Hochschule Bremerhaven

University of Applied Sciences

Fakultät II – Management und Informationssysteme

Informatik

Modul Theoretische Informatik

Prof. Dr.-Ing Henrik Lipskoch

Protokoll zu Aufgabenblatt 08: Team: ti2023_22

Von

Ekane Njoh Junior Lesage Matrikelnmr: 40128

Aguiwo II Steve Matrikelnmer: 40088

Inhalt

I. Aufgabe 1

Bei dieser Aufgabe handelt es sich darum, uns eine Sprache auszusuchen bzw. zu erfinden, in der KNF auszudrücken und anschließen nachzuweisen, dass es eine Typ-1 Sprache ist, indem das Pummping-Lemma für kontextfreie Sprachen angewendet wird. Das heißt $|w_1| \leq |w_2|$

a. Auswahl der Sprache

Hier haben wir uns nach langer Überlegung entschieden, uns die folgende Sprache auszusuchen:

$$L = \{ \, eine \ Permutation \ von \ a^i b^j c^k : \ i > \ j > k \geq 1, \qquad i, j, k \ \in \ \mathbb{N} \}$$

Unsere Sprache könnte als kontextsensitiv betrachtet, weil wir eine Regel hinzugefügt haben, die die Anzahl der Symbole in einer spezifischen Reihenfolge einschränkt. Die Regel i>j>k definiert, dass die Anzahl der ‚a's größer sein soll, als die Anzahl der ‚b's, die auch größer sein soll als die Anzahl der ‚c's.

b. Definition der Grammatik

$G = (\Sigma, V, P, S)$ eine mögliche Grammatik für unsere Sprache würde aus Folgendem bestehen:

- Ein Alphabet: $\Sigma = \{a; \ b; \ c\}$
- Eine Variablenmenge: $V = \{ S; \ A; \ B; \ X\}$
- Produktionsregeln:

(1) $S \rightarrow aSBC$
(2) $CB \rightarrow AB$
(3) $SB \rightarrow aX$
(4) $X \rightarrow b$

- Und ein Startsymbol S

c. Umwandlung in der Kuroda-Normalform

Aus der Folie 8-3 wissen wir, dass eine Typ-1 Sprache in der KNF akzeptabel ist, wenn sie nur Regeln der Form: $A \rightarrow a \mid A \rightarrow B \mid A \rightarrow BC \mid AB \rightarrow CD$ aufweist.

Unsere Regeln entsprechend nicht alle diesem Format, daher müssen sie noch angepasst bzw. erweitert werden.

Beginnen wir mit der 1. Regel: $S \rightarrow aSBC$

$$S \rightarrow D$$

$$D \rightarrow AF$$

$$A \rightarrow a$$

$$F \rightarrow SG$$

$$G \rightarrow BC$$

Damit haben wir unsere erste Regel erweitert. Da wir die 2. Regel nicht umwandeln müssen, weil die schon die KNF entspricht, machen wir mit der 3. Regeln weiter: $SB \rightarrow AX$

Diese Regel muss geändert werden, weil links eine Variable gefolgt von einem Buchstaben und rechts eine Variable gefolgt von einem Buchstaben steht. Dies erfolgt, indem wir c eine Variable zuweisen.

$$SC \rightarrow CX$$

$$A \rightarrow a$$

Die 5. Regel: $X \rightarrow b$ muss nicht angepasst werden, weil die schon in der KNF ist.

Wir sind nun soweit, dass wir unsere umgewandelte Grammatik aufstellen können. Das Ergebnis ist also Folgendes:

(1) $S \rightarrow D$
(2) $D \rightarrow AF$
(3) $F \rightarrow SG$
(4) $G \rightarrow BC$
(5) $SB \rightarrow CX$
(6) $CB \rightarrow AB$
(7) $X \rightarrow b$
(8) $C \rightarrow b$
(9) $B \rightarrow c$
(10) $A \rightarrow a$

Wir erhalten somit eine neue Variablenmenge: $V = \{ S; D; C; F; G; B; X \}$

Das Alphabet und das Startsymbol bleiben dabei unberührt. Jetzt ist nur nachzuweisen, dass unsere Sprache des Typen 1 ist.

d. Wortbildung

Wenden Wir unsere Produktionsregeln an damit wir ein Wort zur Anwendung des Pummping-Lemmas verwenden können.

