Si queremos dar una forma canónica debemos pensar en cómo describir el N. Por corolario anterior, si N es nilpotente, existe $r > 0$ tal que $N^r = 0$ entonces $m_N | x^r$. Con lo cual N es nilpotente si y solo sí $m_N = x^s$ para algún $s \in \mathbb{N}, s \leq n$ si y solo sí $p_N = x^n$ para algún $n = \dim(V)$.

Por **teorema de descomposición cíclica**, tenemos que si

$$p_r = x^{s_r}, p_{r-1} = x^{s_{r-1}}, \dots p_2 = x^{s_2}, p_1 = x^{s_1} = m_N$$

con $s_r \leq s_{r_1} \leq \cdots \leq s_2 \leq s_1$ tales que $s_r + s_{r_1} + \cdots + s_2 + s_1 = \dim(V) = n$. Existe una base $\mathcal{B}$ tal que

$$[N] = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, las matrices de este tipo dan operadores nilpotentes.

Observación. En general, a menos de equivalencia, hay tantas matrices de tamaño n como lo que se llama particiones de n formas de cubrir a n como suma de números naturales.

Definición. Una matriz bloque elemental de Jordan con valor propio c (asociada a un escalar "c") es la matriz $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ forma:

$$B = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ tal que m_T es producto de factores lineales entonces existe $\mathcal{B}$ una base de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es un bloque de Jordan. La descomposición es única con respecto al tamaño de cada bloque

Operadores Semisimples

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea T un operador lineal sobre V. Se dice que T es **semisimple** si todo subespacio T-invariante tiene un subespacio complementario T-invariante.

Lema. Sea T un operador lineal sobre el espacio vectorial de dimensión finita V y sea $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ la descomposición prima de T; es decir, si m_T es el polinomio minimal de T y $m_T = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ es la factorización prima de m_T, entonces es W_j el espacio nulo de $p_j(T)^{r_j}$. Sea W el subespacio de V que es invariante por T. Entonces

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \dots (W \cap W_k)$$

Lema. Sea T un operador lineal sobre el espacio vectorial V y sea m_T el polinomio minimal de T. Si m_T es irreducìble sobre el cuerpo escalar $\mathbb{F}$ entonces T es semisimple.

Teorema Sea T un operador lineal sobre un espacio rectorial de dimensión finita V. Una condición necesaria y suficiente para que T sea semisimple es que el polinomio minimal m_T de V y sea de la forma $p = p_1 p_2 \cdots p_k$, donde $p_1, p_2, \dots, p_k$ son polinomios irreducibles distintos sobre el cuerpo escalar $\mathbb{F}$.

Corolario. Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, T es semisimple si, y solo si, T es diagonalizable.

Espacio Dual

Si V es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre V forman, naturalmente, un espacio vectorial. Es el espacio $L(V, F)$.

Se designa este espacio por V^* y se le llama **espacio dual** del V:

$$V^* = L(V, F)$$

.

Si V es de dimensión finita se puede obtener una descripción muy explícita del espacio dual V^*.

Por el Teorema 5 sabemos algo acerca del espacio V^*:

$$\dim V^* = \dim V.$$

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Conforme al Teorema 1 existe (para cada i) un funcional lineal único f_i en V tal que

$$f_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

De esta forma se obtiene de $\mathcal{B}$ un conjunto de n funcionales lineales distintos $f_1, \dots, f_k$, sobre V. Estos funcionales son también linealmente independientes, pues supóngase que

$$f_i = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} \\ &= c_j. \end{aligned}$$

En particular, si f es el funcional cero. $f_i(v_j) = 0$ para cada j y, por tanto, los escalares c, son todos ceros. Entonces los $f_1, \dots, f_k$, son n funcionales linealmente independientes, y como se sabe que V^* tiene dimensión n, deben ser tales que $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k\}$ es una base de V^*. Esta base se llama **base dual** de $\mathcal{B}$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces existe una única base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Para cada funcional lineal f sobre V se tiene

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(v_i) f_i$$

y para cada vector v de V se tiene

$$v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i$$

Definición. Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y $S \subseteq V$, el anulador de S es el conjunto $S^\circ = \{f : V \to \mathbb{F} : f(v) = 0 \text{ para todo } v \in S\}$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y sea W un subespacio de V. Entonces

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V.$$

Corolario. Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimención finita, entonces $W_1 = W_2$ si, y solo si, $W_1^\circ = W_2^\circ$.

