

Universidad Nacional de Ingeniería

FACULTAD DE CIENCIAS



ESTUDIO COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA DE LOS 3 CUERPOS

Seminario de tesis I

Autor:

Junior Ulises Guevara Tanta

Asesor:

CHULLUNCUY REYNOSO AMERICO ANDRES

(Lima - Perú)

2023

Índice

1. Resumen	1
2. Introducción	1
3. Formulación matemática	2
4. Soluciones conocidas del problema de los tres cuerpos	3
4.1. Órbitas clásicas	3
4.2. Órbita de la Figura 8	4
5. Métodos de integración	5
5.1. Método de Euler	5

1. Resumen

Breve introducción al Problema de los 3 Cuerpos.
Descripción de la motivación para el estudio computacional.
Declaración de los objetivos del proyecto.

2. Introducción

El dilema relacionado con los tres cuerpos implica el análisis del movimiento de tres objetos que interactúan entre sí de acuerdo con las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación universal de Newton. Mientras que el caso de dos cuerpos que se influyen gravitacionalmente se puede resolver por completo y fue solucionado por Newton en el siglo XVII, el caso de tres cuerpos no se resolvió por completo y se convirtió en un problema de gran relevancia en el siglo XVIII [1]. En tiempos recientes, el problema de los tres cuerpos ha adquirido una considerable importancia debido a sus numerosas aplicaciones en Astronomía, como por ejemplo en la investigación de exoplanetas y en la determinación de las trayectorias de naves espaciales. //

En el siglo XVIII, Euler y Lagrange lograron encontrar soluciones analíticas para este problema bajo un conjunto específico de condiciones iniciales, es decir, las posiciones iniciales y velocidades de los cuerpos. Estas dos soluciones son las únicas soluciones explícitas conocidas para el problema completo de los tres cuerpos. Durante este período, Euler también se ocupó del sistema Sol-Tierra-Luna, considerando que la Luna carece de masa, lo que hoy se conoce como el problema restringido de los tres cuerpos. Sin embargo, fue necesario esperar hasta el siglo XX para obtener una solución en forma de serie para el problema de los tres cuerpos, la cual es aplicable en la mayoría de las condiciones iniciales, especialmente cuando el momento angular total del sistema no es igual a cero. No obstante, estas soluciones en serie resultan prácticamente inutilizables en la práctica debido a su convergencia extremadamente lenta, lo que impide extraer información útil de ellas. Por lo tanto, es imprescindible recurrir a métodos numéricos para obtener soluciones al problema de los tres cuerpos [1].

En los últimos años, se han descubierto varias soluciones al enigma de los tres cuerpos, aunque la mayoría de ellas se caracterizan por su falta de estabilidad. Sin embargo, para abordar este análisis de manera efectiva, resulta fundamental definir el método a utilizar. Con este propósito,

se realizará una evaluación exhaustiva de diferentes métodos y se llevará a cabo una comparación entre ellos.

3. Formulación matemática

Los desplazamientos de tres objetos que experimentan interacciones gravitacionales se rigen por las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación universal de Newton. En el caso de cuerpos con masas m_1 , m_2 y m_3 , ubicados en posiciones r_1 , r_2 y r_3 , se pueden expresar las ecuaciones de movimiento de la siguiente manera [2]:

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 &= -G \frac{m_2(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3} - G \frac{m_3(r_1 - r_3)}{|r_1 - r_3|^3} \\ \ddot{r}_2 &= -G \frac{m_1(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} - G \frac{m_3(r_2 - r_3)}{|r_2 - r_3|^3} \\ \ddot{r}_3 &= -G \frac{m_1(r_3 - r_1)}{|r_3 - r_1|^3} - G \frac{m_2(r_3 - r_2)}{|r_3 - r_2|^3}\end{aligned}\tag{1}$$

Cuando nos enfocamos en un movimiento limitado a un plano, nos encontramos con un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de segundo orden. Sin embargo, es comúnmente ineficiente tratar con EDOs de segundo orden, y resulta mucho más práctico abordar EDOs de primer orden. Si consideramos las posiciones r_i de los cuerpos y sus velocidades v_i de manera separada, podemos reformular este sistema como un conjunto de EDOs de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= v_1 \\ \dot{r}_2 &= v_2 \\ \dot{r}_3 &= v_3 \\ \dot{v}_1 &= -G \frac{m_2(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3} - G \frac{m_3(r_1 - r_3)}{|r_1 - r_3|^3} \\ \dot{v}_2 &= -G \frac{m_1(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} - G \frac{m_3(r_2 - r_3)}{|r_2 - r_3|^3} \\ \dot{v}_3 &= -G \frac{m_1(r_3 - r_1)}{|r_3 - r_1|^3} - G \frac{m_2(r_3 - r_2)}{|r_3 - r_2|^3}\end{aligned}\tag{2}$$

