INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
ASSESSORIA DE MATEMÁTICA
UNIDADE CURRICULAR: GEOMETRIA ANALÍTICA
PROFESSORA: GRACIELE AMORIM ZIMMERMANN

**NOME:** Gabarito e correção detalhada da prova

**Instruções:**

1- A prova pode ser feita à lápis.
2- Não é permitido ausentar-se da sala durante a prova.
3- É permitido o uso de calculadora científica (exceto modelo gráfica).
4- Você deve entregar seu Resumo identificado junto com sua avaliação.
5- Escreva todos os passos da sua resolução das questões. **Respostas mal justificadas ou sem os devidos cálculos não serão consideradas.**

1) (2 pontos) Uma companhia de navegação tem três tipos de recipientes A, B e C, que carrega cargas em containeres de três tipos I, II e III. As capacidades dos recipientes são dadas pela matriz:

| Tipo do Recipiente | I | II | III |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 3 | 2 |
| B | 5 | 2 | 3 |
| C | 2 | 2 | 3 |

Quais são os números de recipientes x, y e z de cada categoria A, B e C, se a companhia deve transportar 42 containeres do tipo I, 27 do tipo II e 33 do tipo III?

$$\begin{cases} 4x+5y+2z=42 \\ 3x+2y+2z=27 \\ 2x+3y+3z=33 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 42 \\ 3 & 2 & 2 & 27 \\ 2 & 3 & 3 & 33 \end{array}\right) L_1: L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 15 \\ 3 & 2 & 2 & 27 \\ 2 & 3 & 3 & 33 \end{array}\right)$$

$L_2: 3L_1 - L_2$

$L_3: 2L_1 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 15 \\ 0 & 7 & -2 & 18 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) L_3: \frac{L_3}{3} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 15 \\ 0 & 7 & -2 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) L_3: L_2 - 7L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 15 \\ 0 & 7 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

$5z = 25$

$\boxed{z=5}$

$7y - 2\cdot 5 = 18$

$7y = 18 + 10$

$7y = 28$

$y = \frac{28}{7} \Rightarrow \boxed{y=4}$

$x + 3\cdot 4 + 0 = 1$

$x = 15 - 12$

$\boxed{x=3}$

$S = \{(3,4,5)\}$

2) (2,0 pontos - cada item) Determine, se existirem, as soluções dos sistemas lineares abaixo

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2: 2L_1 - L_2 \\ L_3: L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right) L_3: 3L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & 30 \end{array}\right)$$

$t \in \mathbb{R}$

$12z - 6t = 30$

$12z = 30 + 6t$

$z = \frac{30}{12} + \frac{6}{12}t$

$z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t$

$y + 4\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t\right) - 3t = 13$

$y + 10 + 2t - 3t = 13$

$y = t + 3$

$x + \cancel{t} + 3 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t - \cancel{t} = 6$

$x + \frac{11}{2} + \frac{1}{2}t = 6 \rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$

$S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t; t+3, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$

$$\begin{cases} x+2y+4z=5 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x-3y-z=7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2: 2L_1 - L_2 \\ L_3: 3L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 13 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2: 9L_2 \\ L_3: 5L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 45 & 54 & 18 \\ 0 & 45 & 65 & 40 \end{array}\right) L_3: L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 45 & 54 & 18 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right)$$

$-11z = -22$

$z = 2$

$45y + 54 \cdot 2 = 18$

$45y = 18 - 108$

$45y = -90$

$y = \frac{-90}{45} \Rightarrow y = -2$

$x + 2(-2) + 4 \cdot 2 = 5$

$x - 4 + 8 = 5$

$x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$

$S = \{(1, -2, 2)\}$

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 : 2L_1 - L_2 \\ L_3 : 3L_1 - L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$L_3 : L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

*Sistema Impossível!*

3)Determinar os valores de a e b que tornam o sistema abaixo seja possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x-7y=a \\ x+y=b \\ 5x+3y=5a+2b \\ x+2y=a+b-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 3 & -7 & a \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 : 3L_1 - L_2 \\ L_3 : 5L_1 - L_3 \\ L_4 : L_1 - L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & 10 & 3b-a \\ 0 & 2 & 3b-5a \\ 0 & -1 & -a+1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -a+1 \\ 0 & 2 & 3b-5a \\ 0 & 10 & 3b-a \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 : 2L_2 + L_3 \\ L_4 : 10L_2 + L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -a+1 \\ 0 & 0 & 3b-7a+2 \\ 0 & 0 & 3b-11a+10 \end{array}\right)$$

Para existir solução: $\begin{cases} 3b-7a+2=0 \\ 3b-11a+10=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3b-7a=-2 \\ 3b-11a=-10 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & -2 \\ 3 & -11 & -10 \end{array}\right) L_2 : L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & -2 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$4a=8$

$a=2$

$3b-7\cdot 2=-2$

$3b=-2+14$

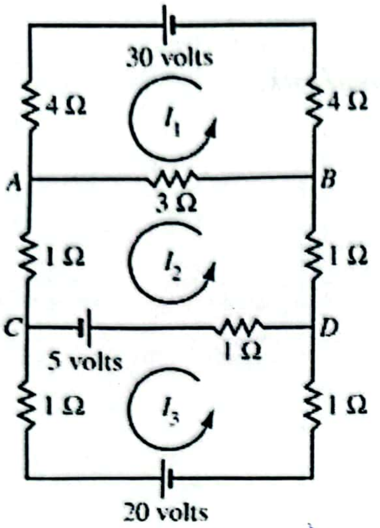
$3b=12$

$b=4$

Resp: $a=2$ e $b=4$

DESAFIO - Questão extra ( Não é obrigatória!!!) Vale 2 pontos!

Utilizando as Leis de Kirchoff e Lei de Ohm, determine o sistema linear correspondente ao circuito abaixo e resolva-o encontrando as corrente $I_1$, $I_2$ e $I_3$




$$\begin{cases} 11I_1 - 3I_2 = 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5 \\ -I_2 + 3I_3 = -25 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -3 & 0 & 30 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow 3L_1 \\ L_2 \leftrightarrow 11L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 33 & -9 & 0 & 90 \\ -33 & 66 & -11 & 55 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{array}\right) L_2 : L_1 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 33 & -9 & 0 & 90 \\ 0 & 57 & -11 & 145 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{array}\right) L_3 \leftrightarrow 57L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 33 & -9 & 0 & 90 \\ 0 & 57 & -11 & 145 \\ 0 & -57 & 171 & -1425 \end{array}\right) L_3 : L_2 + L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 33 & -9 & 0 & 90 \\ 0 & 57 & -11 & 145 \\ 0 & 0 & 160 & -1280 \end{array}\right)$$

Logo: $160 I_3 = -1280 \Rightarrow \boxed{I_3 = -8}$

$57 I_2 - 11(-8) = 145$

$57 I_2 = 57$

$\boxed{I_2 = 1}$

$33 I_1 - 9 \cdot 1 = 90$

$I_1 = \dfrac{99}{33} \Rightarrow \boxed{I_1 = 3}$

$S = \{(3, 1, -8)\}$

Obs: o valor negativo para $I_3$ mostra que o sentido real da corrente é na direção oposta à indicada pela figura!