Zadanie 1

Napisać procedurę, która wyznacza wartość $n$-tego rozwinięcia w szereg potęgowy zadanej funkcji w podanym punkcie $x$, zdefiniowaną jako f = rozwiniecie(n, x). Korzystając z tej procedury, napisać dwa skrypty. Pierwszy skrypt ma wypisywać (np. w postaci tabeli) wartości rozwinięcia oraz błąd bezwzględny i względny (w procentach) wyznaczania wartości funkcji dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ oraz $x = 0.5$. Drugi skrypt ma przedstawiać na wspólnym wykresie rozwijaną funkcje oraz trzy wybrane rozwinięcia (np. 0, 3, 10) dla $x \in (0, 1)$.

UWAGA: Nie wolno używać instrukcji pętli (while/for/itp.) oraz rekurencji w funkcji rozwiniecie(n, x).

Lista funkcji:

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$
2. $\sin(x + a) = \sin a + x \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \ldots + \frac{x^n \sin(a+n\cdot\pi/2)}{n!} \pm \ldots$, dla $a = \frac{\pi}{4}$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$
4. $\cos(x + a) = \cos a - x \sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} + \frac{x^4 \cos a}{4!} - \ldots + \frac{x^n \cos(a+n\cdot\pi/2)}{n!} \pm \ldots$, dla $a = \frac{\pi}{4}$
5. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$
6. $(1 - x)^{-3} = 1 + \frac{1}{2}(2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 + 5 \cdot 6x^4 + \ldots)$
7. $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \ldots$
8. $\ln x = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \ldots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \ldots\right)$
9. $\ln x = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} \pm \ldots$
10. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \pm \ldots$
11. $\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right)$
12. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{1\cdot3x^5}{2\cdot4\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5x^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7} + \ldots + \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots$
13. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{1\cdot3x^5}{2\cdot4\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5x^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7} + \ldots + \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)(2n+1)} + \ldots\right)$

14. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots$

15. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

16. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

17. $\text{arc}\ \sinh(x) = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} \pm \ldots$

18. $\text{arc}\ \tanh(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

19. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$, dla $m = \frac{1}{2}$

20. $(1-x)^m = 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \pm \ldots$, dla $m = \frac{1}{2}$

21. $(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n \pm \ldots$, dla $m = \frac{1}{2}$

22. $(1-x)^{-m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n \pm \ldots$, dla $m = \frac{1}{2}$