sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20). Trata-se de uma PA de razão 2. Suponhamos que se queira calcular a soma dos termos dessa sequência, isto é, a soma dos 10 termos da PA (2, 4, 6, 8, ..., 18, 20).

Poderíamos obter essa soma manualmente, ou seja:

2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110.

Se tivéssemos, no entanto, que somar 100, 200, 500 ou 1000 termos? Pelo processo anterior, seria muito demorado. Por isso, precisamos de um modo mais prático para somarmos os termos de uma PA. Na PA (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20) observe:

$a_1 + a_{10} = 2 + 20 = 22$, $a_2 + a_9 = 4 + 18 = 22$, $a_3 + a_8 = 6 + 16 = 22$,
$a_4 + a_7 = 8 + 14 = 22$, $a_5 + a_6 = 10 + 12 = 22$.

Note que a soma dos termos equidistantes, ou seja, com mesma distância dos extremos, é constante (sempre 22) e apareceu exatamente 5 vezes, metade do número de termos da PA, porque somamos os termos dois a dois. Logo, devemos ao invés de somarmos termo a termo, fazermos apenas 5 x 22 = 110, e assim, determinamos $S_{10} = 110$ (soma dos 10 termos).

E, agora, se fosse uma progressão de 100 termos como a PA (1, 2, 3, 4,...,100), como faríamos? Procederíamos do mesmo modo. A soma do a_1 com a_{100} vale 101 e essa soma vai se repetir 50 vezes (metade de 100), portanto $S_{100} = 101 \times 50 = 5050$.

Então, para calcular a soma dos n termos de uma PA, somamos o primeiro com o último termo e essa soma irá se repetir n/2 vezes. Assim, podemos escrever:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Em que:

S_n é a soma dos termos a ser calculada.

a_1 é o primeiro termo da PA.

a_n é o último termo da PA.

n é a quantidade de termos total a serem somados.

SAIBA **MAIS**

A equação para obter a soma dos termos de uma progressão aritmética foi desenvolvida por um garoto de 9 anos de idade por nome de Johann Carl Friedrich Gauss, por volta 1786, ao cursar os estudos inicias. Johann veio a ser um dos matemáticos mais conceituados até os dias de hoje, tendo diversos trabalhos na matemática, física e estatística.

Fonte: Amaral ([2016], on-line)[1].

Exemplo.

Calcule a soma dos 50 primeiros termos da PA (2, 6, 10, ...).

Resolução:

$a_1 = 2$

$r = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$

Para podemos achar a soma, devemos determinar o último termo, nesse caso, o a_{50}.

Assim:

$a_{50} = a_1 + 49r,$

$a_{50} = 2 + 49.4$

$a_{50} = 2 + 196$

$a_{50} = 198.$

Aplicando a fórmula temos:

$S_{50} = (a_1 + a_n) . n/2 = (2 + 198) . 50/2 = 200 . 25 = 5000.$

Exemplo:

Em uma prova de ciclismo, um ciclista percorre 20 km na primeira hora; 17 km na segunda hora e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

Resolução:

PA (20, 17, 14, ...)

$a_1 = 20$

$r = a_2 - a_1 = 17 - 20 = -3.$

Para podermos achar quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas, devemos somar os 5 primeiros termos da PA e, para isso, precisamos do a_5.

$a_5 = a_1 + 4r$

$a_5 = 20 + 4.-3$

$a_5 = 20 - 12$

$a_5 = 8.$

Aplicando a fórmula, temos:

$S_{50} = (a_1 + a_n) . n/2 = (20 + 8) . 5/2 = 14 . 5 = 70.$

Logo ele percorreu em 5 horas 70 km.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

É toda sequência de números reais ou complexos, em que cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante, constante esta que é denominada de razão.

Exemplos de sequências de números que estão em uma progressão geométrica:

1, 2, 4, 8, 16, 32, …, PG de razão 2.

5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, … PG de razão 1.

100, 50, 25, … PG de razão ½.

2, -6, 18, -54, 162, … PG de razão -3.

Os termos de uma progressão geométrica podem ser representados por:

$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$.

A razão de uma progressão geométrica é representada pela letra q e é obtida como $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, ou seja, a partir do segundo, a divisão entre qualquer termo, com seu anterior, é sempre igual a uma constante que representamos pela letra q.

Exemplo:

Na sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, …, temos uma PG de razão 2, pois $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$.

Já na sequência 100, 50, 25, …, temos uma PG de razão $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{50}{100} = \frac{1}{4}$.

Na sequência 2, -6, 18, -54, 162, …, temos uma PG de razão $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{2} = -3$.

PROPRIEDADES DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma progressão geométrica pode ser crescente, decrescente ou constantes. Uma PG será crescente quando os valores dos termos vão crescendo.

Exemplos.

a 1 > 0 e q > 1, por exemplo: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...).

a 1 < 0 e 0 < q < 1, por exemplo (-1, -1/2, -1/4, ...).

Será decrescente quando os valores dos termos vão decrescendo.

Exemplo:

a 1 > 0 e 0 < q < 1, por exemplo: (64, 32, 16, 8, ...)

a 1 < 0 e q > 1, por exemplo: (-2, -4, -8, ...)

Será constante quando os termos são iguais, ou seja, a razão é igual a q = 1. Por exemplo:

(5, 5, 5, 5, ..., 5).

Temos também a PG chamada de oscilante. É uma PG em que seus termos intercalam em negativos e positivos, ou seja, que $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplo: (2,-8,32,-128, ...).

E a PG quase nula, em que o 1º elemento é diferente de zero e os outros todos são nulos.

Por exemplo: (2,0,0,0,0,0, ...).

TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Para calcularmos qualquer termo de uma PG, usamos a fórmula seguinte:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que:

a_n representa o termo procurado.

a_1 representa o primeiro termo da PG

n representa o número de termos.

q representa a razão da PG

Exemplo:

Em uma progressão geométrica, temos que o 1º termo equivale a 4 e a razão igual a 3. Determine o 8º termo dessa PG

Usando o termo geral da PG, temos.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_8 = 4 \cdot 3^{8-1} \Rightarrow a_8 = 4 \cdot 3^7 \Rightarrow a_8 = 8748$.

