

Universidad Nacional de Ingeniería

FACULTAD DE CIENCIAS



ESTUDIO COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA DE LOS 3 CUERPOS

Seminario de tesis I

Autor:

Junior Ulises Guevara Tanta

Asesor:

CHULLUNCUY REYNOSO AMERICO ANDRES

(Lima - Perú)

2023

Índice

1. Resumen	1
2. Introducción	1
3. Formulación matemática	2
4. Soluciones conocidas del problema de los tres cuerpos	3
4.1. Órbitas clásicas	3
4.2. Órbita de la Figura 8	4
5. Métodos de integración	5
5.1. Método de Euler	6
5.2. Método de Runge-Kutta	8
5.3. Método de Runge-Kutta-Fehlberg	10
5.4. Método de Verlet	13
5.5. Comparación de los métodos de integración	16
6. Estabilidad de la órbita de la Figura 8	16

1. Resumen

El proyecto tiene como finalidad estudiar el problema de los tres cuerpos y sus diversas órbitas, como la figura-8. Para lograrlo, se explorarán cuatro métodos de integración numérica y se seleccionará el más adecuado. Luego, se investigará la estabilidad de la órbita figura-8 al perturbar las velocidades de los cuerpos.

2. Introducción

El dilema relacionado con los tres cuerpos implica el análisis del movimiento de tres objetos que interactúan entre sí de acuerdo con las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación

universal de Newton. Mientras que el caso de dos cuerpos que se influyen gravitacionalmente se puede resolver por completo y fue solucionado por Newton en el siglo XVII, el caso de tres cuerpos no se resolvió por completo y se convirtió en un problema de gran relevancia en el siglo XVIII [1]. En tiempos recientes, el problema de los tres cuerpos ha adquirido una considerable importancia debido a sus numerosas aplicaciones en Astronomía, como por ejemplo en la investigación de nuevos planetas y en la determinación de las trayectorias de satélites.

En el siglo XVIII, Euler y Lagrange lograron encontrar soluciones analíticas para este problema bajo un conjunto específico de condiciones iniciales, es decir, las posiciones iniciales y velocidades de los cuerpos. Estas dos soluciones son las únicas soluciones explícitas conocidas para el problema completo de los tres cuerpos. Durante este período, Euler también se ocupó del sistema Sol-Tierra-Luna, considerando que la Luna carece de masa, lo que hoy se conoce como el problema restringido de los tres cuerpos. Sin embargo, fue necesario esperar hasta el siglo XX para obtener una solución en forma de serie para el problema de los tres cuerpos, la cual es aplicable en la mayoría de las condiciones iniciales, especialmente cuando el momento angular total del sistema no es igual a cero. No obstante, estas soluciones en serie resultan prácticamente inutilizables en la práctica debido a su convergencia extremadamente lenta, lo que impide extraer información útil de ellas. Por lo tanto, es imprescindible recurrir a métodos numéricos para obtener soluciones al problema de los tres cuerpos [1].

En los últimos años, se han descubierto varias soluciones al enigma de los tres cuerpos, aunque la mayoría de ellas se caracterizan por su falta de estabilidad. Sin embargo, para abordar este análisis de manera efectiva, resulta fundamental definir el método a utilizar. Con este propósito, se realizará una evaluación exhaustiva de diferentes métodos y se llevará a cabo una comparación entre ellos.

3. Formulación matemática

Los desplazamientos de tres objetos que experimentan interacciones gravitacionales se rigen por las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación universal de Newton. En el caso de cuerpos con masas m_1 , m_2 y m_3 , ubicados en posiciones r_1 , r_2 y r_3 , se pueden expresar las ecuaciones de movimiento de la siguiente manera [2]:

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 &= -G \frac{m_2(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3} - G \frac{m_3(r_1 - r_3)}{|r_1 - r_3|^3} \\ \ddot{r}_2 &= -G \frac{m_1(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} - G \frac{m_3(r_2 - r_3)}{|r_2 - r_3|^3} \\ \ddot{r}_3 &= -G \frac{m_1(r_3 - r_1)}{|r_3 - r_1|^3} - G \frac{m_2(r_3 - r_2)}{|r_3 - r_2|^3}\end{aligned}\tag{1}$$

Cuando nos enfocamos en un movimiento limitado a un plano, nos encontramos con un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de segundo orden. Sin embargo, es comúnmente ineficiente tratar con EDOs de segundo orden, y resulta mucho más práctico abordar EDOs de

primer orden. Si consideramos las posiciones r_i de los cuerpos y sus velocidades v_i de manera separada, podemos reformular este sistema como un conjunto de EDOs de primer orden:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= v_1 \\
\dot{r}_2 &= v_2 \\
\dot{r}_3 &= v_3 \\
\dot{v}_1 &= -G \frac{m_2(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3} - G \frac{m_3(r_1 - r_3)}{|r_1 - r_3|^3} \\
\dot{v}_2 &= -G \frac{m_1(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} - G \frac{m_3(r_2 - r_3)}{|r_2 - r_3|^3} \\
\dot{v}_3 &= -G \frac{m_1(r_3 - r_1)}{|r_3 - r_1|^3} - G \frac{m_2(r_3 - r_2)}{|r_3 - r_2|^3}
\end{aligned} \tag{2}$$

