Probability and Statistics, S2022	Date: April 19, 2022
Midterm Exam	
Lecturer: Hyang-Won Lee	**Time: 9-11:50am**

1. **(10 points)** Write T for a true statement and F for a false statement. You DO NOT need to justify your answers. (다음 중 참인 것과 거짓인 것을 구분하시오. 답만 적으면 됨)

   (a) The sample space associated with a discrete random variable can possibly be uncountable. (이산확률변수와 연관된 표본공간은 uncountable 일 수도 있다)

   (b) If $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ with $\mathbb{P}(A) > 0$ and $\mathbb{P}(B) > 0$, then A and B cannot be disjoint.

   (c) For $p \in (0,1)$, we have $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$.

   (d) For constants $a < -1, b < -1$ and random variable X with $\mathrm{var}(X) \neq 0$, we have $\mathrm{var}(aX + b) > \mathrm{var}(X)$.

   (e) If $A \subseteq B$, then $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

2. **(15 points)** You are going to meet your friend at a subway station. You arrive at the station between 5pm and 8pm uniformly at random. Your friend too arrives at the station between 6pm and 8pm uniformly at random. Whoever comes first, he/she waits for the other for 1 hour and leaves the place. (지하철역에서 친구를 만나기로 했다 하자. 당신은 역에 오후 5시에서 8시 사이에 무작위로 도착하고, 당신 친구도 역시 똑같이 오후 6시에서 8시 사이에 도착한다. 누가 먼저 오든 먼저 온 사람은 한 시간을 기다린 뒤 상대방이 오지 않으면 자리를 뜬다고 하자)

   (a) Draw the sample space. (표본공간을 그리시오)

   (b) Define a legitimate probability law over the sample space. (위의 표본공간상에서 세 개의 확률공리를 모두 만족하는 확률법칙을 정의하시오)

   (c) What is the probability that you meet your friend? (친구를 만날 확률은 얼마인가?)

   (d) Given that you have arrived between 7 and 8pm, what is the conditional probability

   (e) Define a random variable Z that takes the value 1 if you meet your friend, and 0 otherwise. Is Z a discrete random variable? If so, find the PMF, mean and variance of Z. (당신이 친구를 만나면 값이 1이고, 그렇지 않으면 값이 0인 확률변수 Z를 정의하자. Z는 이산확률변수입니까? 만약 그렇다면 PMF, 평균 및 분산을 구하시오.)

3. **(30 points)** You roll a fair 4-sided die. If the result is $k(=1,2,3,4)$, then you toss a fair coin k times independently. (각면의 확률이 같은 4개의 면을 갖는 주사위를 던진다. 만약 결과가 k이면, 앞뒷면 확률이 같은 동전을 k번 독립적으로 던진다)

   (a) Describe the sample space. (표본공간을 적으시오)

   (b) Given that the roll is 3, what is the conditional probability that two heads come up? (주사위 결과가 3이라고 할 때, 동전의 앞면이 두 번 나올 조건부확률은 얼마인가?)

   (c) Calculate the probability that the roll is 3 AND 2 heads come up. (주사위가 3이 나오고 동전의 앞면이 두 번 나올 확률을 계산하시오)

   (d) Calculate the probability that two heads come up.

   (e) Given that 4 heads have come up, what is the conditional probability that the roll was 1? (앞면이 네 번 나왔다고 할때, 주사위가 1이 나왔을 확률이 얼마인지 계산하시오)

   (f) Given that 4 heads have come up, what is the conditional probability that the roll was 4. (앞면이 네 번 나왔다고 할때, 주사위가 4가 나왔을 확률이 얼마인지 계산하시오)

(g) Suppose that you get 100×# heads WON in this experiment. For example, if two heads come up, then you earn 200WON. Let X be the money you earn. Find the PMF of X (동전의 앞면의 갯수 곱하기 100원을 받는다고 가정하자. 즉, 만약, 앞면이 두 번 나왔다면 200원을 받는다. X를 받게 되는 돈이라고 했을 때, X의 PMF를 구하시오)

(h) Calculate the expectation of X. Writing down the correct summation formula will get you the full score. (X의 평균을 계산하시오. 계산 끝까지 할 필요 없고, 덧셈 식만 맞으면 됨)

