Teorema: Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda.

a) $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial y además la aplicación $\alpha : \mathfrak{g} \longmapsto G_e$ definida por $\alpha(X) = X_e = X(e)$ es

espacio tangente en la identidad del grupo

un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto

$$\dim \mathfrak{g} = \dim G_e = \dim G.$$

geometría

b) Los campos vectoriales invariantes a izquierda son C^∞.

c) El corchete de Lie de dos campos vectoriales invariantes a izquierda es un campo vectorial invariante a izquierda

d) $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie es un álgebra de Lie.

Dem: (a) $\mathfrak{g}$ = campos vectoriales invariantes a izquierda

Ver que $\mathfrak{g}$ es espacio vectorial ← Ejercicio

↳ (1) El conj. de campos vect es espacio vect.

Verificar axiomas

(2) $\mathfrak{g}$ es un subesp. vectorial

X, Y son inv. a izq $\Rightarrow X + \lambda Y$ es inv. a izq..

G_e = espacio tangente a G en la identidad e.

Tenemos que verificar que $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow G_e$

$X \longmapsto X_e$

es un isomorfismo espacios vectoriales.

(1) α es lineal: $\alpha(X+\lambda Y) = (X+\lambda Y)_e = X_e + \lambda Y_e$
$$= \alpha(X) + \lambda\, \alpha(Y)$$

(2) $\underline{\alpha \text{ inyectiva}}$: Supongamos que $\alpha(X) = \alpha(Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$

$\Rightarrow \forall g \in G$ se cumple $X(g) = X(l_g(e)) \overset{\text{inv. a izq}}{=} (dl_g \circ X)(e) = dl_g(X(e))$

$$Y(g) = Y(l_g(e)) \underset{\text{inv. a izq.}}{=} (dl_g \circ Y)(e) = dl_g(Y(e))$$

Pero como $\alpha(X) = \alpha(Y)$ $\Rightarrow$ $X(e) = Y(e)$

$\Rightarrow$ $dl_g(X(e)) = dl_g(Y(e))$

$\Rightarrow$ $X(g) = Y(g) \quad \forall g \in G$

$\Rightarrow$ $X = Y$ ✓

(3) α es suryectiva: Supongamos que $v \in G_e$

Definimos un campo vectorial X de la siguiente forma:

$$X(g) = dl_g v \qquad \left(dl_g : G_e \longrightarrow G_{g(e)} = G_g \right)$$

Primero vemos que $\alpha(X) = X(e) = dl_e v = v$ ✓

Veamos que X es invariante a izquierda.

$$X(l_g . h) \stackrel{?}{=} dl_g X(h)$$

$$= X(g.h) = dl_{g.h}(v)$$

Prop. del dif. $l_{g.h} = l_g \circ l_h$

$$= (dl_g \circ dl_h(v)) = dl_g (X(h))$$

$\forall g, h \in G$

(b) Sea X un campo vectorial invariante a izquierda y sea $f \in C^\infty(G)$. Tenemos que ver que (Xf) es $C^\infty(G)$

Ahora, $(Xf)(g) = X_g(f) = dl_g(X_e)f$

$= X_e(f \circ l_g)$.

definición de diferencial

Por lo tanto tenemos que ver que la función

$$\circledast \quad g \longmapsto X_e(f \circ l_g) \quad \text{es } C^\infty \quad \forall f \in C^\infty.$$

Veremos que $\circledast$ es una composición de funciones C^∞.

-) $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ es C^∞ porque G es un grupo de Lie
$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$

-) $i_e^1 : G \longrightarrow G \times G$, $i_e^2 : G \longrightarrow G \times G$

$i_e^1(g) = (g, e)$, $i_e^2(g) = (e, g)$ son C^∞.

Sea Y un campo vectorial C^∞ tal que $X_e = Y_e$

Entonces $(0, Y)$ es un campo vectorial C^∞ en $G \times G$.

Necesitamos este ejercicio del Capítulo 1 de Warner:

24 Consider the product manifold $M \times N$ with the canonical projections $\pi_1 \colon M \times N \to M$ and $\pi_2 \colon M \times N \to N$.

(a) Prove that $\alpha \colon \tilde{M} \to M \times N$ is C^∞ if and only if $\pi_1 \circ \alpha$ and $\pi_2 \circ \alpha$ are C^∞.

