INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

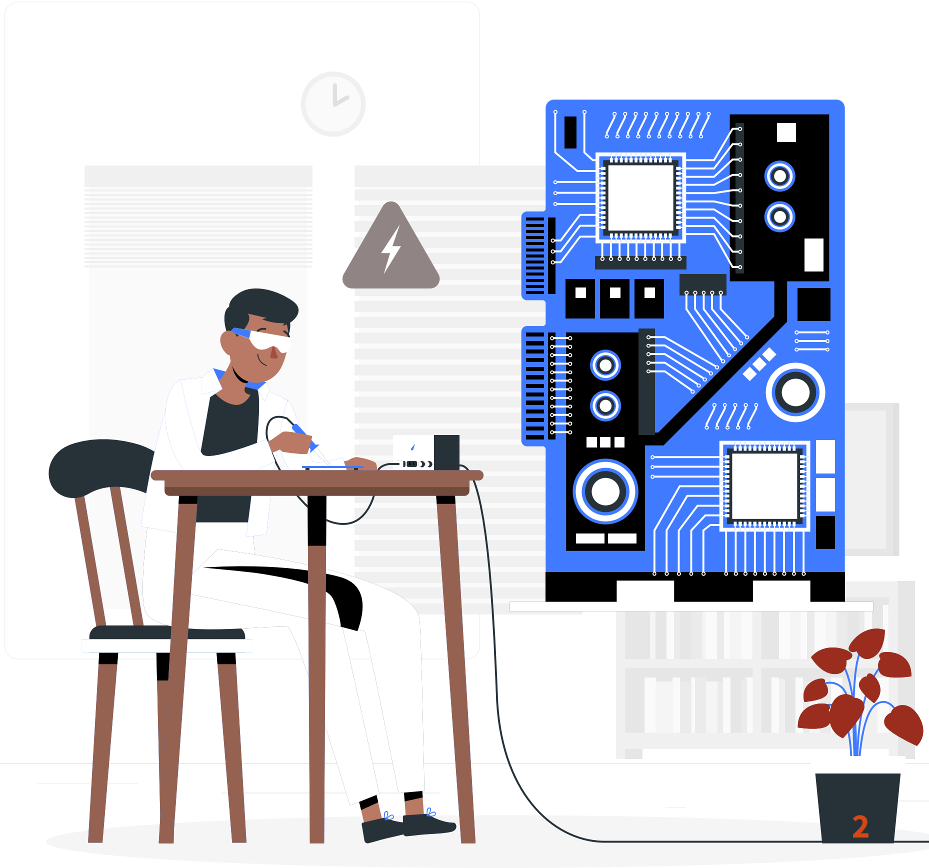
Eletrônica Digital I

- Aula 4 -

Professora: Ma. Luciana Menezes Xavier de Souza
e-mail: luciana.xavier@ifsc.edu.br

Conteúdo

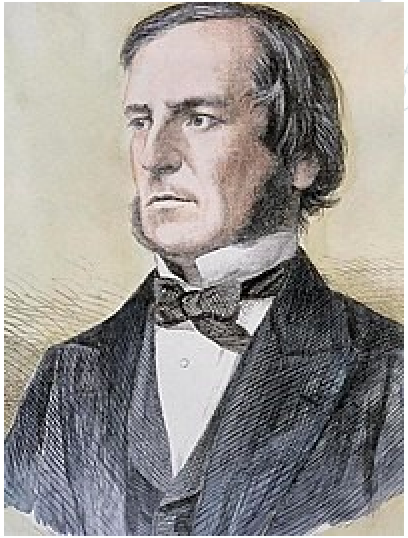
- Álgebra de Boole;
- Exercícios.



Álgebra de Boole

- O termo "álgebra booliana" é uma homenagem a **George Boole**, um matemático inglês autodidata.

- Boole introduziu o sistema algébrico, inicialmente, em um pequeno panfleto, o *The Mathematical Analysis of Logic*, publicado em 1847.



