第一章: 预备知识

概率空间

随机变量

数字特征

生成函数、矩生成函数、特征函数

特征函数，矩母函数，母函数三者的本质是类似的。**它们都唯一地确定分布且将分布的卷积化为乘积**。

我们通过随机变量来描述随机现象，通过随机变量得分布函数和数字特征来掌握随机现象的某些规律。但是，随着学习的深入，我们可以看到，求矩的计算在逐渐增加。同时，由于随机变量的复杂性，有时需要多个随机变量甚至一个随机变量序列来描述随机现象。为此我们需要更高效优越的研究工具。这就引出了本节所要介绍的特征函数与母函数。

一般来说，特征函数即Fourier-Stieltjes变换作用在分布函数上，而母函数更多的是作用在离散型随机变量上。

矩生成函数

https://blog.csdn.net/qq_29700227/article/details/116986368

https://zhuanlan.zhihu.com/p/437777250

生成函数(母函数)

只有取值非负的 离散型随机变量 才有母函数。

https://zhuanlan.zhihu.com/p/67140977

https://blog.csdn.net/WinterShiver/article/details/81982661

性质

(1) **独立随机变量和的概率母函数或矩母函数分别是独立随机变量相应函数乘积。**

(2) **概率母函数和矩母函数都和分布一一对应.**

特征函数

https://blog.csdn.net/wxc971231/article/details/121219832

https://zhuanlan.zhihu.com/p/358618882

https://zhuanlan.zhihu.com/p/620055925

https://www.zhihu.com/question/24952770

定义

我们通常使用分布函数研究随机变量的性质，但是分布函数往往很难求。特征函数是研究随机变量分布的另一个重要工具，它和分布函数具有一一对应的关系，它们对随机变量的刻画是等同的，但是特征函数要好求得多。特征函数在证明 中心极限定理(Central limit theorem)中起到重要作用。

对于随机变量$\xi(w)$，其分布函数为$F_\xi(x)$，则其**特征函数定义**为:

$$\Phi_\xi(s) = E\{e^{is\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \mathrm{d}F_\xi(x)$$

其中，E代表数学期望，t为实数，i为虚数单位。特征函数为t的复值函数，且由于:

$$|\Phi_\xi(s)| = |\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \mathrm{d}F_\xi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{isx}| \mathrm{d}F_\xi(x) = 1$$

因此随机变量的特征函数总是存在。如果两个随机变量具有相同的特征函数，则它们具有相同的概率分布；反之如果两个随机变量具有相同的概率分布，它的特征函数也相同。

如果$\xi(w)$为离散型随机变量，其分布律为
$p_k = P(w : \xi(w) = x_k)$，$k = 0, 1, \ldots$，则特征函数为:

$$\Phi_\xi(s) = E\{e^{is\xi}\} = \sum_k e^{isx_k} p_k$$

如果$\xi(w)$为连续型随机变量，其概率密度函数为$f_\xi(x)$，则特征函数为:

$$\Phi_\xi(s) = E\{e^{is\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f_\xi(x) \mathrm{d}x$$

连续性随机变量$\xi(w)$的特征函数就是$\xi(w)$的概率密度函数$f_\xi(x)$的Fourier变换。**特征函数和$\xi(w)$和分布函数是一一对应的**，且有如下结论:

定理：若$\xi(w)$的特征函数$\Phi_\xi(x)$在$\mathbb{R}$上绝对可积，即$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\xi(s)| < +\infty$，则$F_\xi^{'}(x)$在$\mathbb{R}$上存在且有界、连续，对$x \in \mathbb{R}$，有:

$$F_\xi^{'}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \Phi_\xi(s) \, \mathrm{d}s$$

特别地，对于连续型随机变量$\xi(x)$及其概率密度函数$f_\xi(x)$，有:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \Phi_\xi(s) \, \mathrm{d}s$$

特征函数的常用性质：

(1) $\Phi_\xi(x)=1$，$|\Phi_\xi(x)|\le 1$，$\Phi_\xi(-s)=\overline{\Phi_\xi(s)}$;

(2) $\Phi_{xi}(s)$在$\mathbb{R}$上一致连续;

(3) $\Phi_\xi(s)$是非负定的，即对任意的自然数n，实数$s_1,s_2,\ldots,s_n$及复数$a_1,a_2,..,a_n$，有:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi_\xi(s_i-s_j)a_i\overline{a_j}\ge 0$$

(4) 设a,b为常数，$\xi(w)=a\eta(w)+b$，则$\Phi_\xi(s)=e^{ibs}\Phi_\eta(as)$;

(5) 若$\xi(w)$和$\eta(w)$相互独立，则$\Phi_{\xi+\phi}(s)=\Phi_\xi(s)\Phi_\eta(s)$;

