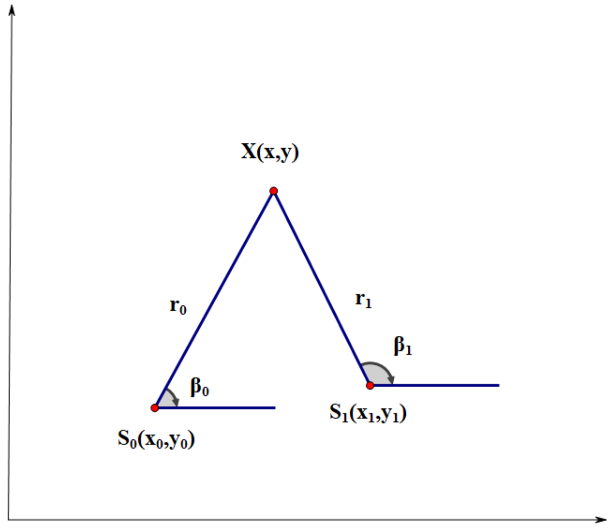
1.双站测向时差定位

1.1 定位算法

双站测向时差定位示意图如下：



已知两个基站的坐标分别为$S_0(x_0,y_0)$和$S_1(x_1,y_1)$，信号传播速度为c，测量得到的目标信号到达两个基站的时间差为Δt，目标与两个基站的水平夹角分别为β_0和β_1，通过这些已知数据求得目标的坐标$X(x,y)$。

目标到两个基站的距离分别为：

$$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\text{，}\quad r_0=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

得到关于时差的方程为：

$$c\Delta t=\Delta r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

两个夹角的方程分别是：

$$\tan\beta_0=\frac{y-y_0}{x-x_0}\text{，}\quad \tan\beta_1=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

对时差方程进行化简，并与第一个夹角方程合并为方程组$\mathbf{A}X=F$。

其中$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ \tan\beta_0 & -1 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix} k+r_0\Delta r \\ \tan\beta_0 x_0-y_0 \end{bmatrix}$

$$k=\frac{1}{2}[\Delta r^2+(x_0{}^2+y_0{}^2)-(x_1{}^2+y_1{}^2)]\text{。}$$

可以求得目标的坐标为$X=\mathbf{A}^{-1}F$。

1.2 定位精度分析

第一个夹角方程为$\beta_0=\arctan\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，对等式两边求微分并化简得到：

$$d\beta_0=-\frac{\sin^2\beta_0}{y-y_0}dx+\frac{\cos^2\beta_0}{x-x_0}dy+\frac{\sin^2\beta_0}{y-y_0}dx_0-\frac{\cos^2\beta_0}{x-x_0}dy_0$$

距离差方程为$\Delta r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，同样等式两边求微分并化简得到：

$$d\Delta r=(\frac{x-x_1}{r_1}-\frac{x-x_0}{r_0})dx+(\frac{y-y_1}{r_1}+\frac{y-y_0}{r_0})dy+(\frac{x-x_0}{r_0}dx_0+\frac{y-y_0}{r_0}dy_0)-(\frac{x-x_1}{r_1}dx_1+\frac{y-y_1}{r_1}dy_1)$$

转变为矩阵方程形式为$dV=\mathbf{C}dX+\mathbf{U}dS_0-\mathbf{W}dS_1$，其中：

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\sin^2\beta_0}{y-y_0} & \dfrac{\cos^2\beta_0}{x-x_0}\\ \dfrac{x-x_1}{r_1}-\dfrac{x-x_0}{r_0} & \dfrac{y-y_1}{r_1}+\dfrac{y-y_0}{r_0}\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sin^2\beta_0}{y-y_0} & -\dfrac{\cos^2\beta_0}{x-x_0}\\ \dfrac{x-x_0}{r_0} & \dfrac{y-y_0}{r_0}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \dfrac{x-x_1}{r_1} & \dfrac{y-y_1}{r_1}\end{bmatrix},\quad dV=\begin{bmatrix}d\beta_0\\ d\Delta r\end{bmatrix},\quad dX=\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix},\quad dS_0=\begin{bmatrix}dx_0\\ dy_0\end{bmatrix},\quad dS_1=\begin{bmatrix}dx_1\\ dy_1\end{bmatrix}。$$

进一步解得目标的误差矩阵为

$$P_{dX}=E(dXdX^T)=\mathbf{C}^{-1}[\mathbf{R_V}+\mathbf{UR_{S_0}U}^T+\mathbf{WR_{S_1}W}^T]\mathbf{C}^{-T}$$

其中：

$\mathbf{R_V}=E(dVdV^T)=\begin{bmatrix}\sigma^2{}_\beta & 0\\ 0 & \sigma^2{}_{\Delta r}\end{bmatrix}$为测量参数误差矩阵。

$\mathbf{R_{S_0}}=E(dS_0dS_0{}^T)=\begin{bmatrix}\sigma^2{}_S & 0\\ 0 & \sigma^2{}_S\end{bmatrix}$为基站$S_0$的位置误差矩阵。

$\mathbf{R_{S_1}}=E(dS_1dS_1{}^T)=\begin{bmatrix}\sigma^2{}_S & 0\\ 0 & \sigma^2{}_S\end{bmatrix}$为基站$S_1$的位置误差矩阵。

