

Minimização de Expressões III



Método de Quine – Mc Cluskey

Aula 10

Índice

Minimização de Expressões Booleanas

- Método Algébrico ✓
- Método do Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2, 3, 4 e 5 variáveis, e condição irrelevante ✓
- Método de Quine – Mc Cluskey

História

Willard Van Orman Quine (1908 — 2000), usualmente citado como **Quine**, mas conhecido por seus amigos e familiares como **Van**, foi um dos mais influentes filósofos e lógicos norte-americanos do século XX, considerado o maior filósofo analítico da segunda metade deste século.

Edward J. McCluskey (1929) em New York City, NY, é Professor Emérito na Stanford University. Pioneiro no campo da Engenharia Elétrica.

Algoritmo de Quine–McCluskey

O **Algoritmo de Quine–McCluskey** (ou **método dos implicantes primos**) é um método utilizado para minimização de funções booleanas desenvolvido por W.V. Quine e Edward J. McCluskey em 1956. É funcionalmente idêntico ao mapa de Karnaugh, mas a forma tabular o faz mais eficiente para uso em algoritmos computacionais.

Este método aplica-se exclusivamente a funções booleanas na forma de soma-de-produtos (ou somatória de minitermos) e notação binária. Supera as limitações do mapa de Karnaugh, que pode ser aplicado a funções com mais de seis variáveis e apresenta um procedimento que permite a utilização em computadores.

Consiste na aplicação sucessiva do teorema expresso por:

$$A.B + A.\bar{B} = A$$

Ou seja, termos que diferem entre si apenas por um dígito binário.

Algoritmo de Quine–McCluskey

Basicamente, o procedimento do algoritmo de Quine-McCluskey, consiste em 3 etapas:

- Encontrar todos os implicants primos da função;
- Usar esses implicants primos num *mapa de implicants primos* para encontrar os implicants primos essenciais da função;
- Usar os implicants primos essenciais e se necessário alguns implicants primos para encontrar a função minimizada.

Algoritmo de Quine–McCluskey

Método para encontrar os implicantes primos:

- a) Classificam-se e agrupam-se em conjuntos os termos da função booleana de acordo com seus índices (mesmo números de 1's em sua forma binária) de forma crescente.
- b) Comparam-se todos os termos de um dado grupo com cada termo do grupo seguinte, ou seja, de índice imediatamente superior, mediante a utilização do teorema $A.B + A.\bar{B} = A$
- c) Aplica-se sucessivamente esse teorema comparando cada termo do grupo do índice ***i*** com todos os termos do grupo do índice ***i+1*** até esgotarem-se as possibilidades. O termo resultante consiste na representação fixa original com o dígito diferente substituído por um (-). Por outro lado, marcam-se com setas todos os termos comparados com ao menos outro termo.
- d) Após tabular os termos comparados, procede-se novamente conforme o exposto no item b até esgotarem-se as possibilidades. Os termos que ficarem sem a seta marcada formam o conjunto dos termos irreduzíveis, ou seja, os **implicantes primos**.

Algoritmo de Quine–McCluskey

Método para encontrar os implicantes primos essenciais:

- e) Usando os implicantes primos constrói-se um mapa onde a primeira linha do mapa representa os minitermos envolvidos. A primeira coluna mostra os implicantes primos e quais minitermos ele pode representar. Estes minitermos serão marcados com um **X**. Para definir quais os minitermos cada implicante primo pode representar usa-se o código substituindo o (-) por 0 e por 1 de forma a gerar todas as combinações possíveis.

Método para encontrar a expressão minimizada:

- f) Olhando as colunas da tabela construída observa-se que os implicantes primos essenciais são aqueles que possuem apenas um **X** e uma das colunas. Se um implicante primo é essencial, então será necessário incluí-lo na equação booleana simplificada. Em alguns casos, os implicantes primos essenciais não cobrem todos os minitermos. Nesses casos deve-se adicionar termos não essenciais de forma a cobrir todos os minitermos. Esse procedimento deve visar a menor quantidade possível de adições, ou seja, escolher apenas os implicantes primos necessários para abranger todos os minitermos.

Exemplos

Minitermos ou implicantes

1. Determinar a expressão simplificada:

$$S(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B.C + A\bar{B}.C + A.B.C$$

Solução: $S(A,B,C) = \Sigma(1, 4, 2, 3, 5, 7) = \Sigma(001, 100, 010, 011, 101, 111)$

a) Classificam-se e agrupam-se em conjuntos os termos da função booleana de acordo com seus índices (mesmo números de 1's em sua forma binária) de forma crescente.

$$S = \Sigma(\boxed{001}, \boxed{100}, \boxed{010}, \boxed{011}, \boxed{101}, \boxed{111})$$

Estes 3 termos
tem um 1 na sua
forma binária

Estes 2 termos
tem dois 1's na
sua forma binária

Este termo tem
três 1's na sua
forma binária

O que é um minitermo ou implicante?

