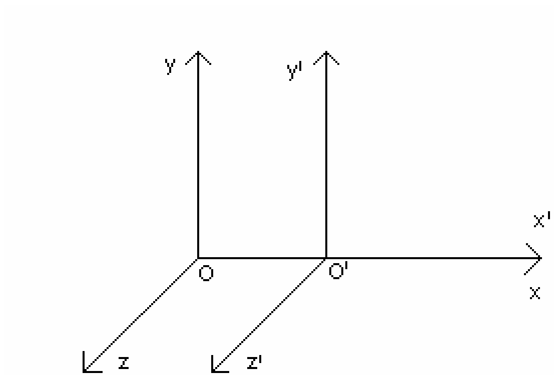
Partie I : La relativité restreinte

Chapitre 1 : Rappels de mécanique newtonienne

I. Transformation de Galilée

La mécanique classique et la mécanique relativiste se construisent autour du principe de relativité du mouvement. Considérons deux référentiels R et R' définis par $(O; x, y, z, t)$ et par $(O'; x', y', z', t')$. Ce principe déclare que, si R' admet la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v_e}$ par rapport à R, alors R admet la vitesse $-\overrightarrow{v_e}$ vis-à-vis de R'. Donc dans le référentiel R, O' est animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_e}$ par rapport à O.

Soit un évènement aperçu en M par O et O'. Dans R, les coordonnées de M sont (x, y, z, t) et dans R', ses coordonnées sont (x', y', z', t'). Quelles relations existe-t-il entre (x, y, z, t) et (x', y', z', t') ?
Pour simplifier mais tout en gardant la généralité du problème, on suppose que les axes Ox et $O'x'$ sont confondus. Les axes Oy et $O'y'$, Oz et $O'z'$ seront pris respectivement parallèles. Ensuite, la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v_e}$ est supposée *constante* et ayant la même direction que Ox.



Galilée nous propose la transformation évidente suivante :

$$\begin{aligned} x &= x' + v_e t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x' &= x - v_e t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

II. Composition des vitesses

Elle s'obtient en différentiant les relations ci–dessus :

$$dx = dx' + v_e\, dt'$$
$$dt = dt'$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v_e$$

$$\boxed{v_x = v'_x + v_e}$$

On obtient de la même manière :

$$v_y = v'_y \qquad\qquad v_z = v'_z$$

III. Transformation des accélérations

On trouve, pour chacune des composantes de l'accélération :

$$a_x = a'_x \qquad a_y = a'_y \qquad a_z = a'_z$$

Ce que l'on peut écrire sous forme de vecteur :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}'}$$

Donc, la troisième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}'$$

$$\vec{F} = \vec{F'}$$

La loi de force est invariante par changement de référentiel galiléen, ce qui signifie qu'aucune expérience de mécanique ne permet de différencier deux référentiels galiléens.

Chapitre 2 : Établissement de la transformation de Lorentz

I. Résultat négatif de l'expérience de Michelson–Morley

L'expérience de Michelson–Morley consiste à vérifier l'addition des vitesses donnée par la cinématique newtonienne lorsque l'une des vitesses est celle de la lumière. Selon cette expérience, il serait possible, en observant des figures d'interférences, de mesurer une vitesse donnée par :

$$v = u + c$$

Le résultat de cette expérience nous dit que cette loi d'addition des vitesses est fausse, ce qui peut paraître contraire à l'expérience quotidienne. Il faut donc trouver une nouvelle transformation qui tienne compte, qu'à faible vitesse, les vitesses peuvent s'additionner, ce qui n'est plus vrai à grande vitesse.
Nous pouvons nous apercevoir que, d'après le résultat de cette expérience, la vitesse de la lumière est une vitesse limite, identique dans tous les référentiels galiléens.
Nous allons établir de manière rigoureuse la transformation de Lorentz.

II. Démonstration de la transformation de Lorentz

Les hypothèses pour déterminer la transformation de Lorentz sont les suivantes :

- invariance de la vitesse de la lumière par changement de repère galiléen ainsi que sa constance et son indépendance vis–à–vis du temps, de la source qui la crée et de l'observateur.
- homogénéité de l'espace, conduisant à des relations linéaires entre les deux référentiels.
- synchronisation des horloges $(t = t' = 0)$ de R et R' lorsque les origines O et O' coïncident; les axes ont des directions parallèles (disparition des termes constants).
- la vitesse relative $\overrightarrow{v_e}$, selon les axes Ox et $O'x'$, n'influence pas les composantes y et z, c'est–à–dire $y = y'$ et $z = z'$ (ce que nous vérifierons plus loin).

D'après ces hypothèses, nous pouvons écrire :

$$x' = a_1 x + a_2\, ct \qquad \text{et} \qquad ct' = a_3 x + a_4\, ct$$

avec a_i des constantes pouvant dépendre de v_e et de c.

La vitesse du point O' de R' mesurée dans le référentiel R est v_e. Ce point admet comme coordonnée $x' = 0$, ce qui donne :

$$a_1 x + a_2\, ct = 0$$

En différentiant, on obtient :

$$a_1\, dx = -a_2\, c dt$$

$$a_1 \frac{dx}{dt} = -a_2\, c$$

Or $\frac{dx}{dt}$ est justement la vitesse de O' mesurée dans le repère R, donc :

$$a_2 = -a_1 \frac{v_e}{c}$$

On obtient alors :

$$x' = a_1 \left(x - v_e t\right)$$

Considérons maintenant un rayon lumineux émis au point O à un instant pris comme origine $(t = t' = 0)$, les deux origines étant confondues à cet instant. Nous supposons que ce rayon lumineux se propage suivant l'axe Ox dans le sens des x croissants. L'équation de propagation s'écrit :

– dans R : $x = ct$
– dans R' : $x' = ct'$

Nous obtenons l'identité suivante, en croisant les membres des deux égalités :

$$x\,ct' = x'\,ct$$

ce qui entraîne, d'après l'expression de ct' et de ce que l'on vient d'obtenir :

$$x(a_3 x + a_4\,ct) = a_1(x - v_e\,t)ct$$
$$\Leftrightarrow a_3 x^2 + a_4 x\,ct = a_1 x\,ct - a_1 v_e\,ct^2$$

Nous identifions terme à terme :

$$a_1 = a_4$$

et en utilisant le fait que $x = ct$,

$$a_3 = -\frac{a_1 v_e}{c}$$

Nous avons donc obtenu la transformation suivante :

$$x' = a_1(x - v_e\,t)$$
$$ct' = a_1\left(ct - \frac{v_e}{c}x\right)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$x' - ct' = a_1\left(x - v_e t - ct + \frac{v_e}{c}x\right)$$
$$x' - ct' = a_1(x - ct)\left(1 + \frac{v_e}{c}\right)$$

D'après la relativité du mouvement, nous pouvons dire que : $x - ct = a_1(x' - ct')\left(1 - \frac{v_e}{c}\right)$

En multipliant membre à membre, nous obtenons :

$$1 = a_1^2\left(1 + \frac{v_e}{c}\right)\left(1 - \frac{v_e}{c}\right)$$

soit :

$$a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

donc :

$$x' = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}(x - v_e t)$$

Pour déterminer le signe, nous effectuons l'approximation $v_e << c$: $x' = \pm(x - v_e t)$. Le signe + doit être conservé pour que la relation s'identifie à la transformation de Galilée lors des vitesses faibles.

En résumé, nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma_e\,(x - v_e t) \\ ct' &= \gamma_e\left(ct - \frac{v_e}{c}x\right) \end{aligned}}$$

avec $\gamma_e = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

Démontrons maintenant le fait que $y = y'$ et $z = z'$.

Supposons que la vitesse v_e entraîne une diminution (ou une augmentation) des longueurs transversales. Pour cela, imaginons deux cylindres creux dont les axes principaux coïncident avec l'axe *Ox*. Le premier cylindre s'étend à l'infini du côté des *x* négatifs et est solidaire du référentiel *R*. Le second cylindre s'étend à l'infini du côté des *x* positifs et est solidaire du référentiel *R'*.
Plaçons–nous dans le référentiel *R*. Le cylindre n°2 se déplace en direction du premier cylindre, et, par notre supposition, il subit une diminution de son rayon et peut passer à l'intérieur du premier cylindre de manière permanente dans le temps.
Plaçons–nous maintenant dans le référentiel *R'*. Le cylindre n°1 semble se déplacer en direction du cylindre n°2 et subit une diminution de son rayon. Le cylindre n°1 passe à l'intérieur du deuxième cylindre de manière permanente dans le temps.

Il y a contradiction selon le référentiel où nous nous plaçons et la seule possibilité qui puisse exister est : $y = y'$ et $z = z'$.

Nous pouvons ainsi résumer la loi de transformation de Lorentz sous la forme usuelle suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma_e\,(x - \beta_e ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma_e\,(ct - \beta_e x) \end{aligned} \qquad \text{en posant } \beta_e = \frac{v_e}{c} \text{ et } \gamma_e = \left(1 - \beta_e^2\right)^{-1/2}}$$

III. Autres écritures de la transformation de Lorentz

1. Écriture vectorielle

Nous posons :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad\qquad \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

La transformation s'écrit alors :

$$\left|\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + (\gamma_e - 1)\left(\vec{\beta_e}\cdot\vec{r}'\right)\frac{\vec{\beta_e}}{\beta_e} + \gamma_e\, ct'\,\vec{\beta_e} \\ ct &= \gamma_e\left(ct' + \vec{\beta_e}\cdot\vec{r}'\right) \end{aligned}\right.$$

2. *Écriture hyperbolique*

Nous introduisons la notion de rapidité r_e définie par :

$$\text{th } r_e = \frac{v_e}{c} = \beta_e$$

Nous en déduisons :

$$\gamma_e = \left[1 - \left(\frac{\exp r_e - \exp(-r_e)}{\exp r_e + \exp(-r_e)}\right)^2\right]^{-1/2} = \text{ch } r_e$$

$$\text{et } \gamma_e \beta_e = \text{ch } r_e \cdot \text{th } r_e = \text{sh } r_e$$

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x'\text{ch } r_e + ct'\text{sh } r_e \\ ct = ct'\text{ch } r_e + x'\text{sh } r_e \end{array}}$$

Chapitre 3 : Bases de la relativité restreinte

I. Établissement de la composition des vitesses

La loi de composition des vitesses s'obtient en différentiant la transformation de Lorentz :

Nous avons :

$$dx = \gamma_e (dx' + v_e dt')$$
$$c\,dt = \gamma_e \left(c\,dt' + \frac{v_e}{c} dx' \right)$$

En divisant membre à membre et en multipliant par c, nous obtenons :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v_e dt'}{dt' + \frac{v_e}{c^2} dx'}$$

En divisant numérateur et dénominateur par dt' :

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + \frac{v_e v'_x}{c^2}}}$$

La formule fournit bien à faible vitesse la loi d'addition galiléenne des vitesses : $v_x = v'_x + v_e$.
Calculons par exemple la vitesse de la lumière émise par une source animée d'une vitesse v :

$$\frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c\left(1 + v/c\right)}{1 + v/c} = c$$

ce qui signifie que la vitesse de la lumière est invariante par changement de référentiel galiléen et indépendante de la vitesse de la source.

Nous obtenons les transformations pour v_y et v_z :

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma_e \left(1 + \frac{v_e v'_x}{c^2} \right)} \qquad\qquad v_z = \frac{v'_z}{\gamma_e \left(1 + \frac{v_e v'_x}{c^2} \right)}$$

II. Composition des rapidités

Soit $\text{th } r_e = \frac{v_e}{c}$, $\quad \text{th } r_x = \frac{v_x}{c}$ et $\text{th } r'_x = \frac{v'_x}{c}$ alors :

$$\text{th } r_x = \frac{\text{th } r_e + \text{th } r'_x}{1 + \text{th } r_e \cdot \text{th } r'_x} = \text{th } \left(r'_x + r_e \right)$$

Nous avons donc :

$$r_x = r'_x + r_e$$

Ainsi, contrairement à la mécanique classique où ce sont les vitesses qui s'ajoutent, ce sont les rapidités qui s'additionnent en relativité restreinte.