Assim, o 8º termo da PG descrita é o número 8748.

Exemplo:

Dada a PG (3, 9, 27, 81, ...), determine o 20º termo.

A razão será $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Substituindo no termo geral da PG, tem-se:

$a_{20} = 3 \,.\, 3^{20-1} \Rightarrow a_{20} = 3 \,.\, 3^{19} \Rightarrow a_{20} = 3^{20}$. Perceba que, nessa PG, o primeiro termo, também é igual a razão, ou seja, ambos valem 3.

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA FINITA

A soma dos n-primeiros termos de PG finita é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Ou quando temos o último termo, usa-se, também, a fórmula:

$$S_n = \frac{a_n \,.\, q - a_1}{q - 1}$$

Exemplo:

Calcular a soma dos 10 primeiros termos da PG (3; 6; ...).

Nesse caso, usamos a equação $\frac{S_n = a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, em que o primeiro termo é igual 3, o número de termos é 10 e a razão $q = \frac{6}{3} = 2$. Logo:

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{1} = 3069.$$

Exemplo.

Qual é a quantidade de elementos da PG finita (1, 2, 4, ...), sabendo que a soma dos termos dessa PG é 1023?

Vamos usar a equação $\frac{S_n = a_1(q^n - 1)}{q - 1}$. A razão da PG será $q = \frac{2}{1} = 2$. O primeiro termo vale 1, o número de termos será n, termo a ser encontrado e a soma é 1023.

Substituindo as informações na equação, teremos:

$$1023 = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 1023 = 2^n - 1 \Rightarrow 1024 = 2^n \Rightarrow n = 10.$$

Assim, a PG (1, 2, 4, ...) tem 10 elementos, sendo a soma desses 10 elementos igual a 1023.

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA INFINITA

A soma dos termos de uma PG infinita é quando a PG tem razão maior que -1 e menor que 1, ou seja, -1 < q < 1. Essa soma será calculada por:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exemplo:

Determine a soma dos termos $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

Temos uma PG de razão $q = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$. O primeiro termo sendo 1. Como a razão é maior que -1 e menor que 1, nesse caso, $\frac{1}{3}$, a soma será calculada pela equação $S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Substituindo os dados, temos:

$$S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Exemplo:

Resolva a equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \ldots = 20.$

Temos uma sequência em que os termos estão em uma PG com razão $\frac{1}{2}$, pois $q = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} . \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. O primeiro termo é x e a soma deles é 20. Substituindo na equação para somar os termos de uma PG infinita $S_n = \frac{a_1}{1-q}$, teremos:

$$20 = \frac{x}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow 20 = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 20.\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10.$$

Logo, a sequência $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \ldots = 20$ tem 10 termos.

SAIBA **MAIS**

Conheça no link a seguir um jogo com abordagem em progressão aritmética e geométrica. O jogo requer um raciocínio rápido do jogador, afim de que o mesmo possa descobrir a tempo se a razão que está envolvida na dinâmica do jogo é uma razão de progressão aritmética ou geométrica.

Disponível em: <http://www.loa.sead.ufscar.br/invasaohacker.php>.

Fonte: os autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Caro(a) aluno(a), nesta unidade, vimos no que se refere uma sequência numérica, suas características, seus comportamentos, os padrões que fazem com uma sequência de números ou termos se torne especial por uma ou outra característica.

Foi visto, também, quando que uma sequência é classificada como progressão aritmética e quando se classifica em progressão geométrica.

Ao abordar sobre sequências, visto as suas características, surgem consequências particulares das mesmas, consequências mencionadas como propriedades, termo geral, somas dos termos.

Essas características fazem com que se possa, por meio dos padrões existentes na sequência, determinar um termo em especial dela, ou a soma de todos os seus termos ou a soma de partes dos termos que se queira obter.

Fazer a análise dos padrões que existem entre uma série de números, ajuda perceber que, quando se está em meios aplicados, é possível ter situações que seguem determinado padrão e, assim, obter regularidades que podem ser expressas por um modelo, que com maior ou menor precisão, caracteriza, representa a dada sequência.

As observações de padrões em números, em termos, se fazem de longas datas. Estudiosos de séculos anteriores dedicaram muito esforço e muito tempo para descobrir, observar regularidades entre os números, entre as sequências. Essas regularidades hoje proporciona a humanidade estudos e aplicações com bastante eficiência dos conhecimentos desenvolvidos.

O simples fato de estudar as sequências no ensino básico, em que, muitas vezes, as sequências são apresentadas sem uma aplicação direta, já proporciona, ao estudante, refletir que, por mais que uma sequência possa parecer aleatória, com um olhar mais aguçado, é possível existir padrões que podem caracterizar de modo especial a sequência observada. Isso deixa uma reflexão de que não se deve subestimar alguma coisa, apenas por uma visão imediatista, uma impressão inicial do que está aos olhos. Na matemática, é preciso ter uma sensibilidade para que se consiga perceber comportamentos que existem, porém, muitas vezes, estão implícitos ao contato inicial e superficial aos sentidos.

ATIVIDADES

1. Todos os anos, uma fábrica aumenta a produção em uma quantidade constante. No 5º ano de funcionamento, ela produziu 1.460 peças e, no 8º ano, 1.940. Quantas peças ela produziu no 1º ano de funcionamento?

2. No acostamento de uma estrada, existem dois telefones para pedidos de socorro mecânico: um no km 51 e outro no km 117. Entre eles, serão colocados mais 10 telefones, de modo que entre um e o seguinte se tenha sempre a mesma distância. Determine de quantos em quantos quilômetros ficarão os novos telefones?

3. Em uma prova, um ciclista percorre 20 km na primeira hora, 17 km na segunda hora e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas de treino?

4. Seu Juca resolveu dar a seu filho Riquinho uma mesada de R$300,00 por mês. Riquinho, que é muito esperto, disse a seu pai que, em vez da mesada de R$300,00, gostaria de receber um pouquinho a cada dia: R$1,00 no primeiro dia de cada mês e, a cada dia, R$1,00 a mais que no dia anterior. Seu Juca concordou, mas, ao final do primeiro mês, logo percebeu que havia saído no prejuízo. Calcule quanto, em um mês com 30 dias, Riquinho receberá a mais do que receberia com a mesada de R$300,00.

