Grupos de Lie y álgebras de Lie

Horarios: Martes y Jueves de 9:00 a 11:00

Cursado: Todo virtual. Clases grabadas. Classroom

Exámenes: - Durante el cuatrimestre, practicas
↳ Tareas para entregar

- Lista de ejercicios, para entregar antes del examen
- Examen escrito/oral por google meet

Bibliografía: 1) Warner, Foundations of diff manifolds and Lie groups
Capítulo 3. Capítulos 1 y 2 son de variedades diff.
Materia Geometría superior en Famaf.

- Grupos de Lie ⟷ álgebras de Lie
- Relación entre grupos de Lie y álgebras de Lie
- subgrupos cerrados.
- Variedades Homogéneas.

2) Algebras de Lie.

- Algebras de Lie solubles
- " " " nilpotentes
- " " " semisimples

Knapp. Lie groups beyond an introduction
Capítulo 1.

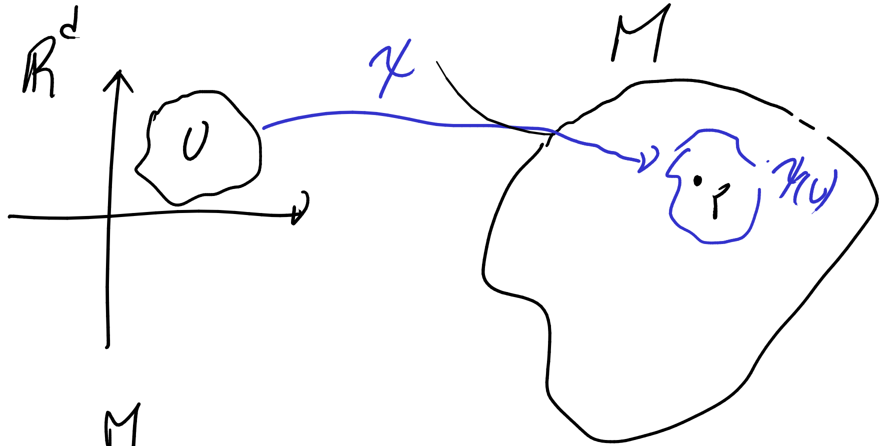
3) Medida de Haar

4) Grupos de Lie compactos y representaciones

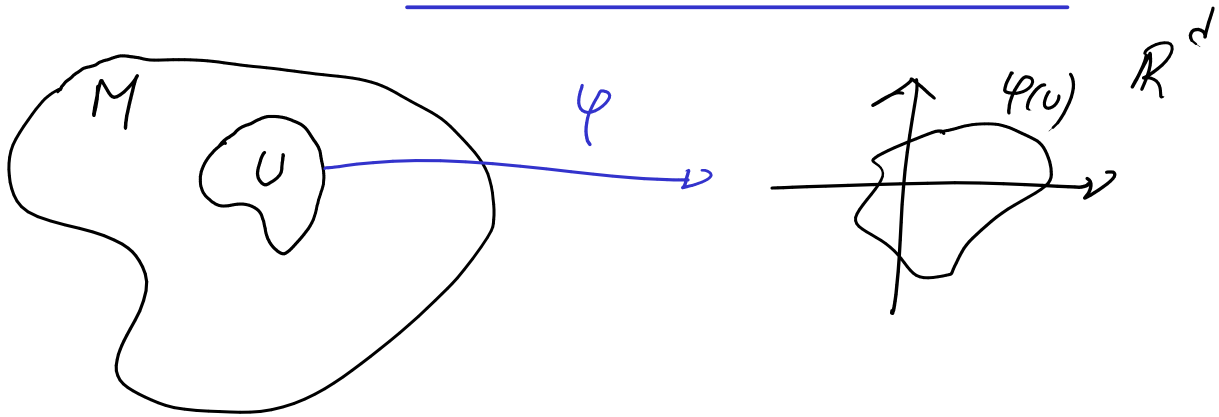
Repaso Variedades diferenciables:

M espacio topológico, Hausdorff, N_2

localmente Euclideo de dimensión d: $\forall p \in M$, $\exists$ U abierto de $\mathbb{R}^d$ y un homeomorfismo $\psi : U \to M$, $p \in \psi(U)$.



