Aula 8

Minimização de Expressões

Método Algébrico

Minimização de Expressões

Uma expressão booleana relativa a determinado circuito lógico pode ser reduzida a uma forma mais simples, isto é, uma expressão que contenha o menor número possível de termos e de respectivas variáveis em cada termo. Esta nova expressão deve resultar num circuito lógico com menos portas lógicas e menos conexões entre tais portas.

Três métodos serão aqui abordados:
-método algébrico;
-método do diagrama de Veitch-Karnaugh; e
-método de Quine-McCluskey.

Minimização de Expressões

- Método Algébrico

POSTULADOS

a)Postulado da complementação

Se A=0, então: $\overline{A}=1$
Se A=1, então: $\overline{A}=0$

Identidade obtida: $\boxed{\overline{\overline{A}} = A}$ (Teorema da involução)

b) Postulados da adição

0+0 = 0
0+1 = 1
1+0 = 1
1+1 = 1

Identidades obtidas:

$A+0=A$
$A+1=1$ (Teorema do elemento nulo)
$A+A=A$ (Teorema da Idempotência)
$A+\overline{A}=1$

c) Postulados da multiplicação

0.0 = 0
0.1 = 0
1.0 = 0
1.1 = 1

Identidades obtidas:

$A.0=0$ (Teorema do elemento nulo)
$A.1=A$
$A.A=A$ (Teorema da Idempotência)
$A.\overline{A}=0$

Minimização de Expressões

- Método Algébrico

PROPRIEDADES

a) Propriedade Comutativa

Adição: A+B = B+A
Multiplicação: A.B = B.A

b) Propriedade Associativa

Adição: A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C
Multiplicação: A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C

c) Propriedade Distributiva

A.(B+C) = A.B + A.C

Minimização de Expressões

- Método Algébrico

TEOREMAS DE AUGUSTUS DE MORGAN

a) O complemento do produto é igual a soma dos complementos.

$$\boxed{\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}}$$

Para N variáveis: $$\overline{A.B.C....N} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ... + \overline{N}$$

b) O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$\boxed{\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}}$$

Para N variáveis: $$\overline{A+B+C+...+N} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}....\overline{N}$$

Minimização de Expressões
- Método Algébrico

IDENTIDADES AUXILIARES

a) A + A.B = A

Demonstração: A+A.B

= A.(1+B) ← prop. distributiva (colocando A em evidência)

= A.1 ← postulado da adição

= A ← postulado da multiplicação

Minimização de Expressões
- Identidades Auxiliares

b) $(A+B).(A+C) = A + B.C$

Demonstração: $(A+B).(A+C)$

$= A.A + A.C + A.B + B.C$ ← propriedade distributiva

$= A + A.C + A.B + B.C$ ← postulado da multiplicação

$= A.(1+B+C) + B.C$ ← colocando A em evidência

$= A.1 + B.C$ ← postulado da adição

$= A + B.C$ ← postulado da multiplicação

Minimização de Expressões
- Identidades Auxiliares

c) $A + \overline{A}.B = A + B$

Demonstração: $A+\overline{A}.B$

$= \overline{\overline{A + \overline{A}.B}}$ ← postulado da identidade

$= \overline{\overline{A}.(\overline{\overline{A}.B})}$ ← Teorema de De Morgan

$= \overline{\overline{A}.(A + \overline{B})}$ ← Teorema de De Morgan + identidade

$= \overline{\overline{A}.A + \overline{A}.\overline{B}}$ ← Propriedade distributiva

$= \overline{\overline{A}.\overline{B}}$ ← postulado da multiplicação e adição

$= \overline{\overline{A+B}}$ ← Teorema de De Morgan

$= A + B$ ← postulado da identidade

Facilmente se prova a identidade

Minimização de Expressões

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA

Os teoremas da álgebra booleana podem ser usados para simplificar uma expressão lógica. Entretanto, nem sempre são possíveis determinar quais os teoremas, postulados e propriedades que devem ser aplicados a uma determinada expressão, de modo a produzir o resultado mais simples.

Além disso, não há uma regra para se determinar se a expressão já está em sua forma mais simples ou se ainda há mais simplificações a serem feitas. Sendo assim, muitas vezes, a simplificação algébrica se torna um processo de tentativa e erro.

Com o tempo, pode-se começar a obter resultados razoavelmente bons com a aplicação desta metodologia.