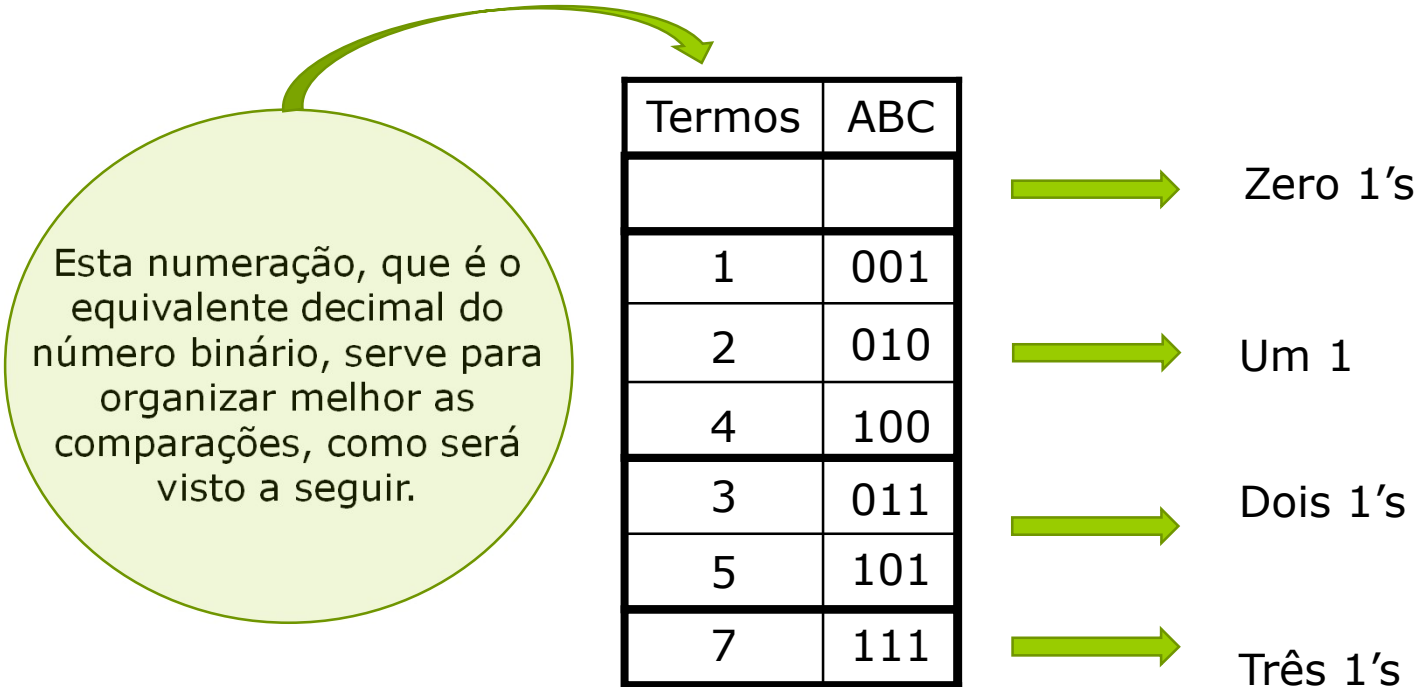
É qualquer produto das variáveis da função, que está na forma soma de produtos, que quando é verdadeira implica que a função também seja verdadeira.

Método para encontrar os implicantes primos:

- a) Classificam-se e agrupam-se em conjuntos os termos da função booleana de acordo com seus índices (mesmo números de 1's em sua forma binária) de forma crescente.

$$S = \Sigma(001, 100, 010, 011, 101, 111)$$

Esta numeração, que é o equivalente decimal do número binário, serve para organizar melhor as comparações, como será visto a seguir.



Termos	ABC
1	001
2	010
4	100
3	011
5	101
7	111

Zero 1's

Um 1

Dois 1's

Três 1's

b) Comparam-se todos os termos de um dado grupo com cada termo do grupo seguinte, de índice imediatamente superior, mediante a utilização do teorema $A.B + A.\bar{B} = A$, ou seja, a variável que muda de valor lógico de um termo para o outro, é desprezada. Obs: Apenas uma variável pode ser desprezada, se tiver mais de uma variável mudando o valor lógico a comparação não pode ser feita, ou seja, não há minimização deste termo.

Termos	ABC
1	001
2	010
4	100
3	011
5	101
7	111



Comparando 001 com 011, apenas a variável B muda de valor lógico, de 0 para 1, logo ela é desprezada e desaparece do novo termo. Isto deve ser feito com todos os termos do grupo com um 1, com o todos os termos do grupo com dois 1's. Como será mostrado a seguir.

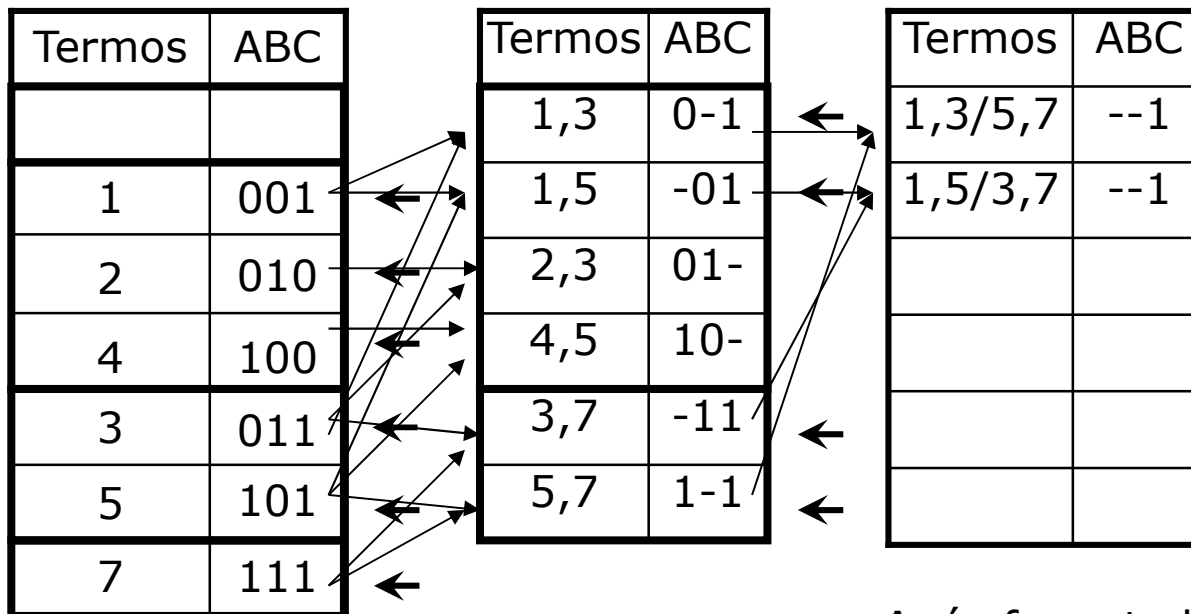
- c) Aplica-se sucessivamente esse teorema comparando cada termo do grupo do índice i com todos os termos do grupo do índice $i+1$ até esgotarem-se as possibilidades. O termo resultante consiste na representação fixa original com o dígito diferente substituído por um (-). Por outro lado, marcam-se com setas todos os termos comparados com ao menos outro termo.