Cuando se trata de un movimiento restringido al plano, nos enfrentamos a un conjunto de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En este tipo de sistema, existen ciertas cantidades conocidas como integrales de movimiento que se mantienen constantes, incluyendo la energía total E del sistema, el momento angular total L del sistema (es importante destacar que este es un vector y, además, es perpendicular al plano del movimiento, es decir, el plano xy), y el momento lineal del centro de masa, P . En consecuencia, al obtener cualquier solución numérica para el problema de los tres cuerpos, estas magnitudes se conservan [1]. Podemos expresar estas cantidades de manera explícita como se indica a continuación :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |v_i|^2 - G \sum_{\substack{i=1 \\ j < i}}^3 \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|} \quad (3)$$

$$L = \left| \sum_{i=1}^3 m_i r_i \times v_i \right| \quad (4)$$

$$P = \sum_{i=1}^3 m_i v_i \quad (5)$$

4. Soluciones conocidas del problema de los tres cuerpos

4.1. Órbitas clásicas

Como se explicó en la introducción, aunque el sistema que describe el movimiento de tres cuerpos que interactúan gravitatoriamente no puede, en términos generales, resolverse de manera analítica, se han identificado dos soluciones analíticas específicas, atribuidas a Euler y Lagrange. En la órbita de Euler, los tres cuerpos inician en una disposición lineal, y los dos cuerpos exteriores siguen una trayectoria circular alrededor del cuerpo central, que se ubica en el centro de este círculo (consulte la Figura 1a). En la órbita de Lagrange, los tres cuerpos parten desde los vértices de un triángulo equilátero y siguen una trayectoria circular, manteniendo la estructura triangular en todo momento (ver Figura 1b) [2].

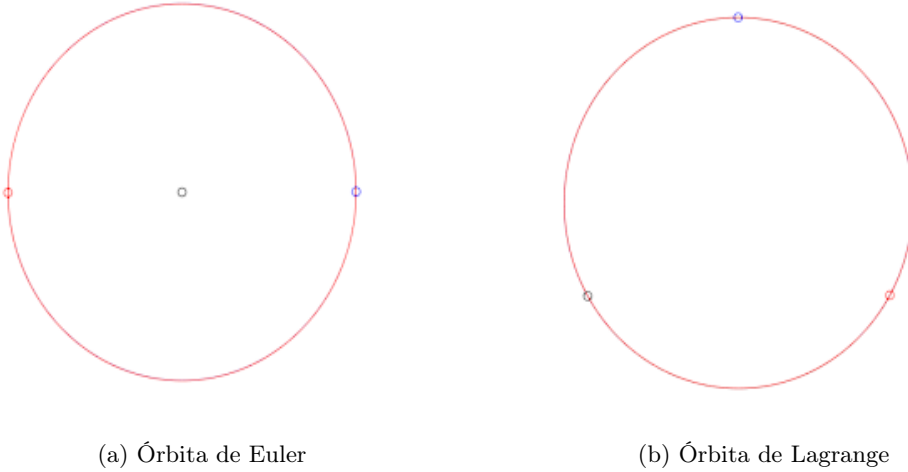


Figura 1: Órbitas clásicas de tres cuerpos

A pesar de que estas soluciones se describen con expresiones analíticas precisas, presentan inestabilidad, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales resultan en cambios significativos en el comportamiento de largo plazo de los cuerpos. En términos generales, encontrar órbitas que no sean inestables resulta una tarea desafiante. Sin embargo, existe una órbita estable conocida para sistemas con $N > 2$ y tres masas iguales, y se trata de la órbita de tres cuerpos en forma de 8 [2].

4.2. Órbita de la Figura 8

La órbita en forma de figura 8, también conocida como la órbita de la figura-8, representa la única solución estable que se conoce hasta ahora para el problema de los tres cuerpos. En esta órbita particular, los tres cuerpos inicialmente se alinean en una configuración lineal y luego siguen una trayectoria que se asemeja a un número 8, tal como se ilustra en la Figura 2 [2].