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

Dois passos podem ser descritos como essenciais na simplificação de determinada expressão booleana:

a) A expressão original é colocada na forma de soma-de-produtos por aplicações repetidas dos teoremas de DeMorgan e pela multiplicação dos termos obtidos;

b) Uma vez na forma de soma-de-produtos, os termos de cada produto são verificados de maneira a encontrar fatores comuns, sendo a fatoração executada, sempre que possível. Assim, a fatoração resultará na eliminação de dois ou mais termos.

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

Exemplo $S = A.B.C + A.\overline{B}.(\overline{\overline{A}.\overline{C}})$

Simplificação algébrica

a) Aplica-se o teorema de DeMorgan para eliminar as barras de complementação e após a multiplicação dos termos resultantes:

$S = A.B.C + A.\overline{B}.(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}})$ ← Teorema de De Morgan

$= A.B.C + A.\overline{B}.(A + C)$ ← Postulado da identidade

$= A.B.C + A.\overline{B}.A + A.\overline{B}.C$ ← Propriedade distributiva

$= A.B.C + A.\overline{B} + A.\overline{B}.C$ ← Postulado da multiplicação

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

$$S = A.B.C + A.\overline{B} + A.\overline{B}.C$$

b) Com a expressão na forma de soma-de-produtos, procura-se por variáveis comuns entre os diversos termos da expressão, a fim de proceder a fatoração:

$S = A.C.(B + \overline{B}) + A.\overline{B}$ ← A.C colocado em evidência

$= A.C.(1) + A.\overline{B}$ ← postulado da adição

$= A.C + A.\overline{B}$ ← postulado da multiplicação

$\mathbf{S} = \mathbf{A(C} + \mathbf{\overline{B})}$ ← A colocado em evidência

Observações que podem ser feitas para ver se a expressão está minimizada:

a) Se o resultado for 1 ou 0, já está minimizado;
b) Se a expressão tiver 1 ou 0 operando com alguma variável, a expressão ainda pode ser minimizada;
c) Se a expressão não tiver variáveis repetidas, ela já está minimizada;
d) Verificar se pode fazer uma equivalência de portas para ajudar na minimização.

Ex: $A.\overline{B} + \overline{A}.B = A \oplus B$

Minimização de Expressões

- Simplificação Algébrica

Exercícios

Simplifique as expressões booleanas:

a) $S = \overline{A.B.\overline{C}} + \overline{\overline{A}.\overline{B}.C}$

b) $S = \overline{(A + \overline{B} + \overline{C})}.\overline{(A + \overline{C})}$

c) $S = \overline{\overline{\overline{(A + B + C)}.(A.B.C)}}$

d) $S = A + A.B + \overline{A}.B + A.\overline{B} + \overline{A}.\overline{B}$

e) $S = A.B.C + \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

f) $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$

g) $S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C}$

h) $S = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C)$

i) $S = [\overline{\overline{A.C} + B + D}] + C.\overline{(A.C.D)}$

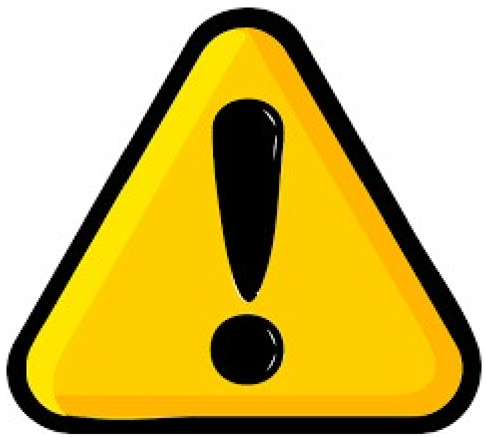
j) Prove que:

$$S = \overline{A \otimes B} = A \oplus B$$

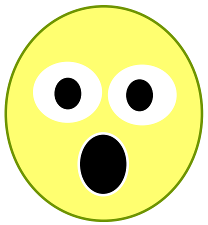
k) Demonstre em portas ou-exclusivo:

$$S = A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + A.B.C + \overline{A}.B.\overline{C}$$

Atenção



As cenas a seguir não devem ser assistidas se você ainda
não tentou fazer os exercícios propostos.
Risco de não aprender bem o assunto.



Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

Respostas dos exercícios

a) $S=\overline{A.B.\overline{C}}+\overline{\overline{A}.\overline{B}.C}$

$S=\overline{A}+\overline{B}+\overline{\overline{C}}+\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{C}$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S=\overline{A}+\overline{B}+C+A+B+\overline{C}$ ← Aplicado o postulado da Identidade ($\overline{\overline{A}}=A$)

$S=\overline{A}+A+\overline{B}+B+\overline{C}+C$ ← Aplicado a propriedade Comutativa

$S= 1 + 1 + 1$ ← Aplicado o postulado da Adição ($\overline{A}+A=1$)

$S = 1$

A resposta pode ser uma expressão, o valor 0 ou o valor 1.

