动机：会根据研究问题识别、建立适当的优化模型，并求解。

介绍

最优化理论和算法不仅是一个重要的数学分支，更是求解诸多现实问题的有力工具。**它研究的是**在一个问题的诸多方案中什么样的方案最优以及怎么找出最优方案。最优化问题一般可以描述为

$$
\begin{aligned}
& \min f(\boldsymbol{x}), \\
\text{s.t.} \qquad & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, .., m, \\
& h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l.
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为**优化变量**，$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为**目标函数**，$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是**不等式约束函数**，$h_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是**等式约束**。

按照不同的分类标准，可以如下划分：

- 线性和非线性规划问题

- 线性规划：目标函数和约束函数函数全为线性。
  - 非线性规划：目标函数和约束函数至少有一个是非线性的。
- 凸和非凸优化问题
  - 凸优化：目标函数和可行域分别是凸函数和凸集。
  - 非凸优化：如果目标函数和可行域有一个或者两者都不是凸的。
- 无约束和约束优化问题
  - 无约束：决策变量没有约束条件限制。
  - 有约束：决策变量有约束条件限制，即约束条件为 $\text{s.t. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$。

一般，使用最优化算法求解问题分为三步：

- 建模：根据待解决问题的目标和约束构造合适的模型；
- 识别或转换：确定模型的类型。如果为非凸优化模型，则需要经过适当的转换变为可解或近似可解的问题；
- 求解：手动实现算法或者调用优化算法软件包进行求解。

常见的优化模型和方法总结。

1. 线性规划：

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & Gx \leq e, \end{aligned}$$

   其中：$c \in \mathbb{R}^n$，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, G \in \mathbb{R}^{p\times n}$是给定的矩阵和向量，$x$是决策变量。

   线性规划常用的解法有：

   - 单纯性法
   - 对偶问题
   - 运输问题(约束条件的特殊结构)
   - 内点法
2. 非线性规划：理论上讲可以利用最优性条件解非线性规划的最优解，但是在实践中往往不可行，这是因为利用最优性条件求解一个问题时，一般需要解非线性方程组，这本身就是一个困难的问题，因此求解非线性方程组一般需要数值计算方法。

   - 一维搜索

   - 无约束优化

     - 需要计算导数：最速下降法、牛顿法、共轭梯度法、拟牛顿法、信赖域法、最小二乘法；
     - 不需要计算导数：模式搜索法、单纯性搜索法、powell方法；
   - 约束优化算法：

     - 可行方向法：
     - 惩罚函数法：
     - 内点惩罚函数法：
     - 乘子法：
   - 二次规划：二次规划是特殊的一种非线性规划问题，它的目标函数是二次实函数，约束是线性的。

基础知识

直线与线段:

设$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_1$是$\mathbb{R}^n$中的两个点，那么，$\boldsymbol{y} = \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2$组成穿过$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$的一条直线(line)。当$0 < \theta < 1$时$\boldsymbol{y}$为线段(line segment)。

仿射

【定义】称**集合C是仿射的(Affine Sets)**，若$\forall\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in C$ 及 $\theta \in \mathbb{R}$ 有 $\theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2 \in C$，换言之，$C$包含了过$C$中任意两点的直线。

若$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1$，称具有$\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \theta_k \boldsymbol{x}_k$形式的点为**$x_1, \ldots, x_k$的仿射组合(Affine Combination)**。

一个仿射集合包含其中任意点的仿射组合，即如果C是一个仿射集合，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in C$，且$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$，那么$\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \theta_k \boldsymbol{x}_k$仍在$C$中。

【定义】称由集合$C \subseteq \mathbb{R}^n$中的点的所有仿射组合组成的集合为**C的仿射包(Affine Hull)**，记为$\mathbf{aff}\, C$:

$$\mathbf{aff}\, C = \{\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \theta_k \boldsymbol{x}_k \mid x_1, \cdots, x_k \in C,\ \ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

仿射包是包含C的最小的仿射集合，也就是说，如果S是满足$C \subseteq S$的仿射集合，则$\mathbf{aff}\, C \subseteq S$。

【例1】任何直线都是仿射的。

【例2】线性方程组的解集$C = \{x | Ax = b\}$，其中$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$，是一个仿射集合。

【例3】

【例4】

【例5】

凸集

【定义】凸集。如果连接集合C中任意两点的线段都在C内，则称C为**凸集(Convex Sets)**，即

$$x_1, x_2 \in C \Longrightarrow \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C,\ \ \forall\ \ 0 \le \theta \le 1.$$

【例】仿射集是凸集。

【例】线段是凸集，但不是仿射的，除非退化为一个点。

【例】射线，即具有形式$\{x_0 + \theta v | \theta \ge 0\}$，$x_0, v \in \mathbb{R}^n$，$v \neq 0$ 的集合，是凸的，但不是仿射的。如果$x_0 = 0$，则它是凸锥。

从凸集可以引出凸组合和凸包等概念。

【定义】**凸组合(Convex Combination)**。称点$x=\theta_1x_1+\cdots+\theta_kx_k$为点$x_1,\ldots,x_k$的凸组合，其中$\theta_1+\cdots+\theta_k=1$ 且 $\theta_i\geq 0,\forall i$。

与仿射集类似，一个集合是凸集等价于集合包含其中所有的点的凸组合。

【定义】**凸包(Convex Hull)**。称集合C中所有的点的凸组合的集合为其凸包，记为 $\textbf{conv}\ C$：

$$\textbf{conv}\ C=\{\theta_1x_1+\cdots\theta_kx_k \mid x_i\in C,\ \theta_i\geq 0,\ i=1,\cdots,k,\ \ \theta_1+\cdots\theta_k=1\}$$

凸包总是凸的，凸包是包含C的最小凸集。

【例】凸组合的概念可以拓展到无穷级数、积分、以及大多数形式的概率分布。假设θ_1，$\theta_2,\ldots$满足

$$\theta_i\geq 0,\ \ i=1,2\cdots,\quad \sum_{i=1}^{+\infty}\theta_i=1,$$

且$x_1,x_2,\cdots\in C$，其中$C\subseteq\mathbb{R}^n$为凸集，如果级数收敛，则

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\theta_ix_i\in C.$$

更一般地，假设$p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$对所有$x\in C$满足$p(x)\geq 0$，且$\int_C p(x)=1$，其中$C\subseteq\mathbb{R}^n$是凸集，那么，如果下述积分存在，则

$$\int_C p(x)x\mathrm{d}x\in C,$$

最一般的情况，设$C\subseteq\mathbb{R}^n$是凸集，x是随机向量，且x以概率1落入C，则$E(x)\in C$。

锥和凸锥

重要的凸集

保凸运算

介绍一些集合的运算，利用它们，可以从一些凸集合构造出其他凸集。

凸函数

一阶条件

二阶条件

常见的凸函数

保凸运算

介绍几种保持函数凸性或凹性的运算。

一些定理

最优性理论

对偶

优化问题/优化模型

线性规划

非线性规划

二次规划

优化算法

本章主要介绍常用的优化算法，以及每种优化算法的优化目标和约束方程的形式。

无约束优化算法

约束优化算法

复合优化算法

通信和信号处理中典型的优化模型及其求解

参考资料

加州大学洛杉矶分校 Lieven Vandenberghe教授课件