INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

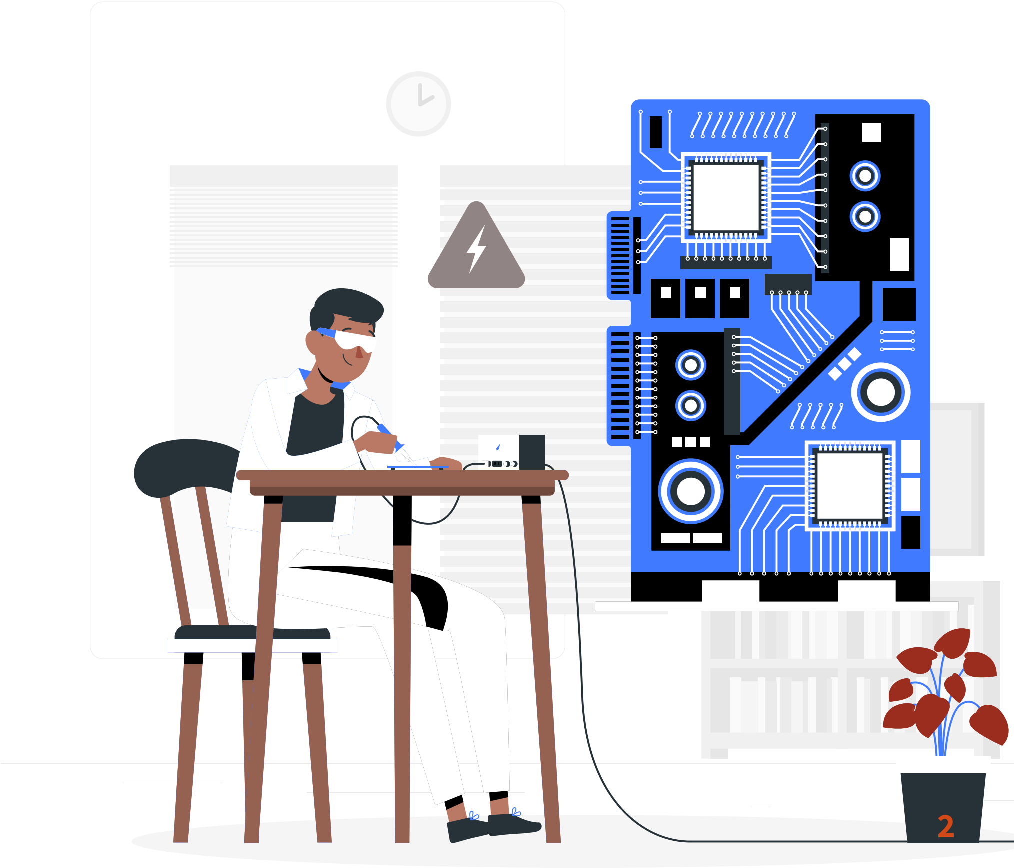
# Eletrônica Digital I

## - Aula 4 -

Professora: Ma. Luciana Menezes Xavier de Souza
e-mail: luciana.xavier@ifsc.edu.br

# Conteúdo

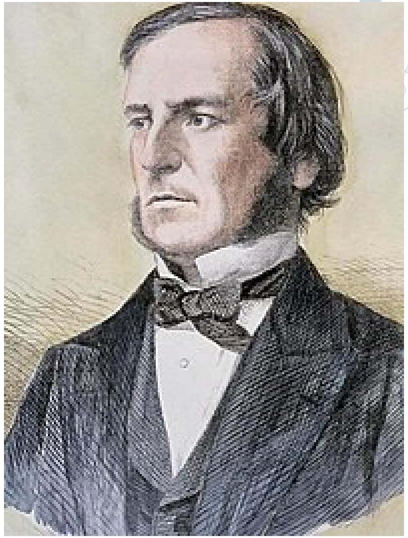
- Álgebra de Boole;
- Exercícios.



# Álgebra de Boole

- O termo "álgebra booliana" é uma homenagem a **George Boole**, um matemático inglês autodidata.

- Boole introduziu o sistema algébrico, inicialmente, em um pequeno panfleto, o *The Mathematical Analysis of Logic*, publicado em 1847.