Termos	ABC		Termos	ABC
			1,3	0-1
1	001	↔	1,5	-01
2	010	↔	2,3	01-
4	100	↔	4,5	10-
3	011	↔	3,7	-11
5	101	↔	5,7	1-1
7	111	↔		

Este termo é o resultado da comparação dos termos 1 e 3.

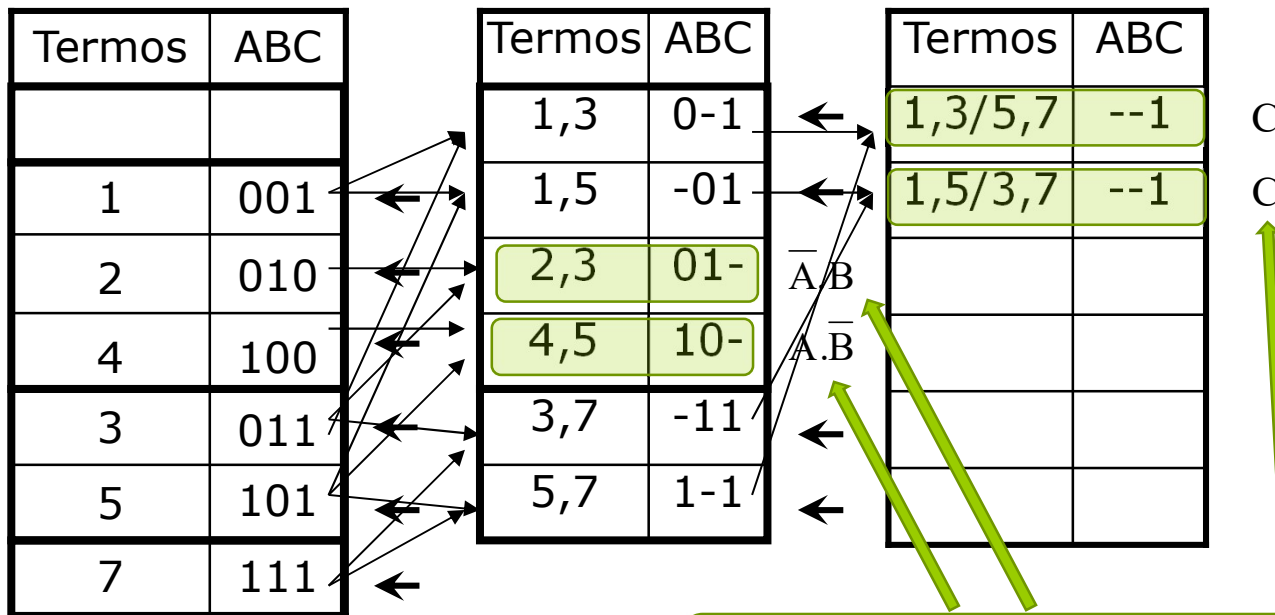
Após fazer todas as comparações, resulta esta nova tabela. Nessa nova devem ser feitas as mesmas comparações, gerando uma outra nova tabela.

As setas ao lado dos termos, indicam que estes conseguiram ser comparados, ou seja, entre eles só tinha uma variável que mudava de valor lógico.



Após fazer todas as comparações, resulta esta nova tabela. Nessa nova tabela, existe apenas um grupo, então acabaram as comparações.

- d) Após tabular os termos comparados, procede-se novamente conforme o exposto no item b até esgotarem-se as possibilidades. Os termos que ficarem sem a seta marcada formam o conjunto dos termos irreduzíveis, ou seja, os termos da expressão simplificada.



Valores dos termos irreduzíveis que não puderam ser comparados. Estes são os **implicantes primos**.

Então o que são os **implicantes primos**?
São combinações de implicantes (ou minitermos) suficientes para a função ser verdadeira.

Método para encontrar os implicantes primos essenciais:

- e) Usando os implicantes primos constrói-se um mapa onde a primeira linha do mapa representa os minitermos envolvidos. A primeira coluna mostra os implicantes primos e quais minitermos ele pode representar. Estes minitermos serão marcados com um **X**. Para definir quais os minitermos cada implicante primo pode representar usa-se o código substituindo o (-) por 0 e por 1 de forma a gerar todas as combinações possíveis.