III. Intervalle entre deux évènements

Nous allons montrer l'invariance de la quantité $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$:

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= \gamma_e^2 (ct' + \beta_e x')^2 - \gamma_e^2 (x' + \beta_e ct')^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma_e^2 \left(c^2t'^2 + \beta_e^2 x'^2 - x'^2 - \beta_e^2 c^2 t'^2\right) - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma_e^2 \left(1 - \beta_e^2\right) c^2 t'^2 - \gamma_e^2 \left(1 - \beta_e^2\right) x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \end{aligned}$$

On définit l'intervalle entre deux évènements par :

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

On définit l'intervalle élémentaire par :

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

c'est ce qu'on appelle la métrique de l'espace–temps de la relativité restreinte. Elle peut également s'écrire sous la forme :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Il existe trois sortes d'intervalles :

– si $ds^2 < 0$, l'intervalle est du genre espace.
– si $ds^2 = 0$, l'intervalle est du genre lumière.
– si $ds^2 > 0$, l'intervalle est du genre temps.

IV. Formalisme quadrivectoriel et introduction aux tenseurs

Le temps étant une composante à part entière, il est plus pratique d'utiliser dès lors des vecteurs particuliers de dimension 4, appelés quadrivecteurs. Nous allons définir les quadrivecteurs position, vitesse, accélération et quantité de mouvement. Les quadrivecteurs seront notés avec un tilde (~) pour ne pas les confondre avec d'autres quantités.
Un quadrivecteur possède une pseudo–norme définie de la manière suivante. Soit un quadrivecteur $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Le carré de sa pseudo–norme est :

$$\|\tilde{a}\| = a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

1. *Quadrivecteur position*

Le quadrivecteur position a pour composantes les trois composantes d'espace et une de temps. Il est noté :

$$\tilde{x} = (x, y, z, ct) \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = (\vec{r}, ct)$$

2. *Quadrivecteur vitesse*

L'intervalle élémentaire ds^2 peut se mettre sous la forme :

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}\right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

soit :

$$ds = \frac{c\,dt}{\gamma}$$

On définit la durée propre élémentaire par :

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma}$$

Le quadrivecteur vitesse est donné par :

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}, \frac{d(ct)}{d\tau}\right) = (\gamma\vec{v}, \gamma c)$$

Le carré de sa pseudo–norme est :

$$\|\tilde{v}\| = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

3. *Quadrivecteur accélération*

Il est donné par la relation :

$$\tilde{a} = \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{v}, \gamma c)$$

Nous avons donc :

$$\frac{d(\gamma\vec{v})}{d\tau} = \gamma \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \qquad \text{et} \qquad c\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma c \frac{d\gamma}{dt}$$

Il reste à calculer $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-2\frac{v}{c^2}\right)\frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

Nous obtenons finalement :

$$\tilde{a} = \left(\gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 \beta \frac{d\beta}{dt}\vec{v}, \gamma^4 c\beta \frac{d\beta}{dt}\right)$$

4. *Quadrivecteur quantité de mouvement et énergie de la particule libre*

En relativité restreinte, le quadrivecteur quantité de mouvement est le produit de la masse (au repos) du corps considéré par sa quadrivitesse.

$$\tilde{p} = m\tilde{v} = (\gamma m\vec{v}, \gamma m c)$$

Le carré de sa pseudo–norme est :

$$\|\tilde{p}\|^2 = m^2 \|\tilde{v}\|^2 = m^2 c^2$$

La partie spatiale de la force se définit comme la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt}$$

Calculons maintenant l'énergie de la particule libre. Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}\delta E &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{v} \cdot d(\gamma m\vec{v})\end{aligned}$$

En développant le dernier terme, nous obtenons :

$$\vec{v}\cdot d(\gamma m\vec{v}) = \gamma m\vec{v}d\vec{v} + mv^2 d\gamma = \frac{mc^2}{\gamma^2}d\gamma + mv^2 d\gamma \qquad \text{car } dv = \frac{c^2}{\gamma^3 v}d\gamma$$

$$\vec{v}\cdot d(\gamma m\vec{v}) = mc^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)d\gamma = mc^2 d\gamma$$

Nous avons finalement :

$$\delta E = d\left(\gamma mc^2\right)$$

soit :

$$\boxed{E = \gamma mc^2}$$

C'est l'énergie de la particule libre.
Nous aurions pu trouver ce résultat de manière plus rapide en utilisant l'invariance de la pseudo–norme. Nous avons vu que $\|\tilde{p}\|^2 = m^2c^2$ donc :

$$d\left(\|\tilde{p}\|^2\right) = 0$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}&\tilde{p}\cdot d\tilde{p} = 0\\&\gamma mc\cdot d(\gamma mc) - \gamma m\vec{v}\cdot d(\gamma m\vec{v}) = 0\\&\gamma m\left[d\left(\gamma mc^2\right) - \vec{v}\cdot d(\gamma m\vec{v})\right] = 0\end{aligned}$$

c'est–à–dire :

$$\vec{v}\cdot d(\gamma m\vec{v}) = d\left(\gamma mc^2\right)$$

D'où le résultat écrit ci–dessus :

$$E = \gamma mc^2$$

Faisons maintenant le développement limité à l'ordre 1 de cette expression pour vérifier que l'on retrouve l'énergétique classique.

$$\gamma mc^2 = mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Nous retrouvons bien l'énergie cinétique de la mécanique classique mais avec un terme constant supplémentaire ne dépendant que de la masse de la particule. Ainsi, même au repos, une particule possède une énergie, appelée énergie de masse donnée par la formule la plus célèbre de la physique :

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

C'est l'équivalence entre la masse et l'énergie. On dit que la matière est une forme organisée d'énergie.

Par extension, l'énergie cinétique d'une particule libre dans le cadre de la relativité restreinte est donnée par :

$$E_k = (\gamma - 1)mc^2$$

Établissons maintenant deux relations entre la quantité de mouvement et l'énergie.

– Calculons la quantité $E^2 - \vec{p}^2 c^2$, avec $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$:

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\boxed{E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4}$$

Ainsi, pour un photon :

$$\boxed{E = pc}$$

– Établissons le lien entre E_k et pc :

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= E^2 - m^2 c^4 \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 + \left[(\gamma-1)^2 m^2 c^4 - (\gamma-1)^2 m^2 c^4\right] - m^2 c^4 \\ &= m^2 c^4 \left[\gamma^2 - (\gamma-1)^2 - 1\right] + E_k^2 \\ &= 2E_k m c^2 + E_k^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$pc = \sqrt{E_k \left(E_k + 2mc^2\right)}$$

5. *Le tenseur métrique de la relativité restreinte*

Le carré de l'intervalle élémentaire ds^2 possède une forme particulière dans le cas de la relativité restreinte, qui est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

mais une forme plus générale est donnée par :

$$\begin{aligned} ds^2 = \eta_{11} dx^2 + \eta_{12} dx\, dy + \eta_{13} dx\, dz + \eta_{14} dx\ cdt \\ + \eta_{22} dy^2 + \eta_{21} dy\, dx + \eta_{23} dy\, dz + \eta_{24} dy\ cdt \\ + \eta_{33} dz^2 + \eta_{31} dz\, dx + \eta_{32} dz\, dy + \eta_{34} dz\ cdt \\ + \eta_{44} c^2 dt^2 + \eta_{41} cdt\, dx + \eta_{42} cdt\, dy + \eta_{43} cdt\, dz \end{aligned}$$

ou, en posant $x^\mu = (x, y, z, ct)$, où μ est un indice :

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Le produit de dx par dy étant commutatif, il en résulte que $\eta_{12} = \eta_{21}$, et de même pour les autres indices, donc :

$$\begin{aligned} ds^2 = \eta_{11} dx^2 + 2\eta_{12} dx\, dy + 2\eta_{13} dx\, dz + 2\eta_{14} dx\ cdt \\ + \eta_{22} dy^2 + 2\eta_{23} dy\, dz + 2\eta_{24} dy\ cdt \\ + \eta_{33} dz^2 + 2\eta_{34} dz\ cdt \\ + \eta_{44} c^2 dt^2 \end{aligned}$$

Les axes étant choisis orthogonaux, les termes croisés disparaissent et il ne reste plus que la métrique de la relativité restreinte, écrite sous cette forme :

$$ds^2 = \eta_{44} c^2 dt^2 + \eta_{11} dx^2 + \eta_{22} dy^2 + \eta_{33} dz^2$$

La quantité $\eta_{\mu\nu}$ est appelée tenseur métrique de la relativité restreinte et peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V. Avance du périhélie de Mercure en relativité restreinte

1. *Équation de mouvement en mécanique classique*

Une particule soumise à la force gravitationnelle du Soleil obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

Dans cette équation, on a posé $u = \frac{1}{r}$, où r est la distance de la particule au Soleil, φ l'angle qui définit avec r la position de la particule, G, M et C sont respectivement la constante de la gravitation universelle, la masse du Soleil et la constante des aires.

La solution de cette équation est une ellipse dont le paramètre p est $\frac{C^2}{GM}$.

L'application de cette équation à l'orbite de Mercure et la prise en compte des perturbations des autres planètes aboutit à une précession du périhélie d'une valeur de 531" par siècle, au lieu des 574" observés. Calculons la précession de Mercure dans le cadre de la relativité restreinte.

2. *Équation de mouvement en relativité restreinte*

L'énergie totale s'écrit :

$$E = \gamma mc^2 + E_p$$

Soit :

$$\gamma = \frac{E - E_p}{mc^2}$$

La position de la particule s'écrit : $\vec{r} = r\overrightarrow{e_r}$, la vitesse vaut alors :

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

Le carré de la vitesse est donc :

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

En posant comme précédemment $u = \frac{1}{r}$, on a : $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}$

Soit :

$$1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{\dot{\theta}^2}{u^2}\right)=\frac{1}{\gamma^2}$$

Pour simplifier cette expression, on fait appel à la conservation du moment cinétique. Celui–ci s'écrit :

$$\vec{L}=\vec{r}_{\wedge}\vec{p}=\vec{r}_{\wedge}(\gamma m\vec{v})=\gamma mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

Ainsi, on peut extraire $\dot{\theta}$ de l'expression de L :

$$\dot{\theta}=\frac{Lu^2}{\gamma m}$$

On obtient alors :

$$1-\frac{1}{c^2}\frac{L^2}{\gamma^2 m^2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)=\frac{1}{\gamma^2}$$

ce qui donne :

$$\gamma^2=1+\frac{L^2}{m^2c^2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\left(\frac{E-E_p}{mc^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\frac{m^2c^2}{L^2}\left[\left(\frac{E-E_p}{mc^2}\right)^2-1\right]$$

Dérivons cette dernière expression par rapport à θ :

$$2\frac{du}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{2m}{L^2}\left(\frac{E-E_p}{mc^2}\right)\frac{dE_p}{dr}\frac{dr}{d\theta}$$

$$2\frac{du}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\frac{2m}{L^2u^2}\left(\frac{E-E_p}{mc^2}\right)\frac{dE_p}{dr}\frac{du}{d\theta}$$

Il apparaît la solution triviale $\frac{du}{d\theta}=0$, qui correspond à une trajectoire circulaire. Intéressons–nous à l'autre solution :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{m}{L^2u^2}\left(\frac{E-E_p}{mc^2}\right)\frac{dE_p}{dr}$$

L'énergie gravitationnelle s'écrit : $E_p=-\frac{GMm}{r}$, donc

$$\frac{dE_p}{dr}=GMmu^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GMm^2}{L^2}\left(\frac{E+GMmu}{mc^2}\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+(1-\varepsilon)u=\frac{GMm^2}{L^2}\frac{E}{mc^2}$$

avec $\varepsilon=\left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2$.

