Métodos Numéricos

Prof. Fábio Gonçalves

Resumo

Esta nota faz uma breve introdução aos Métodos Numéricos.

1) Introdução aos Métodos Numéricos

Atualmente, a disciplina Métodos Numéricos trata a resolução computacional de problemas matemáticos. Mas antes do advento dos computadores, muitas das técnicas empregadas nesta disciplina já eram conhecidas e usadas na busca de soluções aproximadas de problemas matemáticos. Mas é inegável que a implementação computacional impulsionou o desenvolvimento dos métodos numéricos. Afinal, muitos problemas matemáticos considerados grandes por demandar um número elevado de operações matemáticas passaram a ser resolvidos computacionalmente. Se por um lado, os computadores facilitaram a realização de cálculos numéricos, por outro, deram origem a novos problemas antes desconhecidos e que estão relacionados com a forma como os computadores tratam números. Assim surgiu uma nova linha de pesquisa em matemática chamada de Análise Numérica que vem contribuindo para a melhor compreensão dos problemas relacionados ao cálculo computacional e ao seu desenvolvimento.

Antes de iniciar o estudo dos métodos numéricos, é fundamental fazer uma apresentação, mesmo que superficial, dos problemas relacionados à forma como números são tratados computacionalmente. O objetivo é afastar uma possível expectativa em torno da disciplina que costuma ser interpretada como um simples estudo de implementação de algoritmos. Mais do que isso, deseja-se iniciar o processo de conscientização a respeito dos problemas relacionados às implementações computacionais de métodos numéricos.

1.1) Representação numérica

Indo direto ao ponto, a origem dos problemas relacionados aos cálculos computacionais tem relação direta com a forma como os números são representados na linguagem de máquina[1]. A forma de representação adotada pelos fabricantes de computadores obedece padrões técnicos IEEE que definem a representação numérica binária de ponto flutuante

[1]No nível do sistema operacional.

além de regras de arredondamento. Esses padrões garantem não somente abrangência (grande faixa de números) mas também precisão. Vale ressaltar que precisão não é significado de exatidão.

A notação de ponto flutuante é uma notação científica normalizada (o primeiro dígito da parte fracionária é diferente de zero) e tem a forma geral

$$\pm\, m \cdot \beta^{E} \,.$$

A parte fracionária m é chamada de mantissa, β é a base numérica e E é o exponente. Para exemplificar, considere o número -11,25 na base decimal escrito de duas formas

$$-11,25 = -0,1125 \cdot 10^{-2}$$

onde o lado direito está na notação de ponto flutuante na base 10. Observe que há somente uma maneira de representar um número na notação de ponto flutuante (normalizado). Em binário, a base é 2, a mantissa m e o expoente E são listas constituídas dos dígitos 0 e 1. O que implica que na base binária a mantissa na notação de ponto flutuante sempre inicia por 1 o que permite guarda-lo implicitamente (sem usar espaço de memória - bit).

O padrão IEEE inclui dois tipos de ponto flutuante:

- Precisão simples: tem 32 bits dos quais, 1 bit é reservado ao sinal, seguidos por 8 bits para o expoente E (inteiro positivo) e 23 bits para a parte fracionária m. Os números são dados por
$$(-1)^{s} \cdot (1+m) \cdot 2^{E-127} \,.$$
- Precisão dupla: tem 64 bits dos quais, 1 bit é reservado ao sinal, seguidos por 11 bits para o expoente E (inteiro positivo) e 52 bits para a parte fracionária m. Os números são dados por
$$(-1)^{s} \cdot (1+m) \cdot 2^{E-1023} \,.$$

Usando precisão simples, é possível representar números no intervalo aberto $(10^{-38}\ ,\ 10^{38})$. Já em precisão dupla o intervalo aberto onde é possível representar um número aumenta consideravelmente, passando para $(10^{-308}\ ,\ 10^{308})$.

Como programação de computadores é um pré-requisito de Métodos Numéricos, sabe-se que há limitação na representação numérica para números muito grandes que extrapolam a capacidade de representação da máquina (overflow). O mesmo pode acontecer com números muito pequenos (underflow). O que pode passar despercebido é existem outras limitações sem que haja uma notificação ao usuário do computador.