5. Em um leilão, os lances foram revezados entre o Sr. Moura e o Sr. Lopes, variando sempre em R$ 120,00. O 10° lance foi dado pelo Sr. Lopes no valor de R$ 1600,00. Devemos descobrir quem deu o primeiro lance e o seu valor.

6. Em uma coleta feita entre alunos de uma escola, foram arrecadados R$ 1650,00. O primeiro aluno doou R$ 35,00, o 2° doou R$ 40,00, o 3° R$ 45,00 e assim por diante. Quantos alunos fizeram a doação?

7. Em janeiro, depositei R$ 100,00 em um banco, em fevereiro, R$ 200,00, em março, R$ 300,00 e assim sucessivamente sem falhar nenhum mês. Quanto terei depositado após 4 anos se mantiver esse mesmo procedimento?

8. Uma cultura de certa bactéria, mantida sob determinadas condições, triplica a cada dia que passa. Se o volume inicial dessa cultura é de 5 cm^3, determine quantos dias passarão para essa bactéria atingir um volume de 405 cm^3.

9. Uma bola é atirada de uma altura de 200 m. Ao atingir o solo pela primeira vez, ela sobe até a uma altura de 100 m, cai e atinge o solo pela segunda vez, subindo até a uma altura de 50 m e assim sucessivamente até perder a energia e cessar o movimento. Quantos metros a bola percorre ao todo?

10. Uma moça seria contratada como balconista para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O patrão ofereceu R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A moça recusou o trabalho. Se ela tivesse aceito a oferta, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho?

HIPERTENSÃO ARTERIAL E CONSUMO DE SAL EM POPULAÇÃO URBANA

Vários estudos populacionais evidenciam a importância do controle da hipertensão para a redução da morbimortalidade cardiovascular. Dessa forma, as elevadas taxas de morbimortalidade cardiovascular em países de industrialização recente parecem depender de modo importante da elevada prevalência de hipertensão arterial nesses países. Apesar de não se dispor de estudos com boa representatividade em nível nacional sobre a hipertensão arterial no Brasil, pesquisas localizadas mostram prevalências elevadas, situando-se no patamar de 20 a 45% da população adulta.

Na maioria dos casos, desconhece-se a causa da hipertensão arterial. Porém vários são os fatores que podem estar associados à elevação da pressão arterial como o sedentarismo, o estresse, o tabagismo, o envelhecimento, a história familiar, a raça, o gênero, o peso e os fatores dietéticos.

Dentre os fatores nutricionais estudados, e que se associam à alta prevalência de hipertensão arterial, estão o elevado consumo de álcool e sódio e excesso de peso. Recentemente, vêm sendo, também, associados o consumo de potássio, cálcio e magnésio, os quais atenuariam o progressivo aumento dos níveis pressóricos com a idade.

O hábito de consumir em excesso o sal no alimentos diários faz com que maximize a chance de uma variação elevada da pressão arterial. Pesquisas apontam que a regularidade com que as pessoas ingerem o sal nos alimentos diários, combinados com falta de atividade física, faz com que uma quantidade de sal que parece ser desprezível, sem ser prejudicial a saúde, seja com os passar do tempo, um dos principais fatores que contribui para elevar a pressão arterial.

É uma característica que possui uma sequência. Uma situação pequena observada individualmente, quando comparada em sequência proporciona valores que acumulados fazem a diferença, ou seja, um pouquinho de sal na alimentação durante o dia, com o passar dos anos acaba acarretando uma quantidade considerável e prejudicial a saúde.

Fonte: Molina et al. (2003, on-line).

MATERIAL COMPLEMENTAR

NA WEB

Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações.
Esse trabalho tem a intenção de ajudar a compreender as progressões. Conhecendo os processos geniais que ao longo da história tantos homens encontraram para enfrentar os problemas do dia a dia.
Disponível em: <http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/112008-08-23-19-28-11.pdf>.

REFERÊNCIAS

MOLINA, M. C. B.; CUNHA, R. S.; HERKENHOFF, L. F.; MILL, J. G. Hipertensão arterial e consumo de sal em população urbana. **Rev. Saúde Pública** [online]. 2003, vol.37, n.6, pp.743-750. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0034-89102003000600009&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acessado em: 07 SET. 2016.

Referência On-line#

[1] Em: <http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/gauss.htm>. Acesso em: 16 ago. 2016.

GABARITO

1. 820 peças.
2. 6 em 6 km.
3. 70 km.
4. 165 a mais.
5. Primeiro lance foi dado pelo Sr. Moura no valor de R$ 520,00.
6. 20 alunos.
7. 117.600.
8. 4 dias.
9. 600 metros.
10. R$ 4095,00.

Professora Me. Ivnna Gurniski De Oliveira
Professora Me. Renata Cristina de Souza
Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR

UNIDADE

V

Objetivos de Aprendizagem

- Entender os conceitos, definições e propriedades de Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares.
- Compreender as operações entre Matrizes.
- Compreender o que significa um Determinante de uma Matriz.
- Como calcular o determinante de uma matriz de ordem 2 ou ordem 3.
- Como fazer a representação de um sistema linear na forma matricial.
- Como obter as soluções de uma sistema linear.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Matrizes
- Operações com matrizes
- Determinante
- Equação Linear
- Sistemas Lineares

INTRODUÇÃO

Caro(a) aluno(a), quando se estuda matemática, existe um leque vasto de conteúdo a serem explorados. Dentre tais conteúdos, em grande destaque devido a sua grande aplicação, é a Álgebra Linear.

A Álgebra Linear abrange outros vários conteúdos, como, por exemplo, matrizes, determinantes, sistemas lineares, vetores que se relaciona entre si e são muito ùteis para representar informações, assim como possibilitam cálculos, em que tais cálculos expressam resultados importantes nos meios em que estão inseridos.