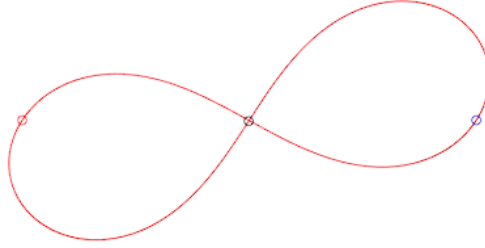


Figura 2: Órbita de la Figura 8

Para crear esta órbita las condiciones iniciales son las siguientes [3]:

$$r_1(0) = -r_3(0) = (-0,97000436, 0,24208753)$$

$$r_2(0) = (0, 0)$$

$$v_1(0) = v_3(0) = (0,4662036850, 0,4323657300)$$

$$v_2(0) = (-0,933240737, -0,86473146)$$

$$m_1 = m_2 = m_3$$

Estas son las posiciones iniciales, $r_1(0)$ y $-r_3(0)$, de las partículas 1 y 3, que son idénticas debido a que se encuentran en lados opuestos del origen de coordenadas. Estas posiciones se representan en un sistema de coordenadas bidimensional y se utilizan para definir la disposición inicial de dos de las partículas en el sistema. La partícula 1 tiene una coordenada x negativa y una coordenada y positiva, mientras que la partícula 3 tiene una coordenada x positiva y una coordenada y positiva y $r_2(0)$ esta es la posición inicial de la partícula 2, que se encuentra en el origen del sistema de coordenadas.

Las velocidades iniciales, $v_1(0)$ y $v_3(0)$, de las partículas 1 y 3, que son idénticas debido a que tienen la misma magnitud y dirección. Estas velocidades se utilizan para describir cómo se están moviendo las partículas 1 y 3 en el momento inicial. Ambas partículas tienen componentes en las direcciones x e y y $v_2(0)$ esta es la velocidad inicial de la partícula 2, que tiene componentes distintas en las direcciones x e y .

Las masas de las tres partículas, denotadas como m_1 , m_2 y m_3 , son iguales. Esto implica que las partículas tienen la misma cantidad de masa y, por lo tanto, influyen de manera equivalente en las fuerzas gravitatorias que se ejercen entre ellas.

5. Métodos de integración

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que describe el movimiento de los cuerpos, es necesario recurrir a un solucionador numérico para obtener una aproximación de la solución. Existen diversos solucionadores disponibles, cada uno con diferentes niveles de precisión (orden) y propiedades específicas. En este proyecto, se han implementado cuatro métodos distintos: Euler, Runge-Kutta de cuarto orden, Verlet y Leapfrog.

Dado que la órbita se desarrolla en un plano, el momento angular que se ha considerado en las leyes de conservación es la componente z , L_z . Además, los intervalos de tiempo utilizados se expresan en relación al período de la órbita, que en este caso es igual a 6.325 [3].

5.1. Metodo de Euler

Este método es el solucionador numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) más básico. Cuando trabajamos con un sistema expresado en forma vectorial, como $\dot{y} = f(t, y)$, y un intervalo de tiempo δt , el valor de y en el momento $t + \delta t$, denotado como y_{i+1} , se determina en función del valor de y en el instante t , que es y_i . Esto se calcula de la siguiente manera [3]:

$$y_{i+1} = y_i + f(t, y_i)\delta t \quad (6)$$

Este es un método de primer orden, lo que significa que el error en la estimación realizada es proporcional al valor del intervalo δt . Esto implica que el método resulta en aproximaciones poco precisas, y se requiere seleccionar un paso de tiempo extremadamente reducido para lograr una aproximación de calidad [3]. Esta limitación se refleja en la Figura 4, donde se emplearon 1000 intervalos de tiempo por período de la órbita.

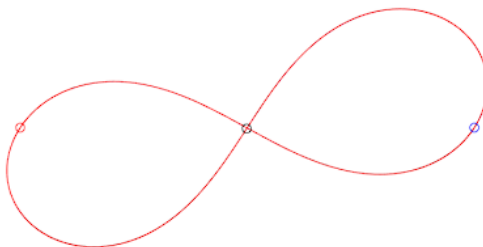


Figura 3: Órbita de la Figura 8 con el método de Euler

Referencias

- [1] Zdzislaw E Musielak y Billy Quarles. «The three-body problem». En: *Reports on Progress in Physics* 77.6 (2014), pág. 065901.
- [2] Richard Montgomery. «A new solution to the three-body problem». En: *differential equations* 1001 (2001), pág. d2xi.
- [3] Kendall Atkinson, Weimin Han y David E Stewart. *Numerical solution of ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2011.