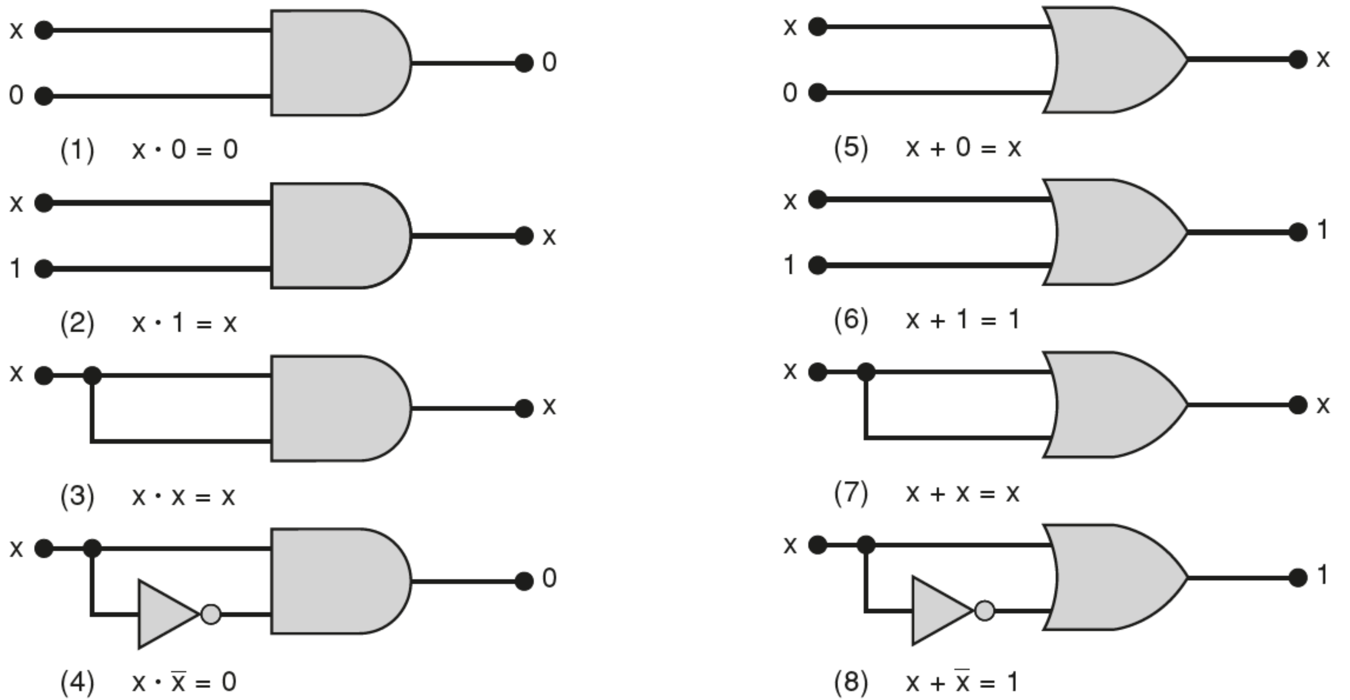
George Boole
1815-1864

Álgebra de Boole

- Diferentemente da álgebra ordinária dos reais as **variáveis Booleanas** só podem assumir um **número finito de valores**.

- A álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por [F,V] (falso ou verdadeiro), [H,L] (*high* e *low*) ou ainda [0,1].

Teorema Booleano



(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(3) $x \cdot x = x$

(4) $x \cdot \overline{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

(6) $x + 1 = 1$

(7) $x + x = x$

(8) $x + \overline{x} = 1$

Teoremas com mais de uma variável

- Os teoremas apresentados a seguir envolvem mais de uma variável:

(9) $x + y = y + x$

(10) $x \cdot y = y \cdot x$

(11) $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$

(12) $x(yz) = (xy)z = xyz$

(13*a*) $x(y + z) = xy + xz$

(13*b*) $(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$

(14) $x + xy = x$

(15*a*) $x + \overline{x}y = x + y$

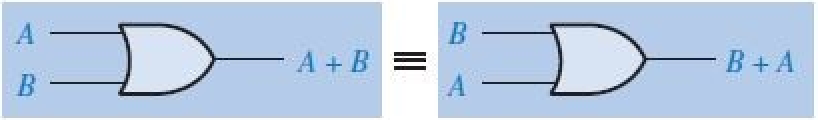
(15*b*) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

Teoremas com mais de uma variável

- Posso reapresentar o slide anterior como:

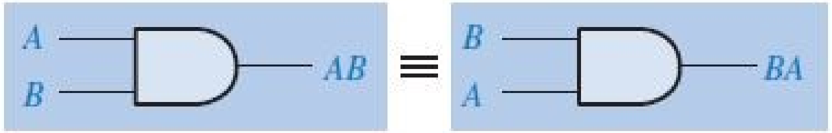
- **Lei comutativa**
  - A lei comutativa da adição para duas variáveis:

$$A + B = B + A$$



  - A lei comutativa da multiplicação para duas variáveis é

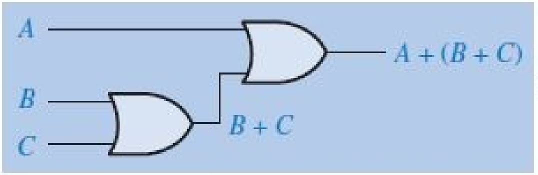
$$AB = BA$$



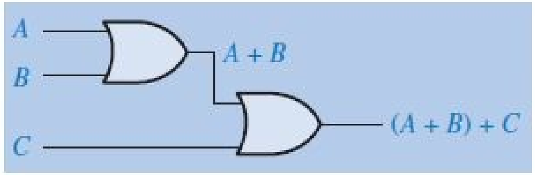
Teoremas com mais de uma variável

- **Lei associativa**
  - A lei associativa da adição para duas variáveis:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

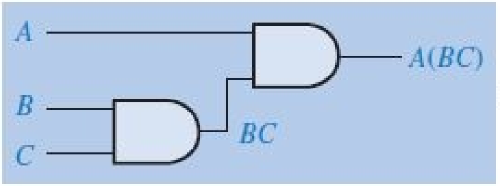


≡

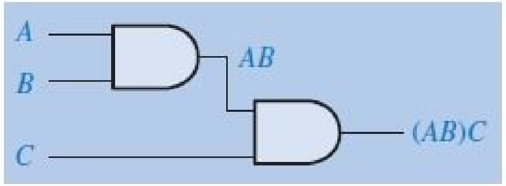


  - A lei associativa da multiplicação para duas variáveis é

$$A(BC) = (AB)C$$



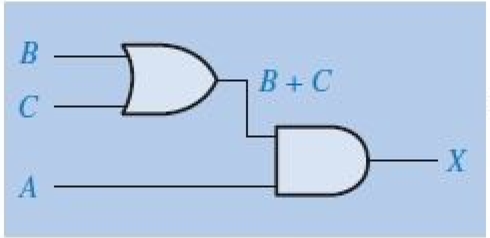
≡



Teoremas com mais de uma variável

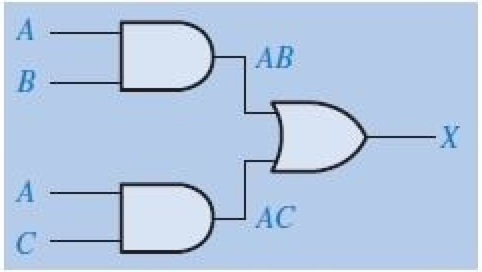
- **Lei distributiva**
  - A lei distributiva para três variáveis:

$$A(B + C) = AB + AC$$



$X = A(B + C)$

$\equiv$



$X = AB + AC$

Regras da Álgebra Booleana

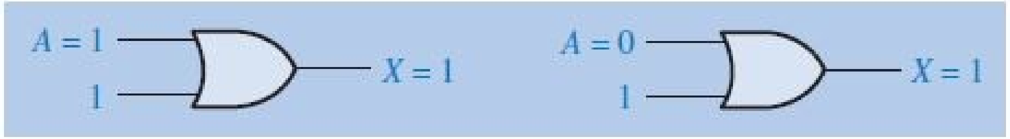
- **Regra 1**: A operação OR de uma variável com 0 é sempre igual a variável.

$$A + 0 = A$$

$X = A + 0 = A$

- **Regra 2**: A operação OR da variável com 1 é igual a 1

$$A + 1 = 1$$



$X = A + 1 = 1$

Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 3**: A operação AND da variável com 0 sempre é igual a 0.

$$A \,.\, 0 = 0$$

$$X = A \bullet 0 = 0$$

- **Regra 4**: A operação AND da variável com 1 é igual a própria variável.

$$A \,.\, 1 = A$$

$$X = A \bullet 1 = A$$

Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 5**: A operação OR da variável com ela mesma é sempre igual a variável.

$$A + A = A$$

$X = A + A = A$

- **Regra 6**: A operação OR da variável com o seu complemento é sempre igual a 1.

