Introducción a R para Finanzas Cuantitativas

OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO

[Jhonatan Ever Medina Muriel]

[Jhonatan Medina Muriel]

CONTENIDO

- Rentabilidad – Riesgo
- Modelo de Markowitz
- Ratio de Sharpe
- Línea de Asignación de Capital (LAC)
- Línea de Mercado de Capitales (LMC)
- Aplicaciones en R de los temas mencionados

RENTABILIDAD - RIESGO

CASO SENCILLO:

Julio se encuentra una isla tropical, y tiene USD 100 para invertir. Dentro de las infinitas opciones de invertir, decide entrar en el negocio de helados y paraguas. Sin embargo, puede decidir invertir todo el dinero en una opción o dividir el monto de inversión en partes iguales.

Se asume:

- -No se puede predecir el clima.
- -Probabilidad de tener un clima soleado o lluvioso: 0.5.

RENTABILIDAD - RIESGO

CASO SENCILLO:

1era opción: Todo en uno

Clima	Helados	Paraguas
Soleado	150	60
Lluvioso	60	150

Rentabilidad: (0.5×150+0.5×60)/100-1=0.05

2da opción: USD 50 para cada uno

Clima	Helados	Paraguas
Soleado	75	30
Lluvioso	30	75

Rentabilidad: (75+30)/100-1=0.05

MODELO DE MARKOWITZ (1952)

Modelo pionero, es el primero que incorpora un *trade off* entre la rentabilidad y el riesgo.

Supuestos:
-Rendimientos se distribuyen de manera normal.
-Inversionistas son racionales y aversos a riesgo.
-Información simétrica.
-No hay costos de transacción.
-No hay apalancamiento.

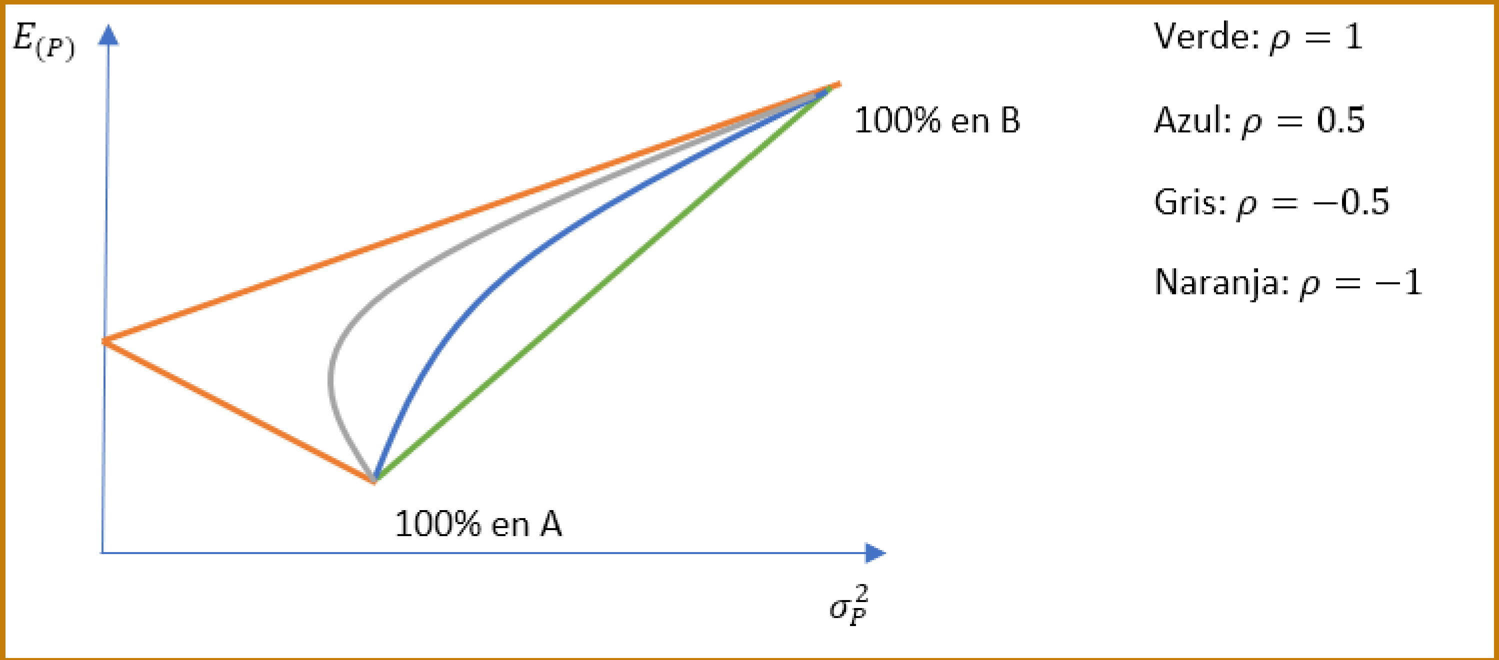
MODELO DE MARKOWITZ (1952)

Rentabilidad: $E_{R(P)}$

Riesgo: $\sigma^2_{R(P)} = w_{R(A)}\sigma^2_{R(A)} + w_{R(B)}\sigma^2_{R(B)} + 2w_A w_B Cov_{R(A)R(B)}$