Cuando se trata de un movimiento restringido al plano, nos enfrentamos a un conjunto de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En este tipo de sistema, existen ciertas cantidades conocidas como integrales de movimiento que se mantienen constantes, incluyendo la energía total E del sistema, el momento angular total L del sistema (es importante destacar que este es un vector y, además, es perpendicular al plano del movimiento, es decir, el plano xy), y el momento lineal del centro de masa, P . En consecuencia, al obtener cualquier solución numérica para el problema de los tres cuerpos, estas magnitudes se conservan [1]. Podemos expresar estas cantidades de manera explícita como se indica a continuación :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |v_i|^2 - G \sum_{\substack{i=1 \\ j < i}}^3 \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|} \tag{3}$$

$$L = \left| \sum_{i=1}^3 m_i r_i \times v_i \right| \tag{4}$$

$$P = \sum_{i=1}^3 m_i v_i \tag{5}$$

4. Soluciones conocidas del problema de los tres cuerpos

4.1. Orbitas clásicas

Como se explicó en la introducción, aunque el sistema que describe el movimiento de tres cuerpos que interactúan gravitatoriamente no puede, en términos generales, resolverse de manera analítica, se han identificado dos soluciones analíticas específicas, atribuidas a Euler y Lagrange. En la órbita de Euler, los tres cuerpos inician en una disposición lineal, y los dos cuerpos exteriores siguen una trayectoria circular alrededor del cuerpo central, que se ubica en el centro de

este círculo (consulte la Figura 1a). En la órbita de Lagrange, los tres cuerpos parten desde los vértices de un triángulo equilátero y siguen una trayectoria circular, manteniendo la estructura triangular en todo momento (ver Figura 1b) [2].

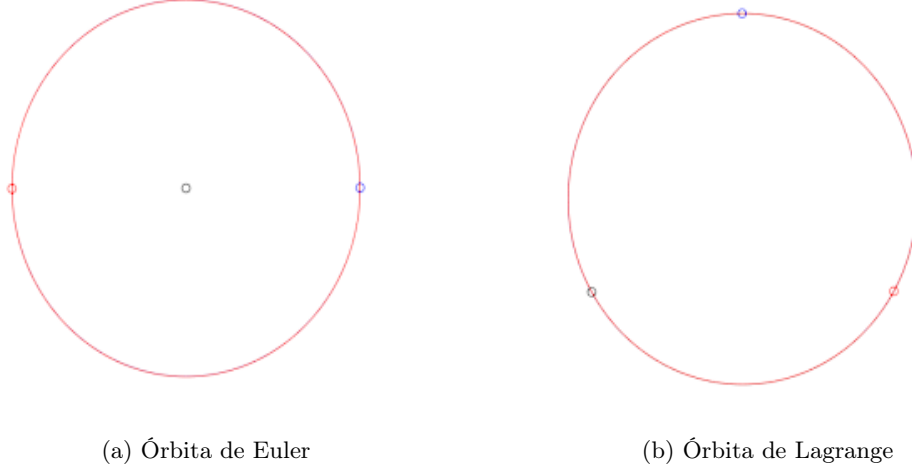


Figura 1: Órbitas clásicas de tres cuerpos

A pesar de que estas soluciones se describen con expresiones analíticas precisas, presentan inestabilidad, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales resultan en cambios significativos en el comportamiento de largo plazo de los cuerpos. En términos generales, encontrar órbitas que no sean inestables resulta una tarea desafiante. Sin embargo, existe una órbita estable conocida para sistemas con $N > 2$ y tres masas iguales, y se trata de la órbita de tres cuerpos en forma de 8 [2].

4.2. Órbita de la Figura 8

La órbita en forma de figura 8, también conocida como la órbita de la figura-8, representa la única solución estable que se conoce hasta ahora para el problema de los tres cuerpos. En esta órbita particular, los tres cuerpos inicialmente se alinean en una configuración lineal y luego siguen una trayectoria que se asemeja a un número 8, tal como se ilustra en la Figura 2 [2].