Implicante primo	Minitermos representáveis	1	2	3	4	5	7
01-	2,3		X	X			
10-	4,5				X	X	
--1	1,3,5,7	X		X		X	X

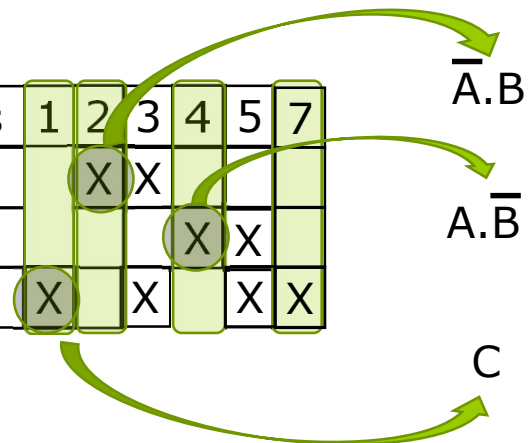
$\bar{A}.B$
 $A.\bar{B}$
 C

Método para encontrar a expressão minimizada:

f) Olhando as colunas da tabela construída observa-se que os implicantes primos essenciais são aqueles que possuem apenas um **X** e uma das colunas. Se um implicante primo é essencial, então será necessário incluí-lo na equação booleana simplificada. Em alguns casos, os implicantes primos essenciais não cobrem todos os minitermos. Nesses casos deve-se adicionar termos não essenciais de forma a cobrir todos os minitermos. Esse procedimento deve visar a menor quantidade possível de adições, ou seja, escolher apenas os implicantes primos necessários para abranger todos os minitermos.

Implicante primo	Minitermos representáveis	1	2	3	4	5	7
01-	2,3		X	X			
10-	4,5				X	X	
--1	1,3,5,7	X		X		X	X

Analisando a tabela, percebe-se que há um implicante primo essencial em cada linha, desta forma não é necessário buscar outros implicantes primos para abranger todos os minitermos da expressão.



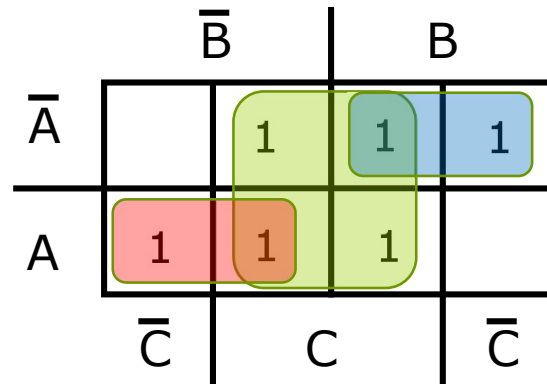
A expressão simplificada é:

$$S = \bar{A}.B + A.\bar{B} + C$$

Usando mapa de Karnaugh para conferir o resultado.

1. Determinar a expressão simplificada:

$$S(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.C$$

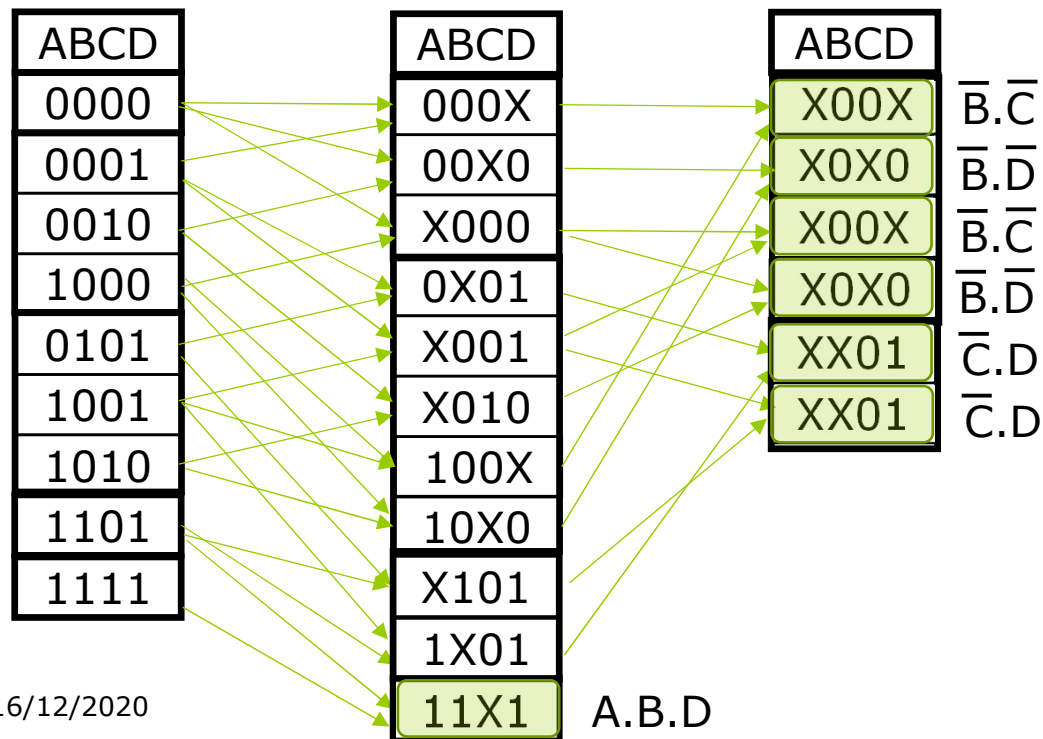


$$S = C + A.\bar{B} + \bar{A}.B$$

Ex.

$$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.D + A.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.D + A.B.C.D$$

$$S = \Sigma (0000, 0001, 0010, 0101, 1000, 1001, 1010, 1101, 1111) = \Sigma (0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15)$$