$1. Regel : S \rightarrow D$

$2. Regel : S \rightarrow CF$

$3. Regel : S \rightarrow ASGC$

$2. und\ 3. Regeln : S \rightarrow AASGCGC$

$2. und\ 3. Regeln : S \rightarrow AAASGCGCGC$

$2. und\ 3. Regeln : S \rightarrow AAAASGCGCGCGC$

$2. und\ 3. Regeln : S \rightarrow AAAAASGCGCGCGCGC$

$2. und\ 3. Regeln : S \rightarrow AAAAAASGCGCGCGCGCGC$

$2. und\ 3. Regeln : S \rightarrow AAAAAAASGCGCGCGCGCGCGC$

$10. Regel : S \rightarrow aaaaaaaSGCGCGCGCGCGCGC$

$4. Regel : S \rightarrow aaaaaaaSBCCBCCBCCBCCBCCBCCBCC$

$5. Regel : S \rightarrow aaaaaaaCXCABCABCABCABCABCABCC$

$6. Regel : S \rightarrow aaaaaaaSBCABCABCABCABCABCABCC$

$7. und\ 8. und\ 9. und\ 10. Regeln : S \rightarrow aaaaaaabbbabacbacbacbacbacbacbb$

Das erzeugte Wort ist also $aaaaaaabbbabacbacbacbacbacbacbb$ wobei $a^{13}b^{10}c^{5}$. Es respektiert also die Produktionsregeln.

e. Nachweis

Zum Nachweisen der Typisierung unserer Sprache wenden wir das Pummping-Lemma für kontextfreie Sprachen an und nur wenn wir dabei scheitern, heißt es unsere Sprache ist tatsächlich vom Typ-1. Angenommen wird dann, dass unsere Sprache L kontextfrei ist.

Wir wissen aus Folie 6-1, dass eine Sprache kontextfrei ist genau dann, wenn,

$\exists n \in \mathbb{N}, sodass\ \forall z \in L, |z| \geq n$:

z lässt sich zerlegen in $z = uvwxy$ mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- $\forall\, i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L$

Unser Wort ist dann $a^7b^3abacbacbcbacbacb^2$ wir haben bereits die Entscheidbarkeit unserer Sprache in Bezug auf dieses Wort nachgewiesen.

Wir wählen $n = 13.$ Dies gilt für die unsere zwei verschiedenen Zerlegungen für das gleiche Wort.

f. Erste Aufteilung

$u = a^7$

$v = b^3ba$

$w = acbacbcbacbac$

$x = b$

$y = b$

Wir prüfen nun ob, die Bedingungen für das Pummping-Lemma erfüllt sind:

$|vx| = 2 \geq 1$

$|vwx| = 10 \leq n$

Alle erforderlichen Bedingungen haben wir erfüllt. Das Abpumpen kann anfangen.

Für $i = 0$ erhalten wir $uv^iwx^iy = uwy = a^7acbacbcbacbacb$

Für $i = 1$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^7b^3abacbacbcbacbacb^2$

Für $i = 2$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^7b^3bab^3\text{b}aacbacbcbacbacbbb$

Für $i = 3$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^7b^3bab^3bab^3baacbacbcbacbacbbbb$

Für $i = 4$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^7b^3bab^3bab^3bab^3baacbacbcbacbacbbbbb$

Für $i = 0, 2,3,4 \dots n$ ist das Pummping-Lemma verletzt und das Wort gehört nicht mehr zur Sprache, weil es die Bedingung nicht mehr erfüllt, dass $i > j > k.$ Es gibt dort gleich oder mehr ‚b's als ‚a's, was unzulässig ist.

g. Zweite Aufteilung

$u = a^7b^3a$

$v = b$

$w \ = acbacbcbacba$

$c \ = \ cb$

$y \ = \ b^2$

Wir prüfen nun ob, die Bedingungen für das Pummping-Lemma erfüllt sind:

$|vx| \ = \ 4 \ \geq \ 1$

$|vwx| = \ 5 \ \leq \ n$

Alle erforderlichen Bedingungen haben wir erfüllt. Das Abpumpen kann anfangen.