Le second membre de l'équation différentielle est constant et s'identifie à $\frac{GMm^2}{L^2}$ pour de petites vitesses. En effet, $\frac{E}{mc^2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{rc^2}$.

On peut poser $\frac{GMm^2}{L^2}\frac{E}{mc^2} = \frac{1-\varepsilon}{p}$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + (1-\varepsilon)u = \frac{1-\varepsilon}{p}$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$u(\theta) = \frac{1 + e\cos\left(\sqrt{1-\varepsilon}(\theta - \theta_0)\right)}{p}$$

qui est une ellipse dont le demi–grand axe tourne lentement.

On pose $\theta_0 = 0$. Au bout d'une révolution, on obtient : $\sqrt{1-\varepsilon}\theta = 2\pi$, soit :

$$\theta = 2\pi(1-\varepsilon)^{-1/2} \approx 2\pi + \varepsilon\pi$$

L'avance supplémentaire vaut donc :

$$\Delta\theta = \varepsilon\pi = \pi\left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2$$

Or $\frac{GMm^2}{L^2} = \frac{1}{p}$, donc :

$$\Delta\theta = \frac{\pi GM}{c^2 p}$$

Pour Mercure, $p = 5{,}546.10^{10}\,\mathrm{m}$. Avec $M = 1{,}989.10^{30}\,\mathrm{kg}$, nous trouvons :

$$\Delta\theta = 8{,}364.10^{-8}\,\mathrm{rad}$$

La période de révolution de Mercure étant de 87.9 jours, nous avons pour un siècle :

$$\delta = \frac{\Delta\theta \times 100 \times 365.25}{87.9} \approx 3{,}476.10^{-5}\,\mathrm{rad}$$

Soit :

$$\delta = 7{,}17''$$

On remarque que la précession prévue par la relativité restreinte ne correspond pas à l'avance observée. L'avance de 43" par siècle sera expliquée par la relativité générale.

Partie II : L'électromagnétisme

Chapitre 1 : Outils mathématiques

I. Analyse vectorielle

1. L'opérateur gradient

Soit une fonction scalaire $g(x,y,z)=g(M)$ indépendant du temps. Le gradient est défini de la manière suivante :

$$dg = g\left(M + d\vec{M}\right) - g(M) = \overrightarrow{\text{grad}}g \cdot d\vec{M}$$

Le gradient est donc un vecteur dont les composantes sont, dans un repère cartésien :

$$\overrightarrow{\text{grad}}g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

Il est aussi noté $\vec{\nabla}g$.

Si $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}g$, alors :

$$\int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}g \cdot d\vec{M} = \int_A^B dg = g(B) - g(A)$$

L'intégrale est alors indépendante du chemin choisi.

2. L'opérateur divergence

Soit un vecteur $\vec{A}$ de composantes (A_x, A_y, A_z). La divergence de $\vec{A}$ est, dans un repère cartésien :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence est noté aussi $\vec{\nabla} \cdot$, mais nous n'emploierons pas cette notation.

3. L'opérateur rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ s'écrit :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$$

Les composantes de $\vec{B}$ sont, dans un repère cartésien :

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

4. *Le laplacien et le dalembertien :*

Le laplacien scalaire dans un repère cartésien est défini par :

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

Le laplacien vectoriel est défini par :

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

Le dalembertien s'écrit :

$$\Box \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{c^2 \partial t^2} - \Delta \vec{A}$$

avec ici c la vitesse de la lumière.

5. *Relations entre les opérateurs*

Les propriétés des opérateurs de l'analyse vectorielle sont très utilisées en électromagnétisme. Nous donnons ici les principales relations entre les différents opérateurs définis ci–dessus.

$$\begin{aligned}
&\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) = \vec{0} \\
&\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right) = 0 \\
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\ \vec{A}\right) - \Delta \vec{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} V \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = \vec{0} \\
&\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}
\end{aligned}$$

II. Flux et circulation d'un vecteur– Théorèmes de l'analyse vectorielle

1. *Flux d'un champ de vecteurs*

Le flux élémentaire $d\phi$ d'un vecteur $\vec{A}$ à travers une surface orientée $d\vec{S}$ est défini par :

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Nous pouvons comparer le flux au débit d'un fleuve, qui est la quantité d'eau qui passe à travers une surface.

2. *Circulation d'un vecteur*

La circulation V d'un vecteur $\vec{E}$ le long d'une courbe quelconque est :

$$V = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

3. *Théorème de Green–Ostrogradski*

Soit un élément de volume $d\tau = dx\,dy\,dz$. Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers la surface inférieure $d\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dx\,dy \end{pmatrix}$ est :

$$d\phi_{\text{inf}} = -A_z\,dx\,dy$$

où A_z est la projection du vecteur $\vec{A}$ selon l'axe z.

De même, sur la surface supérieure :

$$d\phi_{\text{sup}} = \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z}dz\right)dx\,dy$$

Le flux à travers les surfaces inférieures et supérieures est donc :

$$d\phi_{\text{inf}+\text{sup}} = \frac{\partial A_z}{\partial z}dx\,dy\,dz = \frac{\partial A_z}{\partial z}d\tau$$

En effectuant un raisonnement similaire sur les quatre autres surfaces, nous en déduisons que le flux à travers toutes les surfaces élémentaires est :

$$d\phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)d\tau$$

$$d\phi = \vec{A}\cdot d\vec{S} = \text{div}\,\vec{A}\cdot d\tau$$

Le flux total est donc :

$$\phi = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\,\vec{A}\cdot d\tau$$

Ceci constitue le théorème de Green–Ostrogradski.

4. *Théorème de Stokes*

Soit un contour fermé *PQRS*. La circulation d'un vecteur $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ le long de *PQ* est $A_x dx$. Le long de *RS*, elle vaut : $-\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}dy\right)dx$. La somme est donc : $-\frac{\partial A_x}{\partial y}dx\,dy$.

De même, le long de *QR* et *SP*, nous avons : $\frac{\partial A_y}{\partial x}dx\,dy$.

Le long du contour fermé *PQRS*, la circulation élémentaire est :

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Nous pouvons étendre ce résultat pour un contour fini quelconque et à la surface limitée par ce contour. La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ est égale au flux du rotationnel de ce vecteur :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

C'est le théorème de Stokes.

III. Introduction aux tenseurs

1. Tenseur de Levi–Civita

Dans le cas de l'électromagnétisme, nous utilisons un tenseur à 4 indices qui ressemble au symbole de Kronecker.

Nous posons :

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si deux indices subissent une permutation paire} \\ -1 & \text{si deux indices subissent une permutation impaire} \\ 0 & \text{si deux indices sont identiques} \end{cases}$$

Nous avons par exemple :

$$\varepsilon^{1234} = \varepsilon^{1423} = 1$$
$$\varepsilon^{1243} = -1$$
$$\varepsilon^{1224} = 0$$

2. Tenseurs d'ordre deux symétriques ou antisymétriques

Un tenseur quelconque d'ordre deux est décomposable en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right)$$

Le tenseur sera dit symétrique si $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ donc $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right)$.

Le tenseur sera dit antisymétrique si $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ donc $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right)$.

Remarque : Un tenseur antisymétrique a la propriété suivante : $T_{\mu\mu} = 0$.

Chapitre 2 : Électromagnétisme de Maxwell

I. Électrostatique–Magnétostatique

1. Équation de la conservation de la charge

Le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est proportionnel à la charge volumique et à la vitesse de ces charges.

$$\vec{j} = -N\,q\,\vec{v}$$

où N représente le nombre de charges par unité de volume et q la charge portée par une particule.

L'intensité du courant est définie comme le flux du vecteur densité de courant. Nous pouvons donc écrire :

$$d\phi = \vec{j} \cdot d\vec{S} = -N\,q\frac{d\vec{l}}{dt}d\vec{S} = -N\,q\frac{d\tau}{dt}$$

en posant $N\,q\,d\tau = \rho\,d\tau$. Nous obtenons alors :

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,d\tau$$

Appliquons le théorème de Green :

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\ \vec{j} \cdot d\tau = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$$

d'où :

$$\boxed{\text{div}\ \vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

Cette équation est appelée équation de la conservation de la charge ou équation de continuité.

2. Électrostatique–Théorème de Gauss

La circulation d'un champ électrostatique le long d'un contour fermé est nulle, c'est–à–dire que le champ électrostatique est conservatif.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Cette relation équivaut à :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}}$$

c'est une première équation de Maxwell, pour le champ électrostatique.

Cette relation entraîne que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel (scalaire) :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V}$$

Théorème de Gauss : Le flux du champ électrostatique (valable nous le verrons pour un champ électrique) $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est proportionnel au nombre de charges contenues dans le volume délimité par la surface S.

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q^{\text{int}}$$

Avec $Q^{\text{int}} = \iiint_V \rho\, d\tau$, nous pouvons exprimer la forme locale du théorème de Gauss de la manière suivante :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\, \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, d\tau$$

Ainsi, nous avons :

$$\boxed{\text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

ce qui constitue une deuxième équation de Maxwell.

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ donc :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Cette dernière relation est appelée équation de Poisson.

Le théorème de Gauss nous permet de retrouver la loi de Coulomb :

À une distance r d'une source ponctuelle Q, nous avons :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

soit :

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

<u>3. Magnétostatique–Théorème d'Ampère</u>

La présence de monopôles magnétiques n'ayant pas (encore) été détecté, le flux du champ magnétique est nul.

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{\text{div}\, \vec{B} = 0}$$

ce qui constitue une troisième équation de Maxwell.

Ainsi, nous avons :

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}}$$

où $\vec{A}$ est appelé potentiel vecteur.

Théorème d'Ampère : La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est proportionnelle à l'intensité du courant dans ce contour.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

où $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

c'est–à–dire :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Il s'agit d'une dernière équation de Maxwell, pour le champ magnétostatique.

Cette dernière relation peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{j}$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\ \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Nous pouvons imposer à $\vec{A}$ une jauge, dite jauge de Coulomb : $\text{div}\ \vec{A} = 0$, de manière à avoir :

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Résumons les équations de Maxwell des champs électrostatique et magnétostatique :

$\text{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}\ \vec{B} = 0$
$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}$

II. Électromagnétisme

1. Équations de Maxwell

L'expérience montre que la variation temporelle du flux d'un champ magnétique crée un courant électrique qui s'oppose au flux, nommé courant induit :

$$V = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Nous avons, par définition :

$$V = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ainsi,

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

c'est–à–dire,

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Nous en déduisons de ces mêmes relations une définition du champ électrique :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

c'est–à–dire en comparant le premier membre et le dernier membre de l'égalité,

$$\oint_C \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

d'où

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

En magnétostatique, nous avions : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, ce qui entraîne, d'après $\text{div} \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} \right) = 0$:

$$\text{div}\ \vec{j} = 0$$

Mais cette relation, qui était vraie en régime statique ou lentement variable, ne l'est plus maintenant. Cherchons à remplacer les équations de Maxwell de la magnétostatique et de l'électrostatique afin qu'elles soient valables en électromagnétisme.

L'équation $\text{div}\ \vec{B} = 0$ n'est pas à modifier, puisqu'elle ne dépend que de la présence éventuelle de monopôles. Les seules équations qui peuvent subir une transformation sont donc :

$$\text{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Nous allons les rendre dépendantes du temps en les écrivant :

$$\text{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad\qquad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

où f est une fonction scalaire et $\vec{F}$ une fonction vectorielle dépendante du temps.