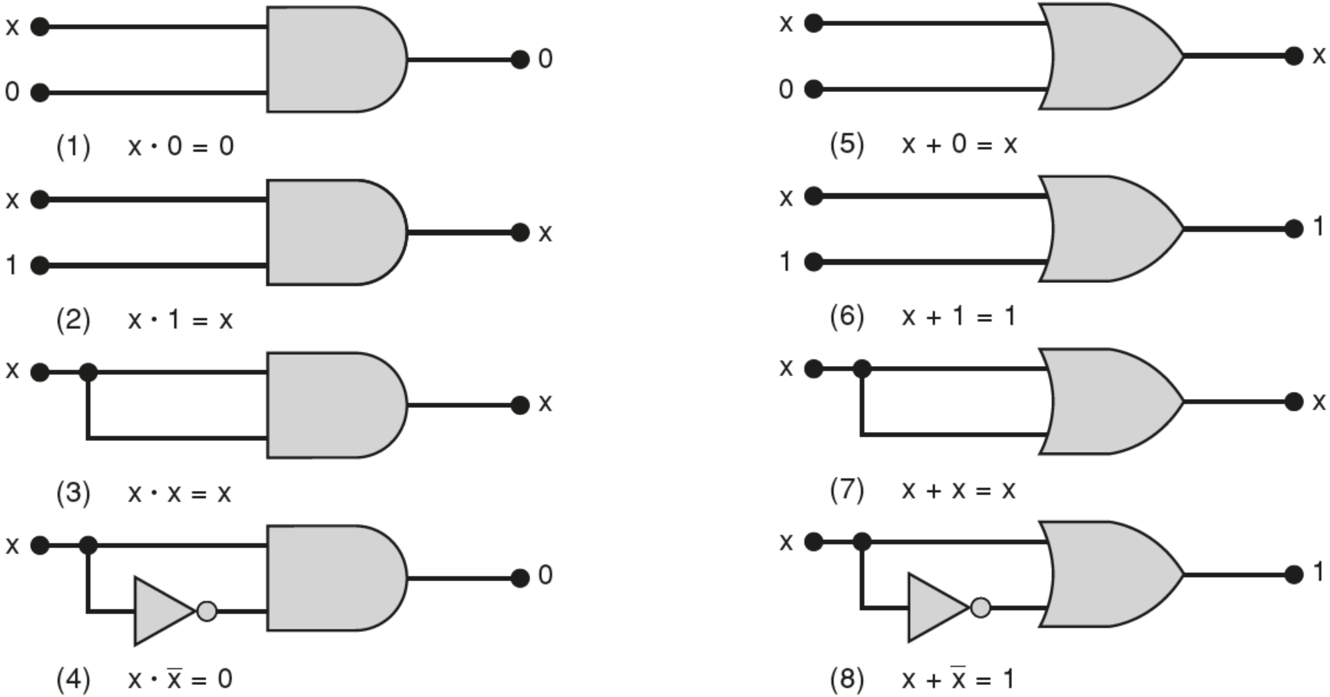
George Boole
1815-1864

# Álgebra de Boole

- Diferentemente da álgebra ordinária dos reais as **variáveis Booleanas** só podem assumir um **número finito de valores**.

- A álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por [F,V] (falso ou verdadeiro), [H,L] (*high* e *low*) ou ainda [0,1].

# Teorema Booleano



# Teoremas com mais de uma variável

- Os teoremas apresentados a seguir envolvem mais de uma variável:

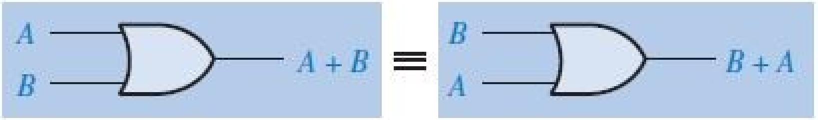
$$
\begin{array}{ll}
(9) & x + y = y + x \\
(10) & x \cdot y = y \cdot x \\
(11) & x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z \\
(12) & x(yz) = (xy)z = xyz \\
(13a) & x(y + z) = xy + xz \\
(13b) & (w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz \\
(14) & x + xy = x \\
(15a) & x + \overline{x}y = x + y \\
(15b) & \overline{x} + xy = \overline{x} + y
\end{array}
$$

# Teoremas com mais de uma variável

- Posso reapresentar o slide anterior como:

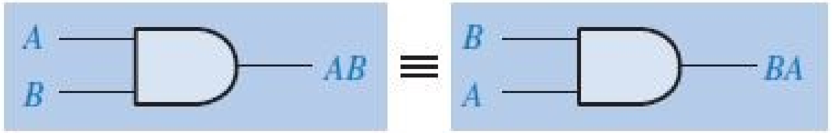
- **Lei comutativa**
  - A lei comutativa da adição para duas variáveis:

$$A + B = B + A$$




  - A lei comutativa da multiplicação para duas variáveis é

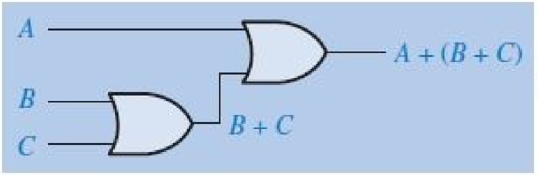
$$AB = BA$$



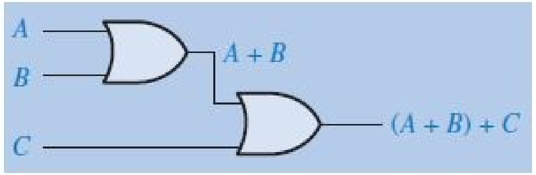
# Teoremas com mais de uma variável

- **Lei associativa**
  - A lei associativa da adição para duas variáveis:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

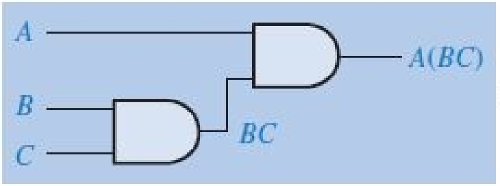



$\equiv$

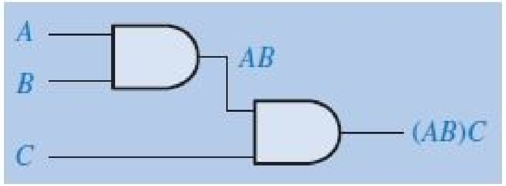



  - A lei associativa da multiplicação para duas variáveis é

$$A(BC) = (AB)C$$



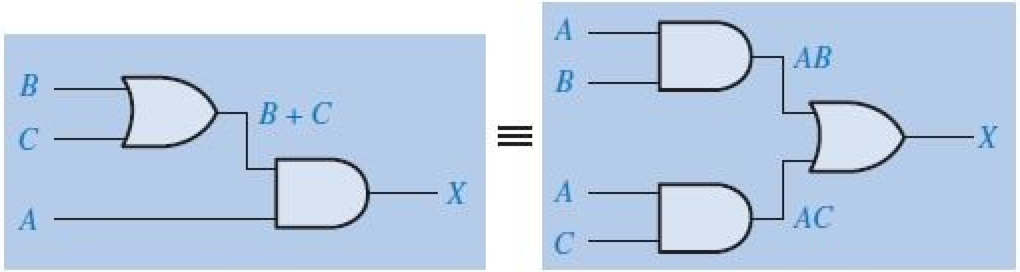

$\equiv$



# Teoremas com mais de uma variável

- **Lei distributiva**
  - A lei distributiva para três variáveis:

$$A(B + C) = AB + AC$$




$X = A(B + C)$ $\quad$ $X = AB + AC$

## Regras da Álgebra Booleana

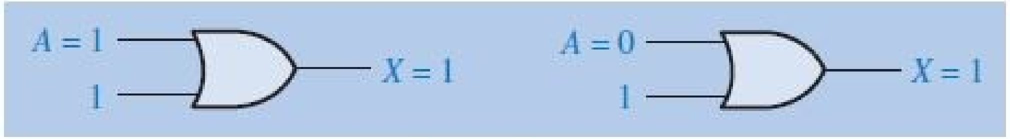
- **Regra 1**: A operação OR de uma variável com 0 é sempre igual a variável.

$$A + 0 = A$$


$$X = A + 0 = A$$

- **Regra 2**: A operação OR da variável com 1 é igual a 1

$$A + 1 = 1$$




$$X = A + 1 = 1$$

## Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 3**: A operação AND da variável com 0 sempre é igual a 0.

$$A \, . \, 0 = 0$$


$X = A \bullet 0 = 0$

- **Regra 4**: A operação AND da variável com 1 é igual a própria variável.

$$A \, . \, 1 = A$$


$X = A \bullet 1 = A$

## Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 5**: A operação OR da variável com ela mesma é sempre igual a variável.

$$A + A = A$$


$X = A + A = A$

- **Regra 6**: A operação OR da variável com o seu complemento é sempre igual a 1.