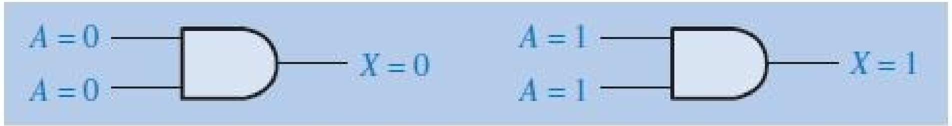
$$A + \bar{A} = 1$$

$X = A + \bar{A} = 1$

Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 7**: A operação AND de uma variável com ela mesma é sempre igual a variável.

$$A \,.\, A = A$$



$$X = A \bullet A = A$$

- **Regra 8**: A operação AND de **uma variável e o seu complemento** é sempre igual a 0.

$$A.\bar{A} = 0$$

$$X = A \bullet \bar{A} = 0$$

Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 9**: O complemento duplo de uma variável é sempre igual a variável.

$$\bar{A}\,.\,\bar{A} = A$$

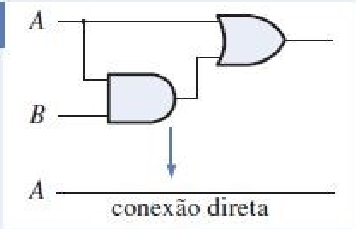
$\bar{\bar{A}} = A$

- **Regra 10**:

$$A + AB = A$$

A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

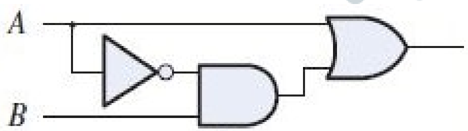
igual



Regras da Álgebra Booleana

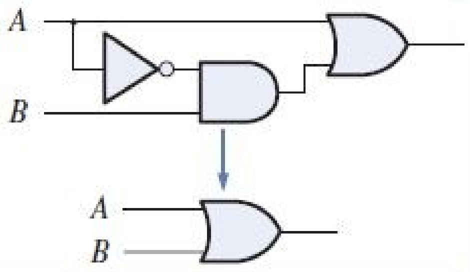
- **Regra 11**:

$$A + \bar{A}B = A + B$$



A	B	$\bar{A}B$	$A + \bar{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

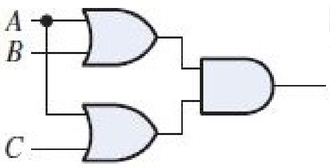
igual



Regras da Álgebra Booleana

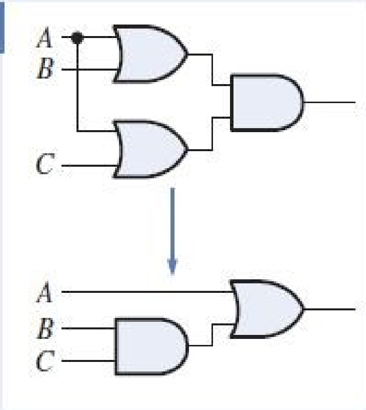
- **Regra 12**:

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$



A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual



Teoremas com mais de uma variável

- Se tivermos uma soma de dois (ou mais) termos e cada um tiver uma variável em comum, ela poderá ser colocada em evidência, como na álgebra convencional;

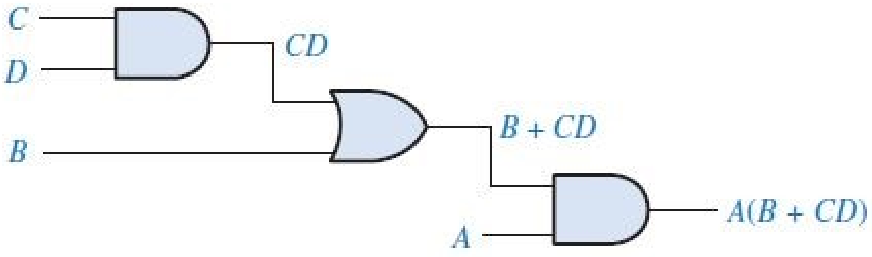
- Por exemplo, na expressão $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, podemos colocar em evidência a variável *B*:

$$A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}(AC + \overline{A}\,\overline{C})$$

Análise Booleana de circuitos lógicos

Expressão Booleana

- Para obter a expressão Booleana para um dado circuito lógico, comece pelas **entradas mais à esquerda** e, percorrendo o circuito até a saída final, escreva a expressão para cada porta lógica.