Calculons tout d'abord la divergence de la seconde relation (qui est nul par définition) :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}\right) &= \mu_0\,\mathrm{div}\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\ \vec{F}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\rho + \mathrm{div}\ \vec{F}\right) = 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathrm{div}\ \vec{F} = \mu_0\rho$$

Appliquons la définition de $\vec{E}$ dans la relation $\mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} + \dfrac{\partial f}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \Leftrightarrow\ &-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\ \vec{A} + f\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer la jauge suivante :

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = -f$$

Nous pouvons écrire $f = 0$ sans que $\vec{A}$ ne soit changé, nous obtenons alors :

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ainsi, en électromagnétisme, l'équation $\mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est conservée. À partir de cette relation, nous pouvons établir l'expression de $\vec{F}$:

$$\rho = \varepsilon_0\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\ \vec{F}$$

$$\vec{F} = \mu_0\varepsilon_0\vec{E}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Nous avons les quatre équations de Maxwell de l'électromagnétisme :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{array}}$$

Remarquons que ces quatre équations ne sont pas indépendantes. D'une part, nous avons construit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}$ à partir de $\mathrm{div}\ \vec{E}$. D'autre part, nous pouvons montrer que les deux autres équations sont intimement liées.

D'après l'analyse vectorielle, nous savons que $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\right)=0$.

Or $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\right)=-\mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\ \vec{B}\right)$, ce qui entraîne :

$$\mathrm{div}\ \vec{B}=0$$

2. *Propagation des champs électriques et magnétiques dans le vide*

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\ \vec{E}=0 & \mathrm{div}\ \vec{B}=0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{array}}$$

Calculons $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\right)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

or $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E}\right)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\ \vec{E}\right)-\Delta\vec{E}$. Comme $\mathrm{div}\ \vec{E}=0$, nous obtenons :

$$\boxed{\Delta\vec{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

Il s'agit de l'équation de d'Alembert qui décrit la propagation des ondes progressives. La vitesse à laquelle se déplace le champ électrique est $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, qui n'est rien d'autre que la vitesse de la lumière c.

Nous pouvons faire le même calcul pour $\vec{B}$ et obtenir :

$$\boxed{\Delta\vec{B}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0}$$

3. *Jauge de Lorenz*

Nous avons :

$$\vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\qquad\qquad \vec{B}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

De cette dernière relation, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right)=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right)\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\ \vec{A}\right)-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial^2\vec{A}}{c^2\partial t^2}-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\ \vec{A}+\frac{\partial V}{c^2\partial t}\right) \end{aligned}$$

c'est–à–dire :

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div } \vec{A} + \frac{\partial V}{c^2 \partial t}\right)$$

Comme $\vec{A}$ et V ne sont pas totalement définis, nous pouvons choisir comme jauge $\text{div } \vec{A} + \frac{\partial V}{c^2 \partial t} = 0$. C'est la jauge de Lorenz.

Nous avons ainsi, sous la jauge de Lorenz :

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Cherchons une expression similaire pour le potentiel scalaire.
Nous avons $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donc :

$$\text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div } \vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Donc, d'après la jauge de Lorenz $\text{div } \vec{A} = -\frac{\partial V}{c^2 \partial t}$, nous obtenons :

$$\Delta V - \frac{\partial^2 V}{c^2 \partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

c'est–à–dire :

$$\square V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Chapitre 3 : Électromagnétisme et relativité

I. Apport du formalisme quadridimensionnel

Le but est d'utiliser le formalisme quadridimensionnel pour simplifier les équations de l'électromagnétisme.

1. Quadrivecteur densité de charges

Nous pouvons construire un quadrivecteur $\tilde{j}$, caractérisant la densité de courant et la densité volumique de charges de la manière suivante :

$$\tilde{j} = j^{\mu} = \left(\vec{j}, \rho c\right)$$

La constante *c* (vitesse de la lumière) est ici pour garder toutes les composantes du quadrivecteur homogènes.

2. Quadrivecteur potentiel

Dans le formalisme du précédent chapitre, nous avons croisé le potentiel scalaire et le potentiel vecteur. Nous pouvons former le quadrivecteur potentiel :

$$\tilde{A} = A^{\mu} = \left(\vec{A}, \frac{V}{c}\right)$$

Le quadrivecteur potentiel $\tilde{A}$ peut s'exprimer à l'aide de ses composantes covariantes :

$$\tilde{A} = A_{\mu} = \left(-\vec{A}, \frac{V}{c}\right)$$

3. L'opérateur dérivée partielle

Nous construisons un opérateur, qui généralise l'opérateur gradient, défini de la manière suivante :

$$\partial_{\mu} = \left(\vec{\nabla}, \frac{\partial}{c\partial t}\right)$$

On a ainsi :

$$\partial^{\mu} = \left(-\vec{\nabla}, \frac{\partial}{c\partial t}\right)$$

L'opérateur dérivée partielle se transforme, selon la relativité restreinte :

$$\begin{aligned}
\partial^{1'} &= \gamma_e\left(\partial^1 - \beta_e \partial^4\right) \\
\partial^{2'} &= \partial^2 \\
\partial^{3'} &= \partial^3 \\
\partial^{4'} &= \gamma_e\left(\partial^4 - \beta_e \partial^1\right)
\end{aligned}$$

4. *Transformation du quadrivecteur potentiel*

Entre deux référentiels galiléens, la transformation du quadrivecteur potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned}
A_x &= \gamma_e\left(A'_x + \beta_e \frac{V'}{c}\right)\\
A_y &= A'_y\\
A_z &= A'_z\\
\frac{V}{c} &= \gamma_e\left(\frac{V'}{c} + \beta_e A'_x\right)
\end{aligned}$$

5. *Tenseur de Faraday*

Le tenseur de Faraday est un tenseur de deuxième ordre, défini par :

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$$

c'est le commutateur des dérivées premières de $\tilde{A}$. Par sa définition, le tenseur de Faraday est antisymétrique.

Ses formes covariante et contravariante s'écrivent sous forme matricielle :

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y & -E_x/c \\ B_z & 0 & -B_x & -E_y/c \\ -B_y & B_x & 0 & -E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{bmatrix} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y & E_x/c \\ B_z & 0 & -B_x & E_y/c \\ -B_y & B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{bmatrix}$$

6. *Transformation einsteinienne des champs électrique et magnétique*

$$\begin{aligned}
E'_x &= cF^{1'4'} = c\left(\partial^{1'}A^{4'} - \partial^{4'}A^{1'}\right)\\
E'_x &= c\gamma_e^2\left(\partial^1 - \beta_e\partial^4\right)\left(\frac{V}{c} - \beta_e A^1\right) - c\gamma_e^2\left(\partial^4 - \beta_e\partial^1\right)\left(A^1 - \beta_e\frac{V}{c}\right)\\
E'_x &= c\gamma_e^2\left(\left(1-\beta_e^2\right)\left(\partial^1\frac{V}{c} - \partial^4 A^1\right) + \beta_e\left(\partial^4\frac{V}{c} - \partial^4\frac{V}{c}\right) + \beta_e\left(\partial^1 A^1 - \partial^1 A^1\right)\right)\\
E'_x &= c\left(\partial^1\frac{V}{c} - \partial^4 A^1\right) = cF^{14}
\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$E'_x = E_x$$

Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned}
E'_y &= c\,F^{2'4'} = c\left(\partial^{2'}A^{4'} - \partial^{4'}A^{2'}\right)\\
E'_y &= c\,\gamma_e\partial^2\left(\frac{V}{c} - \beta_e A^1\right) - c\gamma_e\left(\partial^4 - \beta_e\partial^1\right)A^2\\
E'_y &= c\,\gamma_e\left(\partial^2\frac{V}{c} - \partial^4 A^2 + \beta_e\left(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1\right)\right)\\
E'_y &= c\,\gamma_e\left(F^{24} + \beta_e F^{12}\right)
\end{aligned}$$

Soit :

$$E'_y = \gamma_e\left(E_y - \beta_e c B_z\right)$$

De la même manière, nous aurions trouvé :

$$E'_z = \gamma_e\left(E_z + \beta_e c B_y\right)$$

Nous calculons ensuite :

$$B'_x = F^{3'2'} = \partial^{3'}A^{2'} - \partial^{2'}A^{3'}$$
$$B'_x = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 = F^{32}$$

$$B'_x = B_x$$

Nous avons :

$$B'_y = F^{1'3'} = \partial^{1'}A^{3'} - \partial^{3'}A^{1'}$$
$$B'_y = \gamma_e\left(\partial^1 - \beta_e\partial^4\right)A^3 - \gamma_e\partial^3\left(A^1 - \beta_e\frac{V}{c}\right)$$
$$B'_y = \gamma_e\left(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 + \beta_e\left(\partial^3\frac{V}{c} - \partial^4 A^3\right)\right)$$
$$B'_y = \gamma_e\left(F^{13} + \beta_e F^{34}\right)$$

$$B'_y = \gamma_e\left(B_y + \beta_e\frac{E_z}{c}\right)$$

Nous aurions de même :

$$B'_z = \gamma_e\left(B_z - \beta_e\frac{E_y}{c}\right)$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & cB'_x &= cB_x \\ E'_y &= \gamma_e\left(E_y - \beta_e cB_z\right) & cB'_y &= \gamma_e\left(cB_y + \beta_e E_z\right) \\ E'_z &= \gamma_e\left(E_z + \beta_e cB_y\right) & cB'_z &= \gamma_e\left(cB_z - \beta_e E_y\right) \end{aligned}$$

Nous avons ci-dessous les expressions vectorielles de la transformation du champ électromagnétique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E'_{//}} &= \overrightarrow{E_{//}} & c\overrightarrow{B'_{//}} &= c\overrightarrow{B_{//}} \\ \overrightarrow{E'_{\perp}} &= \gamma_e\left(\overrightarrow{E_{\perp}} + c\overrightarrow{\beta_e} \wedge \overrightarrow{B_{\perp}}\right) & c\overrightarrow{B'_{\perp}} &= \gamma_e\left(c\overrightarrow{B_{\perp}} - \overrightarrow{\beta_e} \wedge \overrightarrow{E_{\perp}}\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons les invariants suivants :

$$\vec{E} \cdot c\vec{B} = \left(\overrightarrow{E_{//}} + \overrightarrow{E_{\perp}}\right) \cdot c\left(\overrightarrow{B_{//}} + \overrightarrow{B_{\perp}}\right) = \overrightarrow{E_{//}} \cdot c\overrightarrow{B_{//}} + \overrightarrow{E_{\perp}} \cdot c\overrightarrow{B_{\perp}}$$

or on a : $\overrightarrow{E_{//}} \cdot c\overrightarrow{B_{//}} = \overrightarrow{E'_{//}} \cdot c\overrightarrow{B'_{//}}$. On peut montrer aussi $\overrightarrow{E_{\perp}} \cdot c\overrightarrow{B_{\perp}} = \overrightarrow{E'_{\perp}} \cdot c\overrightarrow{B'_{\perp}}$, donc :

$$\boxed{\vec{E} \cdot c\vec{B} = \vec{E'} \cdot c\vec{B'}}$$

Un autre invariant important est $E^2 - c^2B^2$.

$$E^2 - c^2B^2 = \left(\overrightarrow{E_{//}} + \overrightarrow{E_{\perp}}\right)^2 - c^2\left(\overrightarrow{B_{//}} + \overrightarrow{B_{\perp}}\right)^2$$
$$E^2 - c^2B^2 = E_{//}^2 - c^2B_{//}^2 + E_{\perp}^2 - c^2B_{\perp}^2$$
$$E^2 - c^2B^2 = E'^2_{//} - c^2B'^2_{//} + E'^2_{\perp} - c^2B'^2_{\perp}$$
$$\boxed{E^2 - c^2B^2 = E'^2 - c^2B'^2}$$

II. Équations de Maxwell sous forme tensorielle

Comme les composantes du tenseur de Faraday sont celles des champs magnétique et électrique, nous devinons que les équations de Maxwell, écrites avec ce formalisme, vont faire intervenir les dérivées premières de ce tenseur.

Les deux équations, indépendantes l'une de l'autre, qui sont identiques aux quatre équations de Maxwell, sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \\ \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \end{array}}$$

avec $j^\mu = \left(\vec{j}, \rho c\right)$.

