Espacios con Productos Internos

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

Definición. Un producto interno sobre $\mathbb{F}-$espacio vectorial es una funcion $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ tal que $u, v, w \in V$, $c \in \mathbb{F}$ tal que

a) $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$

b) $(cu|w) = c(u|w)$

c) $(u|w) = \overline{(w|u)}$

d) $(u|u) > 0$ si $u \neq 0$

$*$ Es sesquilineal en la segunda entrada

$(u|v + cw) = \overline{(v + w|u)} = \overline{(v|u) + c(w|u)} = \overline{(u|v)} + \overline{c}\overline{(u|w)} = (u|v) + \overline{c}(u|w)$

i) Para cada $v \in V$, $f_v : V \to \mathbb{F}$ tal que $f_v = (u|v)$ entonces $f_v \in V^*$

ii) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces $\Phi : V \to V^*$, $\Phi(v) = f_v \Rightarrow \Phi$ es un isomorfismo (si $\dim V < \infty$).

Definición. $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, norma de V. ($*$ depende del producto interno $\langle , \rangle$).

Propiedades.

a) $||cv|| = |c|||v||$

b) $||u + w||^2 = ||u||^2 + 2\Re\langle v, w\rangle + ||w||^2$

c) $(u|w) = \frac{1}{4}\left(||u + w||^2 - ||u - w||^2 + i||u + w||^2 - i||u - w||^2\right)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

d) $(u|w) = \frac{1}{4}\left(||u + w||^2 - ||u - w||^2\right)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Teorema. Sean $u, v \in V$.

a) $|\langle u|v\rangle| \leq ||u||.||w||$

b) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

Definición. Sean V un Espacio Vectorial y $u, v \in V$.

i) u y v son **ortogonales** si $\langle u|v\rangle = 0$

ii) $S \subseteq V$ subconjunto es un **conjunto ortogonal** si $\langle u|v\rangle = 0, \forall u, v \in S, u \neq v$.

iii) $S \subseteq V$ subconjunto es un **conjunto ortonormal** si es ortogonal y $||v|| = 1, \forall v \in S$.

iv) Una base $\mathcal{B}$ es **ortogonal** (**ortonormal**) si lo es como conjunto.

Observación. Sea S un **conjunto ortogonal** tal que $0 \notin S$ entonces $S' = \left\{\frac{v}{||v||} : v \in S\right\}$ es un **conjunto ortonormal**

Teorema. Sea $S \subseteq V$ un **conjunto ortogonal** tal que $0 \notin S$ entonces S es **linealmente independiente**.

Teorema.

Sean V un espacio vectorial con producto interno $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en V **linealmente independientes** entonces existen $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ortogonales tales que

$\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle = \langle w_1, w_2, \ldots, w_k\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

IDEA:

$w_1 = v_1$;

$w_j = v_j - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\langle v_j|w_i\rangle}{||w_i||^2}$, con $j > 1$.

Corolario.

Todo espacio vectorial, de dimensión finita, con producto interno tiene bases ortogonales.

Observación. Sean V un espacios vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. $f_i : V \to \mathbb{F}$

$$f_i(v) = \frac{\langle v_j|w_i\rangle}{||w_i||^2} \Rightarrow f_i = \delta_{ij}$$

para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$ entonces

$$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle v|v_i\rangle}{||v_i||^2} v_i.$$

Teorema. Sean V espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$, con producto interno, $W \subseteq V$ un subespacio de V y $v \in V$

a) $w \in W$ es tal que $||v - w|| = \min\{||v - \tilde{w}||, \tilde{w} \in W\}$ si y solo sí $w \in W$ es tal que $v - w \perp W$

b) Si existe tal w, es único.

c) Si $\dim W < \infty$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es una base de entonces $w = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle v|w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i$ es como antes.

Definición. Sean V espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$, con producto interno, $W \subseteq V$ un subespacio de V y $v \in V$. Sea $\dim W < \infty$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es una base de entonces $E(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle v|w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i$

Siempre que exista el vector w en el Teorema anterior se le llama **proyección ortogonal** de v sobre W.

Si todo vector de V tiene proyección ortogonal sobre W, la aplicación que asigna a cada vector de V su proyección ortogonal sobre W, se llama proyección ortogonal de V sobre W.

Observación. $Im(E) = W$.

Definición. Sea V un espacio producto interno y $W \subseteq V$ (subconjunto). El **complemento ortogonal** de W es el conjunto $W^\perp$ de los vectores de V ortogonales a todo vector de W.

$W^\perp = \{v \in V : v \perp W\} = \{v \in V : (v, w) = 0, \forall w \in W\}$

Teorema. Sea W un subespacio de dimensión finita de un espacio producto interno V y sea E la proyección ortogonal de V sobre W. Entonces $E^2 = E$ (E es una transformación lineal idempotente de V sobre W), $\ker(E) = W^\perp$ ($W^\perp$ es el espacio nulo de E) y $V = W \oplus W^\perp$.