Análise Booleana de circuitos lógicos

Tabela-verdade para um circuito lógico

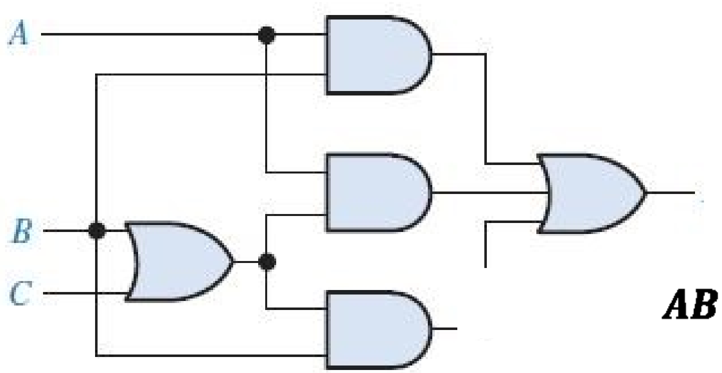
- Uma vez que a expressão Booleana para um dado circuito lógico foi determinada, uma tabela verdade que mostra a saída para todos os valores possíveis das variáveis de entrada pode ser desenvolvida.

ENTRADAS				SAÍDA
A	B	C	D	A(B + CD)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Simplificação usando álgebra Booleana

Simplificando um circuito lógico

- Ao aplicarmos a álgebra Booleana, muitas vezes temos que reduzir uma determinada expressão para a sua **forma mais simples** ou transformá-la em um formato mais conveniente a fim de implementar a expressão mais eficientemente.



Qual a expressão?

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Simplificação usando álgebra Booleana

Simplificando um circuito lógico

- Usando álgebra booleana simplifique a expressão:

$$\boldsymbol{AB + A(B + C) + B(B + C)}$$

Distributiva no segundo e terceiro termo

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

Regra 7 (BB=B) quarto termo

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Regra 5 (AB+AB=AB) nos primeiros dois termos

