Subespacios cíclicos y anuladores

Definición. Sea $v \in V$, el subespacio T-cíclico generado por v es el subespacio $Z(v,T)$ de los vectores de la forma $g(T)(v)$, $g \in \mathbb{F}[x]$.

Definición. Si $Z(v,T) = V$ entonces se dice que v es un vector cíclico de T.

Definición. Sea $v \in V$. El T-anulador de v es el ideal $M(v,T)$ en $\mathbb{F}[x]$ que consta de todos los polinomios $g \in \mathbb{F}[x]$ de modo que $g(T)v = 0$. Al polinomio mónico único p, que genera este ideal se lo llamará también el T-anulador de v.

Teorema. Sea $v \in V$, $v \neq 0$ y p_x el T-anulador de v.

i) El grado de p_x es igual a la dimensión del subespacio cíclico $Z(v,T)$.

ii) Si el grado del polinomio de p_x es k entonces los vectores $v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}$ forman una base de $Z(v,T)$.

iii) Si U es el operador lineal en $Z(v,T)$ inducido por T entonces el polinomio minimal de U es p_x.

Definición. Si U es un operador lineal sobre un espacio de dimensión finita W, entonces U tiene un vector cíclico si, y solo si, existe una base ordenadal de W con la que U este representada por la matriz asociada al polinomio minimal de U.

Corolario. Si A es la matriz asociada a un polinomio mónico p, entonces p es el polinomio minimal y el polinomio característico de A.

Descomposiciones cíclicas y forma racional

Definición. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V y sea W un subespacio de V. Se dice que W es T-admisible si

i) W es invariante por T.

ii) si $f(T)(v)$ está en W, existe un vector $w \in W$ tal que $f(T)(v) = f(T)(w)$.

Teorema. (Teorema de descomposición cíclica). Sea T un operador lineal lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita y sea W_0 un subespacio propio T-admisible de V. Existen los vectores no nulos $v_1, v_2, \dots v_r \in V$ con T-anuladores $p_i = m_{v_i,T}$, $i = 1, 2, \dots, r$ tales que

i) $V = W_0 \oplus Z(v_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(v_k, T)$.

ii) $p_k | p_{k-1}, k = 2, \dots, r$.

Corolario. Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita entonces todo subespacio T-admisible tiene un subespacio complementario que es también invariante por T.

Corolario. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectoría V de dimensión finita

i) Existe un vector $v \in V$ tal que el T-anulador de v es el polinomio minimal de T.

ii) T tiene un vector cíclico si, y solo si, los polinomios característico y minimal de T son idénticos.

Teorema. (Teorema de Cayley-Hamilton generalizado). Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Sean m_T y p_T los polinomios minimal y característico de T, respectivamente.

i) m_T divide a p_T.

ii) m_T y p_T tienen los mismos factores primos, salvo multiplicidades.

iii) Si

$$m_T = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$

es la factorización prima de p_T, entonces

$$p_T = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k}$$

donde d_i es la nulidad de $p_i(T)^{r_i}$ dividida por el grado de p_i.

Corolario. Si T es un operador lineal nilpotente sobre un espacio vectorial de dimensión n, entonces el polinomio característico de T es x^n.

Teorema. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Entonces B es semejante sobre $\mathbb{F}$ a una, y solo a una, matriz que está en forma racional.

Forma de Jordan

Supongamos que T es un operador lineal sobre V y que el polinomio característico de T se puede factorizar sobre $\mathbb{F}$ como sigue $p_T = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$, con $r_i > 0$, $c_i \neq c_j$. Entonces el polinomio minimal de T será $m_T = (x - c_1)^{a_1} \dots (x - c_k)^{a_k}$ con $0 < a_i \leq r_k$

Si V_i es el espacio nulo de $(T - c_i I)^{a_i}$, entonces el teorema de descomposición prima dice que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

y que el operador T, inducido en V_i por T tiene polinomio minimal $(x - c_i)^{a_i}$.

Esto nos da el puntapié para hallar la descomposición de T con $T = D + N$.

Observación: La desomposición de D es

$$D = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \cdots + c_k E_k$$

Si queremos dar una forma canónica debemos pensar en cómo describir el N. Por corolario anterior, si N es nilpotente, existe $r > 0$ tal que $N^r = 0$ entonces $m_N | x^r$. Con lo cual N es nilpotente si y solo sí $m_N = x^s$ para algún $s \in \mathbb{N}, s \leq n$ si y solo sí $p_N = x^n$ para algún $n = \dim(V)$.