Neste nosso estudo, serão abordados os tópicos referentes a matrizes, determinantes e sistemas lineares. Esses conteúdos são abordados no Ensino Médio e retomados em vários cursos no Ensino Superior. Tal abordagem se faz necessária devido à importância e à aplicabilidade das teorias presentes em tais tópicos.

Por exemplo, para um engenheiro mecânico obter a frequência natural do eixo traseiro de um automóvel, devido ao fato de haver várias variáveis a serem testadas, faz-se necessária a utilização de um método chamado de Método das Matrizes de Transferência. Por sua vez, um engenheiro civil, ao desenvolver o projeto de uma estrutura composta por vigas metálicas, exige a resolução de um sistema de equações lineares, já um administrador, ao fazer uma pesquisa operacional, precisa da teoria das matrizes e os sistemas lineares para o trabalho de sua pesquisa. Esses são alguns exemplos do uso da Álgebra Linear em áreas aplicadas, porém existem outros inúmeros casos de tais aplicações.

Dessa maneira, faremos, neste estudo, uma abordagem que consta de definições, operações, propriedades e resoluções envolvendo matrizes, determinantes e sistemas lineares, a fim de relembrar conhecimentos já adquiridos, e também adentrar um pouco mais nesses conteúdos para possibilitar um amadurecimento que possa proporcionar o uso desses conteúdos em situações aplicadas em outras áreas de estudos. Vamos lá!

MATRIZES

Aluno(a), neste capítulo, vamos começar com a abordagem de matrizes, tópico essencial da matemática, que possui vasta aplicação na mais diversas áreas da ciência.

O que é uma matriz?

As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em quase todos os ramos da ciência e da engenharia. Várias operações realizadas por computadores são através de matrizes. Vejamos um exemplo. Considere a tabela a seguir que apresenta o peso, a idade e a altura de 5 pessoas.

Tabela 1- Pesos e altura de algumas pessoas

NOME	PESO (KG)	IDADE (ANOS)	ALTURA (M)
Ricardo	70	23	1,70
José	60	42	1,60
João	55	21	1,65
Pedro	50	18	1,72
Augusto	66	30	1,68

Fonte: os autores

O conjunto ordenado dos números que formam a tabela é denominado matriz e cada número é chamado elemento da matriz.

$$\begin{bmatrix} 70 & 23 & 1{,}70 \\ 60 & 42 & 1{,}60 \\ 55 & 21 & 1{,}65 \\ 50 & 18 & 1{,}72 \\ 66 & 30 & 1{,}68 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 70 & 23 & 1{,}70 \\ 60 & 42 & 1{,}60 \\ 55 & 21 & 1{,}65 \\ 50 & 18 & 1{,}72 \\ 66 & 30 & 1{,}68 \end{pmatrix}$$

Nesse exemplo, temos uma matriz de ordem 5 x 3 (lê-se: cinco por três), isto é, uma matriz formada por 5 linhas e 3 colunas. Representa-se uma matriz colocando-se seus elementos entre parênteses ou entre colchetes.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$: matriz de ordem 2 x 3 (2 linhas e 3 colunas).

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$: matriz de ordem 1 x 3 (1 linha e 3 colunas).

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$: matriz de ordem 2 x 1 (2 linhas e 1 coluna).

REFLITA

As matrizes estão presentes bem mais em nosso dia a dia do imaginamos. Ao fazer o estudo de matrizes, percebe-se que informações, representadas em tabelas, são, na verdade, matrizes. Pense, reflita e relacione um caso muito presente em nosso dia a dia em que as matrizes estão sempre sendo usadas.

REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Utilizamos letras maiúsculas para indicar matrizes genéricas e letras minúsculas correspondentes para os elementos. Algebricamente, uma matriz pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \text{L} & a_{mn} \end{bmatrix} \mathit{commen} \in \mathrm{N}^*$$

Pode-se abreviadamente representar a matriz anterior por $A = (a_{ij})_{n} \text{ x }_{m}$

a_{ij} = i – linha

j – coluna

a_{42} = 18 (lê-se: a quatro dois é igual a dezoito).

(na tabela significa a idade de Pedro 18).

Exemplo: encontrar os elementos da matriz A = (aij)3 x 2 em que aij = 3i – j.

Resolução: a representação genérica da matriz é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$a_{ij} = 3i - j$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\ a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \\ a_{21} = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ a_{22} = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \\ a_{31} = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \\ a_{32} = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \end{array}\right. \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

MATRIZ QUADRADA

Se o número de linhas de uma matriz for igual ao número de colunas, a matriz é dita quadrada.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Observações:

1ª) Quando todos os elementos de uma matriz forem iguais a zero, dizemos que é uma matriz nula.

2ª) Os elementos de uma matriz quadrada, em que i = j, formam uma diagonal denominada diagonal principal. A outra diagonal é chamada diagonal secundária.

Exemplo:

Matriz unidade ou matriz identidade.

A matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0, é denominada matriz unidade ou matriz identidade. Representa-se a matriz unidade por I_n.

Exemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPOSTA

Se A é uma matriz de ordem m x n, denominamos transposta de A a matriz de ordem n x m obtida pela troca ordenada das linhas pelas colunas. Representa-se a matriz transposta de A por A^t.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ a sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

IGUALDADE DE MATRIZES

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem. Se cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B, as matrizes A e B são ditas iguais.

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn} \qquad B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{mxn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

Exemplo: dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 1 \end{pmatrix}$, calcular x e y para que A =B.

Resolução:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=10 \end{cases}$$

$$4x=12$$

$$x=3 \Rightarrow 3+y=2 \Rightarrow y=2-3 \Rightarrow y=-1$$

$$Solução:\ x=3\ e\ \ y=-1.$$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Adição e subtração: a adição e a subtração de duas matrizes do mesmo tipo são efetuadas somando-se ou subtraindo-se os seus elementos correspondentes.
Exemplo:

$$C = A + B$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} sen^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matriz oposta: denomina-se matriz oposta de uma matriz A a matriz – A cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes de A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

Comutativa: A + B = B + A.
Associativa: A + (B + C) = (A + B) +C.
Elemento Neutro: A + 0 = A.
Elemento Oposto: A + (-A) = 0.