Implicantes primos

$\overline{B}.\overline{C}$

$\overline{B}.\overline{D}$

$\overline{C}.D$

A.B.D

Implicante primo	Minitermos representáveis	0	1	2	5	8	9	10	13	15	
-00-	0,1,8,9	X	X			X	X				
-0-0	0,2,8,10	X		X		X		X			$\overline{B}.\overline{D}$
--01	1,5,9,13		X		X		X		X		$\overline{C}.D$
11-1	13,15								X	X	$A.B.D$

Implicantes primos essenciais:

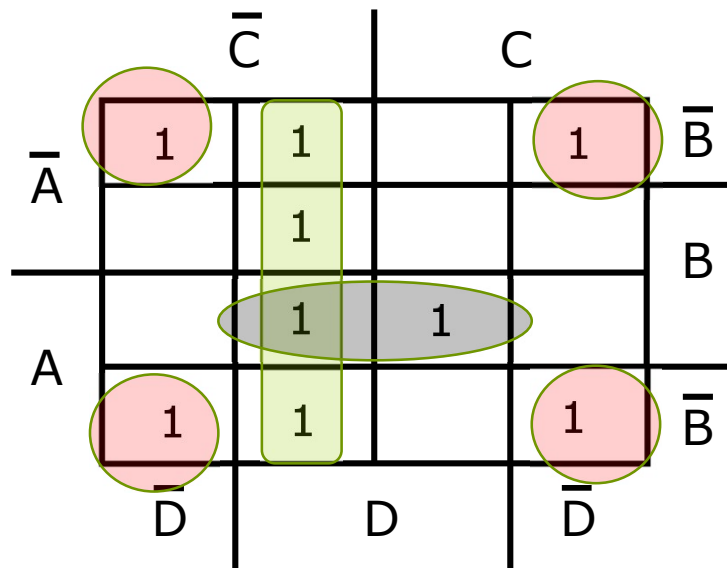
$\overline{B}.\overline{D}$
 $\overline{C}.D$
 $A.B.D$

Expressão minimizada:

$$S = A.B.D + \overline{C}.D + \overline{B}.\overline{D}$$

Usando mapa de Karnaugh para conferir o resultado.

$$S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.\bar{B}.C.D + A.B.C.D$$

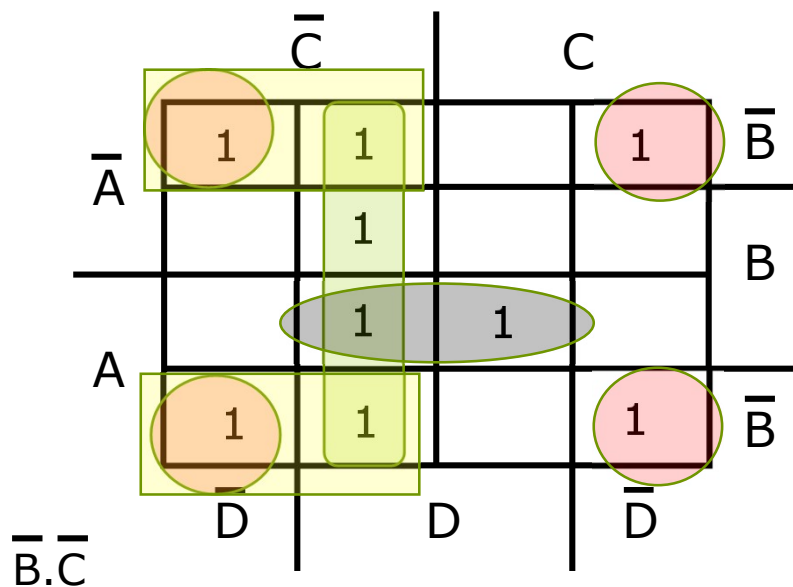


Expressão minimizada:

$$S = A.B.D + \bar{C}.D + \bar{B}.\bar{D}$$

Termo redundante

$$S = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD + A.B.C.D$$



Implicantes primos

$$\bar{B}.\bar{D}$$

$$\bar{B}.\bar{C}$$

$$\bar{C}.D$$

$$A.B.D$$

Expressão minimizada:

$$S = A.B.D + \bar{C}.D + \bar{B}.\bar{D} + \bar{B}.\bar{C}$$

Exercícios:

a) $S = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.B$

b) $S = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$

c) $S = \overline{A+B+C} + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.C + B.\bar{C}$

d) $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.C.D$

Ex.

a)

ABC	S
000	1
001	0
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	1

b)

ABCD	S
0000	1
0001	1
0010	0
0011	0
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	1
1001	0
1010	0
1011	1
1100	1
1101	1
1110	0
1111	1

Atenção

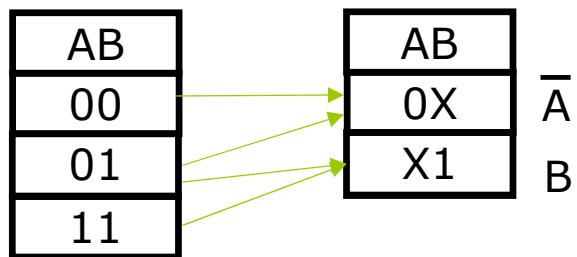


As cenas a seguir não devem ser assistidas se você ainda não tentou fazer os exercícios propostos.
Risco de não aprender bem o assunto.