Minimização de Expressões

- Simplificação Algébrica

b) $S = \overline{(A + \overline{B} + \overline{C})}.\overline{(A + \overline{C})}$

$S=\overline{A}.\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}\ .\ \overline{A}.\overline{\overline{C}}$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S=\overline{A}.B.C\ .\ \overline{A}.C$ ← Aplicado o postulado da Identidade ($\overline{\overline{A}}=A$)

$S=\overline{A}.\overline{A}.B.C.C$ ← Aplicado a propriedade Comutativa

$S=\overline{A}\ .\ B\ .\ C$ ← Aplicado o postulado da Multiplicação ($A.A=A$ ou $\overline{A}.\overline{A}=\overline{A}$)

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

c) $S = \overline{\overline{(\overline{A+B+C}).(A.B.C)}}$

$S = (\overline{A+B+C}) . (A.B.C)$ ← Aplicado o postulado da Identidade ($\overline{\overline{A}}=A$)

$S = (\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) . (A.B.C)$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S = \overline{A}.A.\overline{B}.B.\overline{C}.C$ ← Aplicado a propriedade Comutativa

$S = 0 . 0 . 0$ ← Aplicado o postulado da Multiplicação ($A.\overline{A}=0$)

$S = 0$

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

d) $S = A + A.B + \overline{A}.B + A.\overline{B} + \overline{A}.\overline{B}$

$S = A.(1+B+\overline{B}) + \overline{A}.(B+\overline{B})$ ← "A" colocado em evidência e "$\overline{A}$" também

$S = A.(1) + \overline{A}.(1)$ ← Aplicado o postulado da Adição (1+A=1) ($A+\overline{A}=1$)

$S = A + \overline{A}$ ← Aplicado o postulado da Multiplicação (1.A=A)

$S = 1$ ← Aplicado o postulado da Adição ($A+\overline{A}=1$)

$S = A + \boxed{A.B} + \boxed{\overline{A}.B} + \boxed{A.\overline{B}} + \boxed{\overline{A}.\overline{B}}$

Esta expressão em particular, já dá para concluir que é igual a 1, pois todas as combinações para 2 variáveis estão presentes, ou seja, toda a tabela da verdade é igual a 1.
Lembrar que numa soma de produtos, cada termo é uma das linhas da tabela da verdade cujo resultado é 1.

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

e) $S = A.B.C + \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

$S = A.B.C + \overline{A.B.C}$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan $(\overline{A}+\overline{B} = \overline{A.B})$

$S = X + \overline{X}$ ← Aplicado o postulado da Adição $(A+\overline{A}=1)$

$S = 1$

f) $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$

$S = A.B.C + A.(\overline{B}+\overline{C})$ ← "A" colocado em evidência

$S = A.B.C + A.(\overline{B.C})$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan $(\overline{A}+\overline{B} = \overline{A.B})$

$S = A.(B.C + \overline{B.C})$ ← "A" colocado em evidência

$S = A.(1)$ ← Aplicado o postulado da Adição $(A+\overline{A}=1)$

$S = A$ ← Aplicado o postulado da Multiplicação $(1.A=A)$

Minimização de Expressões

- Simplificação Algébrica

g) $S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \boxed{\overline{A}.B.C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C}$

$S = \overline{A}.\overline{C}.(\overline{B}+B) + A.\overline{C}.(\overline{B}+B) + \overline{A}.B.C$ ← colocado em evidência

$S = \overline{A}.\overline{C}.(1) + A.\overline{C}.(1) + \overline{A}.B.C$ ← Aplicado o postulado da Adição

$S = \overline{A}.\overline{C} + A.\overline{C} + \overline{A}.B.C$ ← Aplicado o postulado da Multiplicação

$S = \overline{C}.(\overline{A}+A) + \overline{A}.B.C$ ← colocado em evidência

$S = \overline{C}.1 + \overline{A}.B.C$ ← Aplicado o postulado da Adição

$S = \overline{C} + \overline{A}.B.C$ ← Aplicado o postulado da Multiplicação

$S = \overline{C} + \overline{A}.B.\cancel{C}$

$S = \overline{C} + \overline{A}.B$ ← Aplicado a identidade auxiliar “c” (ver este passo na página seguinte)

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

Explicação da aplicação da identidade auxiliar "c"

Identidade auxiliar "c" → $\boxed{S=A+\overline{A}.B = A+B}$ ou $\boxed{S=X+\overline{X}.Y = X+Y}$