Für $i \ = \ 0$ erhalten wir $uv^iwx^iy \ = \ uwy \ = \ a^7b^3aacbacbcbacbab^2$

Für $i \ = \ 1$ erhalten wir $uv^iwx^iy \ = \ a^7b^3abacbacbcbacbacbb^2$

Für $i \ = \ 2$ erhalten wir $uv^iwx^iy \ = \ a^7b^3ab^2acbacbcbacbacbcbb^2$

Für $i \ = \ 3$ erhalten wir $uv^iwx^iy \ = \ a^7b^3ab^3acbacbcbacbacbcbcbb^2$

Für $i \ = \ 4$ erhalten wir $uv^iwx^iy \ = \ a^7b^3ab^4acbacbcbacbacbcbcbcbb^2$

Für $i \ = \ 0,3,4 \ \ldots \ n$ scheitert das Pummping-Lemma, weil es gleich oder mehr ‚b’s als ‚a’s gibt.

Es ist noch zu beweisen, ob das Pummping-Lemma für andere Aufteilungen gelten könnte, aber dafür müssten erheblich viele unterschiedliche Kombinationen getestet werden.

Bis dahin verbleiben wir mit der Schlussfolgerung, dass unsere Sprache kontextsensitiv und somit vom Typ-1 in der Chomsky-Hierarchie ist.

h. Neue Aufteilung

Zu zeigen, dass unsere Sprache echt-kontextsensitiv ist, müssen wir auch ein Wort aus dieser Sprache finden, für das das Pummping-Lemma gilt. Dafür wenden wir unsere Produktionsregeln an, um das Wort zu bilden.

$1. Regel : S \rightarrow D$

$2. Regel : \ S \rightarrow CF$

$3. Regel : \ S \rightarrow ASGC$

$2. und\ 3. Regel : S \rightarrow AASGCG$

$2. ud\ 3. Regel : \ S \rightarrow AAASGCGCG$

$4. Regel : \ S \rightarrow AAASBCCBCCBC$

$5. Regel : \ S \rightarrow AAACXCCBCCBC$

$6. Regel : \ S \rightarrow \ AAACXCABCABC$

$7. und\ 8. und\ 9. und\ 10. Regeln : \ S \rightarrow aaabbacbacb$

Das Wort ist dann $a^3b^2acbacb$.

Wir wählen $n = 8$

$u = a^3$b

$v = bac$

$w = b$

$x = acb$

$y = \varepsilon$

Wir prüfen nun ob, die Bedingungen für das Pummping-Lemma erfüllt sind:

$|vx| = 6 \geq 1$

$|vwx| = 7 \leq n$

Alle erforderlichen Bedingungen haben wir erfüllt. Das Abpumpen kann anfangen.

Für $i = 0$ erhalten wir $uv^iwx^iy = uwy = a^3bb$

Für $i = 1$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^3b^2acbacb$

Für $i = 2$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^3bbacbacbacbacb$

Für $i = 3$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^3bbacbacbacbacbacbacb$

Für $i = 4$ erhalten wir $uv^iwx^iy = a^3bbacbacbacbacbacbacbacbacb$

Für $i = 0$ ist das Pummping-Lemma verletzt und das Wort gehört nicht mehr zur Sprache, weil es die Bedingung nicht mehr erfüllt, dass $i > j > k$. Es gibt dort keinen c, was unzulässig ist.

i. Literaturverzeichnis

[1]https://de.wikipedia.org/wiki/Chomsky-Hierarchie

Letzter Zugriff am 10.12.2023 um 02:08 Uhr

[2] https://elli.hs-bremerhaven.de/goto.php?target=file_338582_download

Letzter zugriff am 10.12.2023 um 03:02 Uhr

[3] https://elli.hs-bremerhaven.de/goto.php?target=file_336977_download

Letzter Zugriff am 110.12.2023 um 02:30 Uhr