(6) 若随机变量$\xi(w)$的 n 阶矩存在，则它的特征函数n次可导，且对$k\le n$，有$\Phi_\xi^{(k)}(0)=i^kE\{\xi^k(w)\}$， 此条性质可用于求解随机变量的各阶矩(若存在)，有时可以避免进行复杂的无穷积分，提供了一个较便捷的求n阶矩的方法。

(7) 设 $\Phi_{\xi_1},\Phi_{\xi_2},\ldots,\Phi_{\xi_n}$分别是随机变量$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$的特征函数，则随机变量$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$相互独立当且仅当$n$维随机变量($\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$)的特征函数$\Phi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\prod_{i=1}^{n}\Phi_{\xi_i}(s_i)$，这点可以看出：独立随机变量和的概率母函数或矩母函数分别是独立随机变量相应函数乘积。

(8) 若随机变量$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$相互独立，则维随机变量$\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$的特征函数 $\Phi_\xi(s)=\prod_{i=1}^{n}\Phi_{\xi_i}(s)$，这个性质是特征函数比分布函数简单的关键原因之一,可以用来求解较复杂情况下的分布函数.

(9) 随机变量的特征函数可以唯一地确定分布函数，不同的分布函数有不同的特征函数。这点可以用来求解较复杂情况下的分布函数。

(11) 唯一性定理: 对于任意的随机变量ξ_1,ξ_2，其分布函数相等等价于特征函数相等。即特征函数和分布函数一一对应。

在求多变量的和的分布时，往往可以利用性质(7)(8)求出多变量的和的特征函数，然后更加性质(9)找出对应的分布函数，即可确定随机变量的和的类别.

证明:

(1) 计算得:

$$\Phi_\xi(0) = E\{e^{is}|_{s=0}\} = 1$$
$$|\Phi_\xi(s)| = |E\{e^{is\xi}\}| \leq E\{|e^{is\xi}|\} = 1$$
$$\Phi_\xi(-s) = E\{e^{i(-s)\xi}\} = E\{e^{-is\xi}\} = E\{\overline{e^{is\xi}}\} = \overline{E\{e^{is\xi}\}} = \overline{\Phi_\xi(s)}$$

(2) 计算得:

$$\begin{aligned}
& |\Phi_\xi(s+h) - \Phi_\xi(s)| \\
= \quad & |\int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(s+h)x} - e^{isx}] \mathrm{d}F_\xi(x)| \\
\leq \quad & \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| \mathrm{d}F_\xi(x) \\
\leq \quad & 2\int_{|x|>a} \mathrm{d}F_\xi(x) + \int_{-a}^{+a} |e^{ihx} - 1| \mathrm{d}F_\xi(x) \\
= \quad & 2\int_{|x|>a} \mathrm{d}F_\xi(x) + 2\int_{-a}^{+a} \left|\sin\left(\frac{hx}{2}\right)\right| \mathrm{d}F_\xi(x)
\end{aligned}$$

对任意给定的$\epsilon > 0$，选取足够大的a，使得$2\int_{|x|>a} \mathrm{d}F_\xi(x) < \epsilon/2$，又只要取$h < \epsilon/(2a)$，则对任意$x \in [-a, a]$，有$2|\sin(hx/2)| < \epsilon/2$， 从而:

$$2\int_{-a}^{a} |\sin\left(\frac{hx}{2}\right)| \mathrm{d}F_\xi(x) < \frac{\epsilon}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}F_\xi(x) = \frac{\epsilon}{2}$$

因此，对s一致地有: $|\Phi_\xi(s+h) - \Phi_{xi}(s)| < \epsilon$，即$\Phi_\xi(s)$在$\mathbb{R}$上一致连续。

(3) 计算得:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi(s_i-s_j)a_i\overline{a_j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\overline{a_j}E\{e^{i(s_i-s_j)\xi}\} \\ &= E\{\sum_{i=1}^{n}a_ie^{is_i\xi}\overline{\sum_{j=1}^{n}a_je^{is_j\xi}}\} \\ &= E\{|\sum_{i=1}^{n}a_ie^{is_i\xi}|^2\}\geq 0\end{aligned}$$

(4) $\Phi_\xi(s)=E\{e^{is\xi}\}=E\{is(a\eta+b)\}=e^{ibs}E\{e^{ias\eta}\}=e^{ibs}\Phi_\eta(as).$

(5) $\Phi_{\xi+\eta}(s)=E\{e^{is(\xi+\eta)}\}=E\{e^{is\xi}e^{is\eta}\}=E\{e^{is\xi}\}E\{e^{is\eta}\}=\Phi_\xi(s)\Phi_\eta(s).$

