Grupos de Lie:

Definición: Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable con una estructura de grupo. tal que la aplicación:

$$\begin{aligned} a: G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \cdot g_2^{-1} \end{aligned} \quad \text{es } C^\infty$$

Vimos que Grupo de Lie $\Rightarrow$

1) $g \longmapsto g^{-1}$ es C^∞
2) $(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$ es C^∞

Ejemplos:

(a) $(\mathbb{R}^n, +)$ $\longrightarrow$ Estruct. dif. standar
↳ Estruct. de grupo $+$

$$\begin{aligned} a: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &\longmapsto (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \end{aligned} \quad \text{es } C^\infty$$

✓

c) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ con el producto en $\mathbb{C}$: $(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd + i(ad+bc)$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}$$

Sistema de coordenadas: $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(a+ib) \longmapsto (a,b)$$

$$\begin{tikzcd}
\varphi\circ\sigma\circ\varphi_{\times}^{-1}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^4\setminus\{0\} \arrow[r] & \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \\
((a,b),(c,d)) \arrow[r, mapsto] & (a+ib,\ c+id) \arrow[r] & (a+ib)\cdot(c+id)^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, -\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\right) \\
 & & \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i\frac{(ad-bc)}{c^2+d^2} &
\end{tikzcd}$$

es C^∞ pues $c^2+d^2 \neq 0$

observación 1: La estructura diferenciable $\mathfrak{F}$ es la estructura maximal que contiene a φ.

observación 2: Si tengo variedades M y N y $F: M \to N$

si $\forall m \in M$, $\exists (U_m, \varphi_m)$ sistema de coordenadas en M tq $m \in U$

$\exists (V_{F(m)}, \psi_{F(m)})$ " " " " N $F(m) \in V$

tal que $\psi_{F(m)} \circ F \circ \varphi_m^{-1}$ C^∞ $\Rightarrow$ F es C^∞

3) Ejercicio: Si G y H son grupos de Lie $\Rightarrow$ $G \times H$ es un grupo de Lie

4) $S^1 \subset \mathbb{C}^*$, $S^1 = \{e^{it} / t \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathfrak{F} = \{\varphi_a^{-1}(t) = \cos t + i \,\mathrm{sen}\, t = e^{it} / t \in (a, a+2\pi)\}$$

Estructura de grupo: $e^{it_1}, e^{it_2} \in S^1 \Rightarrow e^{it_1} \cdot e^{it_2} = e^{i(t_1+t_2)}$

$$(e^{it})^{-1} = e^{-it} \quad C^\infty.$$

$$\Rightarrow \varphi_b \circ \sigma \circ (\varphi_a^{-1} \times \varphi_a^{-1}) : \underbrace{(a, a+2\pi) \times (a, a+2\pi)}_{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow S^1 \times S^1 \xrightarrow{\sigma} S^1 \xrightarrow{\varphi_b} \mathbb{R}$$

$$(t_1, t_2) \longmapsto (e^{it_1}, e^{it_2}) \longrightarrow e^{it_1} e^{-it_2} = e^{i(t_1-t_2)} \longmapsto t_1 - t_2$$

5) $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ es un grupo de Lie usando (3) y (4)

6) $GL_n(\mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{R})$ = Matrices $n \times n$ inversibles con coeficientes reales

= Es un abierto de $\mathbb{R}^{n \times n}$ ← Estructura de Variedad

Tenemos coordenadas $\varphi(g) = g \quad \forall g \in GL_n(\mathbb{R})$

$x_{ij} = r_{ij} \circ \varphi$ es la dada por $x_{ij}(g) = g_{ij}$

$$g \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow g \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \boxed{g_{ij}} & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \to x_{ij}(g) = g_{ij}$$

tenemos $n \times n$ entradas

tenemos n^2 coordenadas

Estructura de Grupo. $g_1, g_2 \in GL_n(\mathbb{R})$, $g_1 \cdot g_2$ ← producto de matrices

$$\begin{tikzcd} GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "a"] & GL_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "x_{ij}"] & \mathbb{R} \\ ((g_{ij}), (h_{ij})) \arrow[r, mapsto] & (g \cdot h^{-1}) \arrow[r] & x_{ij}(g \cdot h^{-1}) \end{tikzcd}$$

entradas de g son racionales en los g_{ij}

las entradas de h^{-1} son racionales en h_{ij} con denominador distinto de cero.

es una función racional de los g_{ij}, h_{ij} con denom distinto de cero.