Exemplo: dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$.

b. $A - B^t - C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$.

Exemplo: dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \; e \, B = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular a matriz X tal que $X - A + B = 0$.

O segundo membro da equação é uma matriz nula de ordem 3 x 1.

Se $X - A + B = 0 \Rightarrow X = A - B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Para multiplicar um número real por uma matriz, multiplicamos o número por todos os elementos da matriz e o resultado é uma matriz do mesmo tipo.

A = (a_{ij})

K = número real

K por A

B = (b_{ij}), onde, b_{ij} = K.a_{ij}

i ∈{1, 2, ... , m}

j ∈{1, 2, ... , n}.

Exemplo:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a. $2X + A - B = 0$

$$2X = +(-A) + B \Leftrightarrow X = \frac{B + (-A)}{2}$$

$$X = \frac{1}{2}.\left\{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & /2 & 1/2 \\ -3/2 & 3 & -5/2 \end{bmatrix}$$

b. $3X - 2A + B = 0$

$$3X = 2A + (-B) \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}.[2A + (-B)]$$

$$X = \frac{1}{3}.\left\{\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{3}.\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & -11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ 1 & -11/3 & 3 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Não é uma operação tão simples como as anteriores; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Vejamos a seguinte situação.

Durante a 1ª fase da Copa do Mundo de 1998 (França), o grupo do Brasil era formado, também, pela Escócia, Marrocos e Noruega. Os resultados estão registrados a seguir em uma matriz A, de ordem 4 x 3.

PAÍS	VITÓRIA	EMPATE	DERROTA
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Então: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

A pontuação pode ser descrita pela matriz B, de ordem 3 x 1

NÚMERO DE PONTOS	
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Então: $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Terminada a 1ª fase, a pontuação é obtida com o total de pontos feitos por cada país. Essa pontuação pode ser registrada em uma matriz que é representada por AB (produto de A por B). Veja como é obtida a classificação:

$$\begin{aligned} &Brasil: 2\cdot 3+0\cdot 1+1\cdot 0=6 \\ &Escócia: 0\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 0=1 \\ &Marrocos: 1\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 0=4 \\ &Noruega: 1\cdot 3+2\cdot 1+0\cdot 0=5 \end{aligned} \qquad AB=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esse exemplo sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes:

$$A_{4x3}\cdot B_{3x1}=AB_{4x1}$$

Observe que definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas de A for igual ao de linhas de B; além disso, notamos que o produto AB possui o número de linhas de A e o número de colunas de B.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=AB_{\ m\times p}$$

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} \text{ e } B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

A matriz existe se n = p (o número de coluna de A é igual o número de linha da B).

$$C=\begin{pmatrix} 1.(2)+2.(-1)+1.(2) & 1.(3)+2(4)+1.(-1) \\ 2.(2)+3.(-1)-2.(2) & 2.(3)+3.(4)-2.(-1) \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -3 & 20 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

MATRIZ TRANSPOSTA

Seja A uma matriz m x n. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se A^t) a matriz n x m cujas linhas são ordenadamente, as colunas de A.

Exemplos.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 10 & -1\\ 0 & -2 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 10 & -2\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

MATRIZ SIMÉTRICA

Quando A = A^t dizemos que A é matriz simétrica.
Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 8 & -9\end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 8 & -9\end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTISSIMÉTRICA

Quando A = - A^t dizemos que A é matriz antissimétrica.
Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & -5\\ -4 & 0 & 8\\ 5 & -8 & 0\end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix}0 & -4 & 5\\ 4 & 0 & -8\\ -5 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se X é uma matriz tal que AX = I_n e XA = I_n, então, X é denominada matriz inversa de A e é indicada por A^{-1}. Quando existe a matriz inversa de A, dizemos que A é uma matriz inversível ou não singular.

Exemplo: verifique se existe e, em caso afirmativo, determine a matriz inversa

de A = $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução: Pela definição temos,

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5a+8c & 5b+8d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas

$$\begin{cases} 5a+8c=1 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow a=-3 \ e \ c=2$$

$$\begin{cases} 5b+8d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow b=8 \ e \ d=-5.$$

Então X = $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, para AX = I_2.

A seguir verificamos se XA = I_2.

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3.5+8.2 & -3.8+8.3 \\ 2.5+-5.2 & 2.8+-5.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

DETERMINANTE

Determinante é uma função que se associa a um determinado número a uma matriz quadrada.

Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem.

Dada a matriz de 2ª ordem $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, chama-se determinante associado à matriz A (ou determinante de 2ª ordem) o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Então, determinante de $A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Indica-se $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Observação: dada a matriz A de ordem 1, define-se como determinante de A o seu próprio elemento, isto é:

$\det A = |A| = a_{11}$.

<u>*Exemplo:*</u> $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2x2}$

$\det A = 2.1 - 3.4 = 2 - 12$

$\det A = -10$.

SAIBA **MAIS**

O estudo das matrizes e dos determinantes surgiu com o estudo de sistemas lineares. Um dos registros mais antigos dos sistemas de equações lineares são as tabuletas de argila dos babilônios que datam de 300 A. C. Na China, entre 200 a.C. e 100 a.C., foi publicado o livro Nove Capítulos sobre a Arte Matemática. Neste texto, assim como nas tabuletas da Babilônia, aparecem problemas envolvendo sistemas de equações lineares.

Fonte: Sá ([2016], on-line)[1].

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEM 3, REGRA DE SARRUS

Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$, repetimos as duas primeiras colunas à direita e efetuamos as seis multiplicações em diagonal. Os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal. Os produtos obtidos da diagonal secundária mudam de sinal. O determinante é a soma dos valores obtidos.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2\end{vmatrix}\Leftrightarrow \det A=(1\cdot1\cdot1)+(2\cdot0\cdot4)+(3\cdot2\cdot2)-(3\cdot1\cdot4)-(1\cdot0\cdot2)-(2\cdot2\cdot1)=$$

$$=1+0+12-12-0-4=-3.$$

Logo, o determinante da matriz é -3.