Exercícios:

a) $S = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.B = \Sigma (0,1,3) = \Sigma (00,01,11)$

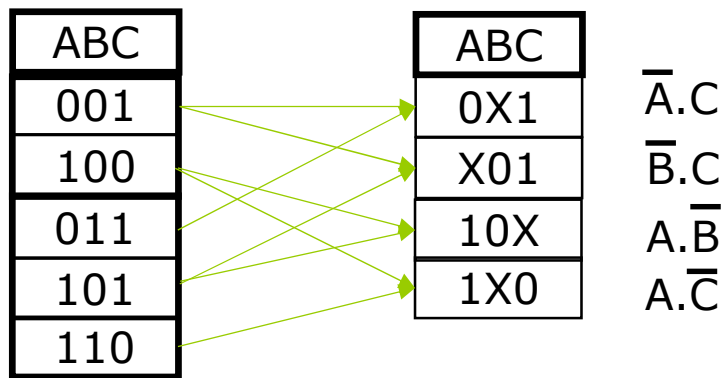


Implicantes primos	Minitermos representáveis	0	1	3	
0X	0,1	X	X		\bar{A}
X1	1,3		X	X	B

$$S = \bar{A} + B$$

Exercícios:

b) $S = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C} = \Sigma (1,3,4,5,6)$



$$S = \bar{A}.C + A.\bar{B} + A.\bar{C}$$

OU

$$S = \bar{A}.C + C.\bar{B} + A.\bar{C}$$

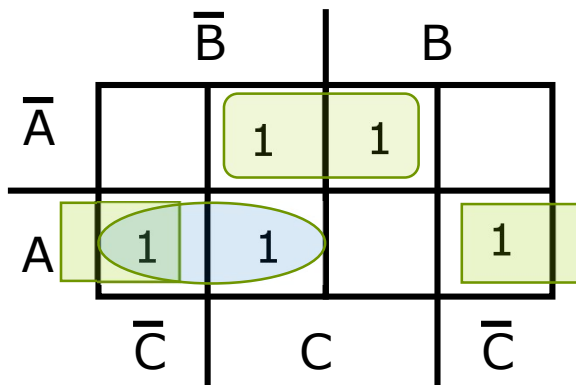
Implicantes primos	Minitermos representáveis	1	3	4	5	6
0X1	1,3	X	X			
X01	1,5	X			X	
10X	4,5			X	X	
1X0	4,6			X		X

$\bar{A}.C$

$A.\bar{C}$

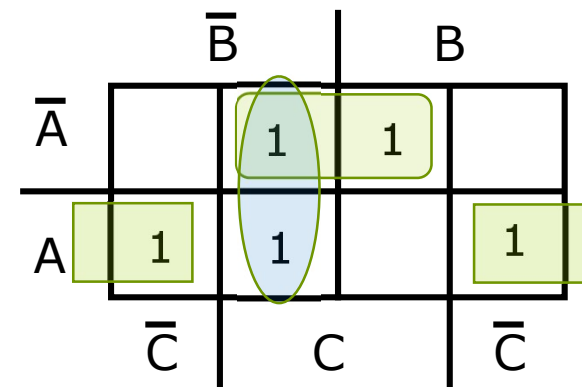
$\bar{B}.C$ OU $A.\bar{B}$

Usando mapa de Karnaugh para conferir o resultado.



$$S = \bar{A}.C + A.\bar{B} + A.\bar{C}$$

OU

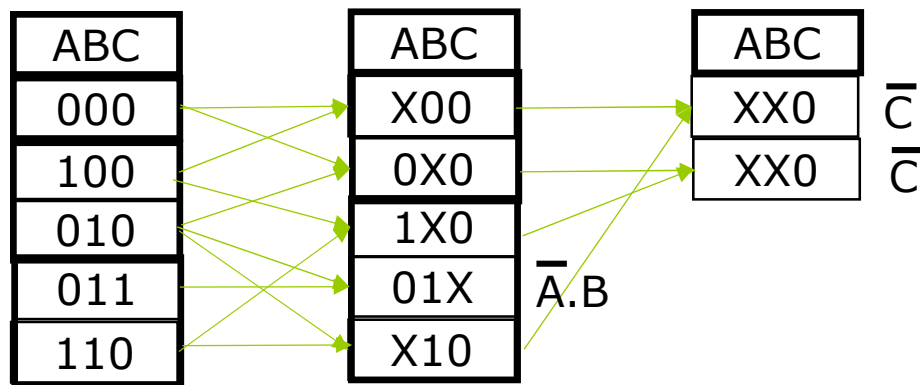


$$S = \bar{A}.C + C.\bar{B} + A.\bar{C}$$

c) $S = \overline{A+B+C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + B.\overline{C}$

$$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + B.\overline{C}$$

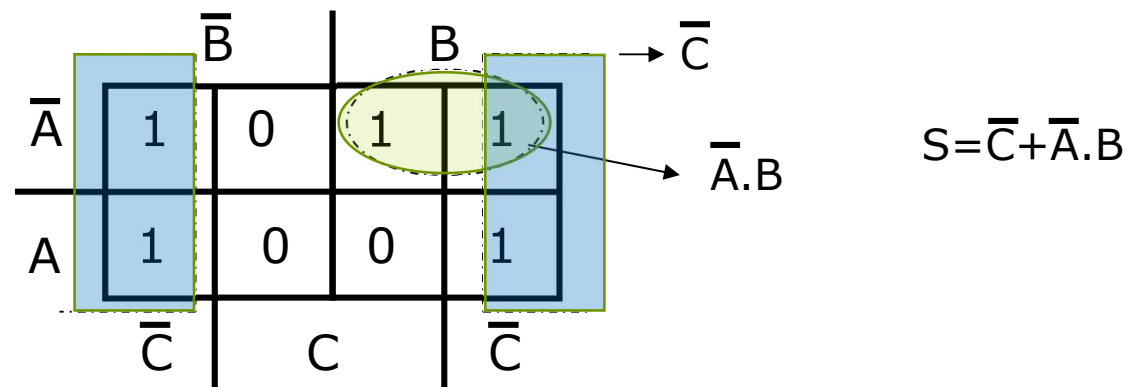
$$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} = \Sigma (0,4,3,6,2)$$