Para crear esta órbita las condiciones iniciales son las siguientes [3]:

$$\begin{aligned}
 r_1(0) &= -r_3(0) = (-0,97000436, 0,24208753) \\
 r_2(0) &= (0, 0) \\
 v_1(0) &= v_3(0) = (0,4662036850, 0,4323657300) \\
 v_2(0) &= (-0,933240737, -0,86473146) \\
 m_1 &= m_2 = m_3
 \end{aligned}$$

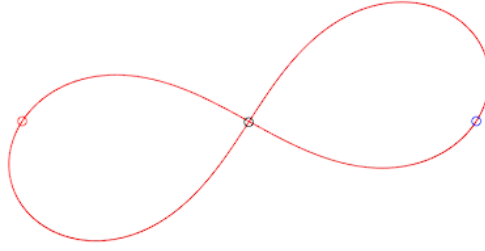


Figura 2: Órbita de la Figura 8

Estas son las posiciones iniciales, $r_1(0)$ y $-r_3(0)$, de las partículas 1 y 3, que son idénticas debido a que se encuentran en lados opuestos del origen de coordenadas. Estas posiciones se representan en un sistema de coordenadas bidimensional y se utilizan para definir la disposición inicial de dos de las partículas en el sistema. La partícula 1 tiene una coordenada x negativa y una coordenada y positiva, mientras que la partícula 3 tiene una coordenada x positiva y una coordenada y positiva y $r_2(0)$ esta es la posición inicial de la partícula 2, que se encuentra en el origen del sistema de coordenadas.

Las velocidades iniciales, $v_1(0)$ y $v_3(0)$, de las partículas 1 y 3, que son idénticas debido a que tienen la misma magnitud y dirección. Estas velocidades se utilizan para describir cómo se están moviendo las partículas 1 y 3 en el momento inicial. Ambas partículas tienen componentes en las direcciones x e y y $v_2(0)$ esta es la velocidad inicial de la partícula 2, que tiene componentes distintas en las direcciones x e y .

Las masas de las tres partículas, denotadas como m_1 , m_2 y m_3 , son iguales. Esto implica que las partículas tienen la misma cantidad de masa y, por lo tanto, influyen de manera equivalente en las fuerzas gravitatorias que se ejercen entre ellas.

5. Métodos de integración

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que describe el movimiento de los cuerpos, es necesario recurrir a un solucionador numérico para obtener una aproximación de la solución. Existen diversos solucionadores disponibles, cada uno con diferentes niveles de precisión (orden) y propiedades específicas. En este proyecto, se han implementado cuatro métodos distintos: Euler, Runge-Kutta de cuarto orde, Runge-Kutta-Fehlberg y Verlet .

Dado que la órbita se desarrolla en un plano, el momento angular que se ha considerado en las leyes de conservación es la componente z , L_z . Además, los intervalos de tiempo utilizados se expresan en relación al período de la órbita, que en este caso es igual a 6.325 [3].

5.1. Metodo de Euler

El Método de Euler se basa en la idea de descomponer una EDO en pequeños pasos discretos en el tiempo. A través de esta discretización, podemos aproximar la solución de la EDO en puntos específicos en el tiempo. Para una EDO en forma general, $\dot{y} = f(t, y)$, \dot{y} donde representa la derivada de y con respecto al tiempo t , y $f(t, y)$ es una función que describe la tasa de cambio de y en un momento dado, el Método de Euler proporciona una forma sencilla de avanzar desde un punto (t, y) conocido a un punto futuro $(t + \delta t, y + \delta y)$.

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\delta t \quad (6)$$

Donde:

- y_{i+1} es el valor aproximado de y en el paso de tiempo siguiente.
- y_i es el valor conocido de y en el paso de tiempo actual.
- t_i es el tiempo en el paso actual.
- $f(t_i, y_i)$ es la tasa de cambio de y en el punto actual.
- δt es el tamaño del paso de tiempo.

Es importante destacar que el Método de Euler es de primer orden, lo que significa que su precisión está relacionada con el tamaño del paso de tiempo δt . Para obtener resultados más precisos, es necesario utilizar intervalos de tiempo más pequeños, lo que puede aumentar el costo computacional. A lo largo del tiempo, los errores pueden acumularse, especialmente en EDO no lineales o sistemas con cambios bruscos. Por lo tanto, el Método de Euler es ideal para problemas simples o como punto de partida para métodos numéricos más avanzados. Esta limitación se refleja en la Figura 4, donde se emplearon 10000 intervalos de tiempo por período de la órbita. Que no da un un $\delta t \approx 0,0006$