(b) Prove that the map $v \mapsto (d\pi_1(v), d\pi_2(v))$ is an isomorphism of $(M \times N)_{(m,n)}$ with $M_m \oplus N_n$.

(c) Let X and Y be C^∞ vector fields on M and N respectively. Then, by (b), X and Y canonically determine vector fields $\tilde{X} = (X,0)$ and $\tilde{Y} = (0,Y)$ on $M \times N$. Prove that $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$. → $G \times G$

(d) Let $(m_0,n_0) \in M \times N$, and define injections $i_{n_0} \colon M \to M \times N$ and $i_{m_0} \colon N \to M \times N$ by setting

c^1 c^2

$$i_{n_0}(m) = (m,n_0),$$
$$i_{m_0}(n) = (m_0,n).$$

Let $v \in (M \times N)_{(m_0,n_0)}$, and let $v_1 = d\pi_1(v) \in M_{m_0}$ and $v_2 = d\pi_2(v) \in N_{n_0}$. Let $f \in C^\infty(M \times N)$. Prove that

$$\boxed{v(f) = v_1(f \circ i_{n_0}) + v_2(f \circ i_{m_0}).} \rightarrow 2$$

$$\Big[\underbrace{(0,Y)}_{\text{campo en } G\times G}.(f\circ\varphi)\Big]\circ i^1_e(g) = (0,Y)_{(g,e)}(f\circ\varphi)$$

$$\underbrace{=}_{\text{es } C^\infty} \cancel{0_g(f\circ\varphi\circ i^1_e)} + Y_e(f\circ\varphi\circ i^2_g)$$

$$= Y_e(f\circ\varphi\circ i^2_g)$$

$$= X_e(f\circ l_g)$$

$$\Rightarrow \quad g \longmapsto X_e(f\circ l_g) \text{ es } C^\infty.$$

c) Como los campos vectoriales invariantes a izquierda son C^∞, sus corchetes de Lie están definidos y son invariantes a izquierda

Por la combinación de estos dos resultados:

Warner (1.55)
(1.45)

1.45 Proposition

(a) *$[X,Y]$ is indeed a smooth vector field on M.*

(b) *If $f, g \in C^\infty(M)$, then $[fX,gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.*

(c) $[X,Y] = -[Y,X]$.

(d) *$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ for all smooth vector fields X, Y, and Z on M.*

We leave the proof as an exercise. Part (d) is known as the *Jacobi identity*. A vector space with a bilinear operation satisfying (c) and (d) is called a *Lie algebra*.

1.55 Proposition *Let $\varphi: M \to N$ be C^∞. Let X and X_1 be smooth vector fields on M, and let Y and Y_1 be smooth vector fields on N. If X is φ-related to Y, and if X_1 is φ-related to Y_1, then $[X,X_1]$ is φ-related to $[Y,Y_1]$.*

Resultados Previos

PROOF We must show that $d\varphi \circ [X,X_1] = [Y,Y_1] \circ \varphi$. For this, let $m \in M$ and $f \in C^\infty(N)$. Then we must show that

$$(1) \qquad d\varphi([X,X_1]_m)(f) = [Y,Y_1]_{\varphi(m)}(f).$$

We simply unwind the definitions:

$$\begin{aligned}(2) \quad d\varphi([X,X_1]_m)(f) &= [X,X_1]_m(f \circ \varphi)\\ &= X_m(X_1(f \circ \varphi)) - X_1|_m\,(X(f \circ \varphi))\\ &= X_m((d\varphi \circ X_1)(f)) - X_1|_m\,((d\varphi \circ X)(f))\\ &= X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - X_1|_m(Y(f) \circ \varphi)\\ &= d\varphi(X_m)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1|_m)(Y(f))\\ &= Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - Y_1|_{\varphi(m)}\,(Y(f))\\ &= [Y,Y_1]_{\varphi(m)}(f). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Definición: $\varphi: M \to N$ es C^∞, X campo vectorial en M, Y campo vect. en N, entonces X, Y están φ-relacionados si

$$d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$$

X es invariante a izquierda sii X está l_g relacionado con X:

$$dl_g \circ X = X \circ l_g$$

(d) $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie en campos vect. C^∞ es un álg. de Lie.