Implicantes primos	Minitermos representáveis	0	2	3	4	6
01-	2,3		X	X		
--0	0,2,4,6	X	X		X	X

$$S = \overline{A}.B + \overline{C}$$

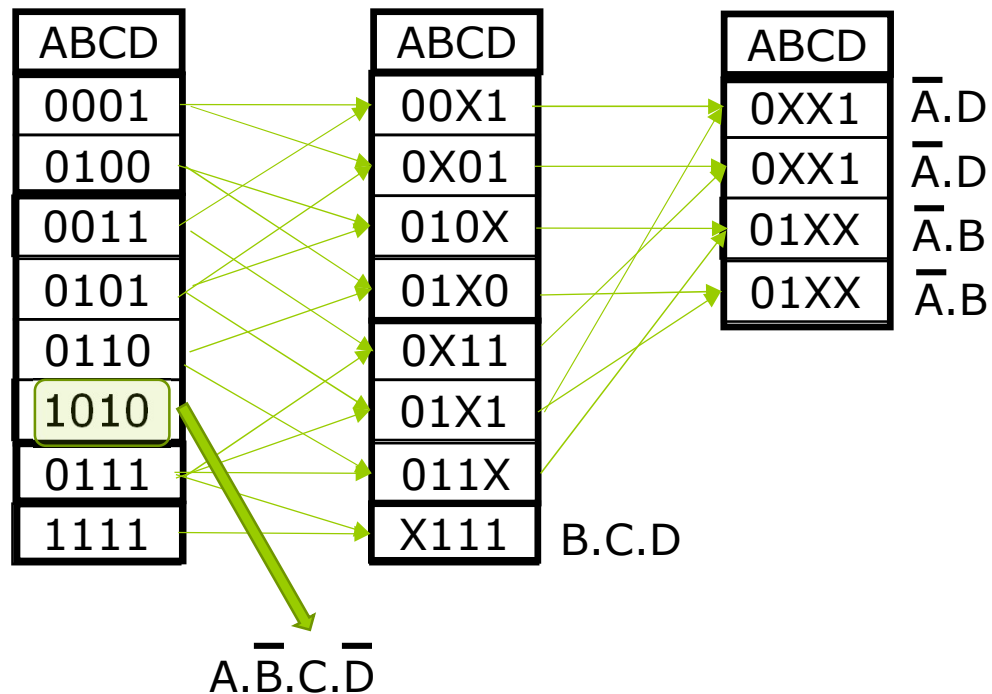
Usando mapa de Karnaugh para conferir o resultado.



Exercícios:

d) $S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.C.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + \overline{A}.B.C.\overline{D} + \overline{A}.B.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D} + A.B.C.D$

$S = \Sigma(0001, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1010, 1111) = \Sigma(1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15)$



Implicantes primos

$\overline{A}.D$

$\overline{A}.B$

B.C.D

$A.\overline{B}.C.\overline{D}$

Implicantes primos

$$\bar{A}.D$$

$$\bar{A}.B$$

$$B.C.D$$

$$A.\bar{B}.C.\bar{D}$$

Implicantes primos	Minitermos representáveis	1	3	4	5	6	7	10	15	
0--1	1,3,5,7	X	X		X		X			$\bar{A}.D$
01--	4,5,6,7			X	X	X	X			$\bar{A}.B$
-111	7,15						X		X	$B.C.D$
1010	10							X		$A.\bar{B}.C.\bar{D}$

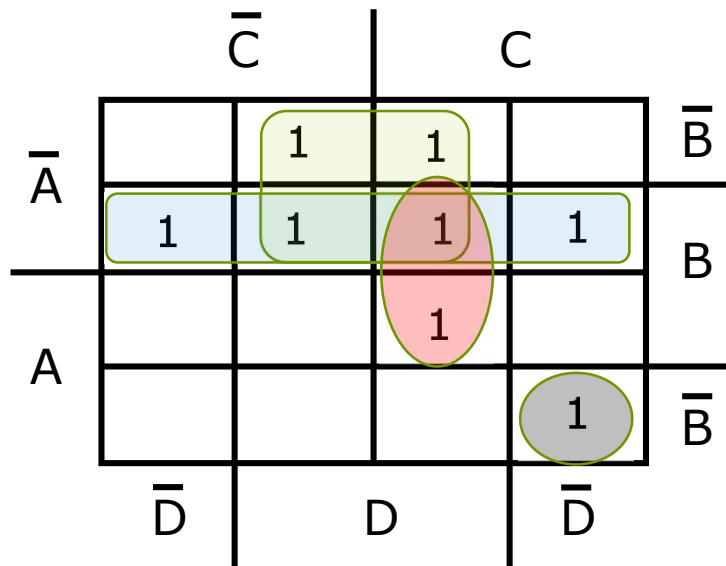
Expressão minimizada:

$$S = \bar{A}.D + \bar{A}.B + B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$$

Implicantes
primos essenciais

Usando mapa de Karnaugh para conferir o resultado.

$$S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.C.D$$



Expressão minimizada:

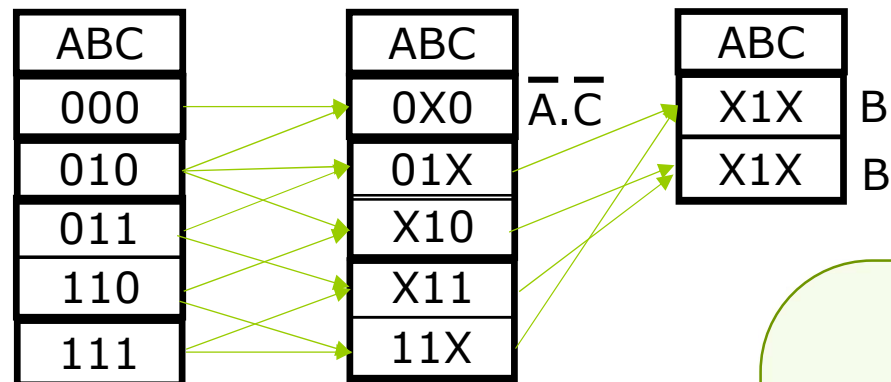
$$S = \bar{A}.D + \bar{A}.B + B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$$

Ex.

a)

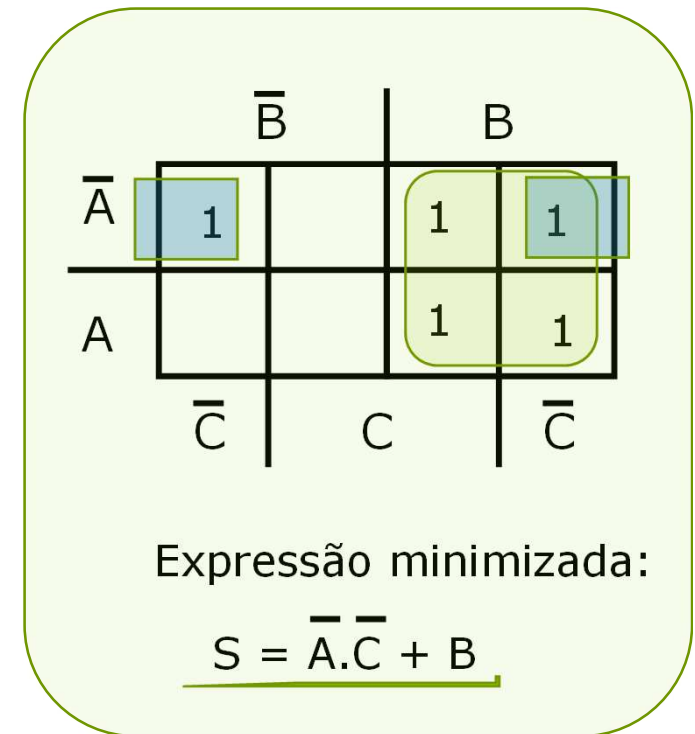
ABC	S
000	1
001	0
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	1

0
2
3
6
7



Expressão minimizada:

$$S = \bar{A}.\bar{C} + B$$



Ex.

b)

ABCD	S
0000	1
0001	1
0010	0
0011	0
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	1
1001	0
1010	0
1011	1
1100	1
1101	1
1110	0
1111	1

0

1

7

8

11

12

13

15

ABCD
0000
0001
1000
1100
0111
1011
1101
1111

ABCD
000X
X000
1X00
110X
X111
1X11
11X1

$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$
 $\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$
 $A.\bar{C}.\bar{D}$
 $A.B.\bar{C}$
 $B.C.D$
 $A.C.D$
 $A.B.D$

Implicantes primos

$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$ $\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$ $A.\bar{C}.\bar{D}$ $A.B.\bar{C}$ $B.C.D$ $A.C.D$ $A.B.D$

Implicantes primos

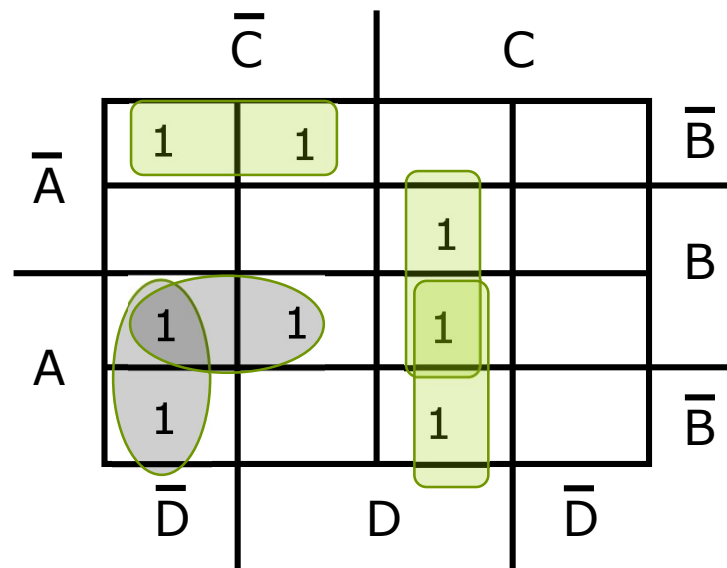
Implicantes primos	Minitermos representáveis	0	1	7	8	11	12	13	15	
000-	0,1	X	X							$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$
-000	0,8	X			X					
1-00	8,12				X		X			
110-	12,13						X	X		
-111	7,15			X					X	$B.C.D$
1-11	11,15					X			X	$A.C.D$
11-1	13,15							X	X	

Expressão minimizada:

$$S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + B.C.D + A.C.D + A.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}$$

Implicantes primos essenciais

ABCD	S
0000	1
0001	1
0010	0
0011	0
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	1
1001	0
1010	0
1011	1
1100	1
1101	1
1110	0
1111	1



$$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + B.C.D + A.C.D + A.\overline{C}.\overline{D} + A.B.\overline{C}$$