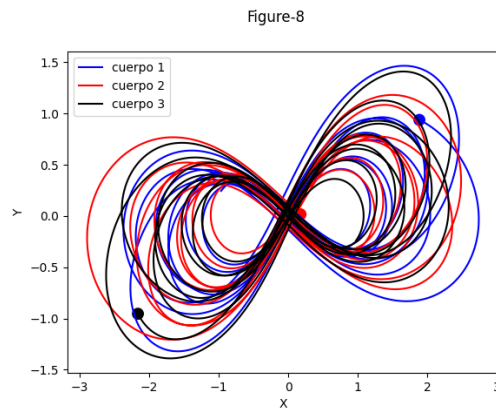


Figura 3: Órbita de la Figura 8 con el método de Euler

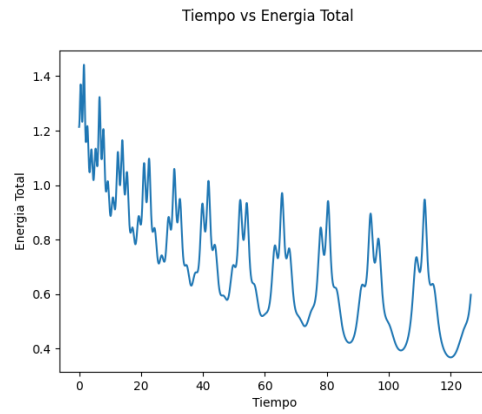


Figura 4: Energia de la Figura 8 con el método de Euler

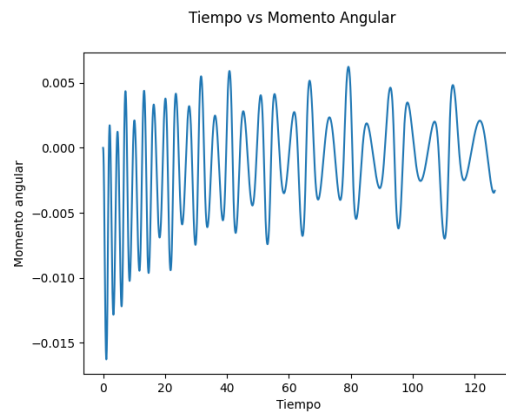


Figura 5: Momento angular de la Figura 8 con el método de Euler

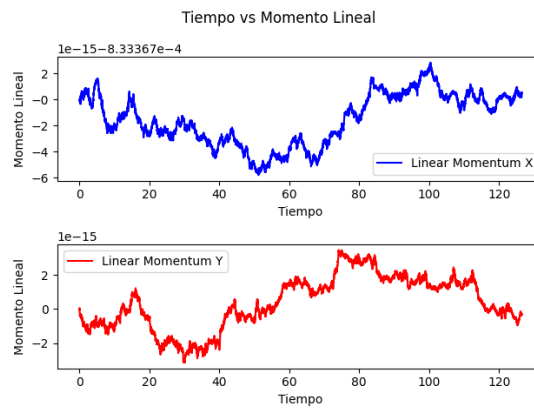


Figura 6: Momento lineal de la Figura 8 con el método de Euler

5.2. Método de Runge-Kutta

El Método de Runge-Kutta de cuarto orden es un método numérico ampliamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Nombrado en honor a los matemáticos alemanes Carl Runge y Martin Kutta, este método representa un avance con respecto al Método de Euler al proporcionar una mayor precisión en la aproximación de soluciones. En este artículo, exploraremos los fundamentos de este método y cómo se aplica en la resolución de EDO.

El Método de Runge-Kutta de cuarto orden mejora la aproximación de la solución al considerar múltiples puntos intermedios en cada paso de tiempo. A través de un proceso de ponderación, calcula la pendiente de la función en varios puntos intermedios, lo que resulta en una mejor estimación de la tasa de cambio de la variable dependiente. La fórmula general para el Método de Runge-Kutta de cuarto orden se expresa de la siguiente manera [4]:

$$\begin{aligned}k_1 &= \delta t f(t_i, y_i) \\k_2 &= \delta t f(t_i + \delta t \frac{1}{2}, y_i + \delta t \frac{1}{2} k_1) \\k_3 &= \delta t f(t_i + \delta t \frac{1}{2}, y_i + \delta t \frac{1}{2} k_2) \\k_4 &= \delta t f(t_i + \delta t, y_i + \delta t k_3) \\y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}\tag{7}$$

Donde:

- k_1, k_2, k_3, k_4 son las pendientes calculadas en diferentes puntos intermedios.
- y_{i+1} es el valor aproximado de y en el siguiente paso de tiempo.
- y_i es el valor conocido de y en el paso de tiempo actual.
- t_i es el tiempo en el paso actual.
- $f(t_i, y_i)$ es la tasa de cambio de y en el punto actual.
- δt es el tamaño del paso de tiempo.

El Método de Runge-Kutta de cuarto orden ofrece una mayor precisión en comparación con el Método de Euler, ya que considera múltiples puntos intermedios. Esto lo hace especialmente útil en EDO no lineales o problemas que requieren una mayor precisión. Sin embargo, también implica un mayor costo computacional debido a la necesidad de calcular múltiples pendientes en cada paso de tiempo.