MENOR COMPLEMENTAR

O menor complementar D_{ij} do elemento a_{ij} da matriz quadrada A é o determinante que se obtém de A, eliminando–se dela a linha "i" e a coluna "j", ou seja, eliminando a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij} considerado.

Exemplo:

Dada a matriz $A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}$, calcular D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, e D_{32}.

Resolução:

$$D_{11}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1+8=9 \qquad D_{12}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-20 \qquad D_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-5$$

$$D_{21}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1+6=5 \qquad D_{32}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}=8.$$

COFATOR

Consideremos a matriz quadrada de 3ª ordem A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Chama-se Cofator do elemento a_{ij} da matriz quadrada o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij} e que é representado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, D_{ij}$.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular:

a) A_{11} b) A_{13} c) A_{32}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-14) = -14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (28) = 28$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6+8) = -14.$$

DEFINIÇÃO DE LAPLACE

O determinante associado a uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$ é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) qualquer pelos respectivos cofatores.

Exemplo:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 3, podemos calcular o det A a partir de determinantes de ordem 2 e da definição de Laplace.

Escolhendo os elementos da primeira linha, temos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-15) + (-1) \cdot 18 = -12 + 45 - 18 = 15.$$

Logo o determinante da matriz A é igual a 15.

Observação: para se aplicar esse método, é melhor escolher a linha ou coluna que tiver o maior número de zeros.

EQUAÇÃO LINEAR

Antes de adentrar diretamente ao sistemas lineares, vamos especificar um pouco sobre equação linear, pois as equações lineares são equações que compõe um sistemas linear.

Toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é denominada equação linear, em que:

$a_1, {}_2, ... a_n$ são coeficientes.

$x_1, x_2, ... x_n$ são as incógnitas.

b é um termo independente.

Exemplos:

a. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5$ é uma equação linear de três incógnitas.

b. $x + y - z + t = -1$ é uma equação linear de quatro incógnitas.

Observações:

1º) Quando o termo independente b for igual a zero, a equação linear denomina-se equação linear homogênea. Por exemplo: $5x + y = 0$.

2º) Uma equação linear não apresenta termos da forma x_1^2, $x_1.x_2$ etc., isto é, cada termo da equação tem uma única incógnita, cujo expoente é sempre 1.

As equações $3x_1^2$, $2x_2 = -3$ e $4x.y + z = \sqrt{2}$ não são lineares.

3º) A solução de uma equação linear a n incógnitas é a sequência de números reais ou ênupla (α_1, α_2, ...,α_n) que, colocados respectivamente no lugar de x_1, x_2, ... x_n tornam verdadeira a igualdade dada.

4º) Uma solução evidente da equação linear homogênea $3x + y = 0$ é a dupla (0,0).

Exemplos:

Dada a equação linear $4x - y + z = 2$, encontrar uma de suas soluções.

Resolução: vamos atribuir valores arbitrários a x e y e obter o valor de z.

$$\begin{matrix} x = 2 & & 2 \,.\, 4 - 0 + z = 2 \\ & \Rightarrow & \\ y = 0 & & z = -6 \end{matrix}$$

Resposta: uma das soluções é a tripla ordenada (2, 0, -6).

SISTEMAS LINEARES

Denomina-se sistema linear de m equações nas n incógnitas x_1, x_2, ... x_n todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \rightarrow a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n \text{ são números reais.}$$

Se o conjunto ordenado de números reais (α_1, α_2, ...,α_n) satisfizer a todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

Observações:

1ª) Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, o sistema linear será dito homogêneo. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

Uma solução evidente do sistema linear homogêneo é $x = y = z = 0$.

Essa solução chama-se solução trivial do sistema homogêneo. Se o sistema homogêneo, admitir outra solução em que as incógnitas não são todas nulas, a solução será chamada solução não trivial.

2ª) Se dois sistemas lineares, S_1 e S_2, admitem a mesma solução, eles são ditos sistemas equivalentes. Veja o exemplo:

$$S_1 : \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1,-2)\}$$

$$S_2 : \begin{cases} 3x + \dfrac{y}{2} = 2 \\ \dfrac{-x + y}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1,-2)\}.$$

Como os sistemas admitem a mesma solução {(1, -2)}, S_1 e S_2 são equivalentes.

EXPRESSÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Dentre suas variadas aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de um sistema de equações lineares.

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_2\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_m\ x_n = b_n \end{cases}$$

Utilizando matrizes, podemos representar este sistema da seguinte forma:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz constituída} \\ \text{pelos coeficientes} \\ \text{das incógnitas}}}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_m \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz coluna} \\ \text{constituída pelas} \\ \text{incógnitas}}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz coluna} \\ \text{dos termos} \\ \text{independentes}}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

Observe que, se você efetuar a multiplicação das matrizes indicadas, irá obter o sistema dado.

Se a matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas for quadrada, o seu determinante é dito determinante do sistema.

Exemplo:

Seja o sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

Ele pode ser representado por meio de matrizes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Os sistemas lineares são classificados, quanto ao número de soluções, da seguinte forma:

SISTEMA LINEAR
- POSSÍVEL OU COMPATÍVEL quando admite solução
  - DETERMINADO Admite uma única solução
  - INDETERMINADO Admite infinitas soluções
- IMPOSSÍVEL OU INCOMPATÍVEL quando não admite solução

REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer consiste em um método para se resolver um sistema linear.

$$\text{Seja o sistema : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Vamos determinar a matriz A dos coeficientes das incógnitas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vamos determinar, agora, a matriz A_{x1}, que se obtém a partir da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_1 pela coluna dos termos independentes.

$$A_{x1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ b_n & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer: $x_1 = \dfrac{det\ A_{x1}}{det\ A}$.

De maneira análoga, podemos determinar os valores das demais incógnitas:

$$A_{x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & b_n & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = \frac{det\ A_{x2}}{det\ A}$$

$$A_{xn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_n = \frac{det\ A_{xn}}{det\ A}.$$

Vejamos alguns exemplos.