$\Rightarrow$ $x_{ij} \circ a$ es C^∞ $\rightarrow$ a es C^∞

$\Rightarrow$ $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Objetivo: Probar el siguiente Teorema:

Teorema: Sea G un grupo de Lie y A un subgrupo abstracto, cerrado de G. Entonces A tiene una ! estructura de variedad con la cual es un subgrupo de Lie de G.

Consecuencias: Los siguientes son grupos de Lie:

1) $O(n) = \{ M \in GL(n, \mathbb{R}) / M M^T = I \}$

2) $SO(n) = \{ M \in O(n) / \det(M) = 1 \}$.

3) $SL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in GL(n, \mathbb{R}) / \det M = 1 \}$.

$\vdots$

Algebras de Lie:

Definición: Un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con una operación bilineal:

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}$$

tal que: si $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

a) $[X,Y] = -[Y,X]$, $[X,X] = 0$

b) Identidad de Jacobi:

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

Si $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

$\qquad Y \mapsto [X,Y]$

Entonces la identidad de Jacobi dice:

$$\mathrm{ad}_X [Y,Z] = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z]$$

Buscamos asociar a cada grupo de Lie un algebra de Lie

Definición: Un homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es una aplicación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que preserva $[,]$:

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

corchete en $\mathfrak{g}$ $\nearrow$ $\qquad$ $\nwarrow$ corchete en $\mathfrak{h}$

Un isomorfismo es un homomorfismo 1-1 y sobre.

Ejemplos

a) Cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial V con el corchete:

$$[X,Y]=0 \quad \forall X,Y\in V$$

es un álgebra de Lie. Esta algebra de Lie se dice abeliana

$$[X,Y]=0=[Y,X]$$

(b) Un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con base $\{X,Y\}$ es un algebra de Lie si definimos:

$$[X,X]=[Y,Y]=0$$

$$[X,Y]=Y$$

Definimos en los elementos de la base

y extendemos bilinealmente a todo $\mathfrak{g}$

Ejercicio 5 del practico (Jacobi)

(c) El espacio vectorial $gl_n(\mathbb{R}) = gl(n, \mathbb{R}) =$ matrices $n \times n$

$= \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial

Para hacerlo un álgebra de Lie definimos:

$$[\,,\,] : gl_n(\mathbb{R}) \times gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow gl_n(\mathbb{R})$$
$$(A \,,\, B) \longmapsto A.B - BA$$

<u>observación</u>: El mismo corchete se puede usar en cq. algebra asociativa.

Veamos que $(gl_n(\mathbb{R}), [\,,\,])$ es un álgebra de Lie:

1) $[\,,\,]$ es bilineal

$$[A+\lambda B, C] = (A+\lambda B).C - C(A+\lambda B) = AC - CA + \lambda(BC - CB$$

$$= [A,C] + \lambda[B,C] \checkmark$$

Lo mismo para $[A, B+\lambda C] = \ldots$

2) $[A,B] = A.B - BA = -(BA - AB) = -[B,A]$ ✓

3) Identidad de Jacobi:

$$[\overset{\textcircled{1}}{X,[Y,Z]}] = [[\overset{\textcircled{2}}{X,Y}],Z] + [Y,\overset{\textcircled{3}}{[X,Z]}]\ ?$$

$$[X, YZ - ZY] - [XY - YX, Z] - [Y, XZ - ZX] = \textcircled{1} - \textcircled{2} - \textcircled{3}$$

$$\underbrace{\cancel{XYZ} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{ZYX}}_{\textcircled{1}} \underbrace{- \cancel{XYZ} + \cancel{YXZ} + \cancel{ZXY} - \cancel{ZYX}}_{-\textcircled{2}}$$

$$\underbrace{- \cancel{YXZ} + \cancel{YZX} + \cancel{XZY} - \cancel{ZXY}}_{\textcircled{-3}} = 0 \checkmark$$