1.2) Arredondamento

O padrão IEEE também define a regra de arredondamento quando um número excede a capacidade de representação numérica, inclusive resultante de operações aritméticas. É o que acontece com números irracionais e alguns números racionais que necessitam de uma infinidade de dígitos. O fato é que números na base 2 tendem a ter mais dígitos do que na base 10. Muitos números na base 10 tem infinitos dígitos na base 2. É o caso do número racional $1/10 = 0,1$, observe:

$$\begin{aligned}(0,1)_{10} &\equiv (0,0001100110011...)_2 \\ &= (0,0\overline{0011})_2\end{aligned}$$

onde $(N)_\beta$ representa o número N escrito na base β e os dígitos $\overline{0011}$ representam uma dízima periódica. O mesmo ocorre com qualquer número cuja parte fracionária é $0,1$. Existe também a possibilidade do resultado de operações aritméticas envolvendo números muito grandes com números muito pequenos necessitar de arredondamento.

Alguns métodos são sensíveis aos erros de arredondamento mesmo sendo consideravelmente pequenos. Tais erros são propagados na aplicação do método podendo comprometer o resultado final. Nesse caso o método numérico é dito *numericamente instável*. Caso contrário, é dito *estável*. A análise de estabilidade é bastante complexa e específica para cada problema computacional. Certamente, é uma investigação muito difícil para o iniciante no estudo de métodos numéricos.

É nesse ambiente computacional que aplicaremos alguns métodos numéricos para resolver problemas matemáticos. Não se esqueça disso!

2) Definições importantes

Seguem algumas definições importantes no estudo dos métodos numéricos.

2.1) Ordem de grandeza

O conjunto dos números Reais pode ser dividido em classes de potências de 10 para efeito de comparação de magnitudes. A partir da classe das unidades, existem classes cada vez menores (décimos, centésimos, milésimos, ...) e outras cada vez maiores (dezenas, centenas, milhares, ...).

A ordem de grandeza de um número Real n será denotada por $\mathcal{O}(n)$ e definida por

$$\mathcal{O}(n) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$$

onde $\lfloor\ \rfloor$ denota a função piso[2] ou parte inteira. No caso, $\mathcal{O}(n)$ é a parte inteira da função logarítmica de n na base 10. Por exemplo:

Exemplo 2.1. $\mathcal{O}(0,001) = \lfloor \log_{10}(0,001) \rfloor = \lfloor -3 \rfloor = -3\,.$

Exemplo 2.2. $\mathcal{O}(0,00273) = \lfloor \log_{10}(0,00273) \rfloor = \lfloor -2,563837353 \rfloor = -2\,.$

Exemplo 2.3. $\mathcal{O}(7) = \lfloor \log_{10}(7) \rfloor = \lfloor 0,8450980400 \rfloor = 0\,.$

Exemplo 2.4. $\mathcal{O}(0,743 \cdot 10^{26})\rfloor = \lfloor \log_{10}(0,743 \cdot 10^{26}) = \lfloor 25,87098881 \rfloor = 25\,.$

[2] A função piso retorna o maior números inteiro dentre os menores do que seu argumento.

2.2) Erro absoluto

Seja $\bar{x}$ o valor aproximado de x. Por definição, o erro absoluto relacionado à aproximação de x por $\bar{x}$ é

$$E_x = |x - \bar{x}| .$$

2.3) Métodos diretos e indiretos

Por definição, um método numérico é dito direto quando sua aplicação resulta diretamente na solução de um problema matemático, podendo esta ser uma solução exata ou aproximada. Já os métodos numéricos indiretos (métodos iterativos), como a própria denominação sugere, resulta numa sequência de soluções aproximadas que podem, ou não, convergir para a solução exata de um problema matemático.

Em geral, os métodos diretos são mais rápidos do que os métodos indiretos. Por outro lado, somente num método indireto é possível definir a priori a precisão da solução aproximada o que, por certo, é uma grande vantagem.