Vérifions que nous retrouvons bien les équations de Maxwell "classiques" avec ces deux formules.

Dans la première de ces deux relations, faisons $\nu = 4$:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu F^{\mu 4} = \mu_0 j^4 = \mu_0 \rho c \\ \Leftrightarrow\ & \partial_1 F^{14} + \partial_2 F^{24} + \partial_3 F^{34} = \mu_0 \rho c \\ \Leftrightarrow\ & \partial_x \left(\frac{E_x}{c}\right) + \partial_y \left(\frac{E_y}{c}\right) + \partial_z \left(\frac{E_z}{c}\right) = \mu_0 \rho c \\ \Leftrightarrow\ & \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \mu_0 c^2 \rho \\ \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

De même, en faisant $\nu = 1$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1 \\ \Leftrightarrow\ & \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_4 F^{41} = \mu_0 j^1 \\ \Leftrightarrow\ & \partial_y B_z - \partial_z B_y - \frac{1}{c^2}\partial_t E_x = \mu_0 j_x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{B}\right]_x = \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0\, \partial_t E_x \end{aligned}$$

En faisant pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$, nous trouvons finalement :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Le deuxième groupe d'équations se trouve en procédant de la même manière.

Sachant que $\sum_{\rho \neq \sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 2 \sum_{\rho < \sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, nous avons en posant $\mu = 4$:

$$\begin{aligned} & 2\left(\varepsilon^{4123}\partial_1 F_{23} + \varepsilon^{4213}\partial_2 F_{13} + \varepsilon^{4312}\partial_3 F_{12}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \\ \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

En prenant $\mu = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} &2\left(\varepsilon^{1234}\partial_2 F_{34} + \varepsilon^{1324}\partial_3 F_{24} + \varepsilon^{1423}\partial_4 F_{23}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\partial_y E_z + \partial_z E_y - \partial_t B_x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}\right]_x = -\partial_t B_x \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Nous avons donc les équivalences suivantes, avec $j^\mu = \left(\vec{j}, \rho c\right)$:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\ \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Notons également que le tenseur dual s'écrit par définition :

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

ce qui revient à écrire les équations de Maxwell sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \\ &\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \end{aligned}}$$

Jauge de Lorenz :

Nous avions précédemment, sous la jauge de Lorenz :

$$\Box\ \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$
$$\Box\ V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nous pouvons écrire maintenant, avec $\Box\left(\dfrac{V}{c}\right) = \dfrac{\rho c}{c^2 \varepsilon_0} = \mu_0 \rho c$ et $\Box\ \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$:

$$\Box\ A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

Partie III : La relativité générale

Chapitre 1 : Analyse tensorielle

I. Vecteurs contravariants, vecteurs covariants

Un vecteur contravariant, noté $\vec{x} = x^i \overrightarrow{e_i}$, est le vecteur polaire classique. L'usage veut que l'on mette ses composantes avec un indice "en haut".Il y a sommation sur l'indice répété 2 fois, mais le signe $\sum$ a été omis volontairement (convention d'Einstein).

Lorsque la base à laquelle est rapporté le vecteur est quelconque, il est possible de décomposer le vecteur selon d'autres composantes que les composantes contravariantes, ce sont les composantes covariantes. Celles–ci sont définies de la manière suivante, avec un indice "en bas" :

$$x_j = \vec{x} \cdot \overrightarrow{e_j}$$

Le lien entre les deux types de composantes est établi par :

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{e_j} = \left(x^i \overrightarrow{e_i}\right) \cdot \overrightarrow{e_j} = x^i \left(\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}\right) = x^i g_{ij} = x_j$$

$$x_j = g_{ij} x^i$$

Le produit scalaire étant commutatif, nous avons $g_{ij} = g_{ji}$. De même, nous pourrions montrer que $x^j = g^{ij} x_i$ et $g^{ij} = g^{ji}$.

Lorsque la base est orthonormée, nous avons $g_{ij} = g^{ij}$.

Nous pouvons définir le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= x^i y^j \left(\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}\right) = g_{ij} x^i y^j \\ &= x_j y^j \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y_i$$

L'objet g_{ij} est appelé tenseur fondamental ou tenseur métrique.

II. Symboles de Cristoffel

Lorsqu'on définit une base associée à un point *M*, on dit que celle–ci est une base naturelle. Les vecteurs unitaires linéairement indépendants sont définis de la manière suivante :

$$\overrightarrow{e_k} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u^k}$$

où u^k sont les coordonnées curvilignes du point *M* par rapport à un repère cartésien fixe d'origine *O*.

Définissons la différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u^k} du^k = \overrightarrow{e_k} du^k$$

Lorsque l'espace dans lequel on travaille n'est pas euclidien, le repère naturel varie de point en point. Quand on passe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ au vecteur $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{OM}$, la base du repère naturel est changée en $\overrightarrow{e_i} + d\overrightarrow{e_i}$.
Nous trouvons que les $d\overrightarrow{e_i}$ peuvent se mettre sous la forme :

$$d\overrightarrow{e_i} = \Gamma_{i\ k}^{\ j} du^k \overrightarrow{e_j}$$

où $\Gamma_{i\ k}^{\ j}$ est un coefficient, appelé symbole de Cristoffel de deuxième espèce.

Exemple en coordonnées sphériques :

Soit un vecteur $\overrightarrow{OM} = r \sin\theta \cos\varphi\, \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi\, \vec{j} + r\cos\theta\, \vec{k}$

Les vecteurs (non–unitaires) formant une base associés au point M sont :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1} &= \partial_1 \vec{M} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\
\overrightarrow{e_2} &= \partial_2 \vec{M} = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - r\sin\theta\,\vec{k} \\
\overrightarrow{e_3} &= \partial_3 \vec{M} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{j}
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} = 1 \\
g_{22} &= \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} = r^2 \\
g_{33} &= \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_3} = r^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

donc le carré de l'intervalle entre deux points séparés d'une distance infinitésimale est :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Nous trouvons ensuite :

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{e_1} &= \frac{1}{r} d\theta\,\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{r} d\varphi\,\overrightarrow{e_3} \\
d\overrightarrow{e_2} &= -r d\theta\,\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{r} dr\,\overrightarrow{e_2} + \mathrm{cotan}\,\theta\, d\varphi\,\overrightarrow{e_3} \\
d\overrightarrow{e_3} &= -r\sin^2\theta d\varphi\,\overrightarrow{e_1} - \sin\theta\cos\theta\, d\varphi\,\overrightarrow{e_2} + \left(\frac{1}{r} dr + \mathrm{cotan}\,\theta\, d\theta\right)\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

Ainsi, par exemple :

$$\Gamma_{1\ 3}^{\ 3} = \frac{1}{r} \qquad\qquad \Gamma_{2\ 3}^{\ 3} = \mathrm{cotan}\,\theta$$

On définit aussi un autre symbole de Cristoffel de première espèce par la relation :

$$\Gamma_{kji} = g_{jl}\,\Gamma_{k\ i}^{\ l}$$

Trouvons maintenant le lien qui existe entre les g_{ij} et les symboles de Cristoffel. Nous avons :

$$g_{ij} = \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}$$

donc :

$$dg_{ij} = \overrightarrow{e_i} \cdot d\overrightarrow{e_j} + \overrightarrow{e_j} \cdot d\overrightarrow{e_i}$$

et d'après la formule de $d\overrightarrow{e_i}$:

$$\begin{aligned} dg_{ij} &= \overrightarrow{e_i} \cdot \Gamma_j{}^l{}_k du^k \overrightarrow{e_l} + \overrightarrow{e_j} \cdot \Gamma_i{}^l{}_k du^k \overrightarrow{e_l} \\ &= g_{il} \Gamma_j{}^l{}_k du^k + g_{jl} \Gamma_i{}^l{}_k du^k \\ &= \left(\Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} \right) du^k \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} du^k$$

donc, par identification :

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} = \partial_k g_{ij}$$

Par permutation circulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} &= \partial_i g_{jk} \\ \Gamma_{ihj} + \Gamma_{kij} &= \partial_j g_{ki} \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} \right)$$

d'où :

$$\boxed{\Gamma_j{}^i{}_k = g^{il} \; \Gamma_{jlk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk} \right)}$$

III. Dérivée covariante

Soit un vecteur $\vec{v} = v^i \overrightarrow{e_i}$. Cherchons comment varie ce vecteur. Sa différentielle totale s'écrit :

$$d\vec{v} = \overrightarrow{e_i} \cdot dv^i + v^i \cdot d\overrightarrow{e_i}$$

Nous avons vu plus haut que :

$$d\overrightarrow{e_i} = \Gamma_i{}^j{}_k du^k \overrightarrow{e_j}$$

Donc :

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \overrightarrow{e_i} \cdot dv^i + v^i \cdot \Gamma_i{}^j{}_k du^k \overrightarrow{e_j} \\ &= \left(dv^j + v^i \cdot \Gamma_i{}^j{}_k du^k \right) \overrightarrow{e_j} \\ &= \left(\partial_k v^j + v^i \cdot \Gamma_i{}^j{}_k \right) du^k \; \overrightarrow{e_j} \end{aligned}$$

La quantité entre parenthèse de la dernière égalité s'appelle dérivée covariante. Dans les coordonnées cartésiennes habituelles, les symboles de Cristoffel sont nuls et la dérivée covariante s'identifie à la dérivée ordinaire ∂_k. La dérivée covariante sera notée maintenant ∇_k.

Pour un vecteur covariant, la dérivée covariante s'écrit :

$$\nabla_k v_j = \partial_k v_j - v_i \cdot \Gamma_{j\ k}^{\ i}$$

Nous pouvons étendre cette définition pour les tenseurs. Prenons par exemple le tenseur t_{ij}^k. Sa dérivée covariante est :

$$\nabla_l\, t_{ij}^k = \partial_l\, t_{ij}^k + t_{ij}^m\, \Gamma_{l\ m}^{\ k} - t_{mj}^k\, \Gamma_{l\ i}^{\ m} - t_{im}^k\, \Gamma_{l\ j}^{\ m}$$

Dérivée covariante du tenseur métrique :

$$\begin{aligned}
\nabla_k\ g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - g_{mj}\Gamma_{k\ i}^{\ m} - g_{im}\Gamma_{k\ j}^{\ m} \\
\nabla_k\ g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{kji} - \Gamma_{kij} \\
\nabla_k\ g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right) \\
\nabla_k\ g_{ij} &= 0
\end{aligned}$$

Ceci constitue le théorème de Ricci.

Nous pouvons étendre toutes les définitions précédentes dans un espace comportant plus de trois dimensions. Nous noterons alors les objets mathématiques avec des indices grecs.

IV. Tenseur de Riemann–Cristoffel

Nous définissons un tenseur d'ordre 4, décrivant la courbure d'un espace à quatre dimensions (indices grecs), une fois contravariant et trois fois covariant, $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}$. C'est le commutateur des dérivées covariantes d'un vecteur :

$$\nabla_\rho(\nabla_\nu)\, v_\mu - \nabla_\nu(\nabla_\rho)\, v_\mu = -R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}\ v_\sigma$$

En passant les calculs, nous trouvons :

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\, \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\, \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma}}$$

Nous voyons que :

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = -R_{\mu\rho\nu}^{\sigma}$$

Nous pouvons construire un tenseur de Riemann–Cristoffel complètement covariant :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\nu\beta} R_{\mu\rho\sigma}^{\beta}$$

Nous avons ainsi :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho \partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\rho\nu}\right) - \Gamma_{\rho\ \nu}^{\ \lambda} \Gamma_{\mu\,\lambda\sigma} + \Gamma_{\sigma\ \nu}^{\ \lambda}\, \Gamma_{\mu\,\lambda\rho}$$

De cette relation, nous en déduisons la première identité de Bianchi :

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0}$$

Nous obtenons la deuxième identité de Bianchi en considérant la dérivée covariante de $R^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$.

$$\nabla_{\alpha} R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\,\mu} - \partial_{\sigma}\partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\rho\,\mu}$$

Par permutation circulaire sur les indices ρ, σ, α et en sommant, nous trouvons :

$$\boxed{\nabla_{\alpha} R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma} + \nabla_{\rho} R^{\lambda}_{\mu\sigma\alpha} + \nabla_{\sigma} R^{\lambda}_{\mu\alpha\rho} = 0}$$

V. Tenseur de Ricci, tenseur d'Einstein et courbure scalaire

Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant deux indices du tenseur de Riemann–Cristoffel :

$$\boxed{R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}}$$

La courbure scalaire R s'écrit :

$$\boxed{R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}$$

Exemple dans le cas de la sphère de rayon a :

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

où l'on a fixé $r = a$.