$$AB + AC + B + BC$$

Regra 10 (B+BC=B) nos últimos dois termos

$$AB + AC + B$$

Regra 10 (AB+B=B) ao primeiro e ao terceiro termo

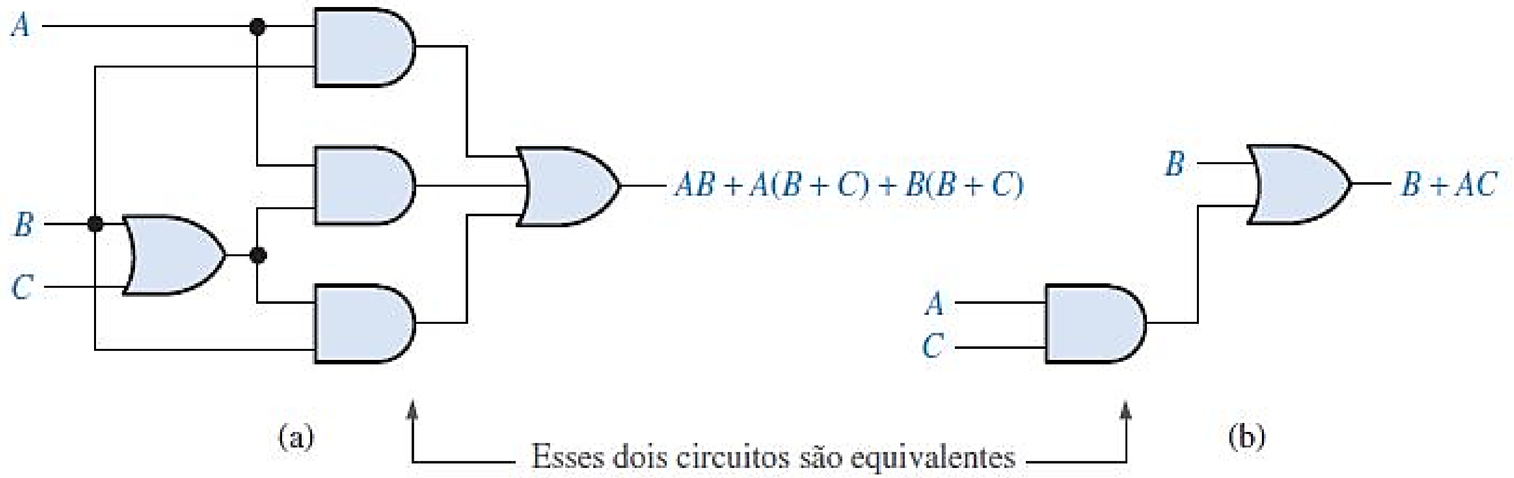
$$\boldsymbol{B + AC}$$

Desenhe os dois circuitos e faça a tabela verdade

Simplificação usando álgebra Booleana

Simplificando um circuito lógico

- A Figura abaixo mostra que o processo de simplificação dado no exemplo **reduziu significativamente o número de portas lógicas** necessárias para implementar a expressão.



Teoremas de DeMorgan

Princípios

- DeMorgan, um matemático que conheceu Boole, propôs dois teoremas que representam uma parte importante da álgebra Booleana.

- Em termos práticos, os teoremas de DeMorgan provêm uma verificação da **equivalência entre as portas NAND e OR negativa** e a **equivalência entre as portas NOR e AND negativa**.

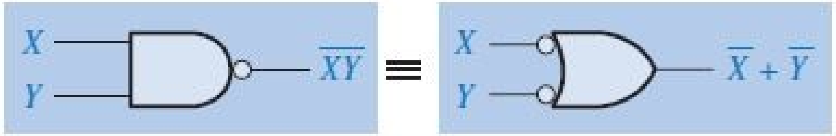
- Os teoremas de DeMorgan também se aplicam a expressões nas quais existem mais que duas variáveis.

Teoremas de DeMorgan

Primeiro teorema de DeMorgan

- O primeiro teorema de DeMorgan é chamado de “**Teorema do Complemento do Produto**” e afirma que a complementação de um produto (lógico) equivale à soma (lógica) das negações de cada variável do referido produto. Sob a forma de equação, teríamos:

$$\overline{A\,.\,B\,.\,C\,.\,...} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + ...$$



NAND OR negativa

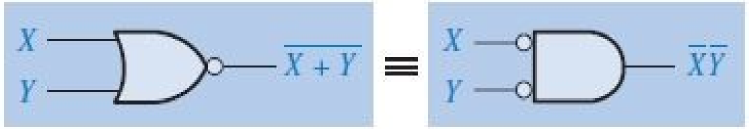
Entradas		Saída	
X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Teoremas de DeMorgan

Segundo teorema de DeMorgan

- O segundo teorema de DeMorgan é o "**Teorema do complemento da soma**". Esse teorema diz que o complemento da soma é igual ao produto dos complementos, sendo uma extensão do complemento estudado anteriormente, podendo ser descrito como:

$$\overline{A + B + C + \ldots} = \bar{A} \,.\, \bar{B} \,.\, \bar{C} \,\ldots.$$



NOR AND negativa

Entradas		Saída	
X	Y	$\overline{X + Y}$	$\bar{X}\bar{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Teoremas de DeMorgan

Combinações de expressões

- Cada variável nos teoremas de DeMorgan também pode representar uma **combinação de outras variáveis**.

- Por exemplo, X pode ser igual ao termo AB + C e Y pode ser igual ao termo A + BC. Assim, se podemos aplicar o teorema de DeMorgan para duas variáveis conforme foi dito anteriormente na expressão, obtemos o seguinte resultado:

$$\overline{(AB + C)(A + BC)} = \overline{(AB + C)} + \overline{(A + BC)}$$

Teoremas de DeMorgan

Exemplo

- Aplique os teoremas de DeMorgan nas expressões:

$$X = \overline{(A + B + C)D} \text{ e } Y = \overline{ABC + DEF}$$

- Resposta:

$$X = \overline{(A + B + C)D} = \overline{A + B + C} + \bar{D} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{D}$$

$$Y = \overline{ABC + DEF} = \overline{ABC}.\overline{DEF} = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}).\,(\bar{D} + \bar{E} + \bar{F})$$