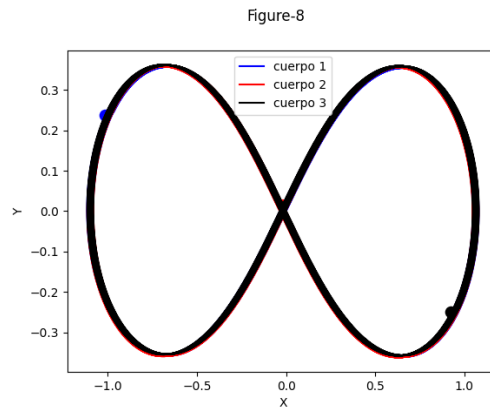


Figura 7: Órbita de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

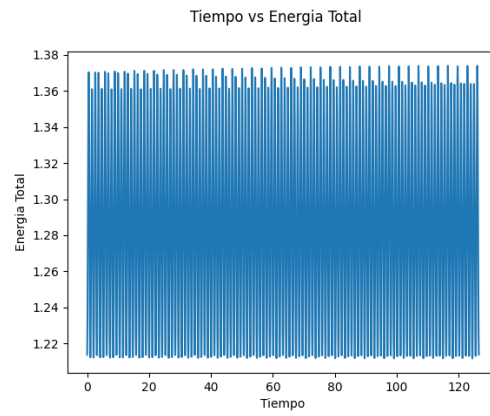


Figura 8: Energía de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

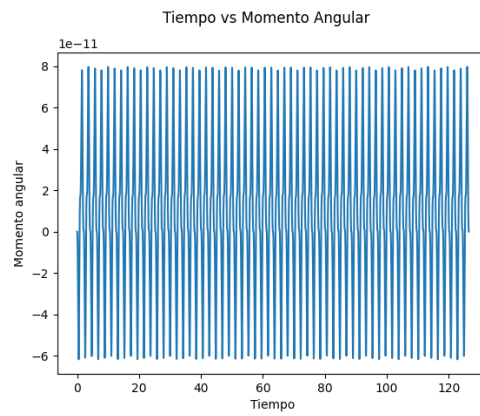


Figura 9: Momento angular de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

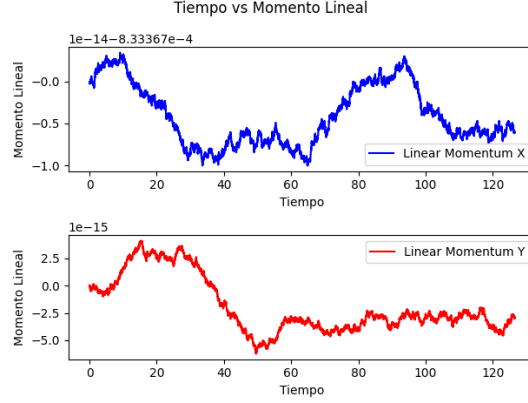


Figura 10: Momento lineal de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta de Cuarto Orden

5.3. Método de Runge-Kutta-Fehlberg

El Método RKF opera de manera similar a otros métodos numéricos para EDO, dividiendo el dominio del tiempo en pequeños pasos discretos. Sin embargo, lo que lo hace destacar es su capacidad para adaptar dinámicamente el tamaño de estos pasos en función del comportamiento local de la solución. Esto significa que el método puede ajustar la precisión de los cálculos en tiempo real, lo que lo convierte en una herramienta excepcionalmente útil en situaciones donde no conocemos de antemano el tamaño óptimo del paso.

El método RKF se basa en una serie de ecuaciones que involucran el cálculo de múltiples estimaciones de la solución en cada paso. A través de una combinación ponderada de estas estimaciones, se calcula un valor final que se ajusta para controlar el error. Este enfoque permite que el método sea altamente adaptable y capaz de proporcionar resultados precisos, incluso cuando se desconoce la escala de la variación en la solución. La fórmula general para el Método de Runge-Kutta-Fehlberg se expresa de la siguiente manera [5]:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \delta t f(t_i, y_i) \\
k_2 &= \delta t f\left(t_i + \delta t \frac{1}{4}, y_i + \frac{1}{4} k_1\right) \\
k_3 &= \delta t f\left(t_i + \delta t \frac{3}{8}, y_i + \frac{3}{32} k_1 + \frac{9}{32} k_2\right) \\
k_4 &= \delta t f\left(t_i + \delta t \frac{12}{13}, y_i + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3\right) \\
k_5 &= \delta t f\left(t_i + \delta t, y_i + \frac{439}{216} k_1 - 8 k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4\right) \\
k_6 &= \delta t f\left(t_i + \delta t \frac{1}{2}, y_i - \frac{8}{27} k_1 + 2 k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5\right) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6
\end{aligned} \tag{8}$$

Donde:

- $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ son las pendientes calculadas en diferentes puntos intermedios.
- y_{i+1} es el valor aproximado de y en el siguiente paso de tiempo.
- y_i es el valor conocido de y en el paso de tiempo actual.
- t_i es el tiempo en el paso actual.
- $f(t_i, y_i)$ es la tasa de cambio de y en el punto actual.
- δt es el tamaño del paso de tiempo.