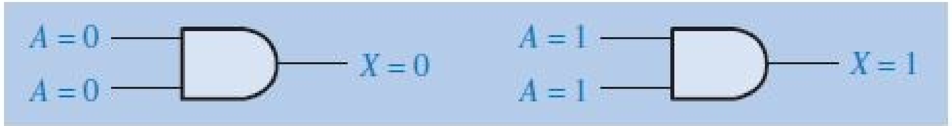
$$A + \bar{A} = 1$$


$X = A + \bar{A} = 1$

## Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 7**: A operação AND de uma variável com ela mesma é sempre igual a variável.

$$A \,.\, A = A$$




$X = A \cdot A = A$

- **Regra 8**: A operação AND de **uma variável e o seu complemento** é sempre igual a 0.

$$A.\bar{A} = 0$$


$X = A \cdot \bar{A} = 0$

# Regras da Álgebra Booleana

- **Regra 9**: O complemento duplo de uma variável é sempre igual a variável.

$$\bar{A}\,.\,\bar{A} = A$$

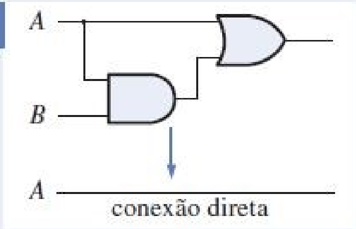

$\bar{\bar{A}} = A$

- **Regra 10**:

$$A + AB = A$$

| A | B | AB | A + AB |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

igual

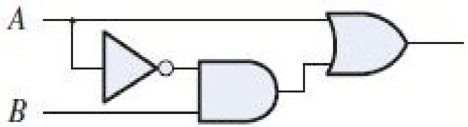


# PAREI AQUI

## Regras da Álgebra Booleana

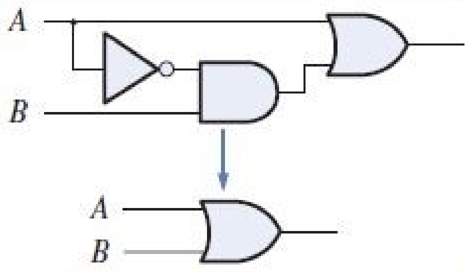
- **Regra 11**:

$$A + \bar{A}B = A + B$$




| A | B | $\bar{A}B$ | $A+\bar{A}B$ | $A+B$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

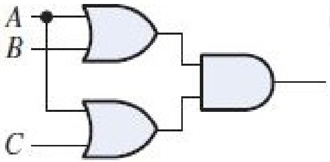
igual



# Regras da Álgebra Booleana

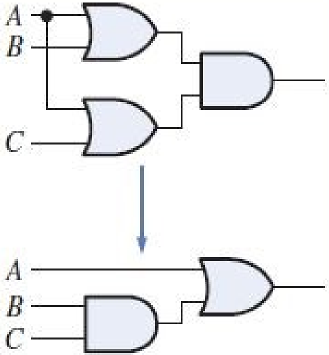
- **Regra 12**:

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$




| A | B | C | A + B | A + C | (A + B)(A + C) | BC | A + BC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

igual



# Teoremas com mais de uma variável

- Se tivermos uma soma de dois (ou mais) termos e cada um tiver uma variável em comum, ela poderá ser colocada em evidência, como na álgebra convencional;

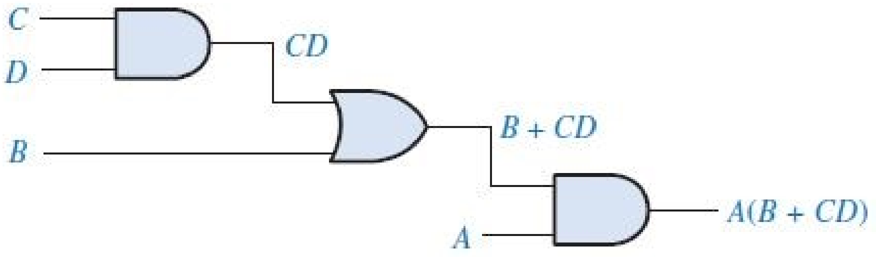
- Por exemplo, na expressão $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, podemos colocar em evidência a variável *B*:

$$A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}(AC + \overline{A}\,\overline{C})$$

# Análise Booleana de circuitos lógicos

## Expressão Booleana

- Para obter a expressão Booleana para um dado circuito lógico, comece pelas **entradas mais à esquerda** e, percorrendo o circuito até a saída final, escreva a expressão para cada porta lógica.