Por **teorema de descomposición cíclica**, tenemos que si

$$p_r = x^{s_r}, p_{r-1} = x^{s_{r-1}}, \dots p_2 = x^{s_2}, p_1 = x^{s_1} = m_N$$

con $s_r \leq s_{r_1} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_1$ tales que $s_r + s_{r_1} + \cdots + s_2 + s_1 = \dim(V) = n$. Existe una base $\mathcal{B}$ tal que

$$[N] = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Subespacios cíclicos y anuladores

Definición. Sea $v \in V$, el subespacio T-cíclico generado por v es el subespacio $Z(v,T)$ de los vectores de la forma $g(T)(v)$, $g \in \mathbb{F}[x]$.

Definición. Si $Z(v,T) = V$ entonces se dice que v es un vector cíclico de T.

Definición. Sea $v \in V$. El T-anulador de v es el ideal $M(v,T)$ en $\mathbb{F}[x]$ que consta de todos los polinomios $g \in \mathbb{F}[x]$ de modo que $g(T)v = 0$. Al polinomio mónico único p, que genera este ideal se lo llamará también el T-anulador de v.

Teorema. Sea $v \in V$, $v \neq 0$ y p_x el T-anulador de v.

i) El grado de p_x es igual a la dimensión del subespacio cíclico $Z(v,T)$.

ii) Si el grado del polinomio de p_x es k entonces los vectores $v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}$ forman una base de $Z(v,T)$.

iii) Si U es el operador lineal en $Z(v,T)$ inducido por T entonces el polinomio minimal de U es p_x.

Definición. Si U es un operador lineal sobre un espacio de dimensión finita W, entonces U tiene un vector cíclico si, y solo si, existe una base ordenadal de W con la que U este representada por la matriz asociada al polinomio minimal de U.

Corolario. Si A es la matriz asociada a un polinomio mónico p, entonces p es el polinomio minimal y el polinomio característico de A.

Descomposiciones cíclicas y forma racional

Definición. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V y sea W un subespacio de V. Se dice que W es T-admisible si

i) W es invariante por T.

ii) si $f(T)(v)$ está en W, existe un vector $w \in W$ tal que $f(T)(v) = f(T)(w)$.

Teorema. (Teorema de descomposición cíclica). Sea T un operador lineal lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita y sea W_0 un subespacio propio T-admisible de V. Existen los vectores no nulos $v_1, v_2, \dots v_r \in V$ con T-anuladores $p_i = m_{v_i,T}$, $i = 1, 2, \dots, r$ tales que

i) $V = W_0 \oplus Z(v_1,T) \oplus \cdots \oplus Z(v_k,T)$.

ii) $p_k | p_{k-1}, k = 2, \dots, r$.

Corolario. Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita entonces todo subespacio T-admisible tiene un subespacio complementario que es también invariante por T.

Corolario. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectoría V de dimensión finita

i) Existe un vector $v \in V$ tal que el T-anulador de v es el polinomio minimal de T.

ii) T tiene un vector cíclico si, y solo si, los polinomios característico y minimal de T son idénticos.

Teorema. (Teorema de Cayley-Hamilton generalizado). Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Sean m_T y p_T los polinomios minimal y característico de T, respectivamente.

i) m_T divide a p_T.

ii) m_T y p_T tienen los mismos factores primos, salvo multiplicidades.

iii) Si
$$m_T = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$
es la factorización prima de p_T, entonces
$$p_T = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k}$$
donde d_i es la nulidad de $p_i(T)^{r_i}$ dividida por el grado de p_i.

Corolario. Si T es un operador lineal nilpotente sobre un espacio vectorial de dimensión n, entonces el polinomio característico de T es x^n.

Teorema. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Entonces B es semejante sobre $\mathbb{F}$ a una, y solo a una, matriz que está en forma racional.

Forma de Jordan

Supongamos que T es un operador lineal sobre V y que el polinomio característico de T se puede factorizar sobre $\mathbb{F}$ como sigue $p_T = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$, con $r_i > 0$, $c_i \neq c_j$. Entonces el polinomio minimal de T será $m_T = (x - c_1)^{a_1} \dots (x - c_k)^{a_k}$ con $0 < a_i \leq r_k$

Si V_i es el espacio nulo de $(T - c_i I)^{a_i}$, entonces el teorema de descomposición prima dice que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

y que el operador T, inducido en V_i por T tiene polinomio minimal $(x - c_i)^{a_i}$.

Esto nos da el puntapié para hallar la descomposición de T con $T = D + N$.

Observación: La desomposición de D es

$$D = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \cdots + c_k E_k$$