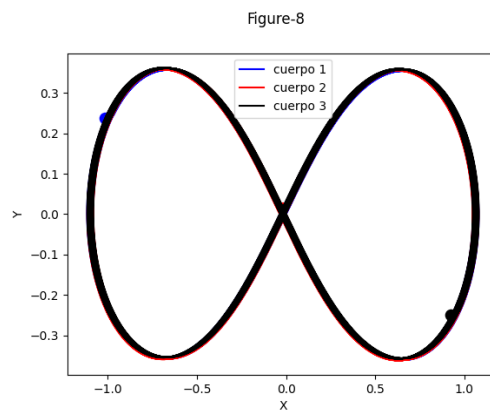


Figura 11: Órbita de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta-Fehlberg

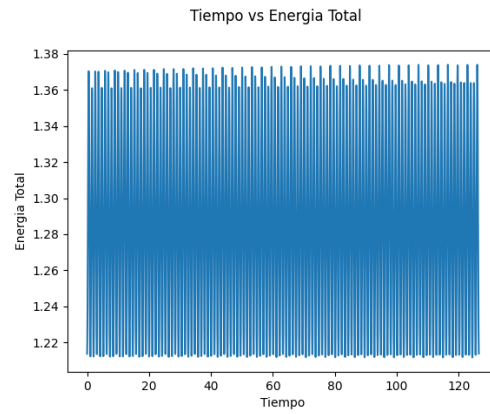


Figura 12: Energia de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta-Fehlberg

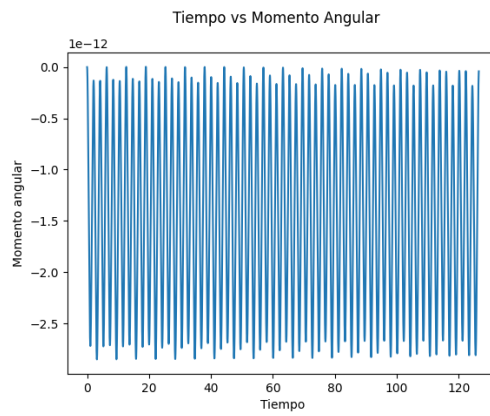


Figura 13: Momento angular de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta-Fehlberg

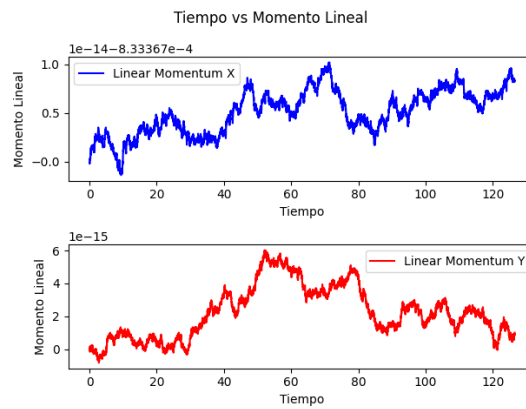


Figura 14: Momento lineal de la Figura 8 con el método de Runge-Kutta-Fehlberg

5.4. Método de Verlet

El Método de Verlet, denominado en honor al físico suizo Loup Verlet, es una técnica ampliamente utilizada en el campo de la simulación de dinámica molecular y la física computacional. Se destaca por su precisión y estabilidad, lo que lo convierte en una elección popular para modelar sistemas dinámicos en los que se rastrean las posiciones y velocidades de partículas a lo largo del tiempo.

El Método de Verlet es especialmente útil para resolver ecuaciones de movimiento en sistemas dinámicos. Supongamos que estamos interesados en el seguimiento de partículas en un sistema, y conocemos las posiciones de las partículas en un instante t . El Método de Verlet nos permite predecir las posiciones de estas partículas en el siguiente instante $t + \delta t$ y calcular sus velocidades en ese punto.

La fórmula básica del Método de Verlet para calcular las posiciones en función de las posiciones actuales y anteriores, así como las aceleraciones, es la siguiente:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + a_i \delta t^2 \quad (9)$$

Donde:

- x_{i+1} es la nueva posición de la partícula en el siguiente paso de tiempo.
- x_i es la posición actual de la partícula.
- x_{i-1} es la posición anterior de la partícula.
- a_i es la aceleración de la partícula en el instante i .
- δt es el tamaño del paso de tiempo.