Les symboles de Cristoffel non nuls sont, avec $x^1 = \theta$ et $x^2 = \varphi$:

$$\Gamma^{1}_{2\,2} = -\sin\theta \cos\varphi$$
$$\Gamma^{1}_{1\,2} = \Gamma^{1}_{2\,1} = \text{cotan}\,\theta$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont :

$$R_{11} = \partial_1 \Gamma^{2}_{1\,2} + \Gamma^{2}_{1\,2}\Gamma^{2}_{1\,2} = -1$$
$$R_{22} = -\partial_1 \Gamma^{1}_{2\,2} + \Gamma^{1}_{2\,2}\Gamma^{2}_{1\,2} = -\sin^2\theta$$

La courbure scalaire est donc :

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = -\frac{2}{a^2}$$

Le tenseur d'Einstein se déduit de la deuxième identité de Bianchi. Cette dernière s'écrit :

$$\nabla_{\alpha} R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma} + \nabla_{\rho} R^{\lambda}_{\mu\sigma\alpha} + \nabla_{\sigma} R^{\lambda}_{\mu\alpha\rho} = 0$$

Faisons $\alpha = \lambda$:

$$\nabla_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma} + \nabla_{\rho} R^{\lambda}_{\mu\sigma\lambda} + \nabla_{\sigma} R^{\lambda}_{\mu\lambda\rho} = 0$$

donc

$$\nabla_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma} - \nabla_{\rho} R_{\mu\sigma} + \nabla_{\sigma} R_{\mu\rho} = 0$$

or $\nabla_\sigma R_{\mu\rho} = \nabla_\sigma \left(g_{\mu\nu} R^\nu_\rho\right) = g_{\mu\nu} \nabla_\sigma R^\nu_\rho$

donc, en multipliant par $g_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\lambda R^{\nu\lambda}_{\rho\sigma} - \nabla_\rho R^\nu_\sigma + \nabla_\sigma R^\nu_\rho = 0$$

Nous faisons $\nu = \sigma$:

$$\nabla_\lambda R^\lambda_\rho - \nabla_\rho R^\sigma_\sigma + \nabla_\sigma R^\sigma_\rho = 0$$

Nous changeons ensuite l'indice de sommation λ par σ :

$$\begin{aligned} & 2\nabla_\sigma R^\sigma_\rho - \nabla_\rho R^\sigma_\sigma = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\nabla_\sigma R^\sigma_\rho - \delta^\sigma_\rho \nabla_\sigma R = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \nabla_\sigma \left(R^\sigma_\rho - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\rho R \right) = 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un tenseur, appelé tenseur d'Einstein, dont la dérivée covariante est nulle :

$$\boxed{G^\sigma_\rho = R^\sigma_\rho - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\rho R}$$

c'est–à–dire, écrit sous sa forme entièrement covariante :

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}$$

VI. Équation des géodésiques dans un espace courbe

La métrique s'écrit :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Leftrightarrow ds = \left(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu\right)^{1/2}$$

c'est–à–dire :

$$ds = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{1/2} ds$$

La courbe géodésique est une courbe extrémale qui vérifie $\delta \int_A^B ds = 0$.

Cette relation équivaut à :

$$\boxed{\delta \int_A^B L\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha\right) ds = 0}$$

avec $L\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha\right) = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{1/2}$ et $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$.

Les équations de Lagrange s'écrivent : $\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$, nous avons donc :

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2}\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\mu\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2}\left(g_{\mu\nu}\delta^\mu_\alpha\ \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}\delta^\nu_\alpha\ \dot{x}^\mu\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2}\left(g_{\alpha\nu}\ \dot{x}^\nu + g_{\alpha\mu}\ \dot{x}^\mu\right)$$

Par symétrie sur les indices μ et ν dans la première parenthèse, nous pouvons poser :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2} g_{\alpha\mu}\ \dot{x}^\mu$$

donc :

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{-1/2} \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\mu}\ \dot{x}^\mu\right)$$

et ainsi, en combinant les deux relations :

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu\right) = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$
$$\left(\frac{d}{ds}g_{\alpha\mu}\right)\dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}g_{\alpha\mu}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda + g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

λ est un indice muet. Faisons $\lambda = \nu$:

$$g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \partial_\nu g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2\partial_\nu g_{\alpha\mu}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Par symétrie sur les indices μ et ν dans le membre $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, nous avons :

$$2\partial_\nu g_{\alpha\mu}\ \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \left(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Nous obtenons donc :

$$g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

ou :

$$g^{\alpha\beta}\ddot{x}_\alpha + \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\left(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$
$$\ddot{x}^\beta + \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$
$$\ddot{x}^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\ \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0}$$

C'est l'équation des géodésiques.

VII. Tenseur d'énergie–impulsion

Dans un repère lié à une particule, l'énergie de cette particule est $E = mc^2$. La densité d'énergie correspondante est $\rho_0 c^2$, que nous définirons égale à la composante T^{44} du tenseur $T^{\mu\nu}$.

Cherchons maintenant l'expression de ce tenseur dans n'importe quel repère. La loi de transformation tensorielle s'écrit :

$$T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}\, T^{\mu\nu}$$
$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\nu}$$
$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{4}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{4}}T^{44}$$
$$T^{\mu'\nu'} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{4}}\frac{dx^{\nu'}}{dx^{4}}\rho_0 c^2$$

d'où, en posant $u^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{cdt} = \left(\dfrac{\gamma}{c}\vec{v}, \gamma\right)$ la quadrivitesse en unités c,

$$T^{\mu'\nu'} = u^{\mu'}u^{\nu'}\rho_0 c^2$$

Ainsi, le tenseur d'énergie–impulsion $T^{\mu\nu}$ a le caractère tensoriel et est symétrique.

En posant $\rho = \gamma^2 \rho_0$, nous avons :

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho u^1u^1 & \rho u^1u^2 & \rho u^1u^3 & \rho cu^1 \\ \rho u^2u^1 & \rho u^2u^2 & \rho u^2u^3 & \rho cu^2 \\ \rho u^3u^1 & \rho u^3u^2 & \rho u^3u^3 & \rho cu^3 \\ \rho cu^1 & \rho cu^2 & \rho cu^3 & \rho c^2 \end{bmatrix}$$

Interprétation physique de T_{ij} :

T_{ij} est homogène à une force par unité de surface. Lorsque $i = j$, il s'agit de la pression p. Lorsque $i \neq j$, il s'agit de la viscosité.

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} p & \rho u^1u^2 & \rho u^1u^3 & \rho cu^1 \\ \rho u^2u^1 & p & \rho u^2u^3 & \rho cu^2 \\ \rho u^3u^1 & \rho u^3u^2 & p & \rho cu^3 \\ \rho cu^1 & \rho cu^2 & \rho cu^3 & \rho c^2 \end{bmatrix}$$

dans le cas des fluides parfaits, il n'y a pas de transferts d'énergie donc $T_{4i} = T_{i4} = 0$, et pas de viscosité. Le tenseur d'énergie impulsion se résume à :

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 \end{bmatrix}$$

Établissons sa formule générale :

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu}$$
$$T^{\mu'\nu'} = u'^{\mu} u'^{\nu} \rho c^2 + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{i}} p$$

or

$$\eta^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \eta^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{4}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{4}} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{i}}$$

d'où

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{i}} = u'^{\mu} u'^{\nu} - \eta^{\mu'\nu'}$$

Donc,

$$T^{\mu'\nu'} = u'^{\mu} u'^{\nu} \rho c^2 + \left(u'^{\mu} u'^{\nu} - \eta^{\mu'\nu'}\right) p$$
$$T^{\mu'\nu'} = \left(\rho c^2 + p\right) u^{\mu'} u^{\nu'} - p \eta^{\mu'\nu'}$$

Dans un espace décrit par la métrique $g_{\mu\nu}$, le tenseur d'énergie–impulsion s'écrit :

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \left(\rho c^2 + p\right) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}}$$

Dérivée covariante dans le cas général :

Nous avons : $T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}$ donc :

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

Ainsi, dans un système où les coordonnées curvilignes sont utilisées :

$$\boxed{\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0}$$

Nous voyons donc que $T^{\mu\nu}$ a les mêmes propriétés tensorielles que le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$.

Chapitre 2 : La gravitation newtonienne

I. La loi de la gravitation universelle

Formulée dans les Principia Mathematica en 1687, la loi de la gravitation universelle s'écrit :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$$

Elle est une généralisation des lois de Képler du mouvement des planètes. Elle permit de prévoir le mouvement parabolique ou hyperbolique de certaines comètes et aussi d'établir le mouvement de mobiles soumis à la pesanteur à la surface de la Terre.
Elle a également permis de découvrir la planète Neptune en observant le mouvement d'Uranus, mais elle a été incapable d'expliquer l'avance supplémentaire du périhélie de Mercure de 43" par siècle.

II. L'équation de Poisson

En posant $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, nous voyons que $\vec{g}$ dérive du potentiel $U = -\frac{GM}{r}$:

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,U$$

Nous en déduisons : $\text{div}\,\vec{g} = -\Delta U$ où Δ désigne le laplacien.

Calculons le flux de $\vec{g}$:

$$d\phi = \vec{g}\cdot d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2}dS\,\cos\theta = -GM\;d\Omega$$

$d\Omega$ représente l'angle solide élémentaire défini par : $d\Omega = \frac{\cos\theta}{r^2}dS$.

Donc :

$$\phi = -4\pi GM$$

Par ailleurs, le théorème de Gauss–Ostrogradski nous permet de dire :

$$\phi = \iint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\,\vec{g}\cdot dV$$

De plus, nous pouvons écrire :

$$M = \iiint_V \rho\, dV$$

Donc :

$$\phi = \iiint_V \text{div}\,\vec{g}\cdot dV = -4\pi G\iiint_V \rho\, dV$$

c'est–à–dire :

$$\text{div}\,\vec{g} = -\Delta U = -4\pi G\rho$$

$$\boxed{\Delta U = 4\pi G\rho}$$

C'est l'équation de Poisson. Nous pouvons en déduire l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, valable par exemple pour le mouvement des planètes.

III. Équation de mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel newtonien

Une particule de masse m est soumise à la loi de la gravitation universelle :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

En appliquant la troisième loi de Newton, nous obtenons :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

avec :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

or $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ donc :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

ce qui, en vertu de la loi de Newton, revient à écrire :

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$
$$\frac{1}{r}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

c'est–à–dire :

$$r^2\dot{\theta} = C$$

La constante C est appelée constante des aires.

Nous avons ensuite :

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r}$$

$$-\frac{GM}{r^2} = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}$$

En posant $u = \dfrac{1}{r}$,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{dr}{dt}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right) = -C\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Nous avons ainsi :

$$-GM\,u^2 = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - C^2u^3$$

En divisant par $-C^2u^2$, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}}$$

C'est l'équation de mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel créé par la masse M.

La solution de cette équation est :

$$\boxed{u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{p}}$$

$p = \dfrac{C^2}{GM}$ est appelé paramètre de la conique et e est son excentricité.

