Grupos de Lie y álgebras de Lie - 2021

Práctico 1

1. Probar que el conjunto $\mathrm{T}^u(n,\mathbb{R})$ de matrices reales $n \times n$ triangulares superiores es un grupo de Lie. Hallar su dimensión y la correspondiente álgebra de Lie.

2. Probar que el conjunto de matrices reales $n \times n$ triangulares superiores cuyos elementos de la diagonal son todos 1 es un grupo de Lie. Hallar su dimensión y la correspondiente álgebra de Lie.

3. Dados dos grupos de Lie G, H con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, probar que la variedad producto $G \times H$ con la estructura de grupo producto: $(g,h) \cdot (g',h') := (gg',hh')$ es un grupo de Lie. Mostrar que su álgebra de Lie es (isomorfa a) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$.

4. Consideramos la variedad producto $K = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Probar que la aplicación:
$$K \times K \to K, \qquad (A,s) \cdot (B,t) := (AB, As+t),$$
define una estructura de producto en K, tal que K es un grupo de Lie.

   Dicho grupo recibe el nombre de *grupo de movimientos afines* de $\mathbb{R}^n$, pues si identificamos $(A,t) \in K$ con el movimiento afín de $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax+t$, se tiene un isomorfismo de grupos.

5. Sea V un espacio vectorial con base $\{X,Y\}$. Sea $[\cdot,\cdot]$ el corchete definido por
$$[X,X] = [Y,Y] = 0, \qquad [X,Y] = Y, \qquad [Y,X] = -Y,$$
y extendido bilinealmente a todo V. Probar que V con $[\cdot,\cdot]$ es un álgebra de Lie.