si $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ es un homeomorfismo ($U \subset M$, U abierto en M) entonces (U, φ) se llama sistema de coordenadas

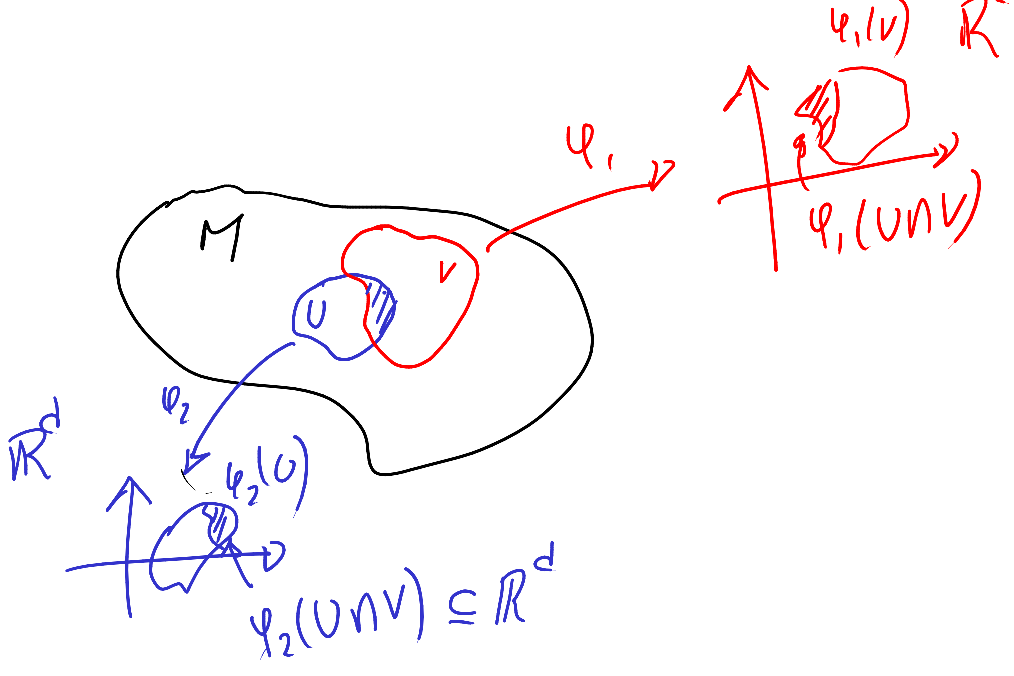


<u>Definición:</u> Una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ en M es una colección de sistemas de coordenadas

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) / \alpha \in A\}$ tal que

a) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

b) Si (U, φ_1) y (V, φ_2) son dos sistemas de coordenadas en $\mathcal{F}$ Entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U \cap V) \longrightarrow \varphi_1(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^d$ es C^∞ y tiene inversa C^∞.

