Repaso de variedades diferenciables:

Consideremos M, un espacio topológico ~~regular~~, Hausdorff, N_2 (con una base numerable de abiertos).

M es localmente Euclideo de dimensión d si todo punto tiene un entorno que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^d$.

Si $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es un homeomorfismo, (U abierto, $\varphi(U)$ ab) entonces (U, φ) se llama un sistema de coordenadas

Definición: Una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ es una colección de sistemas de coordenadas

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}, \text{ tal que:}$$

a) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

b) Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$, entonces

$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es C^∞ y tiene inversa C^∞

(c) La colección $\mathcal{F}$ es maximal con respecto a (b).

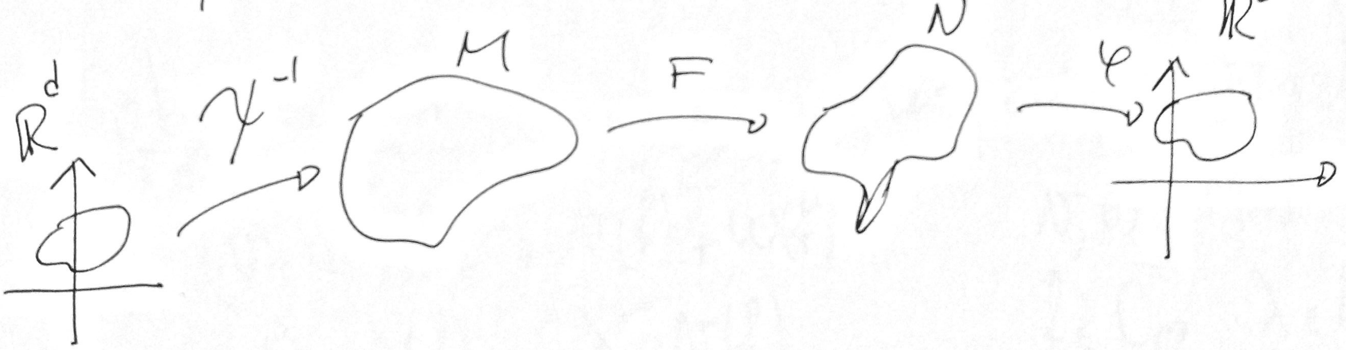
<u>Funciones diferenciables:</u>

•) Sea $U \subset M$ un abierto. Decimos que $f: U \to \mathbb{R}$ es C^∞ sobre U si $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ para todo φ en un sistema de coordenadas

•) Sea $F: M \to N$ una función continua. Entonces F es C^∞ si $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ es C^∞

para φ en un sistema de coordenadas de N

ψ " " " " " " M



•) $F: M \to N$ C^∞ y 1-1 y sobre es un difeomorfismo.

Vectores:

Tangent vectors v at the point $m \in M$ are linear derivations of the algebra C^∞_m (C^∞ functions at the point m):

(a) $v : C^\infty_m \to \mathbb{R}$

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda\, v(g)$$

(b) $v(f \cdot g) = f(m)\, v(g) + v(f) \cdot g(m)$

M_m denota el conjunto de todos los vectores tangentes a M en el punto m. Decimos que es el espacio tangente a M en m.

Observación: M_m es un espacio vectorial:

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f) \qquad v, w \in M_m$$

$$(\lambda v)(f) = \lambda\, v(f) \qquad f \in C^\infty_m,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sea $F : M \to N$ una aplicación C^∞, y sea $m \in M$. El diferencial de F en m es la aplicación lineal:

$$dF : M_m \longrightarrow N_{F(m)}$$

definida por:

$$dF(v)(f) = v(f \circ F) \qquad f \in C^\infty_{F(m)}$$

Grupos de Lie:

Definición: Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable con una estructura de grupo tal que la aplicación:

$$\sigma : G \times G \longrightarrow G$$
$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2^{-1} \quad \text{es } C^\infty.$$

Observación:

1) La aplicación $g \mapsto g^{-1}$ es C^∞ porque es la composición:

$$g \xmapsto[C^\infty]{} (e, g) \xmapsto[C^\infty]{\sigma} (e \cdot g^{-1})$$

2) La aplicación $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ es C^∞:

$$(g_1, g_2) \longmapsto (g_1, g_2^{-1}) \xmapsto{\sigma} g_1 g_2 \quad \checkmark$$