De manera similar, las velocidades pueden calcularse utilizando las posiciones en el presente y el pasado:

$$v_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\delta t} \quad (10)$$

El Método de Verlet es conocido por su estabilidad y capacidad para mantener la energía en sistemas conservativos. Esto lo convierte en una elección popular para simulaciones de sistemas físicos y biológicos en los que la conservación de la energía es crucial.

Sin embargo, el Método de Verlet no es adecuado para todos los tipos de sistemas. Puede tener dificultades en sistemas no conservativos y, en general, puede requerir más esfuerzo computacional que otros métodos numéricos más simples como el Método de Euler.

El método de Verlet es una herramienta valiosa en la simulación de sistemas dinámicos, especialmente en aquellos donde la conservación de la energía es una prioridad. Aunque su implementación puede ser más compleja que algunos métodos más simples, su precisión y estabilidad lo convierten en una buena elección.

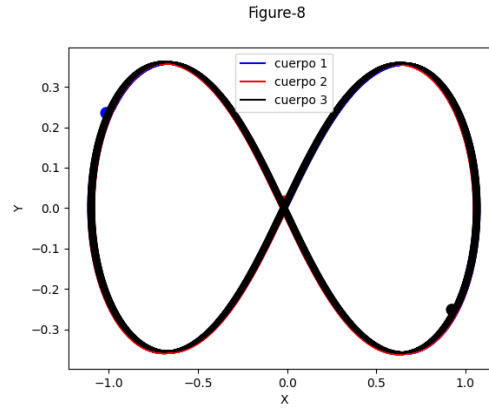


Figura 15: Órbita de la Figura 8 con el método de Verlet

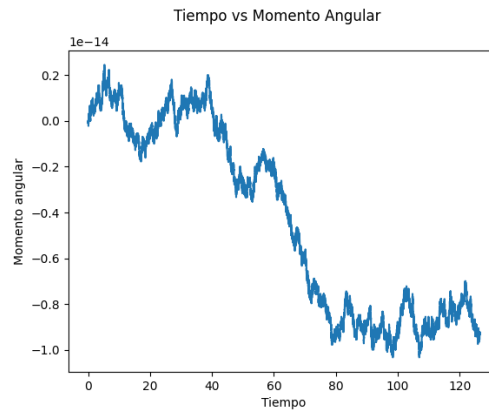


Figura 16: Momento angular de la Figura 8 con el método de Verlet

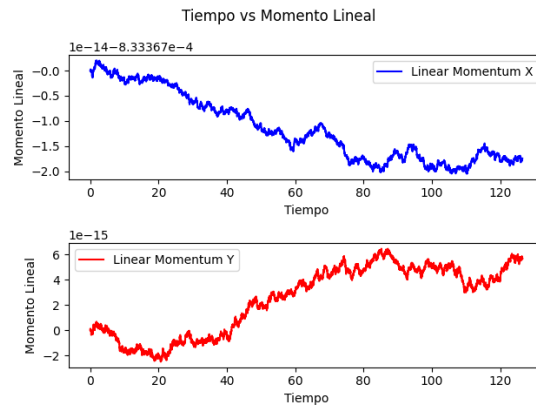


Figura 17: Momento lineal de la Figura 8 con el método de Verlet

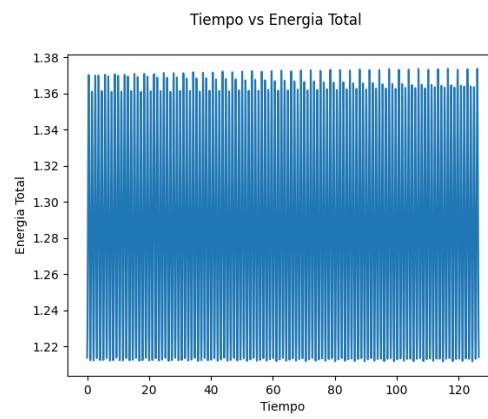


Figura 18: Energía de la Figura 8 con el método de Verlet

5.5. Comparación de los métodos de integración

Para investigar la estabilidad de la órbita con forma de figura-8, es necesario seleccionar un método de integración que nos permita realizar todos los cálculos necesarios. Se nos presentaron cuatro métodos distintos, y tras analizar sus resultados, observamos que el método de Euler generaba errores considerables tanto en la trayectoria de la órbita como en las constantes del movimiento. Por lo tanto, concluimos que no es adecuado para nuestro propósito.

De los otros tres métodos considerados, a saber, rk4, rkf y Verlet, observamos que producían resultados muy similares en cuanto a las órbitas que generaban. Sin embargo, notamos una diferencia importante en términos de la estabilidad a largo plazo de los errores en la energía del sistema. El método Verlet, que es un método symplectico, mostró un comportamiento estable en los errores de la energía, lo que significa que estos errores no variaban significativamente a lo largo del tiempo. Por otro lado, los métodos rk4 y rkf presentaron un aumento progresivo de los errores en la energía a medida que avanzaba la simulación.