Exemplo

- Resolva:

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

- Resposta:

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} &= \bar{A}(B + \bar{B}) + A\bar{B} \\ &= \bar{A}(1 + \bar{B}) + A\bar{B} \\ &= \bar{A} + (A + \bar{A})\bar{B} \\ &= \bar{A} + \bar{B}\end{aligned}$$

Formas padronizadas

Forma de soma-de-produtos

- Um termo-produto é definido como um termo que consiste em produto (multiplicação Booleana) de literais (variáveis ou seus complementos). **Quando dois ou mais termos-produto são somados por uma adição Booleana, a expressão resultante é uma soma-de-produtos.**

- **Exemplos**:

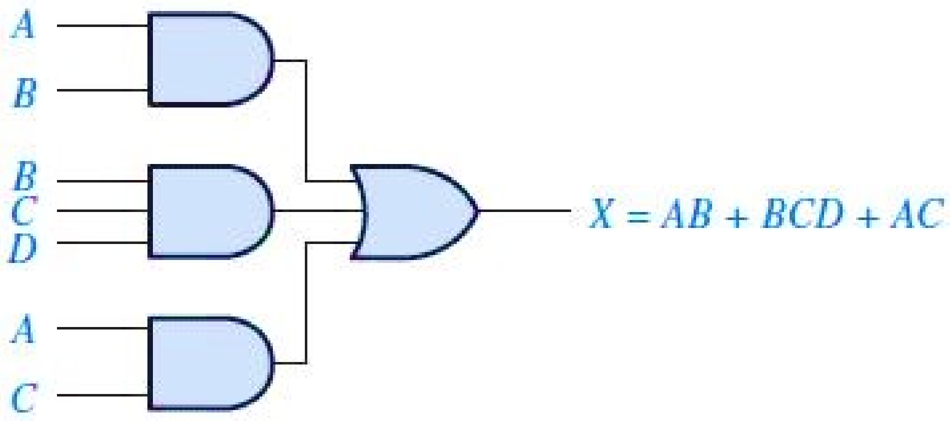
$$AB + ABC$$
$$AB + AC + \bar{B}CD$$
$$\bar{A}B + \bar{A}BC + BD$$

- **Domínio**: o domínio de uma expressão Booleana geral é o **conjunto das variáveis contidas na expressão** na forma complementada ou não complementada.

Formas padronizadas

Forma de soma-de-produtos

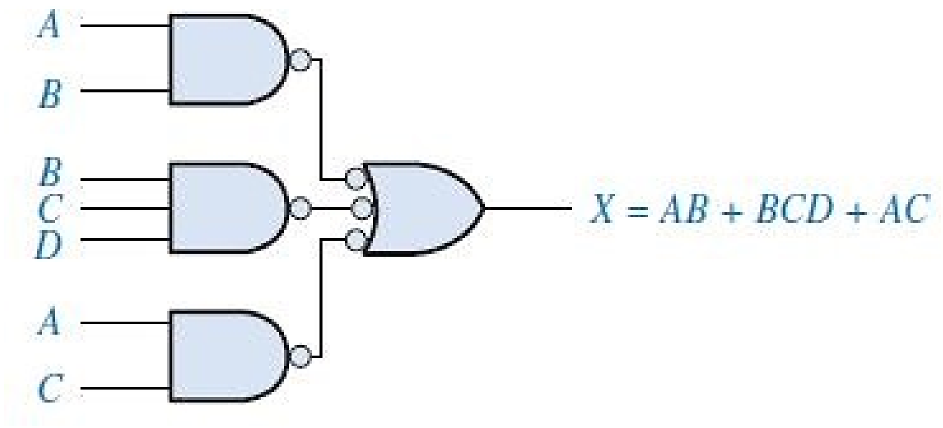
- Implementação AND/OR de uma Expressão de **soma-de-produtos**:



Formas padronizadas

Forma de soma-de-produtos

- Implementação NAND/OR de uma Expressão de soma-de-produtos:



Formas padronizadas

Forma de produtos-de-somas

- Um termo-soma é definido como um termo que consiste de uma soma (adição Booleana) de literais (as variáveis ou seus complementos). Quando dois ou mais termos-soma são multiplicados, a **expressão resultante é um produto-de-somas**.