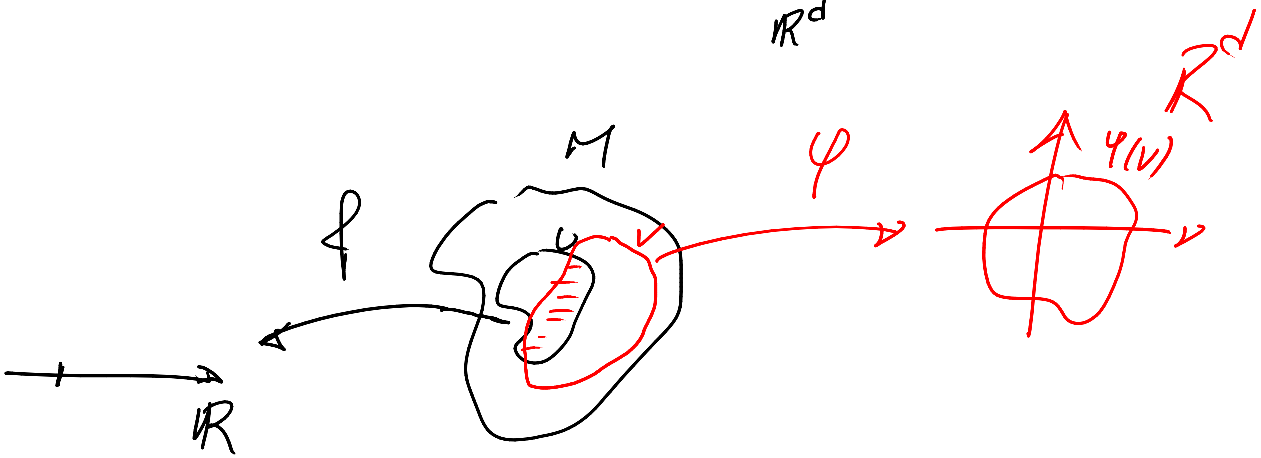


c) La colección $\mathcal{F}$ es maximal con respecto a (b)

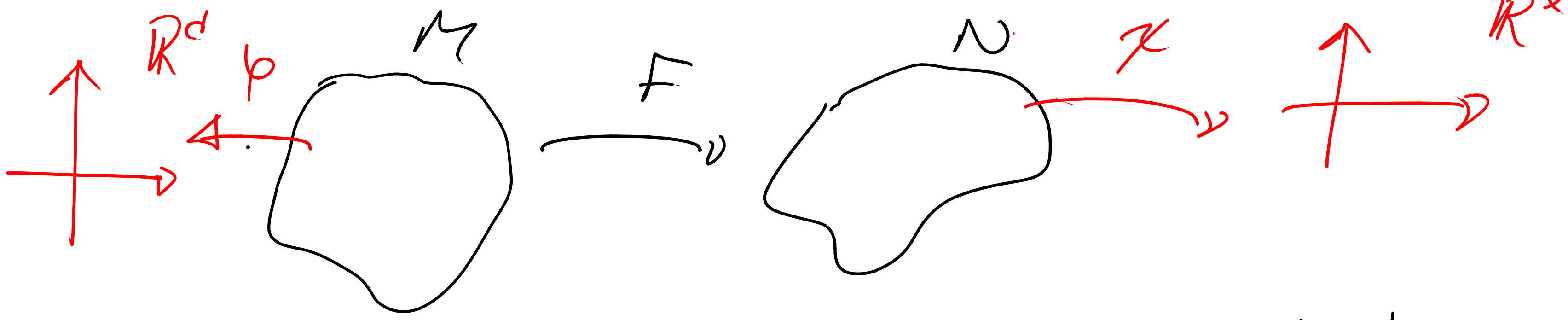
$(M, \mathcal{F})$ es una variedad diferenciable

Funciones diferenciables:

_ Sea $U \subset M$, U abierto. Decimos que $f: U \to \mathbb{R}$ es C^∞ sobre U si $f \circ \varphi^{-1}: \underset{\mathbb{R}^d}{\underset{\cap}{\varphi(V \cap U)}} \to \mathbb{R}$ es C^∞ $\forall (V, \varphi)$ sistema de coordenadas



_ Si $F: M \to N$ es continua entre dos variedades M y N



Entonces F es C^∞ si $\chi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ donde (U, φ) es un sistema de coordenadas en M y (V, χ) es un sistema de coordenadas en N.

- Si $F: M \to N$ es C^∞ y es 1-1 y suryectiva, decimos que F es un difeomorfismo, con inversa C^∞.

Vectores:

M variedad, $m \in M$

C_m^∞ = funciones C^∞ en el punto m ← es un álgebra
$f: M \to \mathbb{R}$

Un vector v en el punto m es una derivación lineal de C_m^∞:

$$v : C_m^\infty \to \mathbb{R}$$

(a) $v(f+\lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$

(b) $v(f \cdot g) = v(f)\, g(m) + f(m)\, v(g)$

M_m denota el conjunto de todos los vectores tangentes en m.

<u>Definición:</u> M_m es el espacio tangente a M en m.