# Análise Booleana de circuitos lógicos

## Tabela-verdade para um circuito lógico

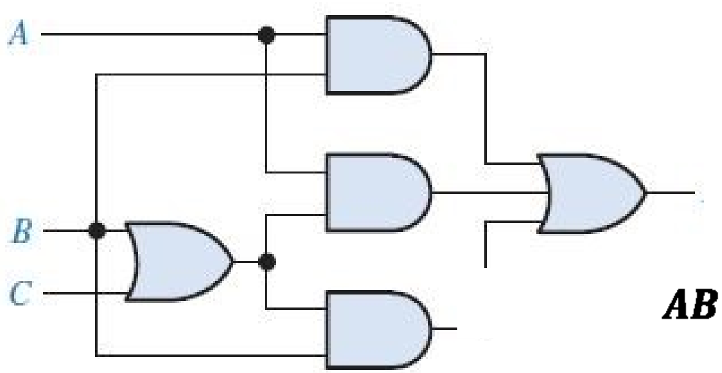
- Uma vez que a expressão Booleana para um dado circuito lógico foi determinada, uma tabela verdade que mostra a saída para todos os valores possíveis das variáveis de entrada pode ser desenvolvida.

| ENTRADAS | | | | SAÍDA |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | A(B + CD) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Simplificação usando álgebra Booleana

## Simplificando um circuito lógico

- Ao aplicarmos a álgebra Booleana, muitas vezes temos que reduzir uma determinada expressão para a sua **forma mais simples** ou transformá-la em um formato mais conveniente a fim de implementar a expressão mais eficientemente.




Qual a expressão?

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

# Simplificação usando álgebra Booleana

**Simplificando um circuito lógico**

- Usando álgebra booleana simplifique a expressão:

$$\boldsymbol{AB + A(B + C) + B(B + C)}$$

*Distributiva no segundo e terceiro termo*

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

*Regra 7 (BB=B) quarto termo*

$$AB + AB + AC + B + BC$$

*Regra 5 (AB+AB=AB) nos primeiros dois termos*

$$AB + AC + B + BC$$

*Regra 10 (B+BC=B) nos últimos dois termos*

$$AB + AC + B$$

*Regra 10 (AB+B=B) ao primeiro e ao terceiro termo*

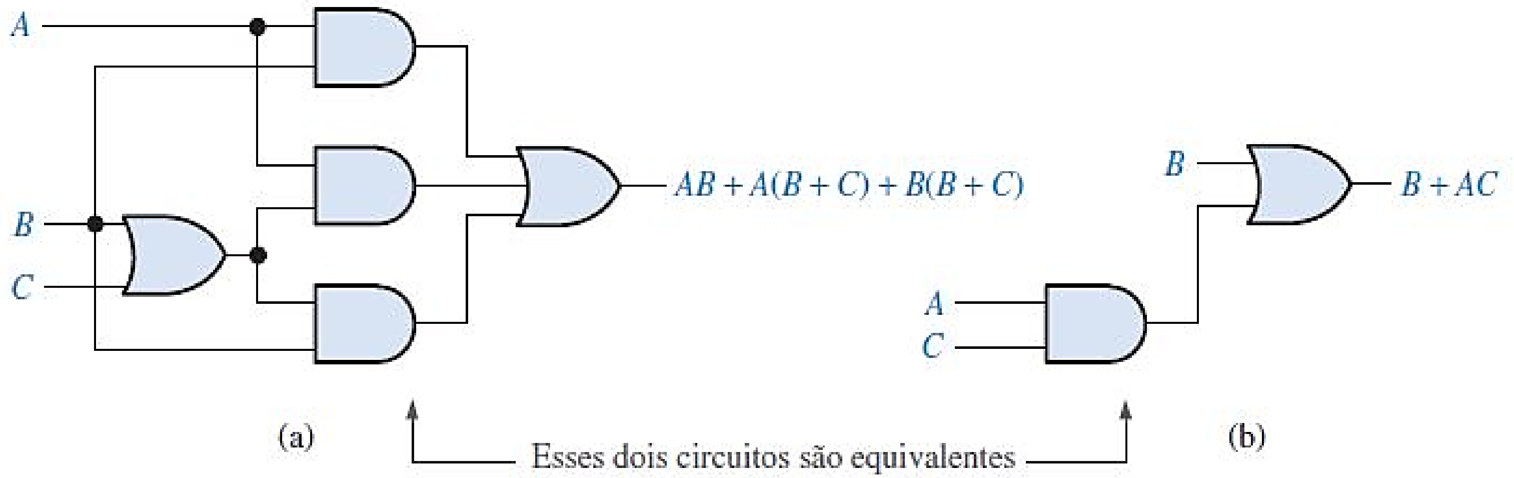
$$\boldsymbol{B + AC}$$

**Desenhe os dois circuitos e faça a tabela verdade**

## Simplificação usando álgebra Booleana

**Simplificando um circuito lógico**

- A Figura abaixo mostra que o processo de simplificação dado no exemplo **reduziu significativamente o número de portas lógicas** necessárias para implementar a expressão.



# Teoremas de DeMorgan

## Princípios

- DeMorgan, um matemático que conheceu Boole, propôs dois teoremas que representam uma parte importante da álgebra Booleana.

- Em termos práticos, os teoremas de DeMorgan provêm uma verificação da **equivalência entre as portas NAND e OR** negativa e a **equivalência entre as portas NOR e AND** negativa.

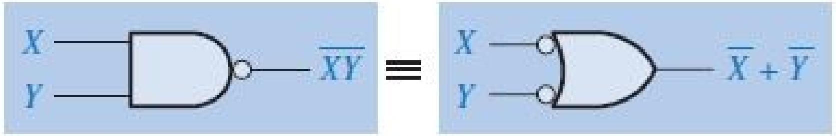
- Os teoremas de DeMorgan também se aplicam a expressões nas quais existem mais que duas variáveis.

# Teoremas de DeMorgan

## Primeiro teorema de DeMorgan

- O primeiro teorema de DeMorgan é chamado de "**Teorema do Complemento do Produto**" e afirma que a complementação de um produto (lógico) equivale à soma (lógica) das negações de cada variável do referido produto. Sob a forma de equação, teríamos:

$$\overline{A \,.\, B \,.\, C \,.\, \ldots} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \ldots$$




NAND OR negativa

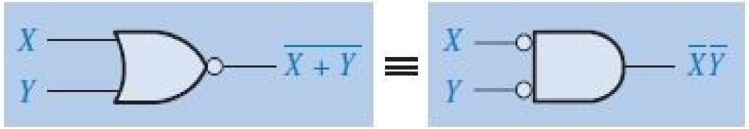
| Entradas | | Saída | |
|---|---|---|---|
| X | Y | $\overline{XY}$ | $\overline{X} + \overline{Y}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

# Teoremas de DeMorgan

## Segundo teorema de DeMorgan

- O segundo teorema de DeMorgan é o “**Teorema do complemento da soma**”. Esse teorema diz que o complemento da soma é igual ao produto dos complementos, sendo uma extensão do complemento estudado anteriormente, podendo ser descrito como:

$$\overline{A + B + C + \ldots} = \bar{A} . \bar{B} . \bar{C} \ldots.$$




NOR AND negativa

| Entradas | | Saída | |
|---|---|---|---|
| X | Y | $\overline{X+Y}$ | $\bar{X}\bar{Y}$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

# Teoremas de DeMorgan

## Combinações de expressões

- Cada variável nos teoremas de DeMorgan também pode representar uma combinação de outras variáveis.

- Por exemplo, X pode ser igual ao termo AB + C e Y pode ser igual ao termo A + BC. Assim, se podemos aplicar o teorema de DeMorgan para duas variáveis conforme foi dito anteriormente na expressão, obtemos o seguinte resultado:

$$\overline{(AB + C)(A + BC)} = \overline{(AB + C)} + \overline{(A + BC)}$$

# Teoremas de DeMorgan

## Exemplo

- Aplique os teoremas de DeMorgan nas expressões:

$$X = \overline{(A + B + C)D} \text{ e } Y = \overline{ABC + DEF}$$

- Resposta:

$$X = \overline{(A + B + C)D} = \overline{A + B + C} + \bar{D} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{D}$$

$$Y = \overline{ABC + DEF} = \overline{ABC}.\overline{DEF} = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{D} + \bar{E} + \bar{F})$$

# Teoremas de DeMorgan
## Exemplo

- Aplique os teoremas de DeMorgan nas expressões:

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

- Resposta:

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} &= \bar{A}(B + \bar{B}) + A\bar{B} \\ &= \bar{A}(1 + \bar{B}) + A\bar{B} \\ &= \bar{A} + (A + \bar{A})\bar{B} \\ &= \bar{A} + \bar{B} \end{aligned}$$

# Teoremas de DeMorgan

## Exemplo

- Aplique os teoremas de DeMorgan nas expressões:

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

- Resposta:

$$\begin{aligned}
\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} &= \bar{A}(B + \bar{B}) + A\bar{B} \\
&= \overline{\overline{\bar{A} + A\bar{B}}} \\
&= \overline{A.(\bar{A} + B)} \\
&= \overline{AB} \\
&= \overline{A} + \overline{B}
\end{aligned}$$

# Formas padronizadas

## Forma de soma-de-produtos

- Um termo-produto é definido como um termo que consiste em produto (multiplicação Booleana) de literais (variáveis ou seus complementos). **Quando dois ou mais termos-produto são somados por uma adição Booleana, a expressão resultante é uma soma-de-produtos.**

- **Exemplos**:

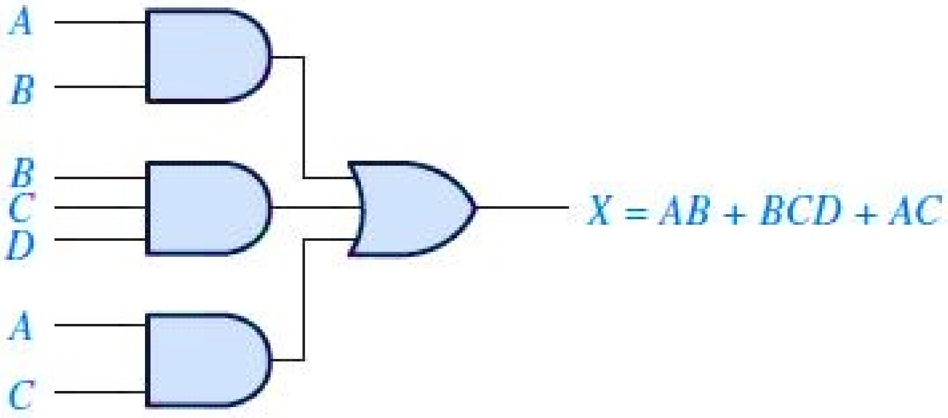
$$AB + ABC$$
$$AB + AC + \bar{B}CD$$
$$\bar{A}B + \bar{A}BC + BD$$

- **Domínio**: o domínio de uma expressão Booleana geral é o **conjunto das variáveis contidas na expressão** na forma complementada ou não complementada.

# Formas padronizadas

## Forma de soma-de-produtos

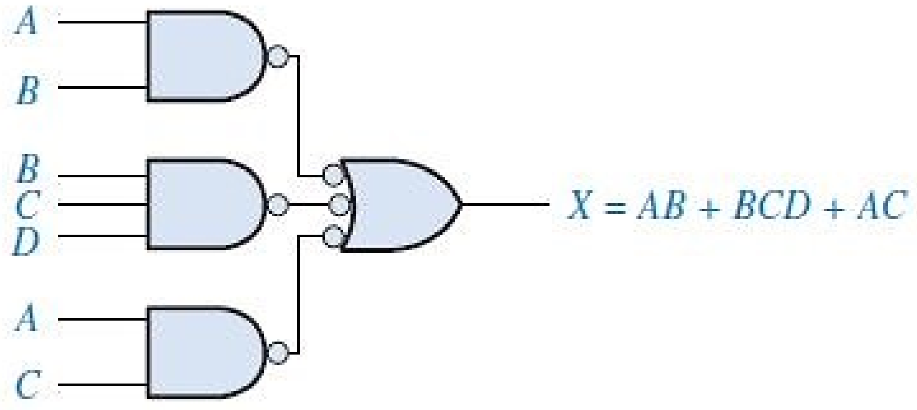
- Implementação AND/OR de uma Expressão de **soma-de-produtos**:



# Formas padronizadas

**Forma de soma-de-produtos**

- Implementação NAND/OR de uma Expressão de soma-de-produtos:



# Formas padronizadas

## Forma de produtos-de-somas

- Um termo-soma é definido como um termo que consiste de uma soma (adição Booleana) de literais (as variáveis ou seus complementos). Quando dois ou mais termos-soma são multiplicados, a **expressão resultante é um produto-de-somas**.