<u>Cas de la déviation d'un photon :</u>

Si on considère en mécanique classique qu'un photon possède une masse m_γ, alors sa trajectoire est solution de l'équation de mouvement établie ci–dessus. On peut montrer que, dans ce cas : $C = \dfrac{L}{m_\gamma}$, où L est le moment cinétique associé au photon. Par définition, $\vec{L} = \overrightarrow{AB} \wedge m_\gamma \vec{v}$, donc $L^2 = (b\,m_\gamma\,c)^2$ = constante. Ainsi, l'équation de mouvement se réécrit :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{b^2c^2}$$

dont la solution est : $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{GM\,m_\gamma^2}{L^2}(1 + e\cos\theta)$.

Pour un photon venant de l'infini, on a :

$$r \to \infty,\ u \to 0$$

c'est–à–dire :

$$1 + e \cos \theta = 0$$

On a ainsi :

$$\cos \theta = -\frac{1}{e} = \sin \frac{\delta}{2}$$

où δ est la déviation recherchée.

Lorsque $\theta \to 0, r \to b$ donc :

$$b = \frac{L^2}{GM\, m_\gamma^2} \frac{1}{1+e}$$

$$\Rightarrow e = \frac{L^2}{GM\, m_\gamma^2 b} - 1 = \frac{bc^2}{GM} - 1 \approx \frac{bc^2}{GM}$$

Donc

$$\left| \sin \frac{\delta}{2} \right| = \frac{1}{e} = \frac{GM}{bc^2} \approx \frac{\delta}{2}$$

c'est–à–dire :

$$\boxed{\delta = \frac{2GM}{bc^2}}$$

La théorie newtonienne de la gravitation prévoit une déviation du photon dans le cas où il posséderait une masse. Dans le cas où un photon frôlerait le bord du Soleil ($b = 6.96 \,.\, 10^8$ m, $M = 1.989 \,.\, 10^{30}$ kg), nous obtenons une déviation de 0.875".

Chapitre 3 : Bases de la relativité générale

I. Principes de la relativité générale

1. Principe d'équivalence

En relativité restreinte, les transformations de Lorentz ne sont valables que pour des référentiels galiléens. La question qui se pose est : pourquoi existe–t–il des repères privilégiés? Einstein a répondu qu'il n'existe pas de référentiels privilégiés et a proposé le principe d'équivalence comme base d'une nouvelle théorie. Le principe d'équivalence est un principe selon lequel, localement, il est impossible de distinguer un système soumis à un champ gravitationnel de celui soumis à une accélération.

Considérons un laboratoire en chute libre dans un champ gravitationnel. Les corps lâchés sans vitesse initiale se trouvant dans le laboratoire flottent librement s'ils n'ont pas de vitesse initiale, et ont une trajectoire rectiligne uniforme s'ils ont une vitesse initiale constante. Le laboratoire apparaît pour ceux qui sont à l'intérieur comme un laboratoire libre de toute force. C'est ce que l'on observe dans les stations spatiales. Pour un observateur extérieur, le laboratoire est soumis à l'attraction gravitationnelle. Si maintenant le laboratoire est infiniment loin de toute masse, les expériences menées à l'intérieur mènent aux mêmes résultats que ci-dessus.

Si ce même laboratoire est à la surface d'un corps (comme la Terre), les objets lâchés sans vitesse initiale chutent avec un mouvement uniformément accéléré vers le sol, tandis que les objets ayant une vitesse initiale suivent une trajectoire dont la forme est un arc de parabole. Si le laboratoire, loin de toute masse, est muni d'un moteur sous le plancher permettant de l'accélérer de manière uniforme, les objets auront un mouvement identique que s'ils étaient soumis à la pesanteur.

Ces expériences permettent de conclure que le champ gravitationnel peut être interprété comme un champ accéléré. Cela est équivalent à dire que la masse inertielle (participant au mouvement) est identique à la masse grave (participant aux interactions gravitationnelles).

2. La géométrie de l'espace–temps

L'idée d'Einstein est de dire que l'espace–temps dans lequel nous vivons n'est pas celui de la relativité restreinte mais un espace–temps déformé par la présence de matière. Nous pouvons alors formuler que la courbure de l'espace–temps est proportionnelle à la matière et l'énergie présentes, ce qui s'écrit :

$$\text{courbure} \propto \text{matière}$$

Pour formuler mathématiquement cette relation, nous utilisons le formalisme tensoriel. Nous connaissons le tenseur d'énergie–impulsion $T_{\mu\nu}$, dont la dérivée covariante est nulle, qui représente la matière. Nous devons lui associer un tenseur caractérisant la géométrie et ayant les mêmes propriétés que lui. Nous avons vu que ce tenseur est le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$. Nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}}$$

où χ est un coefficient de proportionnalité (constante de couplage).

Nous pouvons cependant remarquer qu'il existe une équation plus générale :

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}}$$

où Λ est appelée constante cosmologique.
Cette nouvelle relation est également valable car la dérivée covariante du premier membre est nulle.

3. *Détermination de la constante* χ

Le but est de rapprocher l'équation tensorielle d'Einstein à l'équation de Poisson : $\Delta U = 4\pi G\rho$.

L'accélération dans le champ de pesanteur décrit par la mécanique newtonienne est :

$$\vec{g} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,U$$

avec $U = -\frac{GM}{r}$, lorsque la source du champ gravitationnel possède une masse *M*.

Dans le cas d'un champ gravitationnel faible, on pose $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de la relativité restreinte. On a $h_{\mu\nu} << 1$ et $h_{\mu\nu}(\infty) \to 0$ (on retrouve la métrique de la relativité restreinte à une distance infinie de la source).

D'après l'équation des géodésiques établie plus haut, la seule composante significative est celle contenant $\mu = \nu = 4$ (car le tenseur d'énergie–impulsion se résume à sa composante $T_{44} = \rho c^2$) :

$$\frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{4\,4}\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 = 0$$

avec $\Gamma^\beta_{4\,4} = -\frac{1}{2} g^{\beta\nu}\partial_\nu g_{44} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{\beta\nu} + h^{\beta\nu}\right)\partial_\nu\left(\eta_{44} + h_{44}\right)$.

Donc $\Gamma^\beta_{44} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\beta\nu}\partial_\nu h_{44} = -\frac{1}{2}\partial^\beta h_{44}$.

Nous avons donc :

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2} - \frac{1}{2}\partial^\beta h_{44}\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 = 0$$

Faisons $\beta = 4$:

$$\frac{d^2x^4}{ds^2} - \frac{1}{2}\partial^4 h_{44}\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 = 0$$

or le champ gravitationnel newtonien est stationnaire donc $\partial^4 h_{44} = 0$, ce qui signifie que $\frac{d^2 x^4}{ds^2} = c\frac{d^2 t}{ds^2} = 0$ c'est–à–dire $\frac{dt}{ds} = \text{cst}$.

En divisant $\frac{d^2x^\beta}{ds^2} - \frac{1}{2}\partial^4 h_{44}\left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 = 0$ par $\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$, nous trouvons :

$$\frac{d^2x^\beta}{dt^2} - \frac{1}{2}\partial^4 h_{44}\, c^2 = 0$$

soit vectoriellement, pour $\beta \leq 3$:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{c^2}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, h_{44} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, h_{44} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

Donc $U = \frac{c^2}{2}h_{44} + \text{cste}$, or $h_{\mu\nu}(\infty) \to 0$ et $U(\infty) \to 0$ donc cste = 0, ce qui revient à écrire :

$$h_{44} = \frac{2U}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r}$$

Écrivons l'équation d'Einstein sous une autre forme ($\Lambda = 0$). Nous avons :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}$$

Multiplions membre à membre par $g^{\mu\nu}$, sachant que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$:

$$R - 2R = \chi g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$
$$R = -\chi T$$

En injectant ce résultat dans l'équation d'Einstein, nous obtenons alors :

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)}$$

Nous avons alors :

$$R_{44} = \chi\left(T_{44} - \frac{1}{2}g_{44}T\right) = \frac{1}{2}\chi\rho c^2$$

avec $R_{44} = \partial_4\Gamma_4{}^\beta{}_\beta - \partial_\beta\Gamma_4{}^\beta{}_4 + \Gamma_4{}^\lambda{}_4\Gamma_4{}^\beta{}_\lambda - \Gamma_4{}^\lambda{}_4\Gamma_\beta{}^\beta{}_4$. En faisant l'hypothèse $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, il ne reste que :

$$R_{44} = -\partial_\beta\Gamma_4{}^\beta{}_4 = \frac{1}{2}\partial^\beta\partial_\beta h_{44}$$

On obtient ainsi :

$$\partial^\beta\partial_\beta h_{44} = \chi\rho c^2$$
$$\Box\, h_{44} = \chi\rho c^2$$

Or on a vu que $h_{44} = \frac{2U}{c^2}$, donc :

$$\Box\, h_{44} = \frac{2}{c^2}\Box\, U$$

À la limite statique, $\Box\, U = -\Delta U$, c'est–à–dire :

$$\Box\, h_{44} = -\frac{2}{c^2}\Delta U = \chi\rho c^2$$

Or l'équation de Poisson s'écrit $\Delta U = 4\pi G\rho$, on a finalement :

$$\boxed{\chi = -\frac{8\pi G}{c^4}}$$

Ainsi, l'équation d'Einstein s'écrit :

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Remarquons la petitesse du coefficient de proportionnalité χ ($\approx -2.10^{-43}$) qui met bien en évidence que la gravitation est une interaction très faible.

II. Métrique de Schwarzschild

1. Établissement de la métrique de Schwarzschild

Schwarzschild a proposé dès 1916 une solution des équations d'Einstein en faisant les hypothèses suivantes :

– la constante cosmologique Λ est nulle.
– on considère le cas extérieur, c'est–à–dire en dehors de la source du champ gravitationnel ($\rho = 0$).
– le champ gravitationnel est à symétrie sphérique, faible et stationnaire.
– à une distance infinie de la source, la métrique de l'espace–temps est celle de la relativité restreinte.

D'après ce qui précède, la métrique s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

avec $\lambda(\infty) \to 0$ et $\nu(\infty) \to 0$ pour satisfaire la dernière hypothèse.

En posant $r = x^1$, $\theta = x^2$, $\varphi = x^3$, $ct = x^4$, les symboles de Cristoffel non nuls sont, avec $\nu' = \dfrac{d\nu}{dr}$:

$$\Gamma^1_{1\,4} = \frac{\nu'}{2} \qquad \Gamma^1_{4\,4} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \qquad \Gamma^1_{1\,1} = \frac{\lambda'}{2} \qquad \Gamma^1_{2\,2} = -r e^{-\lambda} \qquad \Gamma^3_{1\,3} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{3\,3} = -r \sin^2\theta \, e^{-\lambda} \qquad \Gamma^2_{1\,2} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^2_{3\,3} = -\sin\theta \cos\theta \qquad \Gamma^3_{2\,3} = \text{cotan}\,\theta$$

Dans l'hypothèse du cas extérieur, nous avons $T_{\mu\nu} = 0$ (donc $T = 0$), c'est–à–dire :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

soit, pour chaque composante :

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \qquad R_{22} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right) - 1$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2\theta \qquad R_{44} = -e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

Nous avons notamment $R_{11} = 0$ et $R_{44} = 0$ donc :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\nu''}{2}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'}{r}=0\\&\frac{\nu''}{2}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'}{r}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nu'=-\lambda' \text{ soit } \nu=-\lambda+\text{cste}\,.$$

Mais la condition d'avoir la métrique de la relativité restreinte à l'infini impose cste = 0.

Comme $\nu=-\lambda$, nous trouvons pour R_{22} :

$$R_{22}=\mathrm{e}^{\nu}\left(1+\nu' r\right)-1=0$$

Nous posons $y=\mathrm{e}^{\nu}$ pour obtenir :

$$r\,y'+y=1$$

y est de la forme $y=a+b\,r^{m}\Rightarrow y'=b\,m\,r^{m-1}$.