$\therefore$ $[\,,\,]$ es bilineal, antisimétrico y satisface Jacobi $\Rightarrow$ $gl_n\mathbb{R}$ es un alg. de Lie

Definición: Sea G un grupo de Lie y $g\in G$. Las traslaciones a izquierda y derecha por g están definidas por:

$$l_g(h) = gh, \quad r_g(h) = hg \qquad \forall\, h\in G.$$

Entonces tenemos que:

1) l_g y r_g son C^∞

$$\begin{tikzcd} l_g : G \arrow[r] & G\times G \arrow[r] & G \\ h \arrow[r, mapsto, "C^\infty"'] & (g,h) \arrow[r, mapsto, "C^\infty"'] & g\cdot h \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow l_g$ es C^∞

2) l_g es 1-1 porque: $l_g(h_1) = l_g(h_2)$

$\Rightarrow \quad g.h_1 = g\,h_2 \to h_1 = h_2$

De la misma forma, r_g es 1-1

3) $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$ pues: $(l_{g^{-1}} \circ l_g)(h) = l_{g^{-1}}(gh) = g^{-1} g h = h$

$\forall h \in G.$

<u>Notación:</u> Si V es un subconjunto de G, entonces:

$$l_g(V) = \{ g.h \,/\, h \in V \} = g.V$$

$$r_g(V) = \{ h.g \,/\, h \in V \} = V.g$$

Entonces tenemos dos funciones

$$r_g : G \to G$$
$$l_g : G \to G$$

Por lo tanto:

$$dl_g : T_e(G) \longrightarrow T_{ge}(G) \leftarrow$$ diferencial de l_g en e.

Definición: Un campo vectorial C^∞ sobre M es una aplicación:

$$X : m \longmapsto X_m = X(m) \in M_m$$

tal $(Xf)(m) = X_m f$ es $C^\infty(M)$ sobre M. $\forall f \; C^\infty(M)$

Un campo vectorial X se dice invariante a izquierda si $\forall g \in G$ se cumple:

$$dl_g \circ X = X \circ l_g$$

Definición: El conjunto de todos los campos vectoriales invariantes a izquierda se denotará por g

Teorema: Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda.

a) $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial y además la aplicación

$$\alpha : \mathfrak{g} \longmapsto \underset{\uparrow}{G_e} \quad \text{definida por} \quad \alpha(X) = X_e = X(e) \quad \text{es}$$

espacio tangente en la identidad del grupo

un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto

$$\dim \mathfrak{g} = \dim G_e \underset{\uparrow \text{ geometría}}{=} \dim G.$$

b) Los campos vectoriales invariantes a izquierda son C^∞.

c) El corchete de Lie de dos campos vectoriales invariantes a izquierda es un campo vectorial invariante a izquierda

Definición: Si X, Y dos campos C^∞ sobre M, definimos

$$[X,Y]_m f := X_m(\underbrace{Yf}_{\substack{\text{función}\\ M \to \mathbb{R}}}) - Y_m(\underbrace{Xf}_{\substack{\text{función}\\ M \to \mathbb{R}}}) \leftarrow$$

se llama corchete de Lie de X, Y

$$\begin{aligned} Yf : M &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto Y_m f \end{aligned}$$

Proposición 1.45 Warner: (1) $[X,Y]$ es un campo vectorial C^∞ en M

(2) $[X,Y] = -[Y,X]$

(3) $[\ ,\ ]$ satisface la identidad de Jacobi

(d) $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie para campos vectoriales es un álgebra de Lie.