- Exemplos:

$$(A+B)(A+\bar{B}+C)$$

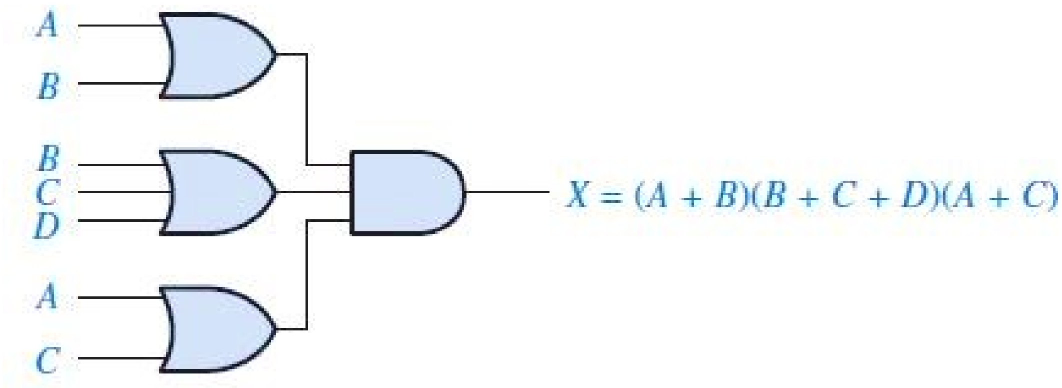
$$(A+B)(A+C+\bar{D})(\overline{B}+C+D)$$

$$(\bar{A}+B)(\bar{A}+B+C)(B+D)$$

# Formas padronizadas

**Forma de produtos-de-somas**

- Implementação AND/OR de uma Expressão de produtos-de-somas:



# Expressão Booleana e tabela-verdade

## Forma de produtos-de-somas

- Todas as expressões Booleanas padrão podem ser facilmente **convertidas no formato de uma tabela-verdade** usando valores binários para cada termo na expressão.

- A **tabela-verdade é uma forma comum de apresentação**, num formato conciso, da **operação lógica** de um circuito.

- Além disso, expressões de **soma-de-produtos padrão ou produto-de-somas podem ser determinadas a partir de uma tabela-verdade**. Encontramos tabelas-verdade em folhas de dados e outras literaturas relacionadas à operação de circuitos digitais.

# Expressão Booleana e tabela-verdade

**Conversão de Expressões de soma-de-produtos para o Formato de Tabela-Verdade**

- Exemplo:

$$\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

| ENTRADAS A | B | C | SAÍDA X | TERMO PRODUTO |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $\bar{A}\bar{B}C$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $A\bar{B}\bar{C}$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $ABC$ |

# Expressão Booleana e tabela-verdade

## Conversão de Expressões de Produto-de-Somas para o Formato de Tabela-verdade

- Exemplo:

$$(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

| ENTRADAS A | B | C | SAÍDA X | TERMO-SOMA |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $(A+B+C)$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $(A+\overline{B}+C)$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $(A+\overline{B}+\overline{C})$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $(\overline{A}+B+\overline{C})$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $(\overline{A}+\overline{B}+C)$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |

# Expressão Booleana e tabela-verdade

## Expressão Padrão a partir de uma Tabela-Verdade

- Exemplo:

| ENTRADAS | | | SAÍDA |
|---|---|---|---|
| A | B | C | X |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Expressão Booleana e tabela-verdade

## Expressão Padrão a partir de uma Tabela-Verdade

- Exemplo:

| ENTRADAS | | | SAÍDA |
|---|---|---|---|
| A | B | C | X |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$011 \longrightarrow \overline{A}BC$$
$$100 \longrightarrow A\overline{B}\,\overline{C}$$
$$110 \longrightarrow AB\overline{C}$$
$$111 \longrightarrow ABC$$

$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

# Expressão Booleana e tabela-verdade

## Expressão Padrão a partir de uma Tabela-Verdade

- Exemplo:

| ENTRADAS | | | SAÍDA |
|---|---|---|---|
| A | B | C | X |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 000 | $A + B + C$ |
| 001 | $A + B + \overline{C}$ |
| 010 | $A + \overline{B} + C$ |
| 101 | $\overline{A} + B + \overline{C}$ |

$$X = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$