Transformaciones Lineales

Teorema 12. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Para cada par de bases ordenadas $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, la función qm asigna a una transformación lineal T su matriz respecto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ es un isomorismo entre el espacio $L(V,W)$ y el espacio de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$.

Estamos particularmente interesados en la representación por matrices de las transformaciones lineales de un espacio en si mismo, es decir, de los operadores lineales sobre un espacio V. En tal caso es más conveniente usar la misma base ordenada. esto es, hacer $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, y se dirá simplemente que la matriz que la representa es la matriz de T respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$. Como este concepto será muy importante para este estudio. repasaremos su definición. Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base ordenada de V, la matriz de T respecto a $\mathcal{B}$ (la matriz de T en la base ordenada $\mathcal{B}$) es la matriz $n \times n$. A cuyos elementos A están definidos por las ecuaciones

$$T\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_j \qquad j = 1, 2, \ldots n. \tag{7}$$

Se debe recordar siempre que esta matriz que representa a T depende de la base ordenada $\mathcal{B}$, y que existe una matriz que representa a T en cada base ordenad para V. (En transformaciones de un espacio en otro la matriz depende de do bases ordenadas, una de V y otra de W) Para no olvidar esta dependencia usará la notación

$$[T]_{\mathcal{B}}$$

para la matriz del operador lineal T en la base ordenada $\mathcal{B}$. La manera cómo esta matriz y la base ordenada describen a T, es que para cada α de V

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensiones n, m y p, respetctivamente. Sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Supóngase que se tienen las bases ordenadas

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \\ \mathcal{B}' &= \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\} \\ \mathcal{B}'' &= \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\} \end{aligned}$$

de los espacios V, W y Z, respectivamente. Sea A la matriz de T respecto al par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y sea B la matriz de U respecto al par $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Es fácil ver ahora que la matriz C de la transformación UT respecto al par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$ es el producto de B y A. En efecto, si α es cualquier vector de V

$$\begin{aligned} [T\alpha]_{\mathcal{B}'} &= A[\alpha]_{\mathcal{B}} \\ [U(T\alpha)]_{\mathcal{B}''} &= B[T\alpha]_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Y así

$$[(UT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[T\alpha]_{\mathcal{B}}$$

y luego. por la definición y unicidad de la matriz representante, se debe tener que $C = BA$. Se puede también ver esto haciendo el cálculo

$$\begin{aligned} (UT)(\alpha_i) &= U(T\alpha_i) \\ &= U\left(\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\beta_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} A_{kj}U(\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} A_{kj}\sum_{i=1}^{p} B_{ik}\gamma_i \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}\right)\gamma_i \end{aligned}$$

con lo que se debe tener

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj} \tag{1}$$

Ya se había motivado la definición (1) para la multiplicación de matrices por operaciones sobre las filas de una matriz. Aquí se ha visto que una motivación muy convincente para la definición se tiene mediante la composición de transformaciones lineales.

Teorema 13. Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ son las bases ordenadas de los espacios V, W y Z, respectivamente, y si A es la matriz de T respecto al par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y B es la matriz de U respecto al par $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$, entonces la matriz de la composición UT respecta al par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$, es la matriz producto $C = BA$.

Teorema 14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Sean

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad y \quad \mathcal{B}' = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$$

son bases ordenadas de V. Supóngase que T es un operador lineal sobre V. Si $P = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$es la matriz $n \times n$ de columnas $P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}'}$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$$

otra manera, si U es el operador lineal sobre V definido por $U\alpha_j = \alpha'_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}$$

Definición. Sean A y B dos matrices (cuadradas) $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Se dice que B es semejante a A sobre $\mathbb{F}$ si existe una matriz inversible $n \times n$ P A sobre $\mathbb{F}$ tal qué $B = P^{-1}AP$.

Funcionales lineales

Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$, una transformación lineal f de V en el cuerpo de escalares $\mathbb{F}$ se llama también un funcional lineal sobre V.

Si se comienza desde el principio, esto quiere decir que f es una función de V en F, tal que

$$f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta)$$

para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de $\mathbb{F}$.

Ejemplo 19. Sea n entero positivo y $\mathbb{F}$ un cuerpo. Si A es una matriz $n \times n$ con elementos $\mathbb{F}$, la traza de A es el escalar

$$\mathrm{tr}A = A_{11} + A_{11} + \cdots + A_{nn}$$

La función traza es un funcional lineal en el espacio de las matrices $\mathbb{F}^{n\times n}$, pues

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(cA + B) &= \sum_{i=1}^{n}(cA_{ii} + B_{ii})\\ &= c\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii}\\ &= c\mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.\end{aligned}$$

Si V es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre V forman, naturalmente, un espacio vectorial. Es el espacio $L(V, F)$. Se designa este espacio por V^* y se le llama espacio dual del V:

$$V^* = L(V, F)$$

. Si V es de dimensión finita se puede obtener una descripción muy explícita del espacio dual V^*. Por el Teorema 5 sabemos algo acerca del espacio V^*

$$dimV^* = dimV.$$

Sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base de V. Conforme al Teorema 1 existe (para cada i) un funcional lineal único f_i en V tal que

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \tag{2}$$

De esta forma se obtiene de $\mathcal{B}$ un conjtinto de n funcionales lineales distintos $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, sobre V. Estos funcionales son también linealmente independientes, pues supóngase que

$$f = \sum_{i}^{n} c_i f_i \tag{3}$$

Entonces

$$\begin{aligned}f_i(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij}\\ &= c_j.\end{aligned}$$

En particular, si f es el funcional cero $f(\alpha_i) = 0$ para cada j y, por tanto, los escalares c, son todos ceros. Entonces los $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, son n funcionales linealmente independientes, y como se sabe que V^* tiene dimensión n, deben ser tales que $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es una base de V^*. Esta base se llama base dual de $\mathcal{B}$.

Teorema 15. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ una base de V. Entonces existe una única base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. Para cada funcional lineal fsobre V se tiene

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \tag{4}$$

y para cada vector α de V se tiene

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i \tag{5}$$

Definición. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y S es un subconjunto de V, el anulador de S es el conjunto S° de funcionales lineales f sobre V tales que $f(\alpha) = 0$ para todo α de S.

Observación.

- S° es un subespacio de V^*, sea o no S un subespacio de V.
- Si S es el conjunto que consta del solo vector cero, entonces $S^\circ = V^*$.
- Si $S = V$, entonces S° es el subespacio cero de V^*. (Esto es fácil de ver cuando V es de dimensión finita.)

Teorema 16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea W un subespacio de V. Entonces

$$dimW + dimW^\circ = dimV.$$

Corolario. Si W es un subespacio de dimensión k de un espacio vectorial V de dimensión n, entonces W es la intersección de $(n-k)$ hiperespacios en V.

Corolario. Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimención finita, entonces $W_1 = W_2$ si y solo si $W_1^\circ = W_2^\circ$.

El doble dual

Definición.

Una pregunta respecto a bases duales que no se contestó en la sección anterior, era si toda base de V^* es la dual de alguna base de V. Una posibilidad de contestar esta pregunta es considerar V^{**}, espacio dual de V^*.

Si α es un vector de V, entonces α induce un funcional lineal L_α, sobre V^*, definido por

$$L_\alpha(f) = f(\alpha), f \text{ en } V^*. \tag{6}$$