- Exemplos:

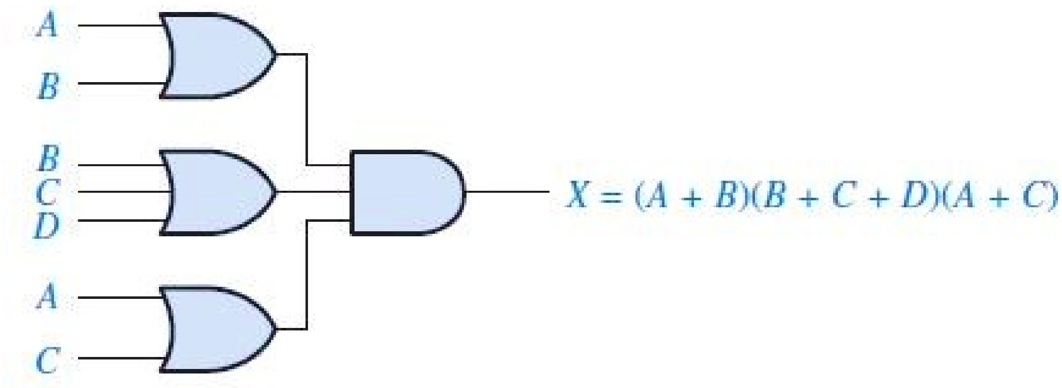
1º $$(A+B)(A+\bar{B}+C)$$

2º $$(A+B)(A+C+\bar{D})(\overline{B}+C+D)$$

3º $$(\bar{A}+B)(\bar{A}+B+C)(B+D)$$

Formas padronizadas
Forma de produtos-de-somas

- Implementação AND/OR de uma Expressão de produtos-de-somas:



Expressão Booleana e tabela-verdade

Forma de produtos-de-somas

- Todas as expressões Booleanas padrão podem ser facilmente **convertidas no formato de uma tabela-verdade** usando valores binários para cada termo na expressão.

- A **tabela-verdade é uma forma comum de apresentação**, num formato conciso, da **operação lógica** de um circuito.

- Além disso, expressões de **soma-de-produtos padrão ou produto-de-somas podem ser determinadas a partir de uma tabela-verdade**. Encontramos tabelas-verdade em folhas de dados e outras literaturas relacionadas à operação de circuitos digitais.

Expressão Booleana e tabela-verdade

Conversão de Expressões de Soma-de-Produtos para o Formato de Tabela-Verdade

- Exemplo:

$$\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

ENTRADAS A	B	C	SAÍDA X	TERMO PRODUTO
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

Expressão Booleana e tabela-verdade

Conversão de Expressões de Produto-de-Somas para o Formato de Tabela-verdade

- Exemplo:

$$(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

ENTRADAS A	B	C	SAÍDA X	TERMO-SOMA
0	0	0	0	$(A+B+C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(A+\bar{B}+C)$
0	1	1	0	$(A+\bar{B}+\bar{C})$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$(\bar{A}+B+\bar{C})$
1	1	0	0	$(\bar{A}+\bar{B}+C)$
1	1	1	1	

Expressão Booleana e tabela-verdade

Expressão Padrão a partir de uma Tabela-Verdade

- Exemplo:

ENTRADAS			SAÍDA
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- Termo produto
- Termo soma

Expressão Booleana e tabela-verdade

Expressão Padrão a partir de uma Tabela-Verdade

- Exemplo:

ENTRADAS			SAÍDA
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- Termo produto

$011 \longrightarrow \overline{A}BC$

$100 \longrightarrow A\overline{B}\,\overline{C}$

$110 \longrightarrow AB\overline{C}$

$111 \longrightarrow ABC$

$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

Expressão Booleana e tabela-verdade

Expressão Padrão a partir de uma Tabela-Verdade

- Exemplo:

ENTRADAS			SAÍDA
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- Termo soma

$000 \longrightarrow A + B + C$

$001 \longrightarrow A + B + \overline{C}$

$010 \longrightarrow A + \overline{B} + C$

$101 \longrightarrow \overline{A} + B + \overline{C}$

$$X = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$