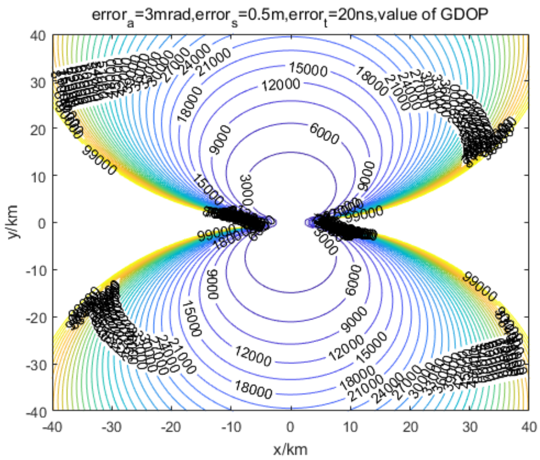
σ_β为角度均方根误差，$\sigma_{\Delta r}=c\sigma_{\Delta t}$为时差均方根误差，$\sigma_S$为位置均方根误差。

几何精度因子为$GDOP=\sqrt{P_{dX}(1,1)+P_{dX}(2,2)}$。

1.3 仿真分析

参量设置：基站的坐标分别为(-500,0)m 和(500,0)m，角度均方根误差为3mrad，时差均方根误差为20ns，位置均方根误差为0.5m。

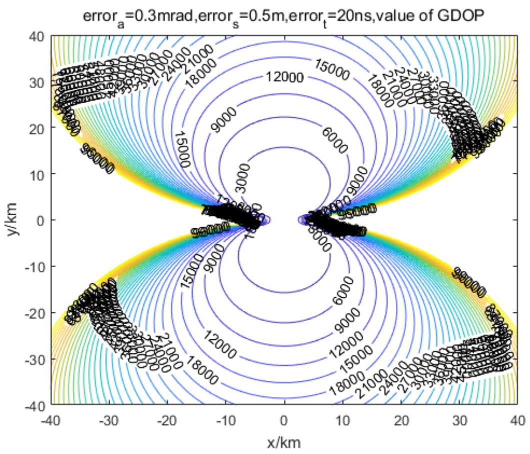
仿真结果如图所示：



选取两个坐标点求得他们的几何精度因子

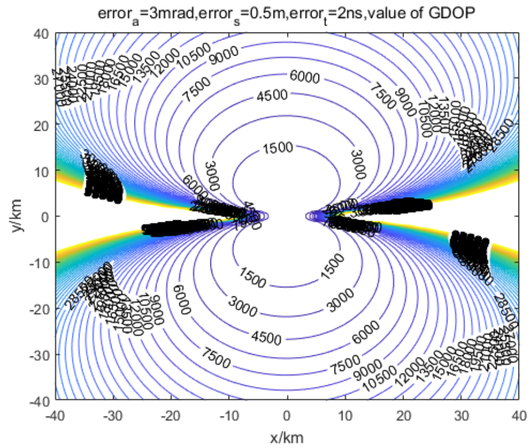
坐标/m	GDOP/m
(0,10000)	1352.5
(3500,5000)	729.2783

1.角度均方根误差减小为0.3mrad：



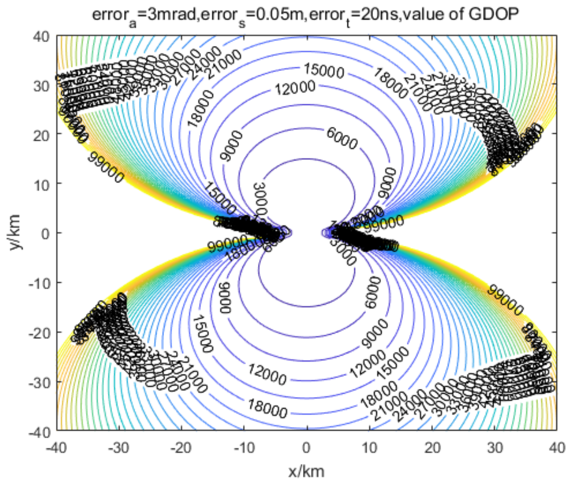
坐标/m	GDOP/m
(0,10000)	1212.9
(3500,5000)	671.3681

2.时差均方根误差减小为2ns:



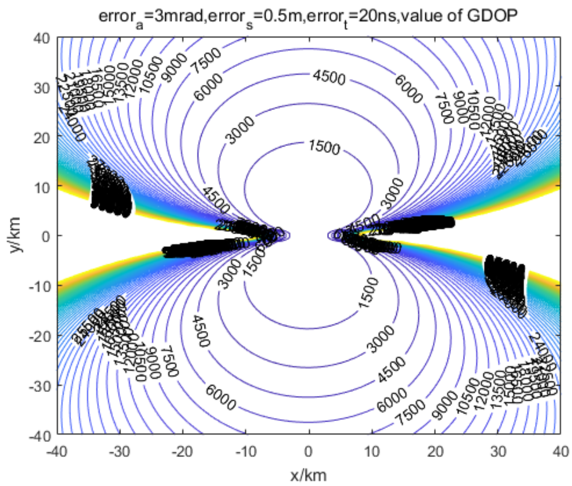
坐标/m	GDOP/m
(0,10000)	629.6624
(3500,5000)	304.2796

3.位置均方根误差减小为0.05m:



坐标/m	GDOP/m
(0,10000)	1345.1
(3500,5000)	725.0455

4.基站的基线长度加大为2km:



坐标/m	GDOP/m
(0,10000)	430.0214
(3500,5000)	225.3581

结论：从上面的几组仿真图像和两个坐标点的 GDOP 变化情况可以看出，减小角度、位置和时差测量的误差以及增大基站间的基线长度，都可以使定位精度提高。