1º Exemplo: resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$

Resolução: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A = 11$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_1 = 33$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_2 = -11$$

$$x = \frac{det\ A_1}{det\ A} = \frac{33}{11} = 3 \qquad y = \frac{det\ A_2}{det\ A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Resposta: $S = \{(3,-1)\}$.

2º Exemplo: resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$

Resolução: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A = 0$

$$A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_x = -7$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_y = 7$$

$$x = \frac{det\ A_x}{det\ A} = \frac{-7}{0} \text{ impossível} \qquad y = \frac{det\ A_y}{det\ A} = \frac{7}{0} \text{ impossível}$$

Resposta: $S = \phi$.

3º Exemplo: resolver o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Resolução:

1º) Cálculo do determinante da matriz incompleta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -4 + 10 - 3 - 4 - 5 - 6 = -12.$$

2º) Cálculo do determinante das incógnitas.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_1 = 0 + 10 - 10 - 4 + 0 - 20 = -24$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ A_2 = 10 + 0 - 3 + 10 - 5 + 0 = 12$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_3 = -4 + 20 + 0 + 0 - 10 - 6 = 0.$$

3º) Cálculo das incógnitas.

$$x_1 = \frac{det\ A_1}{det\ A} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$x_2 = \frac{det\ A_2}{det\ A} = \frac{12}{-12} = -1$$

$$x_3 = \frac{det\ A_3}{det\ A} = \frac{0}{-12} = 0$$

Resposta: $S = \{(2,-1,0)\}$.

ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA LINEAR

Considerando um sistema genérico m x n, dizemos que ele está escalonado quando os coeficientes a_{ij}, com i > j , são todos nulos.

Exemplos:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ \quad 3y + 2z = 1 \\ \qquad\quad 4z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + 7z = 11 \\ \qquad 4y + 5z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z + t = 9 \\ \qquad\quad 4z + 5t = 10 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR POR ESCALONAMENTO

Para escalonar um sistema linear e depois classificá-lo e resolvê-lo, alguns procedimentos podem ser feitos:

1º Eliminamos uma equação que tenha todos os coeficientes e o termo independente nulos. Por exemplo: 0x + 0y + 0z = 0 pode ser eliminada, pois todos os termos de números reais são soluções.

2º Podemos trocar a posição das equações. Exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

3º Podemos multiplicar todos os termos de uma equação pelo mesmo número real diferente de zero:

$$3x - y + z = 5 \Rightarrow 6x - 2y + 2z = 10$$

Podemos multiplicar os 2 membros de uma equação por um mesmo número real diferente de zero e somarmos aos membros correspondentes da outra equação. Regra de Chio de matrizes.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 7 & \cdot(-3) \\ 3x - 5y + 9z = 25 & \lrcorner + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ \qquad y - 3z = 4 \end{cases}$$

4º Se no processo de escalonamento obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente diferente de zero, esta equação é suficiente para afirmar que o sistema é impossível, isto é, S = $\varnothing$.

Exemplo 1:

$$\begin{cases} x+2y+z=7 & \cdot(-2) \quad \cdot 3 \\ 2x+7y+z=21 & \lrcorner + \quad \downarrow \\ -3x-5y+2z=-8 & \quad\quad \lrcorner + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=7 \\ 3y-z=7 \\ y+5z=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+5z=13 & \cdot(-3) \\ 3y-z=7 & \lrcorner + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+5z=13 \\ -16z=-32. \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é equivalente ao sistema dado. Podemos agora resolver:

$$z=\frac{32}{16}=2$$
$$y+5\cdot 2=13 \Rightarrow y=3$$
$$x+2\cdot 3+2=7 \Rightarrow x=-1$$

Sistema possível e determinado, com S = {(-1,3,2)}.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} x+2y-z=3 & \cdot(-3) \quad \cdot(-2) \\ 3x-y+z=1 & \lrcorner + \quad \downarrow \\ 2x+4y-2z=6 & \quad\quad \lrcorner + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -7y+4z=-8 \\ 0x+0y+0z=0 \ (eliminar) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ -7y+4z=-8 \end{cases}$$

Sistema possível e indeterminado (escalonado e 2 x 3). Variável livre: z.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Caro(a) aluno(a), a Álgebra Linear é um estudo de muita relação na área aplicada que envolve a matemática. Seja na engenharia, na área administrativa, financeira, na área médica, biológica, sempre os conteúdos de Álgebra Linear estão presentes auxiliando as aplicações. Neste capítulo, estudamos, dentre os tópicos da Álgebra Linear, as matrizes, determinantes e sistemas lineares, conteúdos inicias, que são as bases da álgebra linear e que são de grande utilização e importância em diversas áreas do conhecimento.

Representar os dados por meio de matrizes, assim como fazer as operações de informações representadas por matrizes, é uma das funções primordiais que está presente, por exemplo, na área da computação.

Outra situação é que, em muitos casos, é preciso representar as informações de uma matriz por meio de um único valor, então, surge a necessidade do conhecimento e uso de determinante de uma matriz, que possui a característica de operacionalizar e, também, simplificar as aplicações.

Já os sistemas lineares são um conjunto completo que envolve a relação de matrizes e incógnitas. Nessa relação, com o auxílio de procedimentos e técnicas, é possível conseguir solução, ou soluções sobre a relação existente entre a matrizes e as incógnitas.

É importante salientar que, ao estar trabalhando com a matemática aplicada, tem-se, necessariamente, a presença da computação para ajudar nas dinamizações, representações e soluções de problemas, uma vez que os conteúdos aqui mencionados tomam grandes proporções, grandes dimensões que, sem as contribuições da área computacional, torna-se quase impossível a obtenção de resultados que surgem da relação entre matemática e situações problemas, ou seja, a matemática e a computação fazendo-se presentes e uma auxiliando a outra na resolução de problemas aplicados em áreas afins.

ATIVIDADES

1. Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule 2M – 3N – P.

2. Calcule a matriz X, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $(X + A)^t = B$.

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine a e b, de modo que AB = I, em que I é a matriz identidade.

4. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $AB + B^t$.