→ $\mathfrak{g}$ es espacio vectorial

→ $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow X$ es $C^\infty \Rightarrow$ corchete de Lie está definido

Warner cap. 1

→ (C) ⇒ $[\,,\,]$ define estructura de álg. de Lie en $\mathfrak{g}$:

- $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es bilineal
- $[\,,\,]$ antisimétrico
- $[\,,\,]$ Jacobi

} Prop. 1.45 Warner.

$\square$

Además $\underline{\mathfrak{g} \cong G_e}$.

Definición: El álgebra de Lie de un grupo de Lie G es el álgebra de Lie de los campos vectoriales invariantes a izquierda en G, con el corchete de Lie.

Lo denotamos $\mathfrak{g}$.

Ejemplos de variedades en Warner:

(b) Let V be a finite dimensional real vector space. Then V has a natural manifold structure. Indeed, if $\{e_i\}$ is a basis of V, then the elements of the dual basis $\{r_i\}$ are the coordinate functions of a global coordinate system on V. Such a global coordinate system uniquely determines a differentiable structure $\mathscr{F}$ on V. This differentiable structure is independent of the choice of basis, since different bases give C^∞ overlapping coordinate systems. In fact, the change of coordinates is given simply by a constant non-singular matrix.

Observación: Un espacio vectorial real V es variedad de manera natural.

$\{e_i\}$ base de V

$\{r_i\}$ base dual

$p \in V \Rightarrow$ El espacio tangente a V en p. se identifica con V de la siguiente forma.

$$v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p \longleftrightarrow \sum_i a_i e_i, \qquad \boxed{a_j = v(r_j)}$$

$$V_p \longleftrightarrow V$$

Ejemplos:

(1) Consideremos el grupo de Lie $(\mathbb{R}, +)$ y denotamos G.

Tomamos coordenadas x.

$$G_p = \left\{ \lambda \frac{d}{dx}\Big|_p \right\}$$

Cual es el algebra de Lie de G???

Campos vectoriales: $X(p) = \lambda(p) \left.\frac{d}{dx}\right|_p \qquad \lambda(p) \in \mathbb{R}$

Invariantes a izquierda:

$$d\ell_p X = X \circ \ell_p$$

definición de diferencial

$$(1) \quad (d\ell_q X_p) f = X_p (f \circ \ell_q)$$

$$(2) \quad (d\ell_q X)(p) = X \circ \ell_q (p) = X_{q+p}$$

definición de inv. a izquierda

$$(2) \Rightarrow (d\ell_q X_p) f = X_{p+q} f = \lambda(p+q) \left.\frac{d}{dx}\right|_{p+q} f(x)$$

$$= \lambda(p+q) \, f'(p+q) \quad a$$

$$(1) \Rightarrow (d\ell_q X_p) f = X_p (f \circ \ell_q) = \lambda(p) \left.\frac{d}{dx}\right|_p f(x+q)$$

$$= \underline{\lambda(p) f'(p+q)} \quad b$$

$$\Rightarrow a = (b) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall p, q \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \lambda(p+q) = \lambda(p) \quad \forall \; p, q \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda = cte.$$

$\Rightarrow$ Los campos inv. a izq son:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \lambda \left.\frac{d}{dx}\right|_p \Big/ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

Es el alg de Lie de G con $[\,,\,]$.

El corchete de Lie de dos campos es:

$$X = \lambda \frac{d}{dx} \quad , \quad Y = \mu \cdot \frac{d}{dx}$$

$$[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

$$(Xf)(p) = X_p f$$
$$(Yf)(p) = Y_p f$$

$$= \lambda \left.\frac{d}{dx}\right|_p Yf - \mu \left.\frac{d}{dx}\right|_p Xf$$

$$(Xf)(z) = \lambda \left.\frac{d}{dx}\right|_z f(x) = \lambda f'(z)$$
$$(Yf)(z) = \mu \left.\frac{d}{dx}\right|_z f(x) = \mu f'(z)$$

$$= \lambda \frac{d}{dx}\Big|_p \left(\mu f'(x)\right) - \mu \frac{d}{dx}\Big|_p \left(\lambda f'(x)\right)$$

$$= \lambda\mu\, f''(p) - \mu\lambda f''(p) = 0$$

$$\Rightarrow [X, Y] = 0 \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

$\Rightarrow$ El corchete en $\mathfrak{g}$ es trivial $\blacksquare$