Este hallazgo nos lleva a considerar que los métodos symplecticos, como el método Verlet, son más apropiados en este contexto, ya que los errores numéricos en la energía del sistema están limitados y no dependen de la duración de la simulación. Entonces, he optado por el método Verlet como el más adecuado para llevar a cabo el estudio de la estabilidad. Su ventaja adicional radica en que actualiza simultáneamente las posiciones y las velocidades, lo que facilita su uso en el análisis.

	Euler	RK4	RKF	Verlet
Tiempo de ejecución	0.38605	1.46514	2.51294	0.76408
Error en la energía	0.31232	0.287001	.287001	0.28695

Cuadro 1: Tiempo de ejecución y errores en energía para los métodos euler, rk4, rkf, y Verlet con 1000 pasos de tiempo por período, para todos, y un total de 20 períodos.

6. Estabilidad de la órbita de la Figura 8

Para analizar la estabilidad del sistema, se procedió a realizar una serie de simulaciones que involucran perturbaciones en la posición inicial del cuerpo central. Además, se implementaron condiciones para detectar posibles colisiones entre los cuerpos y para identificar cuándo uno de los cuerpos se separa significativamente del sistema. En este contexto, se considera que el sistema es localmente estable si sobrevive 100 veces la duración del período original.

Para llevar a cabo esto, se realizaron 100,000 pruebas con perturbaciones aleatorias en las condiciones iniciales del cuerpo central. Los resultados de estas pruebas se clasificaron en tres categorías: estable, colisión, y escape. Se definió una colisión mediante la evaluación de si las esferas virtuales, calculadas en función del paso de tiempo y las velocidades actuales de los cuerpos, se superponían. Por otro lado, la condición de escape se cumplía cuando la separación más cercana entre los cuerpos era diez veces mayor que la separación inicial más lejana.

En el gráfico 19 se presenta una representación visual de los resultados. Se optó por un gráfico

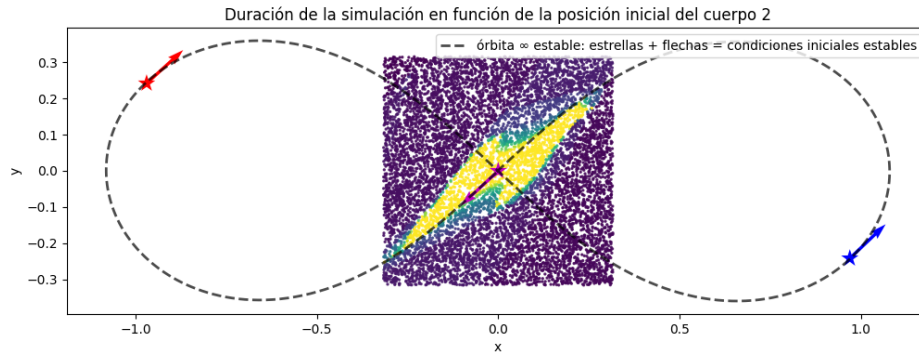


Figura 19: Gráfico de dispersión para la estabilidad de la órbita de figura-8

de dispersión en lugar de un mapa de calor para resaltar el muestreo aleatorio del espacio y la variabilidad de las perturbaciones iniciales. Sin embargo, también se menciona la posibilidad de generar una malla 2D más estructurada con contornos para un análisis más detallado.

El gráfico revela patrones interesantes en la estabilidad del sistema. Se observa que incluso pequeñas perturbaciones iniciales siguen siendo estables para el sistema en la mayoría de los casos, lo que indica una cierta robustez del sistema ante variaciones iniciales. Los contornos de estabilidad muestran simetría en su distribución.

Es importante señalar que los puntos blancos en la figura no representan soluciones duraderas, sino más bien áreas donde el sistema no se mantuvo estable. Estos hallazgos son fundamentales para comprender la dinámica y la estabilidad del sistema en cuestión.

Referencias

- [1] Zdzislaw E Musielak y Billy Quarles. «The three-body problem». En: *Reports on Progress in Physics* 77.6 (2014), pág. 065901.
- [2] Richard Montgomery. «A new solution to the three-body problem». En: *differential equations* 1001 (2001), pág. d2xi.
- [3] Kendall Atkinson, Weimin Han y David E Stewart. *Numerical solution of ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2011.
- [4] Roger Alexander. «Solving ordinary differential equations i: Nonstiff problems (e. hairer, sp norsett, and g. wanner)». En: *Siam Review* 32.3 (1990), pág. 485.
- [5] John Charles Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2016.