Então podemos fazer o seguinte:

$$S= \overline{C}+\overline{A}.B.C$$

$$S=X+ Y .\overline{X} = X + Y$$

$$S= \overline{C} +\overline{A}.B$$

$$S=X+\overline{X}.Y = X+\cancel{\overline{X}}Y = X+Y$$

IFSC - Prof. Cláudio L. Ebert
ebert@ifsc.edu.br

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

h) $S = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C)$

$S = A.\overline{A}+A.\overline{B}+A.C+B.\overline{A}+B.\overline{B}+B.C+C.\overline{A}+C.\overline{B}+C.C$ ← Aplicado a propriedade distributiva

$S = 0+A.\overline{B}+A.C+B.\overline{A}+0+B.C+C.\overline{A}+C.\overline{B}+C$ ← Aplicado o postulado da multiplicação

$S = A.\overline{B}+A.C+B.\overline{A}+B.C+C.\overline{A}+C.\overline{B}+C$

$S = C.(A+B+\overline{A}+\overline{B}+1)+A.\overline{B}+B.\overline{A}$ ← colocado em evidência

$S = C.(1)+A.\overline{B}+B.\overline{A}$ ← Aplicado o postulado da adição

$S = C+A.\overline{B}+B.\overline{A}$ ← Aplicado o postulado da multiplicação

$S = C+(A \oplus B)$ ← Equivalência de portas lógicas

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

i) $S = [\overline{\overline{A.C} + B + D}] + C.(\overline{A.C.D})$

$S = [\overline{\overline{A.C}}.\overline{B}.\overline{D}]+C.(\overline{A}+\overline{C}+\overline{D})$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S = [A.C.\overline{B}.\overline{D}]+C.\overline{A}+\underbrace{C.\overline{C}}_{0}+C.\overline{D}$ ← Aplicado a propriedade distributiva

$S = [A.C.\overline{B}.\overline{D}]+C.\overline{A}+C.\overline{D}$ ← Aplicado o postulado da multiplicação

$S = C.(\underline{A.\overline{B}.\overline{D}+\overline{A}}+\overline{D})$ ← colocado em evidência

$S = C.(\overline{B}.\overline{D}+\overline{A}+\overline{D})$ ← Aplicado a identidade auxiliar “c”

$S = C.(\overline{D}.\underbrace{(\overline{B}+1)}_{1}+\overline{A})$ ← colocado em evidência

$S = C.(\overline{D}+\overline{A})$ ← Aplicado o postulado da adição

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

Lembrando que: $S= A.\overline{B}+\overline{A}.B = A \oplus B$

E que: $S= A.B+\overline{A}.\overline{B} = A \otimes B$

j) Prove que: $S = \overline{A \otimes B} = A \oplus B$

$S= \overline{A.B+\overline{A}.\overline{B}} = A \oplus B$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S= \overline{A.B} \, . \, \overline{\overline{A}.\overline{B}} = A \oplus B$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S=(\overline{A}+\overline{B}).\,(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}) = A \oplus B$ ← Aplicado o Teorema de De Morgan

$S=(\overline{A}+\overline{B}).\,(A+B) = A \oplus B$ ← Aplicado o postulado da identidade

$S=(\underbrace{\overline{A}.A}_{0}+\overline{A}.B+\overline{B}.A+\underbrace{\overline{B}.B}_{0})= A \oplus B$ ← Aplicado a propriedade distributiva

$S=(\overline{A}.B+\overline{B}.A)= A \oplus B$ ← Aplicado o postulado da multiplicação

$S=(A \oplus B)= A \oplus B$ ← Equivalência de portas lógicas

Minimização de Expressões
- Simplificação Algébrica

k) Demonstre em portas ou-exclusivo:

$$S = A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + A.B.C + \overline{A}.B.\overline{C}$$

$S = A.(\overline{B}.\overline{C} + B.C) + \overline{A}.(\overline{B}.C + B.\overline{C})$ ← Colocado em evidência

$S = A.(B \otimes C) + \overline{A}.(B \oplus C)$ ← Equivalência de portas lógicas

$S = A.(\overline{B \oplus C}) + \overline{A}.(B \oplus C)$ ← Lembrando que $B \otimes C = \overline{B \oplus C}$

$S = A.\overline{X} + \overline{A}.X$ ← Fazendo $B \oplus C = X$

$S = A \oplus X$ ← Equivalência de portas lógicas

$S = A \oplus (B \oplus C)$ ← Fazendo $X = B \oplus C$

$S = A \oplus B \oplus C$