5. A é uma matriz *m* x *n* e B é uma matriz *m* x *p*. A afirmação falsa é:
   a. A + B existe se, e somente se, $n = p$.
   b. $A = A^t$ implica $m = n$
   c. A.B existe se, e somente se, $n = p$.
   d. $A.B^t$ existe se, e somente se, $n = p$.
   e. $A^t.B$ sempre existe.

6. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 4-3x & 7-x \\ 0 & -10 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 1 & x-1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. O valor de x para que se tenha: A + BC = D é...?

ATIVIDADES

7. Calcule o determinante da matriz M = (AB). C, sendo $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Qual a solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & 5 \\ 2/3 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0$?

9. Sendo A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem 2 e a_{ij} = j – i^2, o determinante da matriz A é...?

10. A solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$ é...?

O USO DE ÁLGEBRA LINEAR E DA COMPUTAÇÃO EM RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

Em 1949, Wassily Leontief, professor de Harvard, cuidava de informações sobre a economia americana e possuía cartões contendo um resumo de mais de 250.000 itens produzidos pelo Departamento de Estatística dos EUA. Após dois anos intensos de trabalho, Leontief dividiu a economia americana em 500 "setores", como indústria automobilística, agricultura, comunicações e assim por diante. Para cada setor, ele escreveu uma equação linear de acordo com a sua produção, com o uso do Mark II, um dos maiores computadores da época, que, no entanto, não podia lidar com 500 equações e 500 incógnitas. Leontief precisou resumir em um sistema de 42 equações e 42 incógnitas, sendo que o Mark II levou 56 horas pra produzir uma solução.

Leontief ganhou o Prêmio Nobel de Economia, em 1973, e abriu a porta para uma nova era da modelagem matemática, pois, devido a uma enorme quantidade de dados envolvidos, os modelos são, geralmente, lineares, ou seja, são descritos por sistemas de equações lineares. A mesma solução produzida pelo Mark II por ser obtida pelo Matlab em poucos minutos, porque uma das características do Matlab é a sua extensibilidade, que permite que engenheiros, programadores, matemáticos cientistas, e até mesmo você, contribuam para o enriquecimento. Porém, conforme os ambientes informatizados, tornam-se mais ricos nos seus recursos, mais acessíveis e vão se tornando aos alunos ideias matemáticas significativas e profundas. Mas, na forma que se apresentam hoje, por si só, não garantem a construção do conhecimento.

Para que haja avanço no conhecimento matemático, é importante que o professor projete as atividades a serem desenvolvidas. Uma tarefa difícil é conciliar o que se julga importante a ser aprendido com a liberdade de ação do aluno perante um software. Assim, por exemplo, se o objetivo é o aprendizado da álgebra linear, atividades devem ser projetadas para tal. Não basta colocar a disposição do aluno um programa de construção em álgebra linear, o aluno certamente vai aprender alguma coisa. Mas a apropriação de ideias matemáticas significativas nem sempre acontecem de forma espontânea, mesmo nesses ambientes, e assim um trabalho de orientação por parte do professor se faz necessário.

Fonte: Nobre ([2016], on-line)[2].

MATERIAL COMPLEMENTAR

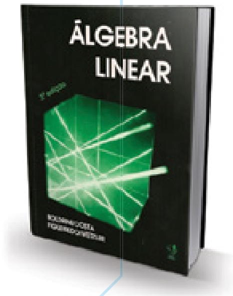
LIVRO

Álgebra Linear

José Luiz Boldrini; Sueli I. Rodriguez Costa; Vera Lucia Figueiredo; Henry G. Wetzler

Editora: Harbra Ltda

Sinopse: este livro aborda assuntos, matrizes, determinantes, sistemas lineares, e adentra a parte vetorial com suas propriedades, definições e aplicações. É livro de boa didática, linguagem bem acessível sobre os conteúdos e com ampla quantidade de exemplos e exercícios que possibilita a assimilação das teorias nele abordadas.



REFERÊNCIAS

Referências On-line

[1] Em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume5/Estudo_dos_Determinantes.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2016.

[2] Em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/22005/MarcelloNobreCardoso.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2016.

GABARITO

1. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 11 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a = -1; b = 0.

4. $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Letra C.

6. x = 2.

7. Zero.

8. $\frac{67}{9}$.

9. 3.

10. x = 1; y = 2; z = 3.

CONCLUSÃO

Prezado(a) aluno(a), este material foi feito para contribuir com seu processo de formação. Atualmente, as informações chegam a nós de forma rápida e não podemos deixar de pensar o quanto a Matemática é útil para quem precisa tomar decisões.

Nesse sentido, a Matemática aplicada aparece como suporte na compreensão dos fatos, dando base para o seu entendimento e compreensão adequada para eles. E este material tratou de alguns pontos importantes no ensino da Matemática aplicada assim como da Estatística.

Na unidade I, foram discutidas formas de apresentação dos dados estatísticos, mais especificamente a estruturação a interpretação e a construção de gráficos e tabelas, situações de muita utilidade e de muita importância no dia a dia de uma pessoa.

A unidade II tratou das medidas descritivas, mostrou como devemos calculá-las e em que situações devemos aplicá-las. Vimos as principais medidas de posição e as medidas de dispersão, seus cálculos e interpretações.

Na unidade III, trabalhamos com parte da teoria das probabilidades e algumas de suas principais distribuições. As distribuições de probabilidades, vistas também nessa unidade, lida com probabilidades, porém associadas ao tipo de variável aleatória em questão. Para utilizarmos qualquer distribuição, é necessário saber se a variável aleatória numérica é contínua, discreta.

A unidade IV tratou das sequências, em especial, a aritmética e a geométrica, dois tópicos importantes dentro da matemática para despertar e reconhecer padrões e com isso várias consequências que podem estar presentes numa sequência de valores.

Finalizando, tem-se a unidade V, que trata sobre uma introdução a Álgebra Linear. São abordadas as teorias de matrizes, determinantes e sistemas lineares, afim de trazer conhecimentos de conteúdos de grande aplicação na área da computação, assim como na ciência em geral.

Professora Me. Ivnna Gurniski De Oliveira

Professora Me. Renata Cristina de Souza

Professor Me. Edimar Izidoro Novaes

ANOTAÇÕES