Doble Dual

Una pregunta es, ¿si toda base de V^* es la dual de alguna base de V?. Una posibilidad de contestar esta pregunta es considerar V^{**}, espacio dual de V^*.

Si $v \in V$, entonces v induce un funcional lineal L_v, sobre V^*, definido por

$$L_v = f(v)$$

El hecho de que L_v, sea lineal no es más que una reformulación de la definición de las operaciones lineales en V^*:

$$\begin{aligned} L_v(cf + g) &= (cf + g)(v) \\ &= (cf)(v) + g(v) \\ &= cf(v) + g(v) \\ &= cL_v(f) + L_v(g) \end{aligned}$$

Si V es de dimensión finita y $v \neq 0$, entonces $L_v \neq 0$. Es decir, existe un funcional lineal f tal que $f(v) \neq 0$.

La demostración es muy simple: Elíjase una base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V tal que $v_1 = v$, y sea f el funcional lineal que asigna a cada vector en V su primera coordenada en la base ordenada $\mathcal{B}$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Para cada vector $v \in V$ se define

$$L_v(f) = f(v) \text{ con } f \in V^*.$$

Entonces $L : V \to V^{**}$ tal que $L(v) = L_v$ es un isomorfismo.

Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Si L es un funcional lineal en el espacio dual V^* de V, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que

$$L(v) = f(v) \text{ para todo } f \in V^*.$$

Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Toda base de V^* es dual de alguna base de V.

Transpuesta de una transformación lineal

Teorema. Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Para toda transformación lineal T de V en W, existe una única transformación lineal $T^T : W^* \to V^*$ tal que

$$(T^T g)(v) = g(Tv)$$

para todo $g \in W^*$ y $v \in V$.

Proposicion. $T^T \in \hom_{\mathbb{F}}(W^*, V^*)$.

Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y T una transformación lineal de V en W. Entonces $\ker(T^T) = Im(T)^\circ$. Particularmente, si $\dim V, \dim W < \infty$ entonces

(a) $rango(T) = rango(T^T)$.

(b) $Im(T^T) = (\ker T)^\circ$.

Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y $\dim(V) = m, \dim(W) = n$, con $m, n < \infty$ tales que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ sean las bases de V y W, respectivamente. Además $\mathcal{B}_1^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ y $\mathcal{B}_2^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ son las bases duales de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente.

$$\mathcal{B}, \mathcal{C} \to [T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$
$$\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^* \to [T^T]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} \in \mathbb{F}^{n \times m}$$

con $T \in \hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ entonces $[T^T]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = [T]^T_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

Definición. Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$, la **transpuesta** de A es $A^T \in \mathbb{F}^{m \times n}$, definida por $A_{ij} = A_{ji}$.

Teorema. Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Entonces el rango de filas de A es igual al rango de columnas de A.

Espacios con Productos Internos

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

Definición. Un producto interno sobre $\mathbb{F}-$espacio vectorial es una funcion $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ tal que $u, v, w \in V$, $c \in \mathbb{F}$ tal que

a) $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$

b) $(cu|w) = c(u|w)$

c) $(u|w) = \overline{(w|u)}$

d) $(u|u) > 0$ si $u \neq 0$

$*$ Es sesquilineal en la segunda entrada

$(u|v + cw) = \overline{(v + w|u)} = \overline{(v|u) + c(w|u)} = \overline{(u|v)} + \overline{c}(u|w) = (u|v) + \overline{c}(u|w)$

i) Para cada $v \in V$, $f_v : V \to \mathbb{F}$ tal que $f_v = (u|v)$ entonces $f_v \in V^*$

ii) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces $\Phi : V \to V^*$, $\Phi(v) = f_v \Rightarrow \Phi$ es un isomorfismo (si $\dim V < \infty$).

Definición. $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, norma de V. ($*$ depende del producto interno $\langle , \rangle$).

Propiedades.

a) $||cv|| = |c|||v||$

b) $||u + w||^2 = ||u||^2 + 2\Re\langle v, w\rangle + ||w||^2$

c) $(u|w) = \frac{1}{4}\left(||u + w||^2 - ||u - w||^2 + i||u + w||^2 - i||u - u\right.$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

d) $(u|w) = \frac{1}{4}\left(||u + w||^2 - ||u - w||^2\right)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Teorema. Sean $u, v \in V$.

a) $|\langle u|v\rangle| \leq ||u||.||w||$

b) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$