(i) Calculate the variance of X. Writing down the correct summation formula will get you the full score. (X의 분산을 계산하시오. 계산 끝까지 할 필요 없고, 덧셈 식만 맞으면 됨)

4. **(20 points)** Consider two random variables X and Y whose joint PMF $p_{X,Y}(x,y)$ is given as (다음과 같은 결합확률질량함수를 갖는 확률변수 X, Y를 생각하자)

	3	4/9	0	1/9
y	2	0	1/9	0
	1	2/9	0	1/9
		1	2	3
			x	

(a) Find the marginal PMFs $p_X(x)$ and $p_Y(y)$. (주변 확률질량함수 $p_X(x)$ and $p_Y(y)$를 구하시오)

(b) Find the conditional PMF $p_{X|Y}(x|1)$. (조건부 확률질량함수 $p_{X|Y}(x|1)$를 구하시오)

(c) Are X and Y independent? Justify your answer. (X, Y는 독립입니까? 답에 대한 이유를 기술하시오)

(d) Define two events $A = \{X \geq 2\}$ and $B = \{Y < 2\}$. Are A and B independent? Justify your answer (두 사건 $A = \{X \geq 2\}$ and $B = \{Y < 2\}$가 독립입니까? 답에 대한 이유를 적으시오)

(e) Compute $\mathbb{E}[X|A]$ and $\mathbb{E}[Y|B]$.

5. **(10 points)** Consider i.i.d. random variables $X_1, ..., X_n$, each of which is uniformly distributed over the interval $[0, 1]$. Define the sample mean $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Similarly, consider i.i.d. Binomial random variables $Y_1, ..., Y_n$, each taking the values 1 or 0 with equal probability. Define the sample mean $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. (독립이면서 동일한 분포를 갖는 확률변수 $X_1, ..., X_n$은 각각 0에서 1사이에 균일한 분포를 갖는다. 표본평균 $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$를 정의하자. 또한, 독립이면서 동일한 분포를 갖는 베르누이 확률변수 $Y_1, ..., Y_n$은 각각 1과 0을 취할 확률이 같다. 역시, 표본평균 $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$를 정의하자)

(a) Calculate $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calculate the variance $\text{var}(X)$. What happens to $\text{var}(X)$ as n increases? Interpret the result. (X의 분산을 계산하시오. n이 증가함에 따라 X의 분산은 어떻게 됩니까? 이 결과를 해석해 보시오)

(c) Calculate $\mathbb{E}[Y]$.

(d) Calculate the variance $\text{var}(Y)$. What happens to $\text{var}(Y)$ as n increases? Interpret the result. (Y의 분산을 계산하시오. n이 증가함에 따라 Y의 분산은 어떻게 됩니까? 이 결과를 해석해 보시오)

6. **(10 points)** Consider the random variable X whose PDF is given as

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

where c is a constant.

(a) Find the value of c

(b) Calculate the expectation of X.

(c) Calculate the variance of X.

(d) Find the CDF of X.

7. **(5 points)** Consider i.i.d. continuous random variables $X_1, ..., X_n$ with CDF $F(x)$ and PDF $f(x)$. Denote by $X_{[k]}$ the kth smallest one. For example, $X_{[1]} = \min_{i=1,...,n} X_i$. (독립이며 동일분포를 따르는 연속확률변수 $X_1, ..., X_n$이 있고 각각의 누적분포함수와 확률밀도함수를 $F(x)$와 $f(x)$라 하자. 이 중에서 k번째로 작은 확률변수를 $X_{[k]}$라 하자. 예를 들어, $X_{[1]} = \min_{i=1,...,n} X_i$.)

(a) Express the PDF of $X_{[1]}$ in terms of $F(x)$ and $f(x)$. ($X_{[1]}$의 확률밀도함수를 $F(x)$와 $f(x)$의 식으로 표현하시오)

(b) What is the PDF of $X_{[1]}$ when each X_i is exponentially distributed with parameter λ? Is $X_{[1]}$ exponentially distributed? (각각의 X_i가 파라미터 λ로 지수분포를 따를 때 $X_{[1]}$의 확률밀도함수는 무엇인가? $X_{[1]}$는 지수분포를 따릅니까?)

(c) **(Bonus 10 points)** Calculate the PDF of $X_{[k]}$.