Corolario. Bajo las condiciones del teorema anterior, $Id - E$ es la proyección ortogonal de V en $W^\perp$. Esta es una transformación lineal idempotente de V en $W^\perp$ con espacio nulo W.

Corolario. Desigualdad de Bessel. Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un conjunto ortogonal de rectores no nulos en un espacio producto interno V. Si v es cualquier vector de V, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{|\langle v|w_i\rangle|^2}{||w_i||^2} \leq ||v||^2$$

la desigualdad vale si, y solo si

$$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle v|w_i\rangle}{||w_i||^2} w_i$$

Funciones lineales y adjuntas

Teorema. Sean V un espacio producto interno de dimensión finita y f un funcional lineal sobre V. Entonces, existe un único vector v de V tal que

$$f_v(w) = \langle w|v\rangle$$

para todo w de V.

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ y sea $T : V \to V$. Se dice que T tiene un adjunto si $\exists T^* : V \to V$ es una transformación lineal tal que $\langle T(v)|w\rangle = \langle v|T^*(w)\rangle, \forall v, w \in V$

Observación. T^* depende de T y de $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Teorema. Para cualquier operador lineal T en un espacio producto interno de dimensión finita. existe un único operador lineal T^* sobre V tal que

$$\langle T(v)|w\rangle = \langle v|T^*(w)\rangle, \forall v, w \in V.$$

Teorema. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base (ordenada) ortonormal de V. Sea T un operador lineal sobre V y sea A la matriz de T en la base ordenada $\mathcal{B}$. Entonces $[T]_{\mathcal{B}} = [\langle T(v_i)|v_j\rangle]$

Corolario. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea T un operador lineal sobre V. En cualquier base ortogonal $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de V la matriz de T^* es la conjugada de la transpuesta de la matriz de T, es decir $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]^t_{\mathcal{B}}}$.

Definición. Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $A^* = \overline{[A]^t}$ es la traspuesta conjugada de A.

Teorema. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita. Si T y U son operadores lineales sobre V y c es un escalar

i) $(T + U)^* = T^* + U^*$.

ii) $(cT)^* = \bar{c}T^*$.

iii) $(TU)^* = U^*T^*$.

iv) $(T^*)^* = T$.

Operadores Unitarios

Definición. Sean V y W espacios producto interno sobre el mismo cuerpo y sea T una transformación lineal de V en W. Se dice que T preserva productos internos si $\langle T(v)|T(w)\rangle = (v|w)$ para todo v, w de V. Un isomorfismo de V sobre W es un isomorfismo T de espacio vectorial de V sobre W que también preserva productos internos.

Si T preserva productos internos, entonces $||T(v)|| = ||v||$ y así T es necesariamente no singular. Así que un isomorfismo de V sobre W puede ser definido también como una transformación lineal de V sobre W que preserva productos internos. Si Tes un isomorfismo de V sobre W, entonces T^{-1} es un isomorfismo de W sobre V; luego, cuando tal T existe, se dirá simplemente que V y W son isomorfos. Naturalmente, el isomorfo de espacio producto interno es una relación de equivalencia.

Teorema. Sean V y W espacios producto interno de dimensión finita sobre el mismo cuerpo y que tienen la misma dimensión. Si T es una transformación lineal de V en W, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) T preserva los productos internos.

(ii) T es un isomorfismo (en un espacio producto interno).

(iii) T aplica toda base ortonormal de V sobre una base ortonormal de W.

(iv) T aplica cierta base ortonormal de V sobre una base ortonormal de W.

Corolario. Sean V y W espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita sobre el mismo cuerpo. Entonces V y W son isomorfos si, y solo si tienen la misma dimensión (finita).

Teorema. Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre el mismo cuerpo y sea T una transformación lineal de V en W. Entonces T preserva productos internos si, y solo si, $||T(v)||_W = ||v||_V$ para todo v en V.

Definición. Un operador unitario U en un espacio vectorial con producto interno es un isomorfismo del espacio sobre sí mismo ($U : V \to V$ es un isomorfismo).

Teorema. Sea U un operador lineal sobre un espacio vectorial con producto interno V. Entonces U es unitario si, y solo si, el adjunto U^* de U existe y $UU^* = U^*U = Id$.

Definición. Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se llama unitaria si $AA^* = A^*A = Id$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $U : V \to V$ un operador lineal sobre V, son equivalentes

i) U es unitario.

ii) la matriz $[U]_{\mathcal{B}}$ de U en alguna (o toda) base ordenada ortonormal $\mathcal{B}$ es una matriz unitaria.

iii) Existe $\mathcal{B}$ base ordenada ortonormal tal que la matriz $[U]_{\mathcal{B}}$ es unitaria.

Definición. Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se dice ortogonal si $A^tA = AA^t = Id$

Teorema. Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, inversible, existe una única matriz triangular inferior B, con elementos positivos en la diagonal principal, de modo que BA es unitaria.

Definición. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que B es unitariamente equivalente a A si existe una matriz unitaria $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que $B = P^{-1}AP$.

Definición. Se dice que B es ortogonalmente equivalente a A si existe una matriz ortogonal $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, , tal que $B = P^{-1}AP$.