D'où :

$$ry'+y=a+b(1+m)\,r^{m}=1$$

Comme nous devons avoir asymptotiquement la métrique de la relativité restreinte, nous avons $a=1$, donc $m=-1$ car ni b ni r ne sont nuls.

Nous avons finalement :

$$\mathrm{e}^{\nu}=1+\frac{b}{r}$$

La métrique de Schwarzschild s'écrit donc :

$$ds^2=c^2\left(1+\frac{b}{r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{1+\frac{b}{r}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

2. *Détermination de b*

Le terme temporel de la métrique de Schwarzschild s'écrit en $g_{44}=\eta_{44}+h_{44}=1+h_{44}$. Or, nous avons déjà déterminé pour un champ faible la valeur de h_{44}. Nous obtenons ainsi :

$$h_{44}=\frac{2U}{c^2}=-\frac{2GM}{c^2r}=-\frac{r_S}{r}$$

où r_S est appelé rayon de Schwarzschild.

La métrique de Schwarzschild s'écrit finalement :

$$\boxed{ds^2=c^2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{r_S}{r}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2}$$

Il existe une métrique de Schwarzschild plus générale tenant compte de la constante cosmologique :

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r_S}{r}+\frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_S}{r}+\frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Comme nous le verrons par la suite, la valeur numérique de la constante cosmologique est très faible, surtout pour les cas dans le système solaire.

3. *Mouvement d'une particule dans un espace décrit par la métrique de Schwarzschild*

Nous rappelons tout d'abord que l'équation de mouvement dans un champ gravitationnel décrit par la mécanique de Newton est :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{C^2}$$

Pour établir l'équation de mouvement dans le cadre de la relativité générale, nous avons besoin de :

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2}+\Gamma_{\mu\,\nu}^{\,\beta}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0$$

et

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r_S}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_S}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Cette dernière relation s'écrit, en posant $e^\nu = e^{-\lambda} = 1-\frac{r_S}{r}$:

$$1-c^2e^\nu\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+e^\lambda\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0$$

Les équations des géodésiques s'écrivent, par exemple pour la variable r :

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\Gamma_{1\,1}^{\,1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\Gamma_{2\,2}^{\,1}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\Gamma_{3\,3}^{\,1}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\Gamma_{4\,4}^{\,1}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0$$

soit, en posant $\nu'=\frac{d\nu}{dr}$:

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r\,e^{-\lambda}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-r\sin\theta\, e^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\,\mathrm{cotan}\,\theta\,\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+2\frac{\nu'}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

Le champ est à symétrie sphérique donc nous pouvons choisir $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\theta = 0$:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{\nu'}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\frac{\nu'}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0 \qquad (3)$$

Ainsi, la forme modifiée de la métrique de Schwarzschild se réécrit :

$$1 - c^2\mathrm{e}^{\nu}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \mathrm{e}^{\lambda}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

D'après cette dernière relation, nous voyons que $\frac{d\varphi}{ds}$ est une fonction de r : $\frac{d\varphi}{ds} = u(r)$ donc (2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\,u(r)}{ds} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}u(r) = 0\\
\Rightarrow &\frac{d\,u(r)}{dr}\frac{dr}{ds} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}u(r) = 0\\
\Rightarrow &\frac{d\,u(r)}{u(r)} = -2\frac{dr}{r}
\end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$u(r) = \frac{A}{r^2}$$

où A est une constante.

De même, nous voyons que $\frac{dt}{ds} = u(\nu) = k\,\mathrm{e}^{-\nu}$. Donc en multipliant (4) par $\mathrm{e}^{\nu} = 1 - \frac{r_S}{r}$, nous avons :

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) - c^2k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{r_S}{r}\left(1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right) = c^2k^2 - 1$$

En utilisant le fait que $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{A}{r^2}$, nous obtenons :

$$\frac{A^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{A^2}{r^2} - \frac{r_S}{r}\left(1 + \frac{A^2}{r^2}\right) = c^2k^2 - 1$$

En posant $u = \frac{1}{r}$ et en divisant par A^2 :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{r_S}{A^2}u - r_S u^3 = \frac{c^2k^2 - 1}{A^2}$$

Nous dérivons par rapport à φ :

$$2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u\frac{du}{d\varphi} - \frac{r_S}{A^2}\frac{du}{d\varphi} - 3r_S u^2\frac{du}{d\varphi} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{du}{d\varphi}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{r_S}{2A^2} - \frac{3r_S}{2}u^2\right) = 0$$

La première solution $\frac{du}{d\varphi} = 0$ correspond à une trajectoire circulaire, résultant de la symétrie sphérique.

La deuxième solution s'écrit :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2A^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

En remarquant que $\frac{3GM}{c^2}u^2$ est faible devant l'unité et en comparant avec l'équation obtenue en champ newtonien, nous avons finalement :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{C^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2}$$

avec $C = cA$ la constante des aires (obtenue en mécanique classique).

Nous avons donc l'équation de mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel décrit par la métrique de Schwarzschild :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3GM}{c^2}u^2}$$

4. *Application à l'avance du périhélie d'une planète*

Dans le système solaire, les perturbations planétaires font avancer le périhélie des planètes. Pour Mercure, l'avance totale observée est de 574" par siècle. Les perturbations des planètes calculées avec l'équation de la mécanique classique $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{C^2}$ donnent une avance du périhélie de 531" par siècle. Il y a un écart résiduel de 43". Voyons si le terme supplémentaire de la relativité générale permet d'expliquer cette avance supplémentaire.

La solution $u_0 = \frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{p}$ de l'équation classique est une solution approchée de l'équation relativiste $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3GM}{c^2}u^2$.

Nous obtenons donc :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{1}{p}+\frac{3GM}{c^2p^2}\left(1+e\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)^2$$

En négligeant le terme en e^2 (qui n'a pas d'effet cumulatif) et remarquant que $\frac{3GM}{c^2p} << \frac{1}{p}$, nous avons :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{1}{p}+\frac{6GM}{c^2p^2}e\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)$$

La solution de cette équation est celle d'une ellipse perturbée :

$$u=A\cos\left(\alpha\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)+B \qquad \alpha\approx 1$$
$$u'=\frac{du}{d\varphi}=-A\,\alpha\sin\left(\alpha\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)$$
$$u''=-A\alpha^2\cos\left(\alpha\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)$$

Ainsi,

$$u''+u=A\left(1-\alpha^2\right)\cos\left(\alpha\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)+B$$

On identifie les constantes A et B en faisant $\alpha=1$ dans $u=A\cos\left(\alpha\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)+B$ et en utilisant la solution classique :

$$A=\frac{e}{p},\qquad B=\frac{1}{p}$$

On pose $\alpha=1+\varepsilon$ avec $|\varepsilon|<<1$ (ε peut être positif ou négatif). En négligeant le terme en ε^2, on a :

$$u''+u=\frac{1-2e\varepsilon\cos\left(\left(1+\varepsilon\right)\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)}{p}$$

Nous avons donc :

$$\frac{-2e\varepsilon}{p}=\frac{6GM}{p^2c^2}e$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon=-\frac{3GM}{pc^2}$$

Le périhélie se produit lorsque r est minimal, donc quand u est maximal, c'est–à–dire quand $(1+\varepsilon)\varphi=2\pi n$, où n est un entier positif. Ainsi,

$$\varphi=2\pi n\left(1+\varepsilon\right)^{-1}\approx 2\pi n\left(1-\varepsilon\right)$$

Pour deux périhélies successifs, $n=1$,

$$\varphi=2\pi\left(1-\varepsilon\right)=2\pi-2\pi\varepsilon$$

La différence, $\Delta\varphi=-2\pi\varepsilon$, correspond à une avance supplémentaire (car $\varepsilon<0$) du périhélie d'une valeur :

$$\boxed{\Delta\varphi=\frac{6\pi GM}{pc^2}=\frac{6\pi GM}{c^2a\left(1-e^2\right)}}$$

Dans le cas de Mercure, $p = 5.546.10^{10}$ m . Avec $M = 1.989.10^{30}\,kg$, nous trouvons :

$$\Delta\varphi = 5.019.10^{-7}\text{ rad}$$

La période de révolution de Mercure étant de 87.9 jours, nous avons pour un siècle :

$$\delta = \frac{\Delta\varphi \ \times 100 \times 365.25}{87.9} \approx 2.086.10^{-4}\text{ rad}$$

c'est–à–dire $\delta = 43.02''$ par siècle, ce qui est conforme avec ce qui est observé.

5. Déviation des rayons lumineux en relativité générale

Rappelons que si on attribue au photon une masse m_γ, on trouve une déviation $\delta = \frac{2GM}{bc^2}$ par la gravitation newtonienne.

Dans un espace décrit par la métrique de Schwarzschild, nous avions trouvé :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{A^2c^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

avec $r^2\frac{d\varphi}{ds} = A$. La géodésique d'un photon est $ds = 0$, donc A devient infini, ce qui revient à écrire :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2$$

On résout tout d'abord $u'' + u = 0$ dont la solution est : $u_0 = \frac{\cos\varphi}{b}$, solution que l'on porte dans l'équation de mouvement ci–dessus.

$$u'' + u = \frac{3GM}{b^2c^2}\cos^2\varphi$$

Une solution u_1 est de la forme :

$$u_1 = A\cos^2\varphi + B$$

donc

$$u_1' = -2A\sin\varphi\cos\varphi$$
$$u_1'' = -2A\cos 2\varphi = -4A\cos^2\varphi + 2A$$

$$u_1'' + u_1 = -3A\cos^2\varphi + 2A + B$$

En identifiant, on a :

$$\begin{cases} -3A = \dfrac{3GM}{b^2c^2} \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{GM}{b^2c^2} \\ B = -2A = \dfrac{2GM}{b^2c^2} \end{cases}$$

La solution générale est $u = u_0 + u_1$:

$$u = \frac{\cos\varphi}{b} - \frac{GM}{b^2c^2}\cos^2\varphi + \frac{2GM}{b^2c^2}$$

Le rayon lumineux d'une étoile semble provenir d'une distance infinie, donc, quand $r \to +\infty, u \to 0$:

$$\frac{\cos\varphi}{b} - \frac{GM}{b^2c^2}\cos^2\varphi + \frac{2GM}{b^2c^2} = 0$$
$$\Rightarrow \cos\varphi - \frac{GM}{bc^2}\cos^2\varphi + \frac{2GM}{bc^2} = 0$$

La déviation α s'exprime par $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\varphi$. Comme α est petit, $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ et $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha^2}{4} \approx 0$. Il reste donc :

$$\frac{\alpha}{2} = -\frac{2GM}{bc^2}$$

c'est–à–dire, en valeur absolue :

$$\boxed{\alpha = \frac{4GM}{bc^2}}$$

Nous voyons donc que la relativité générale prédit une déviation double de celle prévue par la mécanique classique ($\alpha = 2\delta$). Cette déviation, mesurée pour la première fois en 1919 par Sir Arthur Eddington lors d'une éclipse totale de Soleil, fournit une déviation de 1.98", comparable à la valeur issue de la relativité générale. Des mesures plus récentes sont en accord avec la Relativité Générale.

6. *Trous noirs*

Le concept de trous noirs fut imaginé bien avant la Relativité Générale. Il fut envisagé au XVIII[e] siècle, pour des corps dont la vitesse de libération dépasse celle de la lumière. Considérons un photon se déplaçant radialement dans la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} = 0$$
$$c\,dt = \frac{dr}{1 - \frac{r_S}{r}}$$

soit :

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$$

Si le rayon de Schwarzschild devient supérieur à *r*, la lumière ne peut s'extraire de l'attraction du corps, ce dernier est un trou noir. Si le rayon du Soleil avait une valeur de 2950m, celui-ci serait un trou noir. La Terre serait un trou noir si elle avait un rayon de 8.8mm.