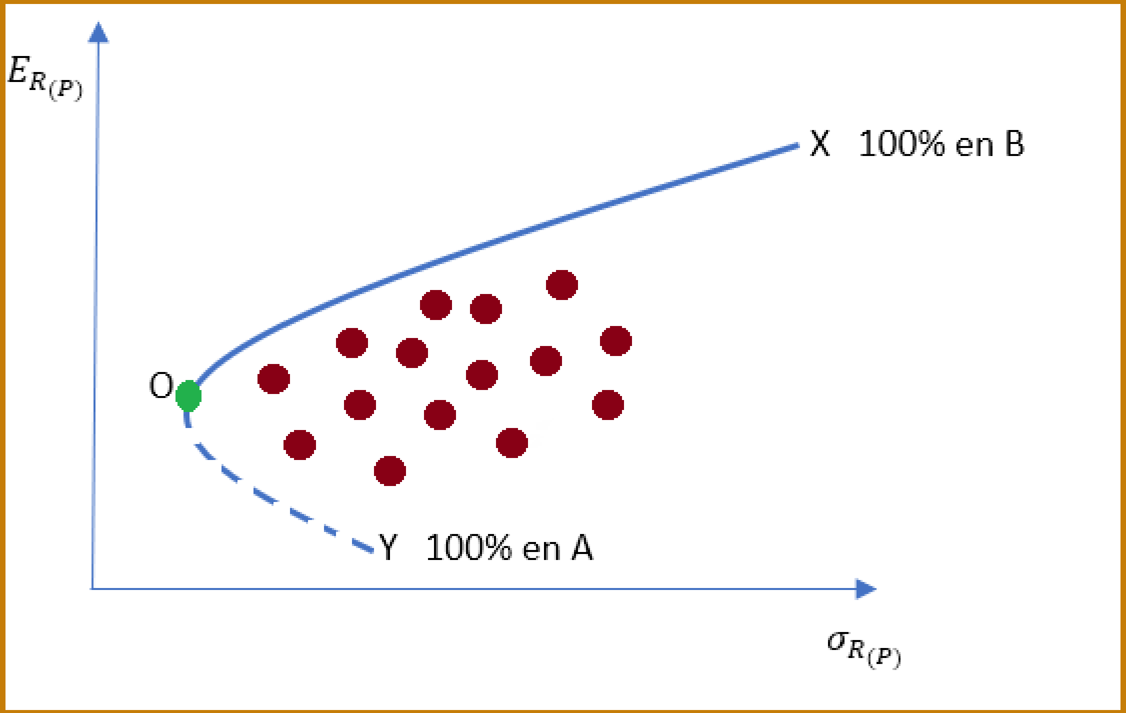
$$Cov_{R(A)R(B)} = \rho_{R(A)R(B)}\sigma_{R(A)}\sigma_{R(B)}$$

$$w_A + w_B = 1$$



MODELO DE MARKOWITZ (1952)

Curva $\overline{XY}$: Frontera de varianza mínima.
Curva $\overline{OX}$: Frontera eficiente.
Punto O: Punto de varianza mínima global.



MODELO DE MARKOWITZ (1952)

Problema de Optimización General:

$$Max\ \overline{R_p} = \sum_{i=1}^{n} (w_i \overline{R}_i)$$

sujeto a:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (w_i w_j \sigma_{i,j}) = V^*$$

$$\sum^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$Min \quad \sigma^2 (R_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_j \sigma_{ij}$$

sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1} x_i \cdot E(R_i) = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

RATIO DE SHARPE

También conocido como el ratio de recompensa/riesgo o reward-to-volatility ratio, muestra el exceso de rendimiento por unidad de riesgo asumido en una inversión.

Construcción:

$$E_{R_{(P)}} = R_f + S\sigma_{R_{(P)}}$$

Se tiene:

$$S = \frac{E_{R_{(P)}} - R_f}{\sigma_{R_{(P)}}}$$

Donde S es el Ratio de Sharpe

LÍNEA DE ASIGNACIÓN DE CAPITAL (LAC)

Capital Allocation Line en inglés, usado para medir riesgo de activos riesgosos y aquellos libres de riesgo.

Construcción:

Si los inversores quieren tener un nuevo portafolio conformado por un activo o portafolio libre de riesgo con la cartera que tiene la rentabilidad esperada $E_{R(P)}$, se tendría un portafolio P' con la rentabilidad esperada $E_{R(P')}$:

$$E_{R(P')} = R_f + S\sigma_{R(P')}$$

Donde S es el Ratio de Sharpe

LÍNEA DE MERCADO DE CAPITALES (LMC)

Capital Market Line en inglés, representa el conjunto de portafolios que combinan de manera óptima el riesgo y el rendimiento. Es un caso especial de la LAC en el que se tiene como portafolio de riesgo al portafolio de mercado. Por lo tanto, el punto en el intercepción de la LMC y la frontera eficiente da como resultado el portafolio más eficiente.

Fórmula:

$$E_{R_{(P)}} = R_f + \frac{E_{R_{(M)}} - R_f}{\sigma_{R_{(M)}}} \sigma_{R_{(P)}}$$

La pendiente es el Ratio de Sharpe del mercado.