<u>Ejercicio:</u> Verificar que M_m es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

Diferencial

Sea $F : M \to N$ C^∞. y sea $m \in M$

El diferencial de F es una aplicación lineal

$$dF : M_m \to N_{F(m)}$$

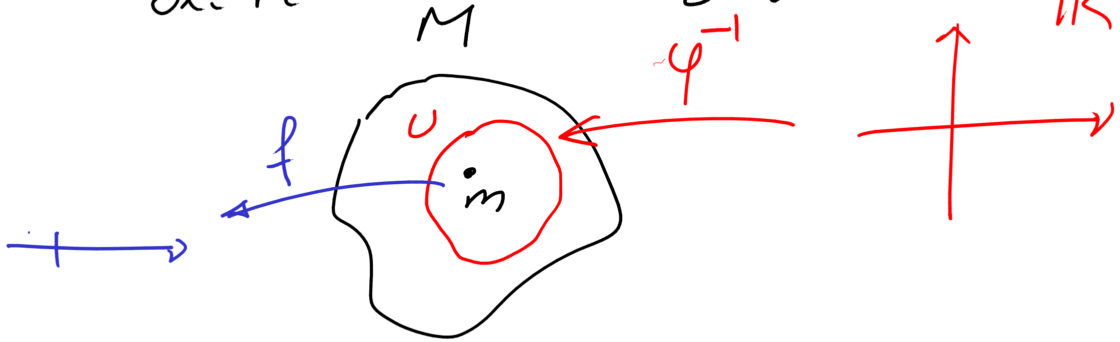
definición:
$$(dF)(v)\, f = v(f \circ F) \quad \forall f \in C^\infty_{F(m)}$$

En coordenadas: sea (U,φ) un sistema de coordenadas con funciones coordenadas $x_1,\dots,x_d$ en la variedad M.

$m\in U$, $\varphi(m)\in\mathbb{R}^d \Rightarrow \varphi(m)=(x_1(m),\dots,x_d(m))$

$$x_i = r_i\circ\varphi : U \to \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_m\right) f = \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i} \quad \text{es un vector.}$$



$$v\in M_m \Rightarrow v=\sum_{i=1}^{d} \overset{v(x_i)}{a_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m \quad \text{para algunos } a_i$$

Practica variedades: Probar que las esferas S^d son variedades. Ejemplos pag 7, Warner. En particular, el ejemplo (g) de Variedad producto.

Grupos de Lie:

Definición: Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable con una estructura de grupo. tal que la aplicación:

$$\begin{aligned} a: G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \cdot g_2^{-1} \end{aligned} \quad \text{es } C^{\infty}$$

observación: Sea G grupo de Lie

(1) La aplicación $\begin{aligned} f: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$ es C^{∞}:

La escribimos como composición de funciones C^{∞}.

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\eta} G \times G \xrightarrow[C^{\infty}]{a} G \\ g &\underset{C^{\infty}}{\longmapsto} (e, g) \longmapsto e \cdot g^{-1} = g^{-1} \end{aligned}$$

identidad del grupo.

$\boxed{\text{composición de funciones } C^{\infty} \text{ es } C^{\infty}} \Longrightarrow f = a \circ \eta$ con a y η C^{∞}. $\Rightarrow f$ es C^{∞}.

(2) La aplicacion $F: G\times G \longrightarrow G$ es C^∞:

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$$

$$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xrightarrow{\xi} & G\times G & \xrightarrow{\sigma} & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & (g_1, g_2^{-1}) & \longmapsto & g_1 \cdot (g_2^{-1})^{-1} = g_1 \cdot g_2 \end{array}$$

C^∞ pues

$g \mapsto g^{-1}$ es C^∞ por (1)

$\Rightarrow \sigma \circ \xi$ es C^∞

$\therefore$ tenemos que G grupo de Lie $\Rightarrow$

$g \longmapsto g^{-1}$

son C^∞.

Y $(g_1, g_2) \longmapsto (g_1 \cdot g_2)$

Ejemplos:

(a) $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo de Lie

(b) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con el producto

(c) $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$

(d) El producto de dos grupos de Lie $G \times H$ con estructuras de variedad producto y de producto directo de grupos es un grupo de Lie.

Ejercicio en Práctico 1

(e) Toro $T^n = S^1 \times \overset{n}{\cdots} \times S^1$

⋮

Próxima clase:
- Discutir ejemplos
- Introducir alg Lie
- homomorfismos