其中性质(6)可以用来求均值和方差,
$E\{\xi\}=-i\Phi_\xi^{'}(0),\ \ D(\xi)=E\{\xi^2\}-(E(\xi))^2=-\Phi_\xi^{''}(0)+(\Phi_\xi^{'}(0))^2.$

【例一】: 两点分布

分布律为: $P(\xi=1)=p,\ \ P(\xi=0)=1-p,\ \ 0<p<1.$

特征函数为:

$$\Phi_\xi(s)=e^{is\cdot 1}p+e^{is\cdot 0}(1-p)=pe^{is}+1-p$$

则$\Phi_\xi^{'}(0)=ip,\ \ \Phi_\xi^{''}(0)=-p$, 因此, 均值和方差为:

$$E(\xi)=-i\Phi_\xi^{'}(0)=-i\cdot ip=p$$
$$D(\xi)=-\Phi_\xi^{''}(0)+(\Phi_\xi^{'}(0))^2=p+(ip)^2=pq$$

【例二】: 二项分布$B(k,n,p)$

分布律为: $P(\xi=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},\ \ k=0,1,2,\ldots n,$

特征函数为:

$$\Phi_\xi(s)=\sum_{k=0}^{n}e^{isk}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{is}p)^k(1-p)^{n-k}=(pe^{is}+1-p)^n$$

则$\Phi_\xi^{'}(0)=inp$，$\Phi_\xi^{''}(0)=-n(n-1)p^2-np$，因此，均值和方差为:

$$E(\xi)=-i\Phi_\xi^{'}(0)=-i\cdot inp=np$$
$$D(\xi)=-\Phi_\xi^{''}(0)+(\Phi_\xi^{'}(0))^2=n(n-1)p^2+np+(ipq)^2=npq$$

【例三】：泊松分布

分布律：$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0,k=0,1,2,\ldots,$

特征函数为:

$$\Phi_\xi(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{isk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{is})^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{is}-1)}$$

用到了泰勒展开:$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+,\ldots,\frac{x^n}{n!}+,\ldots$

则$\Phi_\xi^{'}(0)=i\lambda$，$\Phi_\xi^{''}(0)=-\lambda(\lambda+1)$，因此，均值和方差为:

$$E(\xi)=-i\Phi_\xi^{'}(0)=-i\cdot i\lambda=\lambda$$
$$D(\xi)=-\Phi_\xi^{''}(0)+(\Phi_\xi^{'}(0))^2=\lambda(\lambda+1)+(i\lambda)^2=\lambda$$

【例四】正太分布和一般的高斯分布

正太分布概率密度函数:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x)^2}{2}},\ \sigma>0$$

特征函数为:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\xi}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-is)^2}{2} - \frac{s^2}{2}} \mathrm{d}x \\
= e^{\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-is)^2}{2}} \mathrm{d}x = e^{\frac{s^2}{2}}
\end{aligned}
$$

一般高斯分布$f(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，概率密度函数:

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ \sigma > 0
$$

做变量代换$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{Y=\frac{X-\mu}{\sigma}} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$，则由性质(4)得一般高斯分布的特征函数为:

$$
\Phi_{\xi}(s) = e^{i\mu s - \frac{s^2\sigma^2}{2}}
$$

则$\Phi_{\xi}'(0) = i\mu$，$\Phi_{\xi}''(0) = -(\sigma^2 + \mu^2)$，因此，均值和方差为:

$$
\begin{aligned}
E(\xi) = -i\Phi_{\xi}'(0) = -i \cdot i\mu = \mu \\
D(\xi) = -\Phi_{\xi}''(0) + (\Phi_{\xi}'(0))^2 = (\sigma^2 + \mu^2) + (i\mu^2) = \sigma^2
\end{aligned}
$$

【例五】指数分布

概率密度函数

$$
f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ \ x > 0,\ \ \lambda > 0
$$

特征函数:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\xi}(s) \quad &= \quad \int_{0}^{+\infty} e^{isx} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \quad \lambda \frac{e^{(is-\lambda)x}}{is-\lambda} \Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{-\lambda}{is-\lambda}, s < \lambda
\end{aligned}
$$

则$\Phi_{\xi}'(0) = i\frac{1}{\lambda}$，$\Phi_{\xi}''(0) = -\frac{2}{\lambda^2}$，因此，均值和方差为:

$$E(\xi) = -i\Phi_\xi^{'}(0) = -i \cdot i\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(\xi) = -\Phi_\xi^{''}(0) + (\Phi_\xi^{'}(0))^2 = \frac{2}{\lambda^2} + (i\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

极限

第二章: 高斯过程

第三章: 泊松过程

第四章：更新过程

第四章：Markov过程

第五章: Wiener过程

第六章: 离散时间鞅

第七章：排队论

附录

附